НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ОРЛЕНКО Сергій Петрович

Прим. № ____

УДК 539.3

Динаміка тришарових оболонок обертання з дискретно неоднорідним заповнювачем

113 – Прикладна математика
Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____С.П. Орленко

Науковий керівник **Луговий Петро Захарович**
доктор технічних наук, професор

Київ 2021

АНОТАЦІЯ

ОРЛЕНКО С.П. ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ДИСКРЕТНО НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 113 – Прикладна математика. – Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2021.

Дисертацію присвячено розробці розрахункових моделей несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем, вдосконаленню ефективності скінчено-різницевого методу і розвитку скінчено-елементних методів для розв’язку відповідних початково-крайових задач математичної фізики, оцінці напружено-деформованого стану (НДС) тришарових оболонкових структур в залежності від їх геометричних і фізико-механічних параметрів при різних видах нестаціонарного навантаження.

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми дисертації, дано загальну характеристику роботи, доведено необхідність проведення наукових досліджень, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано на зв’язок роботи з науковими програмами, темами, планами. У першому розділі висвітлені загальні питання розвитку методів розв’язку задач напружено–деформованого стану шаруватих оболонкових конструкцій, наведених у працях і монографіях відомих вчених. Ці роботи залишаються ґрунтовною математичною базою для вибору відповідних гіпотез при побудові розрахункових моделей тришарових оболонкових елементів і визначення застосування аналітичних і чисельних методів розрахунку реальних конструкцій. На основі ґрунтовного аналізу виконаного огляду сучасного стану проблеми визначення характеру нестаціонарних коливань і НДС тришарових оболонок з заповнювачем складної геометрії і значно різними фізико-механічними властивостями, визначене місце даної роботи серед проведених раніше розробок і обґрунтовано вибір напрямків досліджень. У другому розділі викладена постановка задачі, створена

розрахункова модель і виведені розв'язувальні системи рівнянь коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при вимушених динамічних навантаженнях. Армуючі елементи закріплені на відстанях, які значно перевищують їх поперечні розміри, і розташовані вздовж головних ліній кривизни оболонки. В третьому розділі досліджені закономірності протікання хвильових процесів в несиметричних тришарових циліндричних оболонкових структурах з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях. В четвертому розділі досліджена дискретно–симетрична неоднорідна по товщині пружна структура конічного типу, яка являє собою систему, що складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (внутрішній і зовнішній несучий шар) з відповідними товщинами і радіусами. Покладається, що серединні лінії цих оболонок паралельні, тобто кут конусності α загальний. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вважається, що тришарова конічна структура навантажена внутрішнім вісесиметричним розподіленим нестаціонарним нормальним навантаженням. В п'ятому розділі досліджені задачі вісесиметричних коливань тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем різної структури і при різних видах граничних умов і нестаціонарних навантажень.

Ключові слова: несиметричні тришарові оболонки обертання, дискретно-симетричний легкий заповнювач, армуючі ребра, нестаціонарні навантаження, чисельні методи.

Публікації по темі дисертації.

1. Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo O.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features//Intern. Appl. Mech. – 2019, **55**, № 5. – P**.** 524–533. doi.org/10.1007/s10778-019-00974-y

2. Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Применение метода сплайн – коллокации для решения задач статики и динамики

конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доповіді НАН України. 2019. № 8, – С. 25 – 33. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.025.

3. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Meish Yu. A., Orlenko S. P. Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads //Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 1 – P. 22–32. doi.org/10.1007/s10778-020-00993-0

4. Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 3 – С. 19 – 27. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019.

5. Орленко С.П. Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестаціонарних навантаженнях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2020. № 31. – С. 78 – 89. https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/view/487

6. Орленко С.П. Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 8– С. 35 – 52. doi .org/10.15407/dopovidi2020.08.035

7. Луговий П.З., Шугайло О.П., Орленко С.П., Деменков Коливання теплоізоляційних тришарових циліндричних труб при експлуатаційних навантаженнях //Ядерная и радиационная безопасность. – Киев: ГНТЦ ЯРБ, 2020, № 3, – С. 55 – 61. doi.org/10.32918/nrs.2020.3(87).07

8. Lugovoi, P.Z., Meish, V.F., Orlenko, S.P. Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave// Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 5. – P. 590–598. doi.org/10.1007/s10778-020-01037-3

Апробація результатів дисертації.

1. Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамика составных оболочечных конструкций вращения при нестационарных нагрузках // Міжнародна наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019. Матеріали конференції. Дніпро, Кам’янське – 2019. – С.15.

2. Луговий П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Методика дослідження напружено-деформованого стану оболонок з конструктивними особливостями// Міжнародна наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки та

прикладної математики – 2019. Матеріали конференції. Дніпро, Кам'янське – 2019. – С.17.

3. Луговий П.З., Орленко С.П. К постановке и решению динамических задач теории трехслойных конических оболочек с дискретным ребристым наполнителем // XVII міжнародна науково - технічна конференція "Удосконалювання енергоустановок методами математичного та фізичного моделювання" 7-11 жовтня 2019 р., м. Харків, Україна. 2019. – С.14.

4. Орленко С.П. Динаміка тришарових конічних оболонок з підкріпленням та масами // 10 Міжнародна наукова конференція. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» Львів. 2019. – С. 72-73.

5. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамические задачи теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно – однородным заполнителем // Тези доповідей другої міжнародної науково – технічної конференції пам'яті академіка В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпро, 10-12 жовтня, 2019. – С. 178.

6. Мейш Ю.А., Орленко С.П. К численному расчету нестационарных колебаний трехслойных цилиндрических оболочек с поперечным дискретным ребристым наполнителем // Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей VI Міжнародної конференції. – Одеса, 20 – 24 травня, 2019. - С. 215 – 216.

7. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. До чисельного моделювання динамічної поведінки рівнянь оболонок типу еліптичного параболоїду при нестаціонарних навантаженнях // І Міжнародна науково-технічна інтернет-конференція «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» 18 квітня 2019 р. м. Київ, Україна. С. – 177.

8. Орленко С.П. Дослідження динаміки тришарового сферичного куполу з дискретно-неоднорідним заповнювачем // Science, society, education: topical issues and development prospects. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. SPC "Sci-conf.com.ua". Kharkiv, Ukraine. 2020. Pp. 111-114. URL: https://sci-conf.com.ua.

ANNOTATION

ORLENKO S.P. DYNAMICS OF THREE-LAYER SHELLS OF ROTATION WITH A DISCRETE INHOMOGENEOUS PLACEHOLDER – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of philosophy in the field of knowledge 11 – Mathematics and statistics on a specialty 113 – Applied mathematics. – S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2021.

The dissertation is devoted to the development of computational models of asymmetric three-layer shells of rotation with discrete-symmetric lightweight, rib-reinforced filler, improvement of numerical finite-difference method and development of finite-element methods for solving corresponding initial-boundary value problems of mathematical physics, stress-strain state assessment of three-layer shell structures depending on their geometric and physico-mechanical parameters under different types of non-stationary loading.

The introduction substantiates the relevance of the chosen topic of the dissertation, gives a general description of the work, proves the need for scientific research, formulates the purpose and objectives of the study, indicates the relationship of work with research programs, topics, plans. The first chapter covers general issues of the development of methods for solving problems of the stress–strain state of layered shell structures, given in the works and monographs of well-known scientists. These works remain a solid mathematical basis for selecting suitable hypotheses for constructing computational models of three-layer shell elements and determining the application of analytical and numerical methods for calculating real structures. Based on a thorough analysis of the current state of the problem of determining the nature of nonstationary oscillations and stress-strain state of three-layer shells with filler of complex geometry and significantly different physical and mechanical properties, the place of this work among previous developments is determined and the choice of research directions is substantiated. In the second section the problem statement

is presented, the calculation model is created and the solving systems of equations of oscillations of asymmetric three-layer shells of rotation with discrete-symmetric lightweight, rib-reinforced filler at forced dynamic loads are derived. Reinforcing elements are fixed at distances that significantly exceed their transverse dimensions, and are located along the main lines of curvature of the shell. In the third section, the regularities of the flow of wave processes in asymmetric three-layer cylindrical shell structures with a discrete-symmetric lightweight, rib-reinforced filer under nonstationary loads are investigated. The fourth section investigates a discrete-symmetric inhomogeneous in thickness elastic structure of conical type, which is a system consisting of inner and outer smooth conical shells (inner and outer bearing layer) with corresponding thicknesses and radiuses. It is assumed that the midlines of these shells are parallel, ie the angle of taper α is common. The shells are rigidly connected by discrete ribs and a lightweight filler. It is believed that the three-layer conical structure is loaded by an internal axisymmetric distributed non-stationary normal load. In the fifth section, the problems of axisymmetric oscillations of three-layer spherical shells with a discrete-symmetric filer of different structure and at different types of boundary conditions and nonstationary loads are investigated.

Keywords: asymmetric three-layer shells of rotation, discrete-symmetric lightweight filler, reinforcing ribs, non-stationary loads, numerical methods.

Publications on the topic of the dissertation.

1. Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo O.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features//Intern. Appl. Mech. – 2019, **55**, № 5. – P**.** 524–533. doi.org/10.1007/s10778-019-00974-y

2. Lugovoy P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P. Application of the method of spline-collocations to the solution of dynamic and static problems for structurally inhomogeneous cylindrical shells // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2019. № 8, - P. 25 - 33. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.025.

3. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads //Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 1 – P. 22–32. doi.org/10.1007/s10778-020-00993-0

4. Orlenko S.P. Numerical simulation of the dynamics of a three-layer spherical shell with a discretely inhomogeneous filler // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2020. № 3 – P. 19 – 27. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019.

5. Orlenko S.P. The influence of the asymmetryof three-layered cylindrical shells with light fil-ler on their strss-strain state under non-stationary loads // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. 2020. № 31. – P. 78 – 89. https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/view/487

6. Orlenko S.P. Numerical simulation of oscillations of a three-layer conical shell with a discre-tesymmetric inhomogeneous filler // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2020. № 8– P. 35 – 52. doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.035

7. Lugovoi P., Shugailo O., Orlenko S., Diemienkov V. Oscillation of Thermal Insulation Three-Layer Cylindrical Pipes under Operating Loads // Nuclear and Radiation Safety, 2020, № 3 (87) – P. 55 – 61. doi.org/10.32918/nrs.2020.3(87).07

8. Lugovoi, P.Z., Meish, V.F., Orlenko, S.P. Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave// Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 5. – P. 590–598. doi.org/10.1007/s10778-020-01037-3

Approbation of dissertation results.

1. Meish, Yu.A., Orlenko, S.P. Dynamics of composite shell structures of rotation under non-stationary loads // International Scientific Conference. Mathematical problems of technical mechanics and applied mathematics - 2019. Conference materials. Dnipro, Kamyanske - 2019. - P.15.

2. Lugovyi P.Z., Skosarenko Yu.V., Orlenko S.P. Methods for studying the stress-strain state of shells with design features // International Scientific Conference. Mathematical problems of technical mechanics and applied mathematics - 2019. Conference materials. Dnipro, Kamyanske - 2019. - P.17.

3. Lugovyi P.Z., Orlenko S.P. On the formulation and solution of dynamic problems in the theory of three-layer conical shells with a discrete ribbed filler // XVII International

Scientific and Technical Conference "Improvement of power plants by methods of mathematical and physical modeling" October 7-11, 2019, Kharkiv, Ukraine. 2019. - P.14.

4. Orlenko S.P. Dynamics of three-layer conical shells with reinforcement and masses // 10 International scientific conference. "Mathematical problems of mechanics of inhomogeneous structures" Lviv. 2019. - P. 72-73.

5. Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. Dynamic problems of the theory of three-layer cylindrical shells with piecewise homogeneous aggregate // Abstracts of the second international scientific and technical conference in memory of Academician VI Mossakovsky "Actual problems of solid environment mechanics and structural strength". - Dnipro, October 10-12, 2019. - P. 178.

6. Meish Yu.A., Orlenko S.P. On the numerical calculation of nonstationary oscillations of three-layer cylindrical shells with a transverse discrete ribbed filler // Actual problems of engineering mechanics: abstracts of the VI International Conference. - Odessa, May 20 - 24, 2019. - P. 215 - 216.

7. Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. To numerical modeling of dynamic behavior of equations of shells of elliptical paraboloid type under non-stationary loads // I International scientific and technical Internet conference "Latest technologies in education, science and production" April 18, 2019 Kyiv, Ukraine. C. - 177.

8. Orlenko S.P. Investigation of the dynamics of a three-layer spherical dome with a discrete-inhomogeneous aggregate // Science, society, education: topical issues and development prospects. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. SOC "Sci-conf.com.ua". Kharkiv, Ukraine. 2020. Pp. 111-114. URL: https://sci-conf.com.ua.

ЗМІСТ

Вступ 12

Розділ 1. Сучасний стан теорії дослідження тришарових оболонок 19

1.1. Теорії і чисельне моделювання шаруватих оболонок 20

1.2. Шаруваті оболонки при динамічних навантаженнях 26

1.3. Теорії і чисельне моделювання тришарових оболонок 29

Висновки до першого розділу 44

Розділ 2. Рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок з врахуванням неоднорідного дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача 47

2.1. Вихідні положення та рівняння деформації пружних тіл 48

2.2. Основні гіпотези С.П. Тимошенка в теорії оболонок 51

2.3. Основні положення криволінійних стрижнів з врахуванням деформацій поперечного зсуву 53

2.4. Постановка задач та рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок з врахуванням неоднорідного дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача 55

Висновки до другого розділу 65

Розділ 3. Дослідження закономірностей протікання хвильових процесів в несиметричних тришарових циліндричних оболонкових структурах з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем 67

3.1. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем 67

3.2. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань симетричних тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем 73

3.3. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем 84

Висновки до третього розділу..... 93

Розділ 4. Дослідження нестаціонарних вимушених коливань тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем..... 94

4.1. Нестаціонарні вимушені коливання симетричних тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем 95

4.2. Нестаціонарні вимушені коливання несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем 101

Висновки до четвертого розділу..... 105

Розділ 5. Вісесиметричні коливання несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях 106

5.1. Динаміка конструктивно-ортотропної несиметричної тришарової сферичної структури з стільниковим заповнювачем при дії плоскої ударної хвилі 106

5.2. Динаміка тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях (скінчено – різницевий метод)..... 111

5.3. Динаміка несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях (скінчено – елементний метод)..... 120

Висновки до п'ятого розділу 131

Загальні висновки..... 132

Список використаних джерел..... 135

Додаток..... 155

ВСТУП

Актуальність роботи.

Актуальність теми. В авіабудуванні, кораблебудуванні, ракетобудуванні, атомній енергетиці, а також в інших областях техніки широко використовуються неоднорідні шаруваті оболонкові елементи. Використання таких конструктивних елементів, при дії на них динамічних навантажень, дозволяє вирішити проблему матеріалоємності і ваги виробів при збереженні необхідної міцності і достатньої легкості. Для тришарових оболонок з різкою відмінністю фізико-механічних властивостей шарів слід застосовувати теорію незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. В якості прикладів використання шаруватих оболонок, в яких кожен шар виконує одну або декілька функцій, можна назвати корпуси надзвукових літаків, ракет-носіїв, сучасних потягів, а також різні конструктивні елементи обладнання атомної енергетики. Такий перелік прикладів можна значно продовжити. Відомо, що проектування більшості вищезазначених конструкцій і будівельних об’єктів відбувалось здебільшого в період 1980-1990 рр., зазвичай з застосуванням спрощених інженерних методик на підставі вимог загальнопромислових нормативних документів. При експлуатації літаків, кораблів, ракет-носіїв, енергоблоків АЕС України відбулась низка подій, які безпосередньо вплинули на збільшення уваги держави, промисловості і наукової спільноти до питань оцінки і забезпечення безпеки об’єктів, що експлуатуються і проектуються з дотриманням сучасних вимог з безпеки. Тому є необхідність удосконалити методику визначення динамічної поведінки тришарових обтікачів і адаптерів космічної техніки у вигляді циліндричних та зрізаних конічних і сферичних оболонок при різноманітних граничних умовах і нестаціонарних розподілених і локалізованих навантаженнях. Розв’язання відповідних крайових задач пов’язане з великими труднощами обчислювального характеру. Тому можна зробити висновок, що дослідження механічної поведінки тришарових оболонок з сучасних матеріалів потребує створення нових ефективних чисельно-аналітичних підходів і використання сучасних скінчено-

елементних комплексів. При цьому необхідно визначити характер динамічних процесів, які протікають в таких конструкціях для визначення їх міцності і життєздатності. Буде проведено аналіз коливань і напружено-деформованого стану тришарових циліндричних, конічних і сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим ребрами, які значно підвищують міцність конструкцій при незначному збільшенні її ваги. Дослідження впливу конструктивної та структурної неоднорідності тришарових оболонкових елементів конструкцій на їх механічну поведінку і отримання при цьому широкої інформації про вплив механічних та геометричних параметрів і властивостей шарів на переміщення, напруження, прискорення, критичні навантаження, динамічні характеристики при нестаціонарному деформуванні є **актуальною проблемою прикладної математики**, яка потребує свого вирішення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до програм і планів наукових робіт Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за наступними науковими темами: "Динаміка складних оболонкових систем при дії розподілених та локальних нестаціонарних навантажень" (шифр 1.3.1. 402 - 16, № ДР 0115U005704, 2016 - 2019 рр.), "Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем" (шифр 1.3.1. 410 - 17. № ДР 0117U000700, 2017 - 2021рр.), та "Чисельне моделювання динаміки і статики шаруватих оболонкових елементів складної геометрії стосовно об'єктів атомної та космічної галузей" (шифр 1.3.1.6 417 - 20, № ДР 0119U103374, 2020 - 2024), співвиконавцем яких був дисертант.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є поглиблений аналіз нестаціонарного деформування тришарових несиметричних оболонок обертання з дискрето-симетричним неоднорідним заповнювачем в рамках різних моделей на основі нових та ефективних чисельно-аналітичних дискретно-континуальних підходів.

Основні завдання дослідження:

- побудова нових розрахункових моделей нестаціонарного деформування оболонкових елементів конструкцій з врахуванням їх конструктивної та структурної неоднорідності при нестаціонарних навантаженнях;
- дослідження впливу амплітудно-часових параметрів зовнішнього навантаження на динамічні характеристики тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем на основі вдосконалених ефективних чисельно-аналітичних підходів і скінчено-елементних методів;
- побудова розв’язків задач про нестаціонарне деформування структурно неоднорідних тришарових оболонок обертання з врахуванням дискретності неоднорідного заповнювача при розподілених і локальних динамічних навантаженнях.

На основі аналізу отриманих результатів виявити нові механічні ефекти і розробити рекомендації щодо створення інженерних методів розрахунків неоднорідних тришарових оболонкових елементів конструкцій при динамічних навантаженнях. Робота спрямована на підвищення рівня розрахунків тришарових оболонкових елементів, які застосовуються в атомній і космічній галузях і були поставлені такі задачі:

- створення розрахункової моделі тришарових несиметричних оболонок обертання з дискретно-симетричним неоднорідним легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості, яка враховує взаємовплив несучих шарів і складових заповнювача;
- розроблення схематизації та вибору розрахункових моделей при чисельному дослідженні конкретних задач динамічної поведінки несиметричних тришарових оболонок обертання при різних видах нестаціонарних навантаженнях;
- узагальнення результатів досліджень стосовно аналізу напружено-деформованого стану тришарових несиметричних оболонок обертання з дискретно-симетричним неоднорідним легким заповнювачем для створення основ розрахунку на міцність таких елементів конструкцій;

- створення розрахункової моделі і виведення нових систем рівнянь несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем;
- визначення впливу параметрів навантажень на напружено-деформований стан тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем в залежності від його конструкції;
- розроблення схематизації та розрахункових моделей легкого заповнювача, який при незначному підвищенні ваги тришарової структури значно підвищує її міцність і стійкість.

Об'єкт дослідження: напружено-деформований стан тришарових оболонок обертання при нестаціонарних навантаженнях.

Предмет дослідження: вплив дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача на динаміку несиметричних тришарових оболонок обертання при нестаціонарних навантаженнях.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано основні співвідношення динамічної теорії оболонок та криволінійних стрижнів на основі уточненої теорії С.П. Тимошенка для оболонок обертання (циліндрична, конічна, сферична оболонки). Розв’язок одновимірних динамічних задач для дискретно-симетричного заповнювача базується на використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевих схем по просторовим координатам та явній різницевій апроксимації по часовій координаті. Розв’язок більш складних задач динамічної поведінки несиметричних тришарових оболонок з дискретно-симетричним неоднорідним легким, армованим ребрами, заповнювачем заснований на використанні скінчено-елементного методу (МСЕ).

Достовірність отриманих результатів, обґрунтованість та вірогідність результатів розрахунків НДС тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях забезпечується:
- точним і детальним моделюванням геометрії і структури дискретно-симетричного заповнювача;
- строгістю та коректністю постановок вихідних задач;

- перевіркою практичної збіжності обчислювального процесу;

- застосуванням МСЕ-моделі із оптимальним співвідношенням розмірів скінчених елементів, при яких забезпечується найкраща апроксимація параметрів НДС функціями напружень і деформацій;

- перевіркою практичної збіжності обчислювального процесу здійсненням серії контрольних розрахунків;

- верифікацією розробленої методики порівнянням з аналітичними рішенням тестових задач, з результатами альтернативних розрахунків (іншими програмними засобами) і натурних спостережень.

Наукова новизна отриманих результатів:

1. Розроблена нова розрахункова модель тришарової несиметричної оболонки обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем.

2. На основі варіаційного принципу Гамільтона - Остоградського в рамках теорії оболонок та стержнів моделі С.П. Тимошенка виведені нові рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким заповнювачем з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів, які значно відрізняються фізико-механічними властивостями.

3. Проведено уточнене моделювання багатошарових циліндричних оболонок з конструктивними та технологічними особливостями.

4. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем при імпульсному навантаженні.

5. Досліджено вплив дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами, заповнювача на напружено-деформований стан несиметричної тришарової циліндричної оболонки з при динамічному навантаженні.

6. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при розподіленому імпульсному навантаженні.

7. Створена комплексна методика розрахунку динаміки несиметричної тришарової конструктивно-ортотропної сферичної оболонки з стільниковим заповнювачем при дії на неї плоскої ударної хвилі.

8. Досліджено вплив несиметрії тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем на її напружено-деформований стан при дії імпульсного навантаження.

9. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при дії імпульсного розподіленого і локального навантаження.

10. Проведений розрахунок і аналіз перших власних частот тришарових оболонок обертання з дискретно неоднорідним заповнювачем.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони можуть бути використані для дослідження прикладних задач в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка, в Державному підприємстві «Державний науково-технічний центр з ядерної та радіаційної безпеки» (ДНТЦ ЯРБ), Державному підприємстві «НАЕК «Енергоатом», Національному технічному університету України ім. Ігоря Сікорського (Механіко-машинобудівний інститут), на Державному підприємстві “КБ ”Південне” ім. М.К. Янгеля”.

Результати дисертаційної роботи використанні при визначенні діапазонів власних частот неоднорідних оболонкових елементів корпусів ракет носіїв, при яких можуть виникати резонансні явища, що може призвести до аварії. Це дозволило вибрати режими роботи двигунів ракет носіїв, або запропонувати відповідні конструкції підкріплень, при яких унеможливлюються резонансні явища.

Розроблені в дисертації теоретичні методики дозволяють дослідити характер і затухання коливань в оболонкових конструкціях ракетно-космічної техніки при дії на них розподілених і локальних вибухових навантажень.

Акт впровадження результатів дисертації в “Конструкторському бюро “Південне” ім. М.К. Янгеля”.

Особистий внесок здобувача.

За результатами дисертації опубліковано: 8 статей у наукометричних фахових виданнях; Основні результати досліджень, одержані в дисертаційній роботі, належать її автору. Вибір теми, формування завдань та аналіз результатів проведених досліджень виконано спільно з науковим керівником. У наукових публікаціях, підготовлених у співавторстві, безпосередньо автором виконано таке: проведено математичне моделювання НДС неоднорідних і шаруватих циліндричних оболонок [1, 2]; виконані розрахунки конструктивно ортотропної моделі оболонкового обтікача [3]; розроблена скінчено-елементна модель і отримані чисельні результати, роботи [4-6] автором написані самостійно, в роботі [7] проведені розрахунки коливань тришарової теплоізоляційної труби, остання робота [188] присвячена тришаровим сферичним оболонкам з дискретним заповнювачем при нестаціонарному навантаженні.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотації (українською), вступу, п’яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел з 188 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 155 сторінок машинописного тексту, в тому числі, 57 рисунків, 1 таблиця, 1 додаток на 1 сторінці.

Розділ 1

Сучасний стан теорії дослідження тришарових оболонок

Шаруваті оболонки широко застосовуються в авіа–, ракето–, суднобудуванні та багатьох інших галузях техніки та будівництва. Розвитку теорії і методів розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) шаруватих елементів конструкцій при різноманітних впливах надається велика увага. Складність розв'язку таких задач для шаруватих систем стимулює розвиток прикладних двовимірних теорій. Серед цих теорій основне місце займають теорії побудовані на застосуванні гіпотез для всього пакету шарів в цілому. Такий підхід може бути застосованим у випадках обмеженої різниці між фізико–механічними параметрами шарів і при малих градієнтах НДС. При значній відмінності фізико–механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів. Тришарові структури з можливою значною відмінністю фізико–механічних характеристик шарів широко використовуються в якості елементів конструкцій. При динамічних навантаженнях, в останніх має місце НДС із значними градієнтами переміщень і напружень. В даній роботі розглядаються тришарові оболонки обертання симетричні і несиметричні з врахуванням дискретності ребристого неоднорідного заповнювача при вимушених динамічних навантаженнях. Це викликає необхідність застосування "дискретно – структурного" підходу для розрахунку нестаціонарних коливань шаруватих оболонок із значною різницею фізико–механічних характеристик шарів при нестаціонарних навантаженнях. Використання в заповнювачі матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити її згинальну жорсткість, а також можливість високого поглинання енергії. Таким чином, дослідження нестаціонарних коливань тришарових оболонок обертання в

широкому діапазоні зміни фізико–механічних параметрів шарів при різних типах динамічних навантажень є **актуальною задачею** механіки деформівного твердого тіла.

1.1. Теорія і чисельне моделювання шаруватих оболонок

Вимоги по міцності і вазі, що пред'являються до сучасних конструкцій, безперервно підвищуються, а умови експлуатації виробу стають все більш жорсткими. Сучасні вироби, крім силових впливів, піддаються комплексу різного виду фізичних впливів, високої температури, кліматичних факторів, радіації, – у багатьох випадках виконуючи теплоізолюючі функції. Важко створити матеріал, досить міцним, жорстким, і який задовольняє вимогам опору комплексу фізичних факторів. Необхідність одночасного виконання цілого ряду, часом суперечливих, вимог призводить до ідеї розробки багатошарових конструкцій, в яких кожен шар виконує тільки одну або краще кілька функцій. При цьому шари можуть відрізнятися як по товщині, так і за фізико-механічними властивостями, тобто пакет може бути істотно неоднорідний.

Як зазначено в фундаментальних оглядах, при побудові уточнених теорій багатошарових структур більшого поширення отримав підхід, заснований на прийнятті апріорних припущень про процес деформування досліджуваного елемента – метод гіпотез. Як слідує з огляду літератури С.Г. Лехніцький (1935р.) першим запропонував теорію ламаної лінії, яка була застосована при розв’язуванні задач про пружні шаруваті пластинки [16 – 18]. С.А. Амбарцумян (1948р.) [19] в рамках класичної теорії оболонок побудував модель для пакету шарів в цілому, а в (1958р.) поширив відому теорію Рейсснера-Міндліна на шаруваті анізотропні пластини і оболонки [20 – 22]. Е. А. Рейсснер (1984р.) запропонував варіаційний принцип, який враховує як неперервність переміщень, так і поперечних напружень [23 – 25].

Зазначений метод гіпотез розвивається в двох напрямках : при *першому* з них вибір розв'язувальної системи визначається деформативними і геометричними параметрами шару і є досить широким – гіпотеза жорсткої нормалі, гіпотеза прямої

лінії, гіпотеза про лінійний або нелінійний розподіл всіх компонент вектора переміщень по товщині шару та ін. В рамках цього підходу вдається досить точно апроксимувати поле переміщень для кожного шару і описати тонкі ефекти, пов'язані з локальними особливостями деформування окремих шарів оболонки. У той же час слід зазначити, що порядок розв'язувальної системи диференціальних рівнянь при такому підході залежить від числа шарів оболонки і швидко росте при збільшенні цього числа, що обмежує можливості її практичного використання. Відзначимо, нарешті, що всяка зміна структури пакета шарів вимагає, взагалі кажучи, зміни системи гіпотез і, отже, модифікації розв'язувальної системи диференціальних рівнянь і перегляду процедури її чисельного інтегрування, що вносить в розрахунок додаткові труднощі. Можливо тому в літературі менше публікацій чисельних розрахунків шаруватих структур для кожного шару окремих систем кінематичних гіпотез досліджень напружено-деформованого стану багатошарових оболонок (з числом шарів більше трьох), виконаних в такій постановці.

Розгляд такого напрямку в механіці багатошарових оболонок найбільш докладно викладено в оглядах і статтях [26-37]. Аналіз вільних коливань ортотропних тонких оболонок обертання при прийнятті незалежних гіпотез до кожного шару проведено в роботі [38].

Другий напрямок базується на гіпотезі прямої недеформованої нормалі для всього пакету шарів, що дозволяє звести задачу розрахунку багатошарової пластини або оболонки до розрахунку квазіоднорідної з приведеними параметрами пружної структури. В ньому також застосовуються так звані некласичні уточнені двовимірні теорії, які використовують ті чи інші інтегральні гіпотези для всього пакету шарів, які враховують деформації і напруження зсуву в шарах. Велика увага була приділена так званим теоріям ламаної лінії [39], які описують кусково-неперервне поле переміщень в напрямку товщини пластини і забезпечують міжшарову неперервність поперечних напружень на межі розділу кожного шару. Моделі, в яких кількість змінних переміщень є незалежною від кількості складових шарів, знайшли найбільше застосування. Заслуговує на увагу

також підхід, запропонований в роботах [40, 41]. В них для виводу рівнянь шаруватих оболонок довільної будови по товщині покладено припущення про наявність в кожному шарі місцевих кутів повороту, обумовлених деформаціями поперечного зсуву (гіпотеза ламаної лінії), при задоволенні умов неперервності переміщень і дотичних напружень на поверхні контакту шарів. При цьому переміщення і кути повороту кожного з шарів виражені через величини одного з них, а неперервність дотичних напружень забезпечується припущенням, що кути зсуву суміжних шарів обернено пропорційні модулям зсуву. Загальне число незалежних кінематичних параметрів складає п’ять, як у випадку, коли введена гіпотеза прямої для пакету шарів в цілому. Приклади розрахунків показують, що якщо нормальні переміщення, визначені запропонованим шляхом і на основі прямої, будуть співставними, то для тангенціальних переміщень отримані суттєві уточнення. Порядок системи розв’язувальних рівнянь не залежить від числа шарів. В цьому сенсі даний підхід еквівалентний *другому* з названих напрямків теорії моделювання шаруватих конструкцій.

Питання про похибки, які вносять в результати розв’язків, невідповідність між геометричною моделлю, яка враховує викривлення нормалі, і системою зусиль, яка відповідає гіпотезі прямої висвітлені в роботах по тришаровим структурам [42, 43].

Слід зазначити, що практично всі дослідження присвячені розрахункам шаруватих оболонок симетричної структури. В якості висхідних співвідношень сприймаються основні розрахункові напруження – тангенціальні компоненти. Поперечні дотичні і нормальні напруження визначені з умов рівноваги. Шарувата оболонка зводиться до деякої квазіоднорідної з узагальненою жорсткістю. Система розв’язуючих рівнянь включає рівняння вихрового крайового ефекту. Обмеження міститься в розділенні шарів на жорсткі несучі і заповнювачі, для яких враховується зсув і обтискання. Такий розподіл шарів прийнято також у варіанті теорії багатошарових оболонок нерегулярної структури, яка розроблена в [44]. В статті [45] на відміну від відомих робіт дослідження виконано для оболонок з несиметричною

структурою шарів і при більш строгому формулюванні граничних умов тришарової конструкції. Істотним також представляється можливість обліку внутрішніх резонансів (кратних власних частот). Для цієї мети застосовуються спеціально розроблені кінцеві інтегральні перетворення з матричним ядром, які здійснюють розкладання по повній системі власних і приєднаних вектор-функцій.

Протягом останніх 80 років багато зусиль було приділено розробці відповідних моделей оболонок, які повинні враховувати особливості полів переміщень, деформацій та напружень, що виникають при розподілі жорсткості поперечного перерізу шаруватої структури. На цю тему було підготовлено величезну кількість літератури, про що свідчать численні оглядові статті і монографії щодо розроблених моделей оболонок. Розширення моделей, спочатку сформованих для однорідних структур, в основному призводять до структурної гомогенізації, в якій властивості одинарного шару розмазуються в еквівалентну жорсткість шаруватості.

В роботах [46, 47] відмічаються спроби поліпшення врахування поперечного ефекту зсуву для прогнозування точних прогинів оболонки та необхідність вдосконалення припущень для зміщення площин, які, як передбачається, лінійні по товщині оболонки в Кірхгофі, а також теорії зсуву деформаційних оболонок Рейснера-Міндліна. Нові теорії пластин високого порядку були розроблені за допомогою нового варіаційного принципу [23]. Поліпшення внутрішніх реакцій досягається включенням зигзагоподібної С-функції для апроксимації зміни поперечних переміщень по товщині. Використовуючи два ключові елементи: зигзагоподібну функцію для інтерполяції зміни переміщень по товщині пластини та застосування нового змішаного варіаційного принципу Рейснера. Точність запропонованої теорії досліджується, застосувавши її до проблеми циліндричного вигину шаруватих плит, яку вирішив саме Пагано [47 - 50]. Порівняння внутрішньоквадратичної реакції з точними рішеннями для симетричних тришарових та п’ятишарових панелей показало, що нова теорія прогнозує внутрішньоплощинну

реакцію дуже точно навіть для малих співвідношень несучих шарів до товщини заповнювача.

Стаття [51] присвячена сучасному огляду чисельних результатів для сучасних шаруватих композитів та панелей. В огляд було включено понад двісті статей з акцентом на теоретичні моделі багатошарових пластин та оболонок та реалізацію різних обчислювальних концепцій FEM. В результаті огляду можна було помітити відсутність єдиної числової моделі, здатної до універсального представлення всіх шаруватих композиційних та панелей. Зазвичай при збільшенні діапазону шарів, що розглядаються в конкретній моделі, можна спостерігати зниження ступеня складності наскрізного подання товщини деформаційних профілів.

За останні кілька десятиліть обчислювальні методи, зокрема метод скінчених елементів, зробили використання класичних структурних теорій набагато успішнішими та привабливішими [52]. Дослідження складних структур з дуже різними граничними умовами (механічні і геометричні) дали можливість проаналізувати багато складних проблем, що стосуються тисяч ступенів вільності з прийнятною точністю. Однак труднощі з отриманням повного поля напружень / деформацій залишаються відкритим питанням у кількох випадках (наприклад, шаруваті структури, тонкостінні структури та проблеми багатої взаємодії між полями). У цьому випадку вдосконалюються і повинні бути використані передові теорії. З цією метою професор Каррера запропонував єдину рецептуру для плит, оболонок та балки (CUF), яка може мати справу з великою кількістю структурних теорій із змінною кількістю скорочення невідомих за допомогою стислого позначення та посилань на кілька основних ядер. Теорії плит / оболонок / балок вищого порядку можна легко реалізувати на основі CUF, кількість невідомих змінних є вільним параметром задачі. Тримісне поле напруження / деформації може бути отримане за допомогою відповідного вибору цих змінних для широкого класу структурних проблем, включаючи композити, тонкостінні конструкції та багатоцільові задачі.

В роботі [53] розглянуто використання функції зигзагу (ламаної лінії) Муракамі (MZZF) у двовимірному моделюванні багатошарових пластин. Вперше представлений огляд літератури щодо доступних публікацій. Обговорюється "просте використання" MZZF: MZZF для введення ефекту зигзагу в класичні теорії вищого порядку, які формулюються лише невідомими переміщеннями. Тоді вважається, що "розширене використання" MZZF вводить ефект зигзагу в тих теоріях, які формулюються на основі припущень як переміщень, так і поперечних напружень. Розглянуто ряд нових теорій пластин / оболонок. Представлені чисельні результати, що охоплюють статичні, динамічні та термічно навантажені ортотропні, просто підкріплені пластини та оболонки, що показують ефективність та обмеження MZZF при моделюванні шаруватих конструкцій. Зіставлено лінійні розширення в прямому порядку для зміщення в площині і поза площиною в напрямку товщини пластини / оболонки. Зроблено висновок, що MZZF є цінним інструментом для підвищення ефективності як класичних, так і передових теорій. Проведені чисельні оцінки, зокрема, показали, що багатошарові теорії пластин та оболонок можуть бути значно покращені за допомогою MZZF. Розроблено уніфіковану формулу CUF, яка знайшла широке застосування при дослідженні шаруватих конструкцій. В статті [54] розглянуто літературу про аналіз згину та вільних коливань з аналізом зсувних деформованих ізотропних та ламінованих композитних шаруватих плит та оболонок, за останні кілька десятиліть. Зроблено огляд різних теорій моделювання з використанням скінчених елементів та експерименти для аналізу шаруватих плит та оболонок.

Багато робіт по постановці задач та чисельному моделюванню статики і динаміки багатошарових композитних пластин і оболонок наведено в статтях і монографіях [55 - 62]. Вільні коливання та стійкість багатошарових оболонкових панелей з врахуванням поперечних зсувних деформацій розглянуто в роботі [63]. Динамічна поведінка багатошарової циліндричної оболонки при імпульсному навантаженні досліджена в статтях [64, 65]. Методологічний підхід до виводу

рівнянь багатошарових анізотропних оболонок та пластин з врахуванням поперечних зсувних деформацій та застосування до задач коливань композитних циліндрів приведений в роботах [66,67].

1.2. Шаруваті оболонки при динамічних навантаженнях

Нестаціонарні задачі аерогідропружності шаруватих оболонок і неоднорідних багатошарових структур розглядалися в роботах [68,69]. Розглянута взаємодія акустичних ударних хвиль з сферичними і циліндричними багатошаровими оболонками. Розв'язок задач базується на застосуванні інтегральних перетворень по просторовим і часовій координатам. В ряді випадків отримано розв'язок в замкнутій формі, що може бути використано як модельна задача для тестування відповідних чисельних алгоритмів.

В статтях [70 - 72] розглянуті задачі нестаціонарного деформування і оптимального проектування багатошарових пластин і оболонок під дією імпульсних і ударних навантажень. Розроблена уточнююча теорія багатошарових оболонок першого порядку, що враховує деформації зсуву та зміну довжини нормального елемента кожного із шарів. Покладалося, що для пакета справедлива гіпотеза ламаної лінії.

Чисельний розв'язок нестаціонарних задач динаміки тонкостінних конструкцій з суцільним і дискретним заповнювачем наведений в роботі [73]. Задача представлена в нелінійній постановці на основі рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка і фізичних співвідношень диференціальної теорії пластичності. Ізотропний заповнювач моделюється в рамках механіки ідеального пружного суцільного середовища. Дискретний заповнювач моделюється системою кільцевих ребер. Сумісна робота всієї структури забезпечується врахуванням умов кінематичного контакту в точках з'єднання оболонкових елементів.

В статтях [74 - 76] розглянуті задачі динамічної поведінки підкріплених багатошарових оболонок.

В роботі [77] досліджується реакція шаруватої структури під впливом низької швидкості навантаження, яке було розподілене на три можливі категорії, а саме: великі, малі та середні масові впливи. Для кожної категорії впливу, доступні на даний момент відповідні рішення докладно обговорюються. Для класифікації реакції на вплив низької швидкості, а також для вивчення характеристик поглинання енергії тривалість удару визначається як ключовий параметр. Огляд завершується детальною дискусією щодо механізмів пошкодження та критеріїв відмов для шаруватих конструкцій, що піддаються ударним навантаженням.

В статті [78] звертається увага на ранню фазу розповсюдження хвиль через товщину шаруватої структури, коли може статися пошкодження заповнювача та його відклеювання. Ретельний аналіз показує, що існуючі теорії плит і оболонок не можуть передбачити реакцію на ранній фазі і що потрібен окремий аналіз. Поведінка шаруватих конструкцій при вибуховому навантаженні залежить від типу заповнювача та його властивостей. Проаналізовані розв'язувальні рівняння та критерії відмов. Порівняно механічні властивості декількох типів заповнювачів: пінопласту, стільники, решітки та гофровані заповнювачі. Розроблені моделі з різним рівнем складності для визначення різних типів поведінки, що спостерігаються під час вибухового навантаження шаруватих конструкцій. Вивчення занурених структур, що зазнали підводних вибухів, представляє особливий інтерес у цьому дослідженні. Розглянуті як пустотілі, так і наповнені рідиною конструкції. Комплексна взаємодія ударної хвилі з циліндричною або сферичною оболонкою аналізується за допомогою підходу простеження променів, який точно прогнозує багато хвильових фронтів, що спостерігаються під час експериментів.

Стаття [79] присвячена проблемі залишкової міцності після пошкодження, спричиненого під час вибуху. Основна композитна система, що досліджується, є полімерною композиційною шарувато-волокнистою на основі полімерного пінополістиролу із стиролом-акрилонітрилом. В порівняльній шаруватій

конфігурації були включені композитні несучі шари, зміцнені скляним волокном. Були проведені повномасштабні експерименти з вибухом.

Врахування дискретності ребристого заповнювача в шаруватих неоднорідних оболонкових структурах, що розглядаються в даній дисертації, дозволяє аналізувати поведінку вказаних структур з точки зору дискретно підкріплених оболонок.

В статті [80] розглянуто постановку та методику чисельного дослідження нестаціонарного деформування та міцності багатошарових оболонок обертання при імпульсному навантаженні. У рамках моделі оболонок типу Тимошенка і прямої недеформованої нормалі для всього пакету шарів виведене рівняння руху багатошарових оболонок обертання. Проведено чисельне моделювання особливостей динамічної поведінки багатошарових оболонок за умови вісесиметричного імпульсного навантаження.

В роботах [81 - 84] наведені рівняння коливань дискретно підкріплених багатошарових оболонок обертання. Під час розгляду елементів пружної структури використано уточнюючу модель теорії оболонок і стрижнів типу Тимошенка з нормаллю для всього пакету шарів. Рівняння коливань неоднорідної пружної структури одержано з використанням варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів. Чисельний метод розв'язку динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевих схем для рівнянь з розривними коефіцієнтами. Застосовуються різницеві апроксимації типу Річардсона для розв’язування динамічних задач теорії багатошарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок. Розглянуті задачі динамічної поведінки шаруватих оболонок при дії розподіленого нестаціонарного навантаження.

В статтях [85 - 90] розглянуті коливання шаруватих оболонок обертання з врахуванням дискретності розміщення ребер при різних навантаженнях. На підставі варіаційного принципу Рейсснера одержано рівняння нелінійних коливань та природні граничні умови в межах гіпотез типу Тимошенка для оболонок та

стрижнів. Розвинутий ефективний чисельний метод розв'язування динамічних задач багатошарових оболонок обертання. Наведені розв'язки конкретних задач та проаналізовано одержані результати.

У огляді [91] висвітлено новітню літературу з аналізу композитних оболонок. Вона випливає з монографії першого автора [55], і є продовженням ще однієї нещодавньої статті, яка зосереджена на динаміці композитних оболонок [92]. У даній роботі розглянуто більшість досліджень, проведених за останні роки (2000 – 2010 рр.), щодо статичної та вибухової поведінки (у тому числі штовхання) шаруватих композитних оболонок. Цей огляд проводиться з акцентом на проведеному аналізі (статичний, викривлення, постбаклінг та ін.), що ускладнює вплив як на матеріал (наприклад, п'єзоелектричний), так і на структуру (наприклад, жорсткі оболонки), а також різні геометрії оболонки (циліндричні, конічні, сферичні та інші).

Статичний та аналіз вільної вібрації шаруватих оболонок виконується в роботі [93] методом колокації функцій радіальної основи, відповідно до теорії ламаної лінії (зигзагу (ZZ) Муракамі). Теорія ZZ пояснює деформацію по товщині, розглядаючи еволюцію ZZ поперечного зміщення з координатою товщини. Рівняння руху та граничні умови отримані уніфікованим формулюванням Каррера і далі інтерполюються колокацією з радіальними базовими функціями.

1.3. Теорії і чисельне моделювання тришарових оболонок

Вперше тришарова конструкція була застосована в 1845 році англійським інженером Р. Стефенсоном при будівництві залізничного мосту. Сьогодні тришарові конструкції знаходять все більш і більш широке застосування в промисловості та народному господарстві. Принципи створення тришарової конструкції і двотаврової балки аналогічні. У тришарової конструкції роль стінки відіграє заповнювач, за рахунок якого рознесені несучі шари, що надає пакету шарів високі характеристики жорсткості та міцності при відносно малій вазі. Комбінуючи матеріали несучих шарів і заповнювача, можна домогтися потрібних властивостей тришарової

конструкції. Досить розповсюджене застосування в техніці знайшли тришарові конструкції у вигляді пластин і оболонок різної геометрії. Спочатку тришарові оболонки розраховували з допомогою інженерних методів, остаточний розвиток яких можна віднести до кінця 20-го сторіччя. В інженерній постановці розглянуті питання розрахунку з урахуванням впливу технологічних і конструктивних чинників на міцність і стійкість тришарових панелей і оболонок зі стільниковим заповнювачем, приведених характеристик дискретного заповнювача у вигляді циліндрів, усічених пірамід або конусів для тришарових конструкцій [94–100]. Дані теоретичних досліджень дозволяють визначити несучу здатність циліндричних оболонок виготовлених з тришарових конструкцій з вказаним дискретним заповнювачем, що представляє інтерес для інженерно-технічних працівників і проектувальників. Однак, інженерних досліджень пов'язаних з визначенням наведених характеристик дискретних заповнювачів, для вибору оптимальних конструкцій тришарових оболонок, недостатньо.

Нині у багатьох тришарових конструкціях застосовується дискретний стільниковий заповнювач. Геометрична форма поперечних перерізів дискретних наповнювачів відрізняється великою різноманітністю. Це дало поштовх для теоретичних розробок по визначенню механічних властивостей і НДС тришарових оболонок з стільниковими заповнювачами, про що свідчать фундаментальні наукові роботи [101 – 104]. В статті [105] аналізуються рівняння статики пружної тришарової оболонки подвійної кривизни. Товщина стільникового заповнювача не обмежується, а несучі шари виготовлені з пластикових пластин, армованих волокнами. В роботі [106] проведені експериментальні дослідження властивостей тришарової структури з стальними несучими шарами в залежності від кута намотки заповнювача з полімерної плівки.

Створення виробів авіаційної і космічної техніки, суднобудування, будівництва в даний час нерозривно пов'язане із застосуванням нових конструкційних матеріалів і елементів конструкцій з них, які мають високі міцнісні і жорсткісні

характеристики. Таким вимогам відповідають шаруваті елементи конструкцій, зокрема, тришарові. Ці конструкції складаються з матеріалів з різними фізико-механічними властивостями – несучі шари зазвичай виготовляються з матеріалів з високими механічними характеристиками і призначені для сприйняття основного навантаження; сполучний шар забезпечує перерозподіл зусиль між несучими шарами, виконує функції захисту від небажаних впливів. Використання заповнювача з матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити згинальну жорсткість, а також можливість високого поглинання енергії. Тим самим тришарові конструкції знайшли широке застосування в якості несучих і відповідальних поверхонь літальних апаратів, обтічників, теплозахисних і силових екранів, різного роду панелей та інших конструктивних елементів.

Теоретичні та експериментальні дослідження по тришаровим конструкціям дозволили виявити їх основні переваги по відношенню до інших типів конструкцій. Ці переваги зумовлені тим, що несучі шари, підкріплені заповнювачем, можуть сприймати високі напруження стиснення. В результаті ці конструкції виявляються оптимальними при роботі на згин і можливе значне підвищення їх критичних навантажень при мінімальній масі. Їх впровадження в різних галузях техніки спричинило за собою інтенсивні дослідження в області теорії і методів їх розрахунку. В результаті за останні п'ятдесят років в механіці деформованого твердого тіла склався окремий напрямок, пов'язаний з розробкою теорії тришарових пластин і оболонок. У цей період було створено велику кількість математичних моделей для структурних шаруватих конструкцій, починаючи від ранніх моделей шаруватих оболонок і закінчуючи більш складними останніми підходами. Особливо протягом останнього десятиліття, зростаючий попит на високоефективні, легкі конструкції стимулював сильну тенденцію до розвитку вдосконалених моделей для шаруватих пластин та оболонок. Основна увага в цій роботі – огляд останніх

розробок та сучасних тенденцій моделювання динамічної поведінки деформації та згинання тришарових оболонок з дискретним заповнювачем.

Загальний вигляд тришарової конструкції складається з несучих шарів і заповнювача, який виготовляють з відносно маломіцних матеріалів з малою щільністю (з пробки, гуми, деревини, пластмаси, спіненого полімерного матеріалу, а також з легкого металу в формі стільників, перемичок, гофрування або іншої конструкції). За ступенем заповнення обсягу між несучими шарами заповнювач ділиться на суцільний і дискретний. За структурою перетину тришарові конструкції поділяються на симетричні і несиметричні. Якщо несучі шари мають однакову товщину і виготовлені з однакових матеріалів, тришарові конструкції вважаються симетричними, в іншому випадку – несиметричними

Як уже відмічалось, що при значній відмінності фізико–механічних параметрів несучих шарів і заповнювача доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів. Серед шаруватих тонкостінних елементів конструкцій широко використовуються тришарові структури з можливою значною відмінністю фізико–механічних характеристик шарів і конструктивними особливостями. Тришарові елементи конструкцій можуть знаходитися в умовах не тільки статичних, а і динамічних навантажень, в останньому випадку в них буде мати місце напружено–деформований стан із значними градієнтами переміщень і напружень. Це викликає необхідність створення нових і розвитку існуючих варіантів прикладних теорій, розвитку методів розрахунку нестаціонарних коливань шаруватих оболонок із значною різницею фізико–механічних характеристик шарів при нестаціонарних навантаженнях.

Очевидно, що оболонки з врахуванням дискретності заповнювача можна віднести до першого підходу побудови моделей багатошарових оболонок. З іншого боку, ці неоднорідні оболонкові структури з врахуванням дискретності ребристого наповнювача можна розглядати як оболонки з дискретним розміщенням ребер. Виходячи з цього, при розгляді сучасного стану теорії і чисельного дослідження

тришарових оболонок будемо акцентувати увагу як на сучасних теоріях багатошарових оболонок, так і на теоріях дискретно підкріплених оболонок.

Одними з перших робіт по дослідженню статики тришарових пологих оболонок з дискретним внутрішнім шаром були статті [107–112], в яких тришарова оболонка утворювалася за рахунок з'єднання двох ребристих оболонок з зовнішніми ребрами і внутрішніми ребрами. В цих дослідженнях розроблені моделі тришарових похилих оболонок з дискретним внутрішнім шаром як для моделі при застосуванні гіпотез для всього пакету шарів в цілому, так і для теорії ламаної лінії. На основі варіаційно-параметричного методу розроблений алгоритм розрахунку НДС і стійкості тришарових оболонок з дискретним заповнювачем. З допомогою чисельних розрахунків показана перевага використання моделі ламаної лінії перед моделлю прямої для всього пакету тришарової конструкції. Продемонстровано ефективність таких конструкцій в порівнянні з одношаровими оболонками, підкріплених ребрами. Проаналізовано вплив числа ребер внутрішнього шару, їх ширини і висоти на НДС конструкції. Показана можливість вибору раціональної конструкції (жорсткості ребер заповнювача, кривизни) шляхом варіювання параметрами навантаження, жорсткісних характеристик ребер, кривизни.

За останні три десятиліття з'явилася велика кількість досліджень динаміки тришарових оболонок з легкими маломіцнісними властивостями заповнювача.

Теоретичні та експериментальні дослідження по тришаровим конструкціям дозволили виявити їх основні переваги по відношенню до інших типів конструкцій. Ці переваги зумовлені тим, що несучі шари, підкріплені заповнювачем, можуть сприймати високі напруження стискання. В результаті ці конструкції виявляються оптимальними при роботі на згин і можливе значне підвищення їх критичних навантажень при мінімальній масі. Їх впровадження в різних галузях техніки спричинило за собою інтенсивні дослідження в області теорії і методів їх розрахунку [113, 114].

Велика увага в літературі за останнє десятиліття також приділена дослідженню тришарового скла з м’яким тонким заповнювачем [115 – 119], в зв’язку з тим, що воно знайшло широке застосування в літаках, автомобілях, будівництві, захисту від ультрафіолетових променів та ін. (лобові стекла, ілюмінатори, окуляри, фотоелектричні панелі та ін.). Цей напрямок ініціював значну кількість статей про вплив пошкоджень композитних конструкцій, спричинених ударом, що є актуальним і зараз [120]. У шаруватих конструкціях удари сторонніх предметів, які важко виявити і можуть значно знизити міцність конструкції. Дослідження стосуються також шаруватих конструкцій, які широко використовуються в аерокосмічній та інших програмах. У оглядовій статті [121] представлений вичерпний огляд літератури, що стосується впливу удару на шаруваті конструкції. Механіка контакту між жорстким прогином і шаруватою конструкцією детально обговорюється, оскільки дуже важливо враховувати локальну деформацію в зоні контакту при розробці моделі прогнозування історії контакту. Переглядається механічна поведінка пінопластових та стільникових матеріалів, а також експериментальні результати та моделі прогнозування закону контакту між гладким шаром та структурою заповнювача. Також обговорюється розробка математичних моделей прогнозування історії контактних сил та загальної реакції структури.

Протягом останніх двох десятиліть особливо зростає попит на високоефективні легкі конструкції, що стимулювало значну тенденцію до розвитку вдосконалених моделей для шаруватих пластин та оболонок. Основна мета цієї дисертації – дослідження динаміки тришарових оболонок обертання з дискретним неоднорідним заповнювачем і моделювання їх поведінки при різних видах конструкцій і дії нестаціонарних навантажень. Переважна більшість робіт по динаміці тришарових оболонок присвячена тришаровим структурам з легкими маломіцнісними властивостями заповнювача, товщина якого більша за товщини несучих шарів. Постійний інтерес до широкого використання досконалих шаруватих конструкцій при будівництві вдосконалених надзвукових / гіперзвукових льотних апаратів та

багаторазових космічних транспортних систем проявився двадцять років тому, і ця тенденція продовжується і посилюється в наступні роки. Так в статтях [113,114, 122, 123] досліджена поведінка тришарових панелей з подвійною Гаусовою кривизною, які стискаються крайовими навантаженнями і підлягають дії імпульсу нормального тиску. При цьому використана нелінійна модель слабкого заповнювача, у якого покращені структурні показники порівняно з характеристиками міцних заповнювачів, що призвело до його широкого використання в дизайні сучасних льотних транспортних засобів. В роботах досліджено нелінійний динамічний відгук пологої тришарової оболонки з урахуванням вдосконаленої моделі стисливості заповнювача на вибухові навантаження. Детальне дослідження ролі кінематичних та фізичних параметрів панелей показує, як зменшити питому вагу шаруватої структури при збереженні міцнісних властивостей. Автори відзначають, що спеціалізована література, що стосується динамічної реакції шаруватих структур на підводні та повітряні вибухи досить недостатня.

В статті [124] проведено моделювання динамічної реакції на вибухові навантаження тришарових пологих оболонок подвійної кривизни з ламінованими несучими шарами. В роботі розроблена нова нелінійна модель ортотропного стисливого заповнювача. Система розв’язуючих рівнянь виведена за допомогою принципу Гамільтона в поєднанні з принципом Рейснера-Хеллінгера. Досліджено викривлення панелі, анізотропії та послідовності укладання несучих шарів, поперечної ортотропії заповнювача та структурного демпфування на динамічну реакцію при залежному від часу навантаження. Імпульси вибуху пов'язані з вибухами у повітрі або з блукаючими ударними хвилями. Автори підкреслюють новизну отриманих результатів, які мають важливе значення в розробці вдосконалених шаруватих оболонок, що експлуатуються при нестаціонарних навантаженнях. Прийнята методологія розв’язку, що базується на методі Гальоркіна в поєднанні з перетворенням Лапласа, дозволяє отримати аналітичні розв'язки, які

можуть слугувати відмінними прикладами для порівняння з чисельними розв’язками.

Подальший розвиток ці дослідження знайшли в роботі [125], де вперше досліджено згин подвійно вигнутої шаруватої панелі, під дією локального зосередженого навантаження, рівномірного тиску та гармонічно розподіленому навантаженню, що базувався на новій вдосконаленій теорії шаруватих панелей вищого порядку. Оскільки деформація поперечного перерізу була точно змодельована цією теорією, вона не потребувала жодного коригуючого коефіцієнта. Також даний аналіз включав фактор трапецієподібної форми (умови 1 + z / R) криволінійного елемента панелі. Геометрія враховувала викривлення несучих шарів, в той час як заповнювач був суцільним. На відміну від більшості відомих робіт, заповнювач міг мати довільну товщину. Розв’язувальні рівняння були отримані згідно варіаційних принципів мінімуму потенційної енергії. Вивчено також вплив типів граничних умов, вид прикладених навантажень, коефіцієнта кривизни заповнювача до несучих шарів та реакцію радіусів кривизни товстого заповнювача на згин.

В статті [126] виконаний аналіз вільних коливань товстих циліндричних композитних шаруватих панелей на основі нової вдосконаленої теорії шаруватих панелей вищого порядку. При дослідженні використовуються поліноми третього порядку для площинних полів переміщень і другого порядку для нормальних прогинів заповнювача. У цьому випадку невідомими були коефіцієнти многочленів на додаток до переміщень верхнього та нижнього несучих шарів. В цьому дослідженні були враховані всі динамічні ефекти заповнювача та несучих шарів. Виходячи з принципу Гамільтона, виведені розв'язуючі рівняння. Досліджено вплив відношення товщини заповнювача до загальної товщини оболонки, відношення довжини до радіусу заповнювача та послідовностей компонування шарів на характер коливань тришарової структури. Результати підтверджені відомими в літературі даними, а також результатами розрахунків отриманих з допомого програмного

засобу скінчених елементів ABAQUS. Показано, що більш товсті оболонки з більш товстим заповнювачем забезпечують більшу стійкість до резонансних коливань. Крім того, збільшення товщини несучих шарів визиває ефект значного збільшення власних частот конструкції.

В роботах [127 - 132] основна увага присвячена дослідженню напружено-деформованого стану тришарових оболонок обертання з легким пружним заповнювачем при імпульсних навантаженнях. Відомо [132], що суттєвою вадою тришарових конструкцій з легким пружним заповнювачем є те, що заповнювач не може рівномірно перерозподіляти тангенціальні зусилля між несучими шарами, тому в з'єднувальних вузлах, закріпленнях і в зонах дії локально розподілених сил необхідно передбачати спеціальні конструктивні особливості для запобігання місцевих вм'ятин і руйнувань. Тришарові елементи конструкцій при динамічних навантаженнях мають НДС із значними градієнтами переміщень і напружень. Це викликає необхідність створення нових і розвитку існуючих варіантів прикладних теорій, розвитку методів розрахунку коливань шаруватих оболонок із значною різницею фізико–механічних характеристик шарів при нестаціонарних навантаженнях. При значній відмінності фізико–механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів [31, 32]. Вивід рівнянь коливань та природних граничних умов проведений на основі варіаційного принципу Рейсснера при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару і з використанням нелінійного варіанту теорії пружних оболонок С.П. Тимошенка в квадратичному наближенні. Вводиться припущення про нерозривність всіх шарів, тобто шари оболонки деформуються без проковзування і відриву. Для розв'язку задачі модифікований чисельний метод, в основі якого лежить явна скінчено–різницева схема типу "хрест" по просторовій та часовій координатам. Проведений порівняльний аналіз характеру НДС тришарових оболонок обертання згідно прикладних теорій дозволив зробити оцінку меж застосування вказаних теорій тришарових оболонок в діапазоні зміни

товщин несучих шарів і відношення модулів пружності обшивки та заповнювача. Продовження цих розробок знайшло в роботах [33 - 37], де запропонований чисельний метод для вирішення початкових крайових задач базується на використанні інтегро-диференційного підходу для побудови скінчено-різницевих схем щодо просторових та часових координат. Отримано чисельні розв'язки для динамічного деформування відкритих тришарових сферичних і еліпсоїдальних оболонок, в широкому діапазоні геометричних і фізичних параметрів заповнювача, для різних типів граничних умов. Наведено порівняльний аналіз результатів дослідження динамічної поведінки тришарових оболонок обертання з допомогою рівнянь оболонок типу Тимошенко та Кірхгофа-Лява з використанням уніфікованих гіпотез по гетерогенній структурі оболонок.

Слід відзначити, що наведені вище роботи відносяться до дослідження динаміки тришарових оболонок при розподілених нестаціонарних навантаженнях, а локальні динамічні навантаження розглядаються лише в поодиноких роботах [126] і в [133], де запропонована динамічна механіко-математична модель циліндричної тришарової оболонки з заповнювачем типа Вінклера. Досліджені вільні і вимушені коливання, при локальних кільцевих навантаженнях. Встановлено, що при застосуванні місцевих навантажень переміщення швидко розпадаються зі збільшенням жорсткості заповнювача.

Паралельно з дослідженнями статичної поведінки тришарових оболонок з дискретним заповнювачем [107–112] розвивалося вивчення динаміки тришарових оболонок обертання аналогічної структури при нестаціонарних навантаженнях. В перших статтях співробітників Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України [134 – 139] була розроблена модель динаміки тришарової оболонки обертання з дискретним заповнювачем у межах геометрично нелінійної теорії оболонок і стрижнів С.П. Тимошенка. Тришарова оболонка з врахуванням дискретності внутрішнього заповнювача представляє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої та зовнішньої обшивок і набору ребер, що жорстко з’єднані з вказаними

обшивками. При виводі рівнянь руху тришарової структури враховувалися всі види деформацій і інерційні складові ребристого заповнювача. Для дослідження динаміки тришарових оболонках з різкою зміною геометрії конструкції за рахунок дискретного ребристого заповнювача при вимушених динамічних навантаженнях доцільно застосовувати, так званий, "дискретно – структурний" метод [140,141]. Виходячи з варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона–Остроградського, для динамічних процесів, отримані рівняння коливань і відповідні природні граничні і початкові умови. Розроблений чисельний алгоритм розв'язання задач вимушених коливань тришарових циліндричних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем і досліджено нестаціонарну поведінку такої оболонки при імпульсних навантаженнях, що є розвитком чисельного підходу до розв'язання динамічних задач теорії дискретно підкріплених оболонок . В роботах [142 – 145] розглянуті осесиметричні випадки, а статті [146 – 148] можна віднести до досліджень неосесиметичних випадків. В [149] розглянуто постановку задачі динамічної поведінки тришарових циліндричних оболонок у разі прийняття незалежних кінематичних і статичних гіпотез до кожного шару. Виходячи з варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів, одержано рівняння коливань і відповідні природні граничні та початкові умови. Наведено числовий алгоритм розв'язку задач вимушених невісесиметричних коливань тришарових циліндричних оболонок.

Результати подібних досліджень осесиметричних коливань тришарових канонічних оболонок обертання з дискретним заповнювачем наведені в роботах [150– 151].

Подальший розвиток досліджень динаміки тришарових оболонок обертання з дискретним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях отримано в роботі [152], де виведені рівняння динамічних осесиметричних коливань теорії еліпсоїдальних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем тришарових циліндричних оболонок еліптичного перетину з дискретним наповнювачем при нестаціонарному навантаженні. Числовий метод розв'язування динамічних рівнянь

базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевих схем для рівнянь з розривними коефіцієнтами. Наведено розв'язок конкретної задачі та проаналізовано результати.

В статті [153] розглянуто постановку задач про динамічну поведінку тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу. Прийнято уточнену модель теорії оболонок типу Тимошенка для всього пакету. Числовий метод розв'язання динамічних рівнянь базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінченно-різницевих схем. Досліджено задачу динамічної поведінки тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу у разі розподіленого нестаціонарного навантаження.

В роботах [154, 155] розглянуті тришарові циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з урахуванням поздовжнього дискретного ребристого заповнювача з використанням «дискретно-структурного» підходу, беручи до уваги відповідні гіпотези Тимошенка для оболонок і стрижнів, згідно геометрично лінійної теорії. При вирішенні конкретних крайових задач використана явна скінчено-різницева схема інтегрування рівнянь. В якості числового прикладу представлено рішення задачі про вимушені осесиметричні і неосесиметричні коливання даної неоднорідної оболонкової структури при дії нестаціонарного розподіленого навантаження.

В дослідженнях наведених в роботах [156 – 165] покладено вивчення стійкості, деформування та вільних коливань тришарових циліндричних пологих оболонкових будівельних конструкцій симетричної будови з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, які підкріплені ребрами жорсткості в поздовжньому та поперечному напрямках. При цьому для зовнішніх несучих шарів оболонки приймалися гіпотези Кірхгоффа - Лява, а для заповнювача – лінійний закон зміни тангенціальних переміщень по товщині. Поперечні деформації заповнювача не враховуються. Для ребер прийняті гіпотези Бернулі та враховувався тільки згин ребер в вертикальній площині, а по лініях ребер не враховувалась деформація зсуву в ребрах.

Розв’язувальні рівняння виведені на основі дискретного підходу, що базується на використанні варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Для дослідження вільних коливань наведених вище тришарових циліндричних оболонок використані чисельно - аналітичні методи. В статтях [162 – 165] досліджено крайовий ефект Рейснера і наведено значення параметра вільних коливань першої частоти тришарової похилої циліндричної оболонки з легким заповнювачем, підкріпленої одним і трьома поперечними ребрами.

Слід відзначити, що починаючи з 2009 року в науковій літературі з'явилася досить значна кількість робіт, в яких експериментально і методами скінчених елементів досліджувалися статика і динаміка тришарових пластин і оболонок з легким/м'яким заповнювачем, який підсилювався штифтами, колонами або трубами [166 – 169]. Відмічено, що такі підкріплення значно підвищують міцність і стійкість тришарових структур на стиск.

Останнім часом також заслуговують на увагу роботи експериментального та чисельного дослідження поведінки композитних шаруватих панелей з кривизною при різних навантаженнях [170, 171]. З цією метою було розглянуто шаруваті панелі/оболонки із заповнювачем з квадратних та анізогрідних ребер. Композитні сендвіч-панелі з жорсткою сіткою, які складаються з несучих шарів та решітки типу кагоме. Ці структури можуть бути використані як альтернатива конструкціям, армованим строфінгами, шаруватим панелям з стільниковим або алюмінієвим сітчастим заповнювачем.

В наведених вище роботах виконані конкретні розрахунки тришарових оболонок обертання з дискретним заповнювачем симетричної конструкції згідно «дискретно-структурних» моделей. Чисельний алгоритм розв’язку нестаціонарних задач теорії тришарових оболонок з кусково-однорідним заповнювачем при використанні незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару, з урахуванням поперечних нормальних і зсувних деформацій в заповнювачі ґрунтується на одному з варіантів різницевої апроксимації вихідного варіаційного

функціоналу. В силу довільності варіацій переміщень і напружень, після стандартних перетворень у варіаційному функціоналі Рейснера, отримаємо дві групи рівнянь. Одна з них являє собою рівняння коливань тришарових оболонок в зусиллях - моментах, які записуються для областей однорідного заповнювача, друга - співвідношення узагальненого закону Гука. Основою чисельного алгоритму є явна скінчено-різницева схема типу «хрест» по просторовій і часовій координатам. Перехід від неперервної системи рівнянь до кінцево-різницевої виконується в два етапи. Перший етап полягає в скінчено-різницевій апроксимації дивергентних рівнянь коливань в зусиллях-моментах в областях однорідного заповнювача, що еквівалентно використанню інтегро-інтерполяційного методу апроксимації рівнянь руху. Після стандартних перетворень, отримуємо різницеві рівняння коливань тришарової оболонки обертання відносно незалежних функцій переміщень на поверхні шарів. Другий етап апроксимації рівнянь полягає у виборі енергетично узгоджених скінчено-різницевих апроксимацій величин зусиль-моментів і відповідних деформацій в областях однорідного заповнювача, щоб виконувався скінчено-різницевий аналог енергетичного рівняння. Використовуючи явну схему «хрест», компоненти узагальненого вектора переміщень апроксимують в цілих точках різницевої сітки, а компоненти узагальненого тензора деформацій і зусилля-моменти в напівцілих точках сітки. Такий підхід дозволяє зберегти дивергентну форму різницевого представлення диференційних рівнянь, а також і виконання закону збереження повної механічної енергії на різницевому рівні.

Розглянуто ряд динамічних задач теорії симетричних тришарових оболонок обертання з суцільним і кусково-однорідним заповнювачем при осесиметричних нестаціонарних навантаженнях. Нижче наведені постановки задач і чисельні алгоритми розв'язання рівнянь коливань тришарових оболонок обертання з використанням незалежних гіпотез до кожного шару. Представлені чисельні результати розв’язку динамічних задач нестаціонарної поведінки тришарових оболонок обертання з кусково-однорідним заповнювачем (циліндричних,

сферичних, конічних) в широкому діапазоні зміни фізико-механічних і геометричних параметрів, при різних видах граничних умов і видах навантаження.

Розглянуті задачі про динамічну поведінку тришарових оболонок з заповнювачем, який представляє собою набір дискретних кільцевих ребер, при внутрішньому нормальному осесиметричному імпульсному навантаженні. При цьому використані рівняння коливань з урахуванням дискретності заповнювача і рівняння коливань згідно конструктивно-ортотропної теорії тришарових циліндричних оболонок. Очевидно, що оболонки з урахуванням дискретності заповнювача можна віднести до першого підходу побудови моделей багатошарових оболонок, який враховує кінематичні і статичні параметри кожного шару. Наведений аналіз досліджень нестаціонарних коливань неоднорідних оболонок [35 -37] показав, що задачі про вимушені осесиметричні і неосесиметричні коливання симетричних і несиметричних тришарових оболонок обертання з урахуванням дискретності заповнювача при нестаціонарних навантаженнях різного характеру є актуальними.

Мета роботи - побудувати розрахункову модель та розробити алгоритм вивчення вимушених коливань симетричних і несиметричних тришарових оболонок обертання з легким заповнювачем, який армується поперечними простими ребрами.

Тришарові панелі зручно використовувати в цивільному будівництві завдяки високому співвідношенню міцності та ваги, простоті та швидкості монтажу. Ідея тришарових секцій полягає в поєднанні тонких і міцних обшивок з легким заповнювачем, а вибір використовуваних матеріалів дозволяє отримати бажану поведінку. Одним з таких прикладів тришарових панелей різної геометрії є тришарові оболонки обертання з дискретним з'єднанням міцних несучих шарів, а простір між з'єднуючими ребрами заповнений пінопластом. Подібне питання широко обговорюється в роботі [91].

Відомо, що тонкі тришарові панелі та оболонки широко використовуються як елементи різних інженерних конструкцій з тонкими стінками, таких як повітряні / космічні транспортні засоби, підводні об'єкти, машини тощо. Використання нових

композиційних матеріалів дозволяє проектувати міцні конструкції, що задовольняють сучасні вимоги, такі як легкість, висока питома жорсткість, безпека, безшумність та хороша стійкість до згинання. Точне прогнозування конструктивних якостей цих тришарових елементів є надзвичайно важливою проблемою на етапі проектування подібних шаруватих конструкцій

Висновки до першого розділу

З наведеного вище огляду літератури слідує, що шаруваті оболонки різноманітних конструкцій знаходять широке застосування в різних галузях техніки. При вивченні багатошарових оболонок автори досліджень в основному спиралися на дві розрахункові моделі: модель багатошарових оболонок при прийнятті єдиних кінематичних та статичних гіпотез до всієї структури та модель багатошарових оболонок при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару («дискретно-структурна» модель). Найбільш розповсюджене застосування в техніці знайшли тришарові оболонки різноманітної конструкції і геометрії. Особливе місце серед тришарових оболонок займають оболонки з легким пружним заповнювачем, бо завдяки такій тришаровій структурі можна досягти необхідної жорсткості при малій питомій вазі. Це також стосується тришарових оболонок з дискретним ребристим заповнювачем. В якості прикладів використання шаруватих оболонок, в яких кожен шар виконує одну або декілька функцій, можна назвати корпуси надзвукових літаків, ракет-носіїв, сучасних потягів, а також різні конструктивні елементи обладнання атомної енергетики. Такий перелік прикладів можна значно продовжити. Тому є необхідність удосконалити методику визначення динамічної поведінки несиметричних тришарових циліндричних та зрізаних конічних і сферичних оболонок при різноманітних граничних умовах і нестаціонарних розподілених і локальних навантаженнях. Розв’язання відповідних крайових задач пов’язане з труднощами обчислювального характеру, що вимагає при дослідженні механічної поведінки тришарових оболонок з сучасних матеріалів вдосконалення ефективних чисельно-аналітичних підходів і використання сучасних

скінчено-елементних комплексів. У випадку, коли розміри ребер, відстані між ними та товщини несучих шарів порівнянні за величиною, можна використати конструктивно-ортотропну модель. В тришарових оболонках з різкою зміною геометрії конструкції за рахунок дискретного ребристого заповнювача при вимушених динамічних навантаженнях виникає великоградієнтний напружений стан, тому для їх дослідження слід застосовувати "дискретно – структурний" метод. Особливо це необхідно для тришарових структур, в яких розміри ребер заповнювача значно менші ніж відстані між ними. В цьому напрямку є незначна кількість робіт для обмеженого виду конструкцій і способів їх навантаження. На початковому стані знаходяться дослідження тришарових циліндричних пологих оболонкових будівельних конструкцій з легким заповнювачем, які підкріплені ребрами жорсткості в поздовжньому та поперечному напрямках. В наведених вище роботах виконані конкретні розрахунки тришарових оболонок обертання з дискретним заповнювачем лише для симетричних конструкцій.

Слід відзначити, що останнім часом з’явилася велика кількість досліджень статики і динаміки тришарових оболонок виконаних з допомогою скінчено-елементних засобів.

Виходячи з приведеного літературного огляду можна зробити висновок, що практично відсутні дослідження процесів вимушених коливань та аналіз закономірностей протікання хвильових процесів в тришарових оболонках з легким заповнювачем, який армований дискретними ребрами, а також несиметричних тришарових структур. Цей фактор обумовлює актуальність теми досліджень, яка полягає у вивченні динамічної поведінки тришарових оболонок обертання з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, а також впливу несиметричності тришарових оболонок і характеру нестаціонарного навантаження на їх напружено-деформований стан.

Слід також звернути увагу на вдосконалення чисельних методів та розв’язування конкретних задач з допомогою скінчено-елементних засобів.

Наявність широкого кола порівняльних даних дозволить виявити характер і ступінь впливу дискретного неоднорідного заповнювач, уточнити межі придатності прикладних двовимірних рівнянь і в їх рамках вказати найбільш прості і в той же час досить точні підходи до аналізу динаміки тришарових оболонкових систем з дискретним неоднорідним заповнювачем.

Загальний висновок полягає в тому, що необхідні подальші комплексні експериментальні та теоретичні дослідження для того, щоб отримати глибоке розуміння дуже складної поведінки тришарових структур при нестаціонарних навантаженнях.

Розділ 2

Рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок з врахуванням неоднорідного дискретно-симетричного ребристого заповнювача легкого, армованого ребрами, заповнювача

Тришарові структури з можливою значною відмінністю фізико–механічних характеристик шарів широко використовуються в якості елементів конструкцій. В даній роботі розглядаються тришарові оболонки обертання симетричні і несиметричні з врахуванням неоднорідного дискретно-симетричного заповнювача – легкий матеріал армований дискретними ребрами, при вимушених динамічних навантаженнях. Армуючі елементи закріплені на відстанях, які значно перевищують їх поперечні розміри, і розташовані вздовж головних ліній кривизни несучих шарів. Несиметричність досліджуваних тришарових структур обумовлена виготовленням несучих шарів різної товщини або з різних матеріалів. З літератури відомо, що при значній відмінності фізико–механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів – "дискретно – структурний" підхід.

Використовуючи варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона–Остроградського, з урахуванням умов контакту заповнювач–несучі шари, отримані загальні рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок з відповідними натуральними граничними та початковими умовами. Для несиметричних тришарових оболонок з легким заповнювачем, армованим ребрами, потрібне більш акуратне двовимірне моделювання в порівнянні з багатошаровими оболонками з однаковими геометричними параметрами [38]. Беручи це зауваження до уваги, при виведенні систем розв'язувальних рівнянь динаміки несиметричних тришарових оболонок обертання з врахуванням неоднорідності дискретного ребристого заповнювача, в даній роботі були використані відповідні гіпотези С.П. Тимошенка для оболонок і стрижнів [172].

2.1. Вихідні положення та рівняння деформації пружних тіл

Вважаємо, що тіло віднесено до ортогональної криволінійної системи координат α_1, α_2, z, під дією деяких сил деформується. В такому випадку, довільна точка тіла М, що має координати (α_1, α_2, z), отримає переміщення, яке може бути представлене трьома проекціями вектора повного переміщення в напрямках дотичних до координатних ліній α_1, α_2, z

$$\begin{aligned} u_1^z &= u_1^z(\alpha_1 \alpha_2, z) \\ u_2^z &= u_2^z(\alpha_1 \alpha_2, z) \\ u_3^z &= u_3^z(\alpha_1 \alpha_2, z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Додатний напрямок вісі *z* визначається правилом додатної трійки векторів.

В околі точки $M(\alpha_1, \alpha_2, z)$ деформований стан тіла оболонки, в рамках теорії пружності, характеризується наступними співвідношеннями [36]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{21} + \omega_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)^2 \right], \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\left[e_{22}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33} + \frac{1}{2}\left[e_{33}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12} + e_{11}\left(\frac{1}{2}e_{11} - \omega_3\right) + e_{22}\left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right)\left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right),$$

$$\varepsilon_{13} = e_{13} + e_{11}\left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right) + e_{33}\left(\frac{1}{2}e_{13} - \omega_2\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}e_{12} + \omega_3\right)\left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right),$$

$$\varepsilon_{23} = e_{23} + e_{22}\left(\frac{1}{2}e_{23} - \omega_1\right) + e_{33}\left(\frac{1}{2}e_{23} + \omega_1\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}e_{12} - \omega_3\right)\left(\frac{1}{2}e_{13} + \omega_2\right);$$

де $e_{ij}\,(i, j = \overline{1,3})$

$$e_{11} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1^z}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}u_2^z + \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial z}u_3^z, \qquad (2.3)$$

$$e_{22} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_2^z}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial z}u_3^z + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1}u_1^z,$$

$$e_{33} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_3^z}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1}u_1^z + \frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2}u_2^z,$$

$$e_{12} = \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2^z}{H_2}\right) + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1^z}{H_1}\right),$$

$$e_{13} = \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_1^z}{H_1}\right) + \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_3^z}{H_3}\right),$$

$$e_{23} = \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_3^z}{H_3}\right) + \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_2^z}{H_2}\right);$$

$$2\omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(H_3 u_3^z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(H_2 u_2^z\right)\right], \qquad (2.4)$$

$$2\omega_2 = \frac{1}{H_1 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(H_1 u_1^z\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(H_3 u_3^z\right)\right],$$

$$2\omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(H_2 u_2^z\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(H_1 u_1^z\right)\right].$$

Для побудови теорії тришарових оболонок в співвідношеннях (2.3), (2.4) величини $H_i = H_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $(i = \overline{1, 3})$ – коефіцієнти Ляме [21] мають вигляд:

$$H_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)(1 + k_1 z), \qquad (2.5)$$

$$H_2 = A_2(\alpha_1,\alpha_2)(1+k_2 z),$$

де k_1, k_2 – головні кривизни серединної поверхні оболонки, які визначаються наступним чином $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$, R_1, R_2 – радіуси головних кривизн; $A_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $A_2(\alpha_1,\alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми.

Коефіцієнти першої квадратичної форми A_1, A_2 пов'язані з величинами k_1, k_2 співвідношеннями Гауса–Кодаці:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(k_2 A_2) = k_1\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(k_1 A_1) = k_2\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) = -k_1 k_2 A_1 A_2 .$$

При дослідженні розподілу пружних деформацій і напружень в анізотропному тілі будемо покладати, що тіло в процесі деформацій залишається пружним і задовольняє узагальнений закон Гука для даного анізотропного тіла [18, 22]. Зокрема, будемо розглядати ортотропне тіло, у якого через кожну точку тіла проходить три взаємно ортогональні площини пружної симетрії. Зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій у такому тілі має вигляд [18]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33}, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12},\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13},\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}.$$

В формулах (2.7) пружні сталі мають наступний зміст E_1, E_2, E_3 – модулі пружності у відповідних напрямах α_1, α_2, z; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву для поверхонь $z = \text{const}, \alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}$; $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ – коефіцієнти Пуасона, що характеризують поперечний стиск при розтягу в напрямі

осей координат (перший індекс показує напрям поперечного стиску, другий – напрям дії сили). Завдяки умовам симетрії маємо:

$$E_1\nu_{12}=E_2\nu_{21},\ E_3\nu_{32}=E_2\nu_{23},\ E_1\nu_{13}=E_3\nu_{31}.$$

2.2. Основні гіпотези С.П. Тимошенка в теорії оболонок

Розглянемо оболонку постійної товщини h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній криволінійній системі координат α_1,α_2,z. Координатні лінії α_1,α_2 на серединній поверхні оболонки при $z=0$ співпадають з лініями головних кривизн; координатна лінія z є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка знаходиться зі сторони опуклості серединної поверхні.

Як слідує з літератури в різних областях техніки широке застосування знайшли досить тонкі тришарові оболонки. Тому в даній роботі в основу побудови математичної теорії оболонок покладені гіпотези С.П. Тимошенка [172].

1. Покладається, що нормаль до вихідної поверхні до деформації залишається прямолінійною після деформації; не змінює своєї довжини, але повертається відносно цієї поверхні на деякий кут. Згідно цих припущень закон розподілення переміщень приймається у вигляді [172]:

$$u_1^z(\alpha_1,\alpha_2,z)=u_1(\alpha_1,\alpha_2)+z\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2), \qquad (2.8)$$

$$u_2^z(\alpha_1,\alpha_2,z)=u_2(\alpha_1,\alpha_2)+z\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$u_3^z(\alpha_1,\alpha_2,z)=u_3(\alpha_1,\alpha_2),$$

де $\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2),\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2)$– кути повороту нормалі.

2. Компоненти тензора деформацій визначаються згідно спрощеного нелінійного варіанту теорії оболонок в квадратичному наближенні [158]. З врахуванням формул (2.5), (2.6), (2.8) співвідношення (2.2) в цьому випадку мають наступний вигляд:

$$\varepsilon_{11}^z=E_{11}+zK_{11}, \qquad (2.9)$$

$$\varepsilon_{22}^z=E_{22}+zK_{22},$$

$$\varepsilon_{12}^z=E_{12}+zK_{12},$$

$$\varepsilon_{13}^{z} = \varphi_1 + \theta_1, \quad \varepsilon_{23}^{z} = \varphi_2 + \theta_2,$$

де

$$E_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad E_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \qquad (2.10)$$

$$E_{12} = \omega + \theta_1\theta_2,$$

$$K_{11} = \kappa_{11}, \quad K_{22} = \kappa_{22},$$

$$K_{12} = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} + \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2},$$

$$e_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{u_3}{R_1},$$

$$e_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1 + \frac{u_3}{R_2},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, \qquad \theta_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2,$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}u_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\varphi_2,$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\varphi_1,$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\varphi_1,$$

$$\tau_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\varphi_2.$$

3. Розв'язуючи перші три рівняння співвідношень (2.7) відносно σ_{11}, σ_{22} і враховуючи, що $\varepsilon_{33} = 0$, а також нехтуючи і величиною σ_{33} в порівнянні з σ_{11} і σ_{22}, отримаємо наступні формули, що зв'язують напруження з відповідними деформаціями:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11}^{z} + B_{12}\varepsilon_{22}^{z}, \qquad (2.11)$$

$$\sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_{11}^{z} + B_{22}\varepsilon_{22}^{z},$$

де величини B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{21}, B_{13} мають наступний вигляд:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{13} = K_1^2 G_{13},$$

де K_1^2 - коефіцієнт зсуву в теорії оболонок С.П. Тимошенка.

4. Напруження поперечного зсуву σ_{13} і σ_{23} змінюються по товщині оболонки по закону:

$$\sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, z) = G_{13}\varepsilon_{13}^{z}(\alpha_1, \alpha_2, z), \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, z) = G_{23}\varepsilon_{23}^{z}(\alpha_1, \alpha_2, z),$$

де G_{13}, G_{23} – модулі поперечного зсуву.

2.3. Основні положення теорії криволінійних стрижнів з врахуванням деформацій поперечного зсуву

Розглянемо тонкий криволінійний стрижень довільного поперечного перетину. Початок координат $\alpha_1 yz$, розмістимо в центрі ваги площини поперечного перетину стрижня, причому вісь α_1 направлена вздовж вісі стрижня, а вісі y і z паралельні головним осям цього поперечного перетину. Припускається, що вздовж вісі поперечний перетин стрижня не змінюється. Координатна лінія α_1 при $y = 0, z = 0$ співпадає з лінією головної кривизни; лінії y і z являються ортогональними до координатної лінії α_1. Величина z рахується

додатною, якщо розглянута точка лежить зі сторони опуклості координатної лінії. Система координат $\alpha_1 yz$ – ортогональна по побудові і її коефіцієнти Ляме мають вигляд:

$$H_1 = A_1(\alpha_1)(1+zk_1),\ \ H_2 = 1,\ \ H_3 = 1, \qquad (2.13)$$

де $A_1(\alpha_1)$ – параметр Ляме серединної лінії; k_1 – головна кривизна, причому $k_1 = 1/R_1$, R_1 – радіус головної кривизни.

Прийняття гіпотези недеформованості поперечного перетину криволінійного стрижня, при врахуванні малих розмірів поперечного перетину стрижня в напрямках y і z в порівняння з його довжиною дозволяє виразити компоненти вектора переміщень поперечного перетину у вигляді:

$$u_i^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_1(\alpha_1) + y\gamma_1(\alpha_1) + z\gamma_2(\alpha_1), \qquad (2.14)$$

$$u_2^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_2(\alpha_1) + z\psi_2(\alpha_1),$$

$$u_3^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_3(\alpha_1) - y\psi_2(\alpha_1).$$

Формули (2.14) співпадають з відомими формулами в теорії криволінійних стрижнів [172]. Представлення (2.14) дозволяє описувати сумісний розтяг– стиск, згин, зсув, і кручення в стрижнях.

У випадку геометрично нелінійного варіанту теорії стрижнів, деформаційні співвідношення для криволінійного стрижня в квадратичному наближенні мають вигляд (частковий випадок рівнянь (2.2)–(2.4)):

$$\varepsilon_{11}^{yz} = e_{11}^{yz} + \frac{1}{2}\left[(\theta_1^{yz})^2 + (\theta_2^{yz})^2\right], \qquad (2.15)$$

$$\varepsilon_{22}^{yz} = 0, \quad \varepsilon_{33}^{yz} = 0,$$

$$\varepsilon_{12}^{yz} = e_{12}^{yz}, \quad \varepsilon_{13}^{yz} = e_{13}^{yz}, \quad \varepsilon_{23}^{yz} = 0,$$

де

$$e_{11}^{yz} = \frac{1}{1+zk_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1^{yz}}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3^{yz}, \qquad (2.16)$$

$$e_{12}^{yz} = \frac{1}{1+zk_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^{yz}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1^{yz}}{\partial y},$$

$$e_{13}^{yz} = (1+zk_1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_1^{yz}}{1+zk_1}\right) + \frac{1}{1+zk_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3^{yz}}{\partial \alpha_1},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}e_{12}^{yz} + \omega_3^{yz}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}e_{13}^{yz} + \omega_2^{yz},$$

$$\omega_2^{yz} = \frac{1}{2}\frac{1}{A_1(1+zk_1)}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(A_1(1+zk_1)u_1^{yz}\right) - \frac{\partial u_3^{yz}}{\partial \alpha_1}\right],$$

$$\omega_3^{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+zk_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^{yz}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1^{yz}}{\partial y}\right].$$

Доповнимо залежності (2.14)–(2.16) співвідношеннями закону Гука:

$$\sigma_{11}^{yz} = E\,\varepsilon_{11}^{yz}, \qquad (2.17)$$

$$\sigma_{12}^{yz} = G\,\varepsilon_{12}^{yz},$$

$$\sigma_{13}^{yz} = G\,\varepsilon_{13}^{yz},$$

де E, G – модуль пружності та коефіцієнт зсуву матеріалу стрижня.

2.4. Постановка задач та рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок з врахуванням неоднорідного дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами, заповнювача

Несиметрична тришарова оболонка з неоднорідним дискретно-симетричним заповнювачем являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1) і зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, різної товщини і виготовлених з різних матеріалів, і набору дискретних ребер, що жорстко з’єднані з вказаними несучими шарами і розташованими вздовж ліній головних кривизн оболонки. Неоднорідність дискретного ребристого заповнювача обумовлена наявністю легкого матеріалу в порожнинах між ребрами і несучими шарами. Передбачається ідеальне з'єднання між легким заповнювачем і несучими шарами і ребрами без

відриву і проковзування. Вирізаний елемент тришарової структури схематично зображено на рис. 2.1.

Приймається, що напружено–деформований стан несучих шарів може бути визначений в рамках геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка – співвідношення (2.8) – (2.12). Для розрахунку дискретних ребер приймається геометрично нелінійний варіант теорії стрижнів Тимошенка – співвідношення (2.13)–(2.17). Для розрахунку легкого заповнювача приймається варіант теорії пружних тіл (2.1)–(2.5).

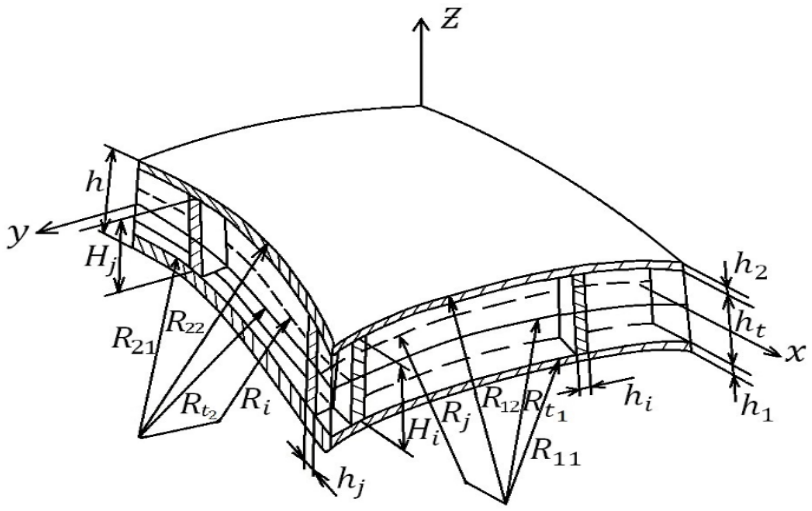


Рис. 2.1. Схематичне зображення елемента тришарової оболонки з легким, армовним повздовжньо–поперечними ребрами, заповнювачем

Деформований стан внутрішнього і зовнішнього несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\overline{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ і $\overline{U_2}$= $(u_1^2, u_2^2, u_3^2\ \varphi_1^2, \varphi_2^2)$. Деформований стан армуючого ребра, направленого вздовж вісі α_1, будемо визначати узагальненим вектором переміщення центру ваги його поперечного перетину $\overline{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. Відповідно, армуючого ребра, направленого вздовж вісі α_2 – вектором $\overline{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$. Деформований стан легкого заповнювача будемо визначати узагальненим вектором переміщення $\overline{U_t}$= $(u_1^t, u_2^t, u_3^t\ \varphi_1^t, \varphi_2^t)^T$.

На основі теорії оболонок С.П. Тимошенка [172] переміщення несучих шарів з малими лінійними переміщеннями виражаються наступним чином:

$$u_1^i(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = u_{10}(\alpha_1,\alpha_2,t) + z\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2,t) \qquad (2.18)$$
$$u_2^i(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = u_{20}(\alpha_1,\alpha_2,t) + z\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2,t),$$
$$u_3^i(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = u_{30}^i(\alpha_1,\alpha_2,t),$$

Кінематичні рівняння для деформацій несучих шарів визначаються згідно формул (2.9), (2.10).

Компоненти вектора переміщень поперечного перетину криволінійного стрижня приймемо у вигляді (2.14), а кінематичні рівняння для деформацій такого стрижня мають вигляд (2.15), (2.16).

Зв'язок між компонентами векторів переміщень, що описують напружено-деформований стан несучих шарів, і відповідними величинами дискретних армуючих елементів записуються згідно формул:

- для несучих шарів і дискретних повздовжніх армуючих ребер заповнювача:

$$u_{1i}(\alpha_1) = u_1^k(\alpha_1,\alpha_{2i}) \pm H_i^k\varphi_1^k(\alpha_1,\alpha_{2i}); \qquad (2.19)$$
$$u_{2i}(\alpha_1) = u_2^k(\alpha_1,\alpha_{2i}) \pm H_i^k\varphi_2^k(\alpha_1,\alpha_{2i});$$
$$u_{3i}(\alpha_1) = u_3^k(\alpha_1,\alpha_{2i});$$
$$\varphi_{1i}(\alpha_1) = \varphi_1^k(\alpha_1,\alpha_{2i});$$
$$\varphi_{2i}(\alpha_1) = \varphi_2^k(\alpha_1,\alpha_{2i}), \qquad k = 1,2$$

- для несучих шарів і дискретних поперечних армуючих ребер заповнювача:

$$u_{1j}(\alpha_2) = u_2^k(\alpha_{1j},\alpha_2) \pm H_j^k\varphi_1^k(\alpha_{1j},\alpha_2); \qquad (2.20)$$
$$u_{2j}(\alpha_2) = u_1^k(\alpha_{1j},\alpha_2) \pm H_j^k\varphi_2^k(\alpha_{1j},\alpha_2);$$
$$u_{3i}(\alpha_2) = u_3^k(\alpha_{1j},\alpha_2);$$
$$\varphi_{1i}(\alpha_2) = \varphi_2^k(\alpha_{1j},\alpha_2);$$
$$\varphi_{2i}(\alpha_2) = \varphi_1^k(\alpha_{1j},\alpha_2), \qquad k = 1,2$$

В співвідношеннях (2.19),(2.20) де $\alpha_{i,j}$ – координати ліній точок проекцій центрів ваги поперечних перетинів і-го і j-го ребер з відповідними серединними поверхнями; $h_{i,j} = 0.5h_k + H_{i,j}$, $h_k(k=1,2)$ – товщини сферичних внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок; $H_{i,j}$ – відстані від вісі i, j – го ребра до поверхонь гладких оболонок, α_1 – координата лінії проектування центрів ваги поперечних

перетинів повздовжнього армуючого j-го ребра, направленого вздовж лінії α_2, на відповідну серединну поверхню несучого шару. Для даної постановки задачі маємо: $2H_i=2H_j=h_t$, h_t – товщина легкого заповнювача. Слід також зауважити, що серединні лінії армуючих ребер співпадають з серединою поверхнею легкого заповнювача.

Поля лінійних переміщень у легкому заповнювачі приймаються у вигляді [174]:

$$\begin{cases} u_1^t(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = \left(1+\dfrac{z_t}{R_{1t}}\right)u_{10}^t(\alpha_1,\alpha_2,t) + z_t u_1^t(\alpha_1,\alpha_2,t) \\ u_2^t(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = \left(1+\dfrac{z_t}{R_{2t}}\right)u_{20}^t(\alpha_1,\alpha_2,t) + z_t u_2^t(x,y,t) \\ u_3^t(\alpha_1,\alpha_2,z,t) = u_{30}^t(\alpha_1,\alpha_2,t) \end{cases} \quad (2.21)$$

де R_{1t}, R_{2t} – радіуси кривизни серединної поверхні легкого заповнювача.

Кінематичні залежності для легкого заповнювача при малих деформаціях запишемо наступним чином

$$\varepsilon_{11}^t = \frac{1}{(1+z/R_{1t})}\left(\frac{\partial u_1^t}{\partial \alpha_1}+\frac{u_3^t}{R_{1t}}\right), \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{22}^t = \frac{1}{(1+z/R_{2t})}\left(\frac{\partial u_2^t}{\partial \alpha_2}+\frac{u_3^t}{R_{2t}}\right),$$

$$\gamma_{12}^t = 2\varepsilon_{12}^t = \frac{1}{(1+z/R_{1t})}\frac{\partial u_2^t}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{(1+z/R_{2t})}\frac{\partial u_1^t}{\partial \alpha_2}; \gamma_{12}^t = 2\varepsilon_{13}^t = \frac{1}{(1+z/R_{2t})}\left(\frac{\partial u_3^t}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2^t}{R_{2t}}\right)+\frac{\partial u_2^t}{\partial z},$$

$$\gamma_{13}^t = 2\varepsilon_{13}^t = \frac{1}{(1+z/R_{1t})}\left(\frac{\partial u_3^t}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1^t}{R_{1t}}\right)+\frac{\partial u_1^t}{\partial z}.$$

Умови неперервності переміщень на поверхнях стику несучих шарів і легкого заповнювача запишемо згідно [175]:

$$\begin{cases} u_1^2|_{z_2=-\frac{h_1}{2}} = u_1^t|_{z_t=\frac{h_t}{2}} \\ u_2^2|_{z_2=-\frac{h_1}{2}} = u_2^t|_{z_t=\frac{h_t}{2}} \\ u_3^1|_{z_1=-\frac{h_1}{2}} = u_3^t|_{z_t=\frac{h_t}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1^1|_{z_2=\frac{h_2}{2}} = u_1^t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} \\ u_2^1|_{z_2=\frac{h_2}{2}} = u_2^t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} \\ u_3^2|_{z_2=\frac{h_2}{2}} = u_3^t|_{z_t=-\frac{h_t}{2}} \end{cases} \quad (2.23)$$

де h_k (k=1,2) – товщини несучих шарів, h_t- товщина легкого заповнювача.

Використовуючи поля переміщень для несучих шарів (2.18), легкого заповнювача (2.21) та умови неперервності переміщень (2.23) виведемо спрощені умови сумісності переміщень:

$$
\begin{aligned}
u_{10}^t &= \tfrac{1}{2}[u_{10}^1 + u_{10}^2 - \tfrac{1}{2}(h_1 u_1^1 - h_2 u_1^2)];\\
u_1^t &= \tfrac{1}{h_t}[u_{10}^1 - u_{10}^2 - \tfrac{1}{2}(h_1 u_1^1 + h_2 u_1^2)];\\
u_{20}^t &= \tfrac{1}{2}[u_{20}^1 + u_{20}^2 - \tfrac{1}{2}(h_1 u_2^1 - h_2 u_2^2)];\\
u_2^t &= \tfrac{1}{h_t}[u_{20}^1 - u_{20}^2) - \tfrac{1}{2}(h_1 u_2^1 + h_2 u_2^2)];\\
u_{30}^t &= \tfrac{1}{2}(u_{30}^1 + u_{30}^2).
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Для виводу рівнянь коливань несиметричної тришарової пружної структури з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона–Остроградського [36], згідно якого:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A)\,dt = 0, \tag{2.25}$$

де К – повна кінетична енергія пружної системи, П – повна потенціальна енергія пружної системи, А – робота зовнішніх сил, t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

Вирази для повної потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді:

$$\delta\Pi = \delta\textstyle\sum_{i=1}^{2}\Pi^i + \delta\sum_{i=1}^{I}\Pi_i + \delta\sum_{j=1}^{J}\Pi_j + \delta\sum_t \Pi^t \tag{2.26}$$

$$\delta K = \delta\textstyle\sum_{i=1}^{2}K^i + \delta\sum_{i=1}^{I}K_i + \delta\sum_{j=1}^{J}K_j + \delta\sum_{S_t} K_t \tag{2.27}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi^i = \int_{S_i}\Big[\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} &(T_{11}^i\delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i\delta\varepsilon_{22}^i + T_{12}^i\delta\varepsilon_{12}^i + T_{21}^i\delta\varepsilon_{21}^i + T_{13}^i\delta\varepsilon_{13}^i + T_{23}^i\delta\varepsilon_{23}^i +\\
&+M_{11}^i\delta\kappa_{11}^i + M_{22}^i\delta\kappa_{22}^i + M_{12}^i\delta\kappa_{12}^i + M_{21}^i\delta\kappa_{21}^i)\,dz_i\Big]dS_i
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi^t = \int_{S_t}\Big[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} &(T_{11}^t\delta\varepsilon_{11}^t + T_{22}^t\delta\varepsilon_{22}^t + T_{12}^t\delta\varepsilon_{12}^t + T_{21}^t\delta\varepsilon_{21}^t + T_{13}^t\delta\varepsilon_{13}^t + T_{23}^t\delta\varepsilon_{23}^t +\\
&+M_{11}^t\delta\kappa_{11}^t + M_{22}^t\delta\kappa_{22}^t + M_{12}^t\delta\kappa_{12}^t + M_{21}^t\delta\kappa_{21}^t)\,dz_t\Big]dS_t
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

$$\delta\Pi_i = \int_{L_i}(T_{11i}\delta\varepsilon_{11i} + T_{12i}\delta\varepsilon_{12i} + T_{13i}\delta\varepsilon_{13i} + \tag{2.30}$$

$$+M_{11i}\delta\kappa_{11i} + M_{12i}\delta\kappa_{12i})dL_i,$$

$$\delta\Pi_j = \int_{L_i}(T_{22j}\delta\varepsilon_{22j} + T_{21j}\delta\varepsilon_{21j} + T_{23j}\delta\varepsilon_{23j} + \tag{2.31}$$

$$+ M_{21j}\delta\kappa_{21j} + M_{22j}\delta\kappa_{22j})dL_j,$$

$$\delta K^i = \int_{S_i}\left\{\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\left[\rho_i h_i\left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}\delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2}\delta u_2^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}\delta u_3^i\right) + \rho_i\frac{h_i^3}{12}\left(\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2}\delta\varphi_1^i + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \delta\varphi_2^i\right)\right]dz_i\right\}dS_i \tag{2.32}$$

$$\delta K_i = \int_{L_i}\left[\rho_{ri}F_i\left(\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}\delta u_{1i} + \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}\delta u_{2i} + \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2}\delta u_{3i}\right) + \right. \tag{2.33}$$

$$\left. + \rho_{ri}\left(I_{1i}\frac{\partial^2\varphi_{1i}}{\partial t^2}\delta\varphi_{1i} + I_{kri}\frac{\partial^2\varphi_{2i}}{\partial t^2}\delta\varphi_{2i}\right)\right]dL_i,$$

$$\delta K_j = \int_{L_j}\left[\rho_{rj}F_j\left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}\delta u_{1j} + \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2}\delta u_{2j} + \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}\delta u_{3j}\right) + \right. \tag{2.34}$$

$$\left. + \rho_{rj}\left(I_{krj}\frac{\partial^2\varphi_{1j}}{\partial t^2}\delta\varphi_{1j} + I_{2j}\frac{\partial^2\varphi_{2j}}{\partial t^2}\delta\varphi_{2j}\right)\right]dL_j.$$

$$\delta K^t = \int_{S_t}\left[\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}}\rho_t h_t\left(\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2}\delta u_{10}^t + \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2}\delta u_{11}^t + \frac{\partial^2 u_{20}^t}{\partial t^2}\delta u_{20}^t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2 u_{21}^t}{\partial t^2}\delta u_{21}^t + \frac{h_t^2}{12}\frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2}\delta u_{30}^t\right)dz_t\right]dS_t \tag{2.35}$$

В рівняннях (2.32) - (2.35) величини h_{rj}, h_{ri}, F_i, I_{1i}, I_{kri}, F_j, I_{2j}, I_{krj} відповідають геометричним характеристикам відповідно повздовжніх і поперечних армуючих ребер, ρ_{ri} , ρ_{rj} питомі ваги матеріалів відповідних армуючих ребер; ρ_i (i=1,2), ρ_t питомі ваги матеріалів несучих шарів і легкого заповнювача відповідно.

Слід відзначити, що при обрахуванні потенціальної і кінетичної енергії для легкого заповнювача у виразах $\delta\Pi^t$ i δK^t інтегрування проводиться по об'єму, величина якого збільшена на величину об'єму армуючих ребер. Але цей факт практично не впливає на загальну похибку теорії оболонок, оскільки об'єм армуючих ребер в складі об'єму легкого заповнювача для тришарових оболонок обертання не перевищує 2,5 ↔ 5%.

В подальших викладках приймемо наступні спрощення: $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$, а у співвідношеннях (2.9),(2.10),(2.16) покладемо – $\theta_1=\theta_2=0$.

При виводі рівнянь коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з легким армованим заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти узагальнених векторів несучих шарів $\overline{\mathrm{U}}_1=(\mathrm{u}_1^1,\mathrm{u}_2^1,\mathrm{u}_3^1,\varphi_1^1,\varphi_2^1)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathrm{U}}_2=(\mathrm{u}_1^2,\mathrm{u}_2^2,\mathrm{u}_3^2,\varphi_1^2,\varphi_2^2)^{\mathrm{T}}$ і легкого заповнювача $\overline{U}_t=(u_{10}^t,u_{11}^t,u_{20}^t,u_{21}^t,u_{30}^t)$, а також компоненти узагальнених векторів переміщень центрів ваги поперечного перетину відповідно повздовжніх $\overline{U}_i=(u_{1i},u_{2i},u_{3i},\varphi_{1i},\varphi_{2i})^T$ і поперечних $\overline{U}_j=(u_{1j},u_{2j},u_{3j},\varphi_{1j},\varphi_{2j})^T$ армуючих ребер.

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (2.25), з врахуванням співвідношень (2.19),(2.20),(2.23),(2.26)–(2.35), отримаємо дві системи рівнянь двовимірних коливань несиметричної тришарової оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, двадцятого порядку:

$$\frac{\partial T_{11}^i}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}^i}{\partial y}+\frac{T_{13}^i}{R_{1i}}+\frac{1}{h_i}\frac{\partial M_{12}^i}{\partial y}-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{12}^i}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}^i}{\partial y}+\frac{T_{13}^i}{R_{2i}}-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2}; \qquad (2.36)$$

$$\frac{\partial T_{13}^i}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}^i}{\partial y}-\left(\frac{T_{11}^i}{R_{1i}}+\frac{T_{22}^i}{R_{2i}}\right)-\frac{1}{R_{t1}h_t}M_{11}^t-\frac{1}{R_{t2}h_t}M_{22}^t+\frac{1}{h_t}\frac{\partial M_{13}^t}{\partial x}+$$

$$+\frac{1}{h_t}\frac{\partial M_{23}^t}{\partial y}-\left(1\pm\frac{h_i}{2R_{1i}}\right)\left(1\pm\frac{h_i}{2R_{2i}}\right)\mathrm{P}_i=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2}; \qquad i=1,2$$

$$\frac{\partial M_{11}^i}{\partial x}+\frac{\partial M_{12}^i}{\partial y}-T_{13}^i+\frac{2h_i}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i\frac{h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{12}^i}{\partial x}+\frac{\partial M_{22}^i}{\partial y}-T_{13}^i+\frac{2h_i}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i\frac{h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}; \qquad i=1,2$$

$$\frac{\partial T_{11}^t}{\partial x}+\frac{\partial T_{21}^t}{\partial y}+\frac{1}{R_{1t}}\left(\frac{\partial M_{21}^t}{\partial y}+T_{11}^t-T_{13}^t\right)+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^t}{\partial x}+\frac{\partial M_{21}^t}{\partial y}-T_{13}^t+\frac{1}{R_{t1}}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{22}^t}{\partial y}+\frac{\partial T_{12}^t}{\partial x}+\frac{1}{R_{t2}}\left(\frac{\partial M_{12}^t}{\partial x}+T_{13}^t-T_{23}^t\right)+\frac{8}{h_t^2}M_{23}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{20}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{22}^t}{\partial y}+\frac{\partial M_{12}^t}{\partial x}-T_{23}^t+\frac{1}{R_{t2}}M_{23}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{21}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}^t}{\partial x}+\frac{\partial T_{23}^t}{\partial y}-\frac{1}{R_{t1}}T_{11}^t-\frac{1}{R_{t2}}T_{22}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2};$$

$$\left[\tilde{S}\right]_i+\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11i}}{\partial x}+k_1 T_{13i}=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2},$$

$$\left[T_{22}\right]_i+\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{12i}}{\partial x}=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2},$$

$$\left[T_{23}\right]_i+\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{13i}}{\partial x}-T_{11i}k_{1i}=\rho_i F_i\frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2},$$

$$\left[M_{12}\right]_i+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11i}}{\partial x}-T_{13i}=\rho_i I_{1i}\frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2},$$

$$\left[M_{22}\right]_i+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{12i}}{\partial x}=\rho_i I_{kri}\frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2};$$

$$\left[T_{11}\right]_j+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{21j}}{\partial y}=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2},$$

$$\left[\tilde{S}\right]_j+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22j}}{\partial y}+k_{2j}\overline{T}_{23j}=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2},$$

$$\left[T_{13}\right]_j+\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{13j}}{\partial y}-k_{2j}T_{22j}=\rho_j F_j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2},$$

$$\left[M_{11}\right]_j+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{21j}}{\partial y}=\rho_j I_{krj}\frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

$$\left[M_{12}\right]_j+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22j}}{\partial y}-T_{23}=\rho_j I_{2j}\frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

В рівняннях (2.36) величини $\sum_{i=1}^{2}(T_{12}^{i\pm}-\frac{M_{12}^{i\pm}}{R_{1i}})=\left[\tilde{S}\right]_i;\sum_{i=1}^{2}T_{22}^{i\pm}=\left[T_{22}\right]_i;\ \sum_{i=1}^{2}T_{23}^{i\pm}=\left[T_{23}\right]_i$ $\sum_{i=1}^{2}M_{12}^{i\pm}=\left[M_{12}\right]_i;\ \sum_{i=1}^{2}M_{22}^{i\pm}=\left[M_{22}\right]_i$ відповідають зусиллям–моментам, які діють на j – й дискретний елемент на лінії розриву $x_1=x_{1j}$, аналогічно для $y_1=y_{1i.}$

Таким чином, маємо дві системи рівнянь двадцятого порядку. У співвідношеннях (2.26)–(2.35) введені наступні інтегральні характеристики для

несучих шарів (індекс 1 відповідає внутрішньому, індекс 2 – зовнішньому) і внутрішнім армуючим дискретним ребрам – i, j, а для легкого заповнювача – t.

Зусилля і моменти для несучих шарів можна визначити наступним чином:

$$T_{11}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{11}^i dz_i;\ T_{22}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{22}^i dz_i;\ T_{12}^i = k_s \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{12}^i dz_i; \tag{2.37}$$

$$T_{21}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{21}^i dz_i;\ T_{13}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{13}^i dz_i;\ T_{23}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{23}^i dz_i;$$

$$M_{11}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i \sigma_{xx}^i dz_i;\ M_{22}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i \sigma_{22}^i dz_i;\ M_{12}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i \sigma_{12}^i dz_i$$

$$M_{21}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i \sigma_{21}^i dz_i;$$

$$i = 1, 2$$

для дискретних армуючих ребер заповнювача:

$$T_{11i} = \int_{F_i} \sigma_{11i} dF_i,\quad T_{12i} = \int_{F_i} \sigma_{12i} dF_i, \tag{2.38}$$

$$T_{13i} = \int_{F_i} \sigma_{13i} dF_i,\quad M_{11i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{11i} dF_i,$$

$$M_{12i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{12i} dF_i;$$

$$T_{22j} = \int_{F_j} \sigma_{22j} dF_j, T_{21j} = \int_{F_j} \sigma_{21j} dF_j, \tag{2.39}$$

$$T_{23j} = \int_{F_j} \sigma_{23j} dF_j, M_{21j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{21j} dF_j,$$

Для легкого заповнювача:

$$\mathrm{T}_{11}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{\mathrm{z_t}}{\mathrm{R_{1t}}}\right) \sigma_{11}^{\mathrm{t}} \mathrm{dz_t};\qquad \mathrm{T}_{22}^t = \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{\mathrm{z_t}}{\mathrm{R_{2t}}}\right) \sigma_{22}^{\mathrm{t}} \mathrm{dz_t}; \tag{2.40}$$

$$T_{12}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_{1t}}\right) \sigma_{12}^t dz_t; \qquad T_{21}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_{2t}}\right) \sigma_{21}^t dz_t;$$

$$T_{13}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_{1t}}\right) \sigma_{13}^t dz_t; \qquad T_{23}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \left(1 + \frac{z_t}{R_{2t}}\right) \sigma_{23}^t dz_t;$$

$$M_{11}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_{1t}}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \qquad M_{22}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_{2t}}\right) \sigma_{22}^t dz_t;$$

$$M_{12}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_{1t}}\right) \sigma_{11}^t dz_t; \qquad M_{21}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_{2t}}\right) \sigma_{12}^t dz_t;$$

$$M_{13}^t = \int_{\frac{-h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_{1t}}\right) \left(1 + \frac{z_t}{R_{2t}}\right) \sigma_{13}^t dz_t;$$

Формули, що зв’язують напруження з відповідними деформаціями подібні до формул (2.11), (2.12).

Рівняння руху неоднорідної пружної структури доповнюються граничними і початковими умовами, що витікають з варіаційного принципу (2.25). У випадку вільного краю при $x = x_{10}$, або $x = \alpha_{1N}$ $(x_{10} \le x \le x_{1N})$ граничні умови мають вигляд:

- для несучих шарів:

$$T_{11}^i = 0, \qquad S^i + k_2 H^i = 0, \qquad \bar{T}_{13}^i = 0, M_{11}^i = 0, \qquad M_{12}^i = 0, (i = 1,2); \tag{2.41}$$

- для повздовжніх армуючих дискретних ребер заповнювача:

$$T_{11i} = 0, \bar{T}_{12i} = 0, \bar{T}_{13i} = 0, M_{11i} = 0, M_{12i} = 0, (i = \overline{1,N}). \tag{2.42}$$

У випадку жорсткого защемлення країв при $x = x_{10}$, або $x = x_{1N}$ граничні умови записуються:

- для несучих шарів:

$$u_1^i = u_2^i = u_3^i = \varphi_1^i = \varphi_2^i = 0, \ (i = 1, 2); \qquad (2.43)$$

- для повздовжніх армуючих дискретних ребер заповнювача:

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0, \ (i = \overline{1, I}). \qquad (2.44)$$

Початкові умови при $t = 0$ мають наступний вигляд:

– для несучих шарів:

$$u_1^i = u_2^i = u_3^i = \varphi_1^i = \varphi_2^i = 0, \ (i = 1, 2), \qquad (2.45)$$

$$\frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_2^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2^j}{\partial t} = 0;$$

– для повздовжніх армуючих дискретних ребер заповнювача:

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0, \ (i = \overline{1, I}), \qquad (2.46)$$

$$\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} = 0.$$

Висновки до другого розділу

В даному розділі дана постановка задач та вивід рівнянь неосесиметричних коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з урахуванням наявності легкого дискретно-симетричного заповнювача, армованого дискретними ребрами. Покладалося, що напружено–деформований стан неоднорідної тришарової пружної структури, а саме – несучих шарів і армуючих дискретних ребер, може бути визначений в рамках теорії оболонок і стрижнів згідно гіпотезам С.П. Тимошенка [172]. Кінематичні залежності для легкого заповнювача вибрані згідно лінійної моделі [174], а умови неперервності переміщень між заповнювачем і несучими шарами записані за зразком роботи [175]. Для виводу рівнянь коливань несиметричної неоднорідної тришарової структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Записуються вирази для потенціальної та кінетичної енергій несучих шарів, легкого заповнювача та відповідних дискретних армуючих ребер жорсткості, які виготовлені з відповідних матеріалів. Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі, отримано рівняння неосесиметричних коливань для несучих шарів, легкого заповнювача та відповідних повздовжніх і

поперечних дискретних армуючих елементів. Ці коливання несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами рівнянь математичної фізики 20 порядку. Приведені природні граничні та початкові умови для несучих шарів, легкого заповнювача і дискретних армуючих елементів заповнювача.

Розділ 3

Дослідження закономірностей протікання хвильових процесів в несиметричних тришарових циліндричних оболонкових структурах з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем

Виходячи з виведених рівнянь коливань несиметричних тришарових оболонкових структур та методів розв'язку вказаних задач, які викладені в другому та третьому розділах дисертації, метою даного розділу є розв'язок конкретних задач динамічної поведінки несиметричних тришарових циліндричних оболонок різної геометрії при нестаціонарних навантаженнях та дослідження закономірностей протікання хвильових процесів в оболонкових структурах з врахуванням легкого заповнювача, який може бути, армований дискретними ребрами. Викладені результати і аналіз чисельних розв'язків задач коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок обертання при осесиметричних нестаціонарних навантаженнях. Розглянуто задачі динамічного деформування циліндричних оболонок при різних конструкціях заповнювача. Проведено визначення перших власних частот коливань при різних геометричних і фізико-механічних параметрах несиметричних тришарових циліндричних оболонок згідно викладеної в дисертації теорії.

3.1. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем

Початок розгляду задач динамічної поведінки несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, армованим ребрами, покладений в дослідженні впливу несиметрії тришарової циліндричної оболонки з пінопластовим заповнювачем на її напружено-деформований стан при

внутрішньому нормальному осесиметричному імпульсному навантаженні [1,2,5]. Використання заповнювача з легких матеріалів дозволяє при невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити її згинальну жорсткість, а також значно збільшити її демпфуючі можливості. За своїми властивостями і конструкцією тришарові оболонки поділяються на симетричні і несиметричні. Симетричними вважаються тришарові оболонки, в яких серединна поверхня являється симетричною відносно заповнювача і несучих шарів. Дослідженню стаціонарних [181-183] і нестаціонарних процесів в симетричних шаруватих оболонках присвячено багато робіт [35-37,129]. Динамічна поведінка тришарових оболонок з несиметричною структурою пакету шарів вивчена набагато менше [123-126]. Разом з тим такі оболонки являються досить жорсткими конструкціями, і їх дослідження має як теоретичне, так і практичне значення.

Несиметричність даної тришарової циліндричної структури з легким заповнювачем складається в тому, що її несучі шари виготовлені з різних матеріалів. Передбачається ідеальне з'єднання між легким заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування. Дослідження нестаціонарних коливань несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем при вісесиметричному імпульсному внутрішньому навантаженні проведено на базі рівнянь (2.36). Для вісесиметричного випадку і при відсутності армуючих ребер ці рівняння приймають вигляд:

$$\frac{\partial T_{11}^i}{\partial x}+\frac{T_{13}^i}{R_1}-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h\frac{\partial^2 u_{01}^i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}^i}{\partial x}-T_{13}^i+\frac{2h_i}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial T_{12}^i}{\partial x}-\frac{T_{11}^i}{R_1}-\frac{1}{R_t h_t}M_{11}^t+\frac{1}{h_t}\frac{\partial M_{12}^t}{\partial x}-(1\pm\frac{h}{2R_i})\mathrm{P}_i=\rho_i h\frac{\partial^2 u_{02}^i}{\partial t^2}\qquad i=1,2$$

$$\frac{\partial T_{11}^t}{\partial x}+\frac{1}{R_t}T_{13}^t+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^t-\frac{1}{R_t}T_{13}^{*t}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{01}^t}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}^t}{\partial x}-T_{13}^{*t}+\frac{1}{R_t}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T_{13}^t}{\partial x}-\frac{1}{R_t}T_{11}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2}$$

Це система рівнянь дев'ятого порядку.

При дослідженні коливань несиметричної тришарової циліндричної оболонки з врахуванням легкого заповнювача при жорсткому защемленні країв граничні умови покладалися при $x = 0$, $x = L$ (L – довжина оболонки) у вигляді:

$$u_1^i(0,t) = u_3^i(0,t) = 0; \qquad i = 1,2$$

$$u_1^i(L,t) = u_3^i(L,t) = 0; \qquad i = 1,2 \tag{3.2}$$

Нульові початкові умови при $t = 0$ покладалися:

$$u_1^i(x,0) = \frac{\partial u_1^i(x,0)}{\partial t} = 0; \qquad i = 1,2$$

$$u_3^i(x,0) = \frac{\partial u_3^i(x,0)}{\partial t} = 0; \qquad i = 1,2 \tag{3.3}$$

На оболонку діє вісесиметричне внутрішнє імпульсне навантаження у вигляді:

$$P_3 = A\sin\frac{\pi t}{T}[\eta(t) - \eta(t-T)]. \tag{3.4}$$

В розрахунках покладалося $A=10^6$Па; T = $50\cdot10^{-6}$с при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах:

L = 0,25м; R = 0,20м; L/h_1= 250; $h_1 = h_3$ = 0,001 м;; R/h_1 =200; h_t/h_1 = 6; h/R=0,04.

Відповідні задачі розв'язані методом скінчених елементів [184].

Розглянемо шість випадків динамічної поведінки тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем при нестаціонарному навантаженні з врахуванням параметрів, які наведені вище. Отримані чисельні результати дозволяють характеризувати напружено – деформований стан тришарової пружної структури циліндричного типу в будь–який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі згідно вищевказаних постановок. Розрахунки проводилися в інтервалі часу $0 \le t \le 40T$.

1випадок. 1 – внутрішній несучий шар, 2 – заповнювач, 3 – зовнішній несучий шар; $h_1 = h_3 = 1$ мм, модуль пружності $E_1 = 7\cdot10^{10}$ Па, щільність $\rho_1 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3; коефіцієнт Пуасона $\nu = 0{,}3$; $h_t = 6$ мм; для h_t відношення модулів пружності $E_1/E_t = 50$; і $E_1/E_t = 500$, щільність $\rho_t = 25$ кг/м^3, коефіцієнт Пуасона ν_t= 0,33.

Таким чином, маємо симетричну тришарову оболонку з легким заповнювачем, яка навантажена внутрішнім імпульсним тиском. Розглянуті два

варіанти властивостей легкого заповнювача: перший (1) E_1/E_t = 50; і другий (2) – E_1/E_t = 500. На Рис 3.1 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединній поверхні легкого заповнювача симетричної тришарової циліндричної оболонки w_{ij} – індекс i означає номер випадку розташування шарів (i =3), а j (j = $\overline{1,2}$) номер властивості заповнювача. Оскільки графіки максимальних прогинів симетричні відносно середини оболонки для випадку жорсткого защемлення країв оболонки, то на лівій частині рисунку наведені графіки прогинів (1), а на правій – (2). Слід зауважити, що максимуми прогинів для симетричного випадку конструкції тришарової структури досягаються при t = 7,0Т.

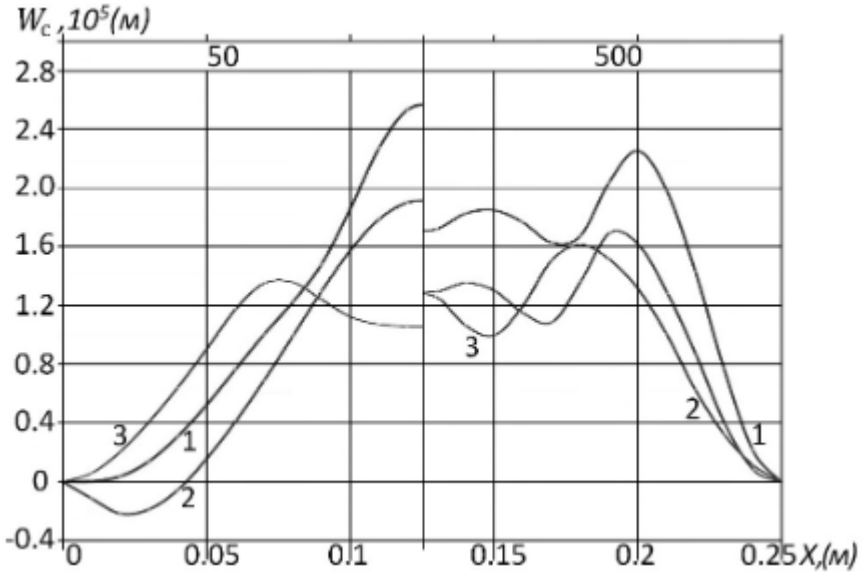


Рис. 3.1. Максимальні прогини $u_3^t(x)$ в серединній поверхні легкого заповнювача симетричної і несиметричної тришарової циліндричної оболонки

Аналіз графічного матеріалу дав можливість зробити наступні висновки: із рис 3.1 слідує, що максимальна величина прогинів по просторовій координаті (криві з індексом 1) зі зменшенням відношення E_1/E_t стає більшою на 14%; також суттєво змінюється якісна картина характеру коливань, які стають хвилеподібними. Більш суттєва різниця спостерігається для колових напружень по просторовій координаті $6_{22}^t(x)$ – (Рис. 3.2). З графіків видно, що для співвідношення (1) максимальне значення напруження $6_{22}^t(x)$ досягає значення

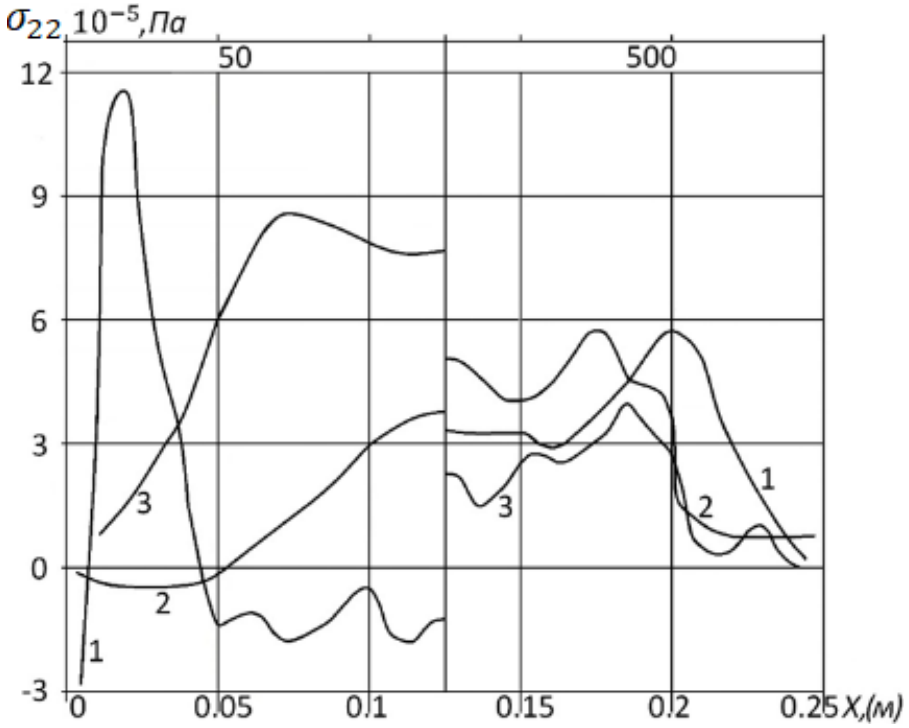


Рис. 3.2. Максимальні напруження $6^t_{22}(x)$ в серединній поверхні легкого

заповнювача симетричної і несиметричної тришарової циліндричної оболонки $11{,}5\cdot10^5$ Па (крива з індексом 1, зліва), а для співвідношення (2) таке ж напруження $6^t_{22}(x)$ в 2,1 рази менше (крива з індексом 1, справа). Хвилеподібний характер коливань зберігається в обох випадках. Треба відзначити, що отримані результати добре узгоджуються з результатами статті [114].

Розглянемо другий випадок несиметричної тришарової оболонки з легким заповнювачем, яка навантажена внутрішнім імпульсним тиском. Досліджено два варіанти властивостей легкого заповнювача: перший (1) $(E_1+E_3)/2E_t = 50$; і другий (2) – $(E_1+E_3)/2E_t = 500$; 1 – внутрішній несучий шар, t – заповнювач, 3 – зовнішній несучий шар; $h_1 = h_3 = 1$мм; $h_t = 6$ мм; для h_1 модуль пружності $E_1 = 7\text{x}10^{10}$ Па, щільність $\rho_1 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3; для h_3 модуль пружності $E_3 = 2\text{x}10^{11}$ Па, щільність $\rho_3 = 7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3; коефіцієнти Пуасона $\nu = 0{,}33$, для h_t відношення модулів пружності $(E_1+E_3)/2E_t = 50$; і $(E_1+E_3)/2E_t = 500$, щільність $\rho_t = 25$ кг/м^3, коефіцієнт Пуасона $\nu_t = 0{,}3$.

На рис 3.1 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединній поверхні легкого заповнювача несиметричної циліндричної оболонки (криві з індексом 2). Криві максимальних прогинів побудовані

аналогічно першому випадку. Максимуми прогинів для другого випадку несиметричної конструкції тришарової структури досягаються при (1) t = 5,15Т, а для (2) при t = 5,3Т.

Аналіз графічного матеріалу дав можливість зробити наступні висновки: із рис 3.1 слідує, що максимальна величина прогинів по просторовій координаті (криві з індексом 2) зі зменшенням відношення $(E_1+E_3)/2E_t$ стає більшою на 16%; також суттєво змінюється якісна картина характеру коливань, які стають хвилеподібними. Більш суттєва різниця спостерігається для колових напружень по просторовій координаті $6^t_{22}(x)$ – (Рис. 3.2). З графіків видно, що для співвідношення (1) максимальне значення напруження $6^t_{22}(x)$ досягає значення $4{,}4\cdot10^5$ Па (крива з індексом 2, зліва), а для співвідношення (2) таке ж напруження $6^t_{22}(x)$ в 1,27 рази більше (крива з індексом 2, справа). Хвилеподібний характер коливань зберігається у випадку (2).

Розглянемо третій випадок. $h_1 = h_3$ =1 мм; h_t = 6 мм; для h_1 модуль пружності E_1 = 2x10^{11} Па, щільність $\rho_1 = 7{,}8\cdot10^3$ кг/м3; h_3 модуль пружності E_3 = 7x10^{10} Па, щільність $\rho_3 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, коефіцієнти Пуасона ν = 0,33; для h_t відношення модулів пружності $(E_1+E_3)/2E_t$ = 50; і $(E_1+E_3)/2E_t$ = 500, щільність ρ_t = 25 кг/м^3, коефіцієнт Пуасона ν_t = 0,3.

На рис 3.1 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединній поверхні легкого заповнювача несиметричної циліндричної оболонки (криві з індексом 3). Криві максимальних прогинів побудовані аналогічно першим випадкам. Максимуми прогинів для другого випадку несиметричної конструкції тришарової структури досягаються при (1) t = 5,05Т, а для (2) при t = 5,6Т.

Аналіз графічного матеріалу дав можливість зробити наступні висновки: із рис 3.1 слідує, що максимальна величина прогинів по просторовій координаті (криві з індексом 3) зі зменшенням відношення $(E_1+E_3)/2E_t$ стає меншою на 52%; також суттєво змінюється якісна картина характеру коливань, які стають більш хвилеподібними. Більш суттєва різниця спостерігається для колових напружень

по просторовій координаті $6_{22}^{t}(x)$ – (Рис. 3.2). З графіків видно, що для співвідношення (1) максимальне значення напруження $6_{22}^{t}(x)$ досягає значення $8{,}3\cdot10^{5}$ Па (крива з індексом 3, зліва), а для співвідношення (2) таке ж напруження σ_{yy}^{c} в 1,89 рази менше (крива з індексом 3, справа). Хвилеподібний характер коливань зберігається у випадку (2).

Завдяки отриманим залежностям максимальних прогинів серединної поверхні легкого заповнювача несиметричної тришарової циліндричної оболонки, як функції просторової координати, можна помітити, що несиметричність тришарової структури значно впливає на її динамічну поведінку. Так у випаду коли імпульсне навантаження діє на сталевий несучий шар Рис. 3.1 (криві 3), то зі зменшенням відношення $(E_1+E_3)/2E_t$ максимальний прогин стає меншим на 14%; а у випадку коли імпульсне навантаження діє на несучий шар з АМГ-6 (криві 2), то зі зменшенням відношення $(E_1+E_3)/2E_t$ максимальний прогин стає більшим на 11%; у випадку, коли імпульсне навантаження діє на симетричну тришарову циліндричну оболонку з легким заповнювачем (криві 1), то зі зменшенням відношення E_1/E_2 максимальні прогини збільшуються на 14%. Якщо порівняти максимальні прогини для відношень модулів пружності (1) і (2), для симетричної структури (криві 1) і для несиметричної (криві 2, 3), то відношення складе 84% (1) і 41% (2). Ще більша різниця спостерігається для максимумів колових напружень по просторовій координаті $6_{22}^{t}(x)$ Рис. 3.2 для відношень модулів пружності (1) і (2), для симетричної структури (криві 1) і для несиметричної (криві 2, 3), то відношення максимумів $6_{22}^{t}(x)$ складе 2,63 рази (1) і 1,32 рази (2). Таким чином, можна зробити висновок, що використання «дискретно-структурного» підходу дає можливість детально дослідити динамічну поведінку несиметричних тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях і вибрати раціональну конструкцію тришарової структури.

3.2. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань симетричних тришарових циліндричних оболонок з

дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем

Досить розповсюджене застосування в техніці знайшли тришарові конструкції у вигляді оболонок різної геометрії. Застосування таких оболонкових структур при конструюванні та виготовленні обладнання і трубопроводів на енергоблоках АС потребує відповідних практичних і теоретичних досліджень. Використання заповнювача з легких матеріалів дозволяє при невеликому збільшенні ваги конструкції істотно підвищити її згинальну жорсткість і покращити її теплоізоляційну властивість. Цьому також сприяють армуючі елементи теплоізоляційного шару, які досить істотно підвищують міцність тришарової структури. Часто такі оболонки знаходяться при вісесиметричних експлуатаційних навантаженнях. Тришарова циліндрична оболонка з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішнього (індекс 1), зовнішнього (індекс 2) несучих шарів, теплоізоляційного заповнювача (індекс t) і набору дискретних ребер (індекс j), що жорстко з'єднані з вказаними несучими шарами. Оболонка має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній криволінійній системі координат x, z. Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при z=0 співпадає з осьовою лінією; координатна лінія z є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні (Рис. 3.3).

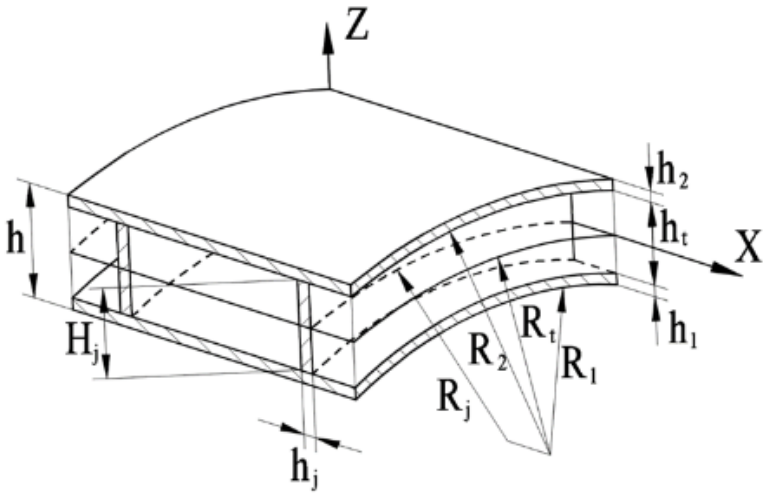


Рис. 3.3. Фрагмент тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами жорсткості

У випадку несиметричної тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, розташованих по лініях кривизн оболонки, рівняння (2.36) приймають вигляд:

$$\frac{\partial T_{11}^i}{\partial x}+\frac{T_{13}^i}{R_{1i}}-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{11}^i}{\partial x}-T_{13}^i+\frac{2h_i}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i\frac{h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2};\qquad i=1,2 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial T_{13}^i}{\partial x}-\frac{T_{11}^i}{R_{1i}}-\frac{1}{R_{t1}h_t}M_{11}^t+\frac{1}{h_t}\frac{\partial M_{13}^t}{\partial x}-\left(1\pm\frac{h_i}{2R_{1i}}\right)\mathrm{P}_i=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{11}^t}{\partial x}+\frac{1}{R_{1t}}(T_{11}^t-T_{13}^t)+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^t}{\partial x}-T_{13}^t+\frac{1}{R_{t1}}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}^t}{\partial x}-\frac{1}{R_t}T_{11}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2}$$

$$\left[\mathrm{T}_{11}\right]_{\mathrm{j}}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{F}_{\mathrm{j}}\frac{\partial^2\mathrm{u}_{1\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},$$

$$\left[\mathrm{T}_{13}\right]_{\mathrm{j}}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{F}_{\mathrm{j}}\frac{\partial^2\mathrm{u}_{3\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},$$

$$\left[\mathrm{M}_{11}\right]_{\mathrm{j}}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{I}_{\mathrm{krj}}\frac{\partial^2\varphi_{1\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},$$

$\mathrm{P}_1(x,t),\mathrm{P}_2(x,t)$ – розподілене вісесиметичне навантаження.

Це дві системи рівнянь дев’ятого порядку. Відзначимо, що однією з складностей задач коливань неоднорідних пружних структур з врахуванням дискретності ребер, армуючих легкий заповнювач, є наявність розривних коефіцієнтів в трьох останніх рівняннях коливань (3.5). Виходячи з цього, будуються чисельні алгоритми в гладкій області і “склеюються” на лініях розривів з врахуванням кінематичних умов спряження. Підхід, представлений в даній роботі, є розвитком відомих чисельних алгоритмів для розв’язку задач теорії неоднорідних оболонок з врахуванням дискретності підкріплюючих ребер [176]. Зауважимо, що наявність сучасних обчислювальних скінчено-елементних комплексів, дозволяє отримувати чисельні рішення подібних задач [185 - 187].

Розглянемо симетричну тришарову циліндричну оболонку з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості. В цьому випадку несучі шари мають однакову товщину і виготовлені з однакових матеріалів. Дослідження напружено-деформованого стану вказаної оболонки розглянуто при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах:

$$\frac{L}{h_1} = 40;\ h_1 = h_2 = 0{,}01\text{м};\frac{R_1}{h_1} = 10;\frac{H_j}{h_1} = 2;\ F_j = H_j h_j = 2 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}\text{Па};\ \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_j = 0.3;\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2.7 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$$

h/R =0,4.

Для модуля пружності легкого заповнювача E_t відношення до модулів пружності $E_1^1/E_1^t = 50;\ E_1^1/E_1^t = 500$; щільність ρ_t = 25 кг/м^3; коефіцієнт Пуасона ν_t = 0,33.

На оболонку діє вісесиметричне внутрішнє імпульсне навантаження у вигляді (3.4). Армуючі елементи розташовані в точках $x_j = [11 + (k-1) \cdot 15] \cdot \Delta x; k = 1 \div 5;\ \Delta x = L/80$. В подальших розрахунках покладалося k = 5.

Поставлена задача розв'язана методом скінчених елементів [184].

Розглянемо два випадки динамічної поведінки симетричної тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при нестаціонарному навантаженні з врахуванням параметрів, які наведені вище. Отримані чисельні результати дозволяють характеризувати напружено – деформований стан тришарової пружної структури циліндричного типу в будь–який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі згідно вищевказаних постановок. Розрахунки проводилися в інтервалі часу $0 \le t \le 40T$.

1-й випадок. 1 – внутрішній несучий шар, t – легкий заповнювач, j – армуючі ребра, 2 – зовнішній несучий шар; $h_1 = h_2$ = 0,01 м, модуль пружності $E_{1,2}$ = 7·10^{10} Па, щільність $\rho_{1,2}$=2,7·10^3 кг/м^3; коефіцієнт Пуасона $\nu_{1,2}$= 0,3; h_t = 0,02 м, для E_1^t відношення модулів пружності E_1^1/E_1^t = 50, щільність ρ_t = 25 кг/м^3, коефіцієнт Пуасона ν_t = 0,33; для армуючих ребер h_j = 0,02 м, модуль пружності E_j = 7·10^{10} Па, щільність ρ_j = 2,7·10^3 кг/м^3; коефіцієнт Пуасона ν_j = 0,3.

Таким чином, маємо симетричну тришарову оболонку з легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості, яка навантажена внутрішнім імпульсом тиску.

Отримані чисельні результати дозволяють характеризувати напружено-деформований стан тришарової пружної структури циліндричного типу в будь–який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі згідно вищевказаних постановок. Розрахунки проводилися в інтервалі часу $0 \le t \le 40T$. Зокрема, на Рис. 3.4 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в моменти часу t = 5,95T (в цей момент величини u_3^1 і u_3^2 досягають максимального значення в інтервалі розрахунку по часу t).

Крива з індексом 1 відповідає u_3^1 (внутрішній шар), з індексом 2 – u_3^2 (зовнішній шар). Врахування дискретності розміщення армуючих ребер візуально спостерігається на рисунку – це точки з'єднання кривих з індексом 1 і 2. Перша власна частота даної тришарової структури складає 1848,3 Hz.

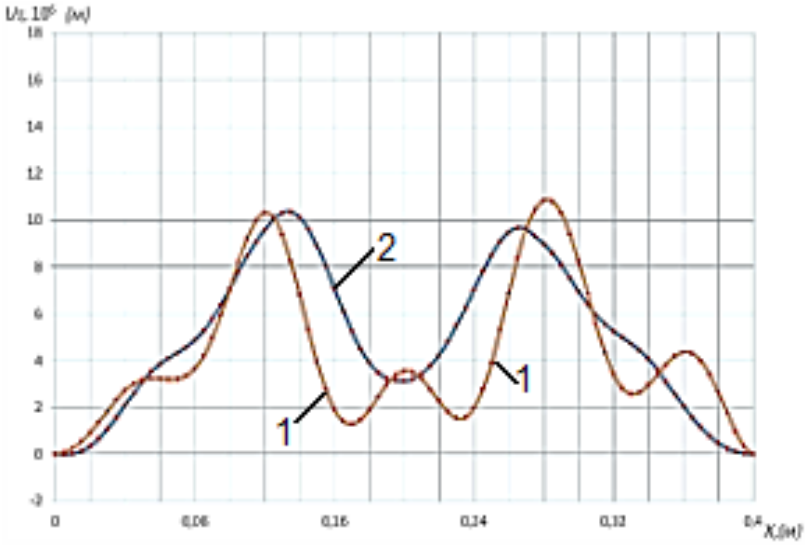


Рис. 3.4. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в момент часу t = 5,95T для E_1^1/E_1^t = 50.

2 випадок. 1 – внутрішній несучий шар, t – теплоізолюючий заповнювач, j – армуючі ребра, 2 – зовнішній несучий шар; $h_1 = h_2$ = 0,01 м, модуль пружності $E_{1,2}$ = $7 \cdot 10^{10}$ Па, щільність $\rho_{1,3} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; коефіцієнт Пуасона $\nu_{1,2}$ = 0,3; h_t = 0,02 м,

для E_1^t відношення модулів пружності E_1^1/E_1^t= 500, щільність ρ_t = 25 кг/м3, коефіцієнт Пуасона ν_t = 0,33; для армуючих ребер h_j = 0,02 м, модуль пружності $E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па, щільність $\rho_j = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; коефіцієнт Пуасона ν_j = 0,3.

На Рис. 3.5 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в моменти часу t = 3,50T (в цей момент величини u_3^1 і u_3^2 досягають максимального значення в інтервалі розрахунку по часу t). Врахування дискретності розміщення армуючих ребер спостерігається візуально на рисунку – це точки з'єднання кривих з індексом 1 і 2. Перша власна частота даної тришарової структури складає 1336,5 Hz.

В порівнянні з першим випадком можна зробити висновок, що при зменшенні жорсткості легкого заповнювача максимальні нормальні прогини зовнішнього несучого шару u_3^2 збільшилися на 15%, а максимальні нормальні прогини внутрішнього несучого шару u_3^1 зменшилися на 55%. При цьому перша власна частота конструкції зменшилася на 38%. Коливальні процеси мають досить виражений хвильовий характер.

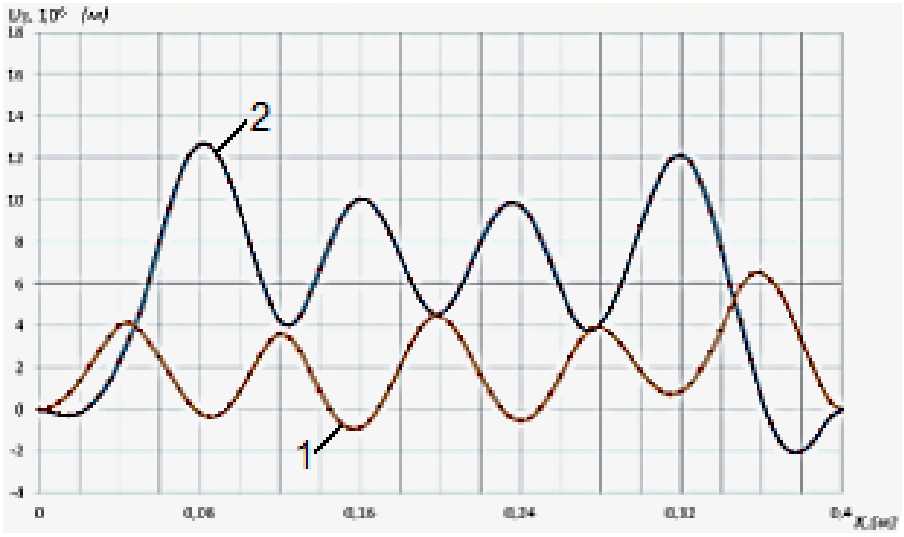


Рис. 3.5. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від координати x в момент часу t = 3,50T для E_1^1/E_1^t= 500.

Для визначення впливу легкого заповнювача на характер коливань тришарової структури при нестаціонарному експлуатаційному навантаженні були проведені розрахунки коливальних процесів тришарової циліндричної оболонки лише з симетрично-дискретним заповнювачем.

На Рис. 3.6 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 тришарової циліндричної оболонки без легкого заповнювача від просторової координати x в моменти часу $t = 3{,}5T$ (в цей момент величини u_3^1 і u_3^2 досягають максимального значення в інтервалі розрахунку по часу t). Врахування дискретності розміщення армуючих ребер візуально спостерігається на рисунку – це точки з'єднання кривих з індексом 1 і 2. Отримані результати добре узгоджуються з результатами, які наведені в роботі [139]. Перша власна частота даної тришарової структури складає 2010 Hz.

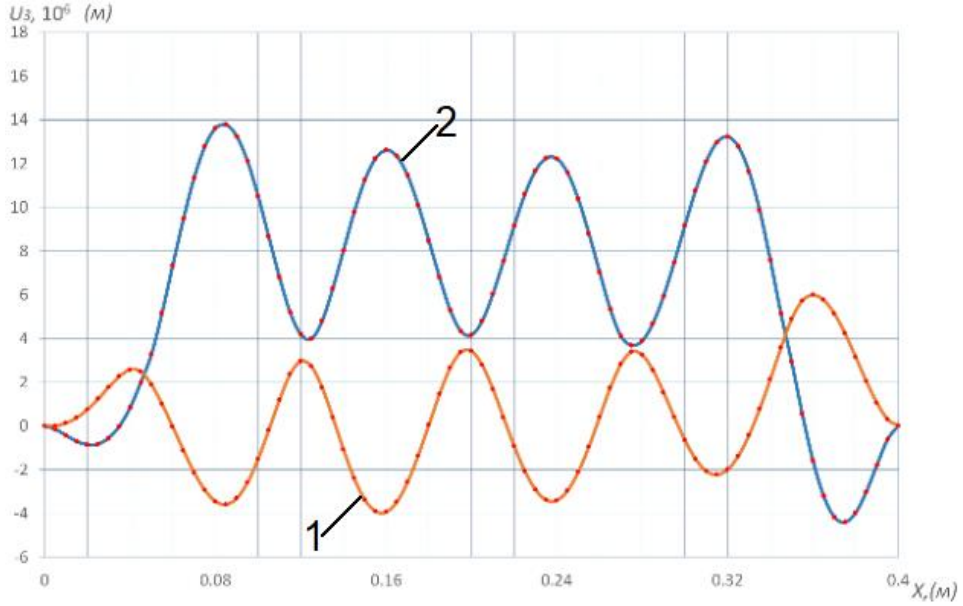


Рис. 3.6. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в момент часу $t = 3{,}5T$ без легкого заповнювача.

Виходячи з аналізу чисельних результатів можна зробити висновок, що легкий заповнювач значно впливає на характер коливань тришарової структури. В порівнянні з першим випадком тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем максимальні нормальні прогини зовнішнього несучого

шару u_3^2 зменшилися на 73%, а максимальні нормальні прогини внутрішнього несучого шару u_3^1 збільшилися на 26%. В порівнянні з другим випадком – максимальні нормальні прогини зовнішнього несучого шару u_3^3 зменшилися на 12%, а максимальні нормальні прогини внутрішнього несучого шару u_3^2 збільшилися на 9%. Істотно змінюється перша власна частота даної тришарової структури: для першого випадку вона складає 9%, а для другого випадку – 50%.

Для дослідження впливу геометричних параметрів симетричної тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким заповнювачем на характер її поведінки при нестаціонарних навантаженнях проведемо розрахунки при наступних товщинах несучих шарів h_i = 0,005 м; і товщиною легкого заповнювача h_t = H_j = 0,01 м. h/R = 0,2. Інші параметри залишаються без змін.

На Рис. 3.7 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в моменти часу t = 2,2T для E_1^1/E_1^t = 50. Перша власна частота даної тришарової структури складає 2135 Hz.

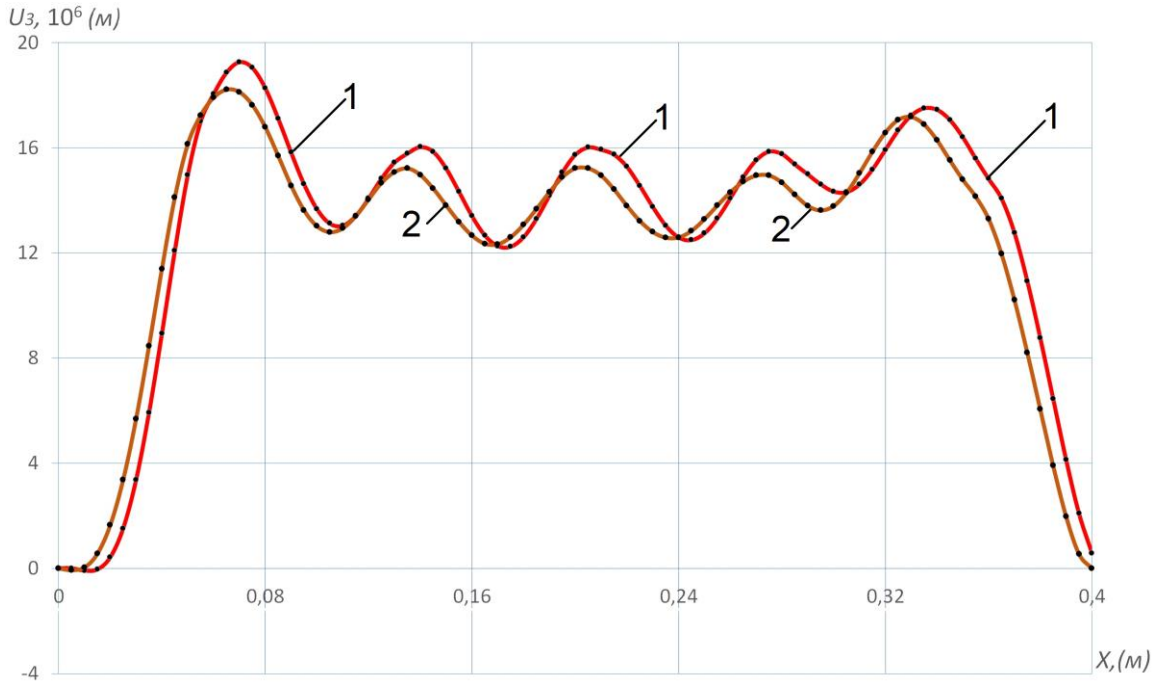


Рис. 3.7. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в момент часу t = 2,2Т для E_1^1/E_1^t= 50.

На Рис. 3.8 приведені порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^{i} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати *x* в момент часу *t* = 2,2T для E_1^1/E_1^t = 50.

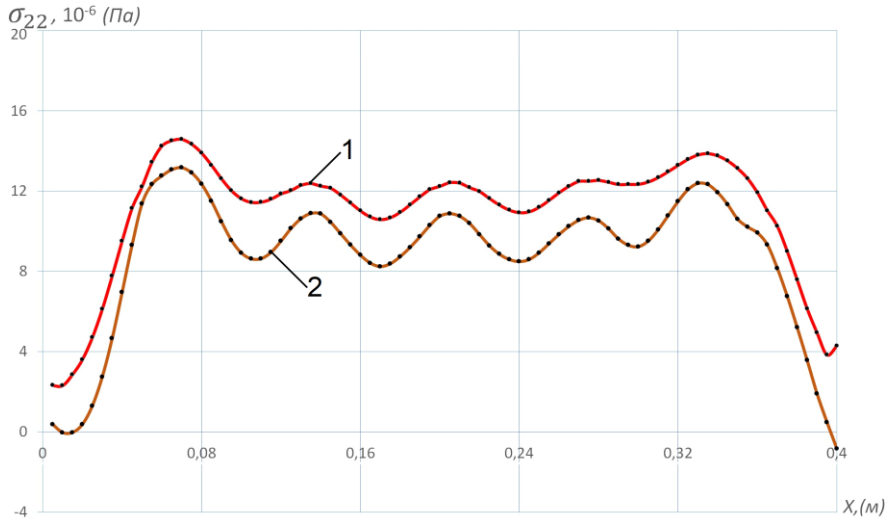


Рис. 3.8. Порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^{i} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати *x* в момент часу *t* = 2,2T для E_1^1/E_1^t= 50.

На Рис. 3.9 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати *x* в моменти часу *t* = 2,25T для E_1^1/E_1^t= 500. Перша власна частота даної тришарової структури складає 1954 Hz.

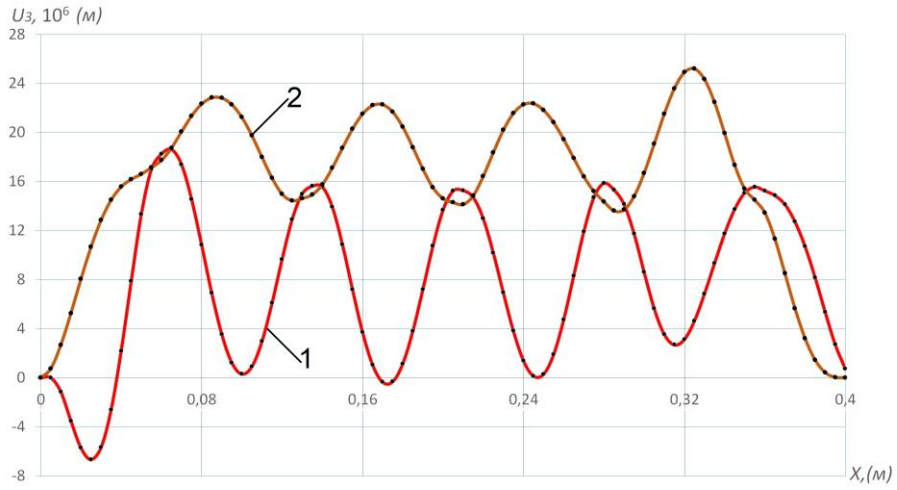


Рис. 3.9. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати *x* в момент часу *t* = 2,25T для E_1^1/E_1^t= 500.

На Рис. 3.10 наведені порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в моменти часу t = 2,0Т без легкого заповнювача. Перша власна частота даної тришарової структури складає 1954 Hz.

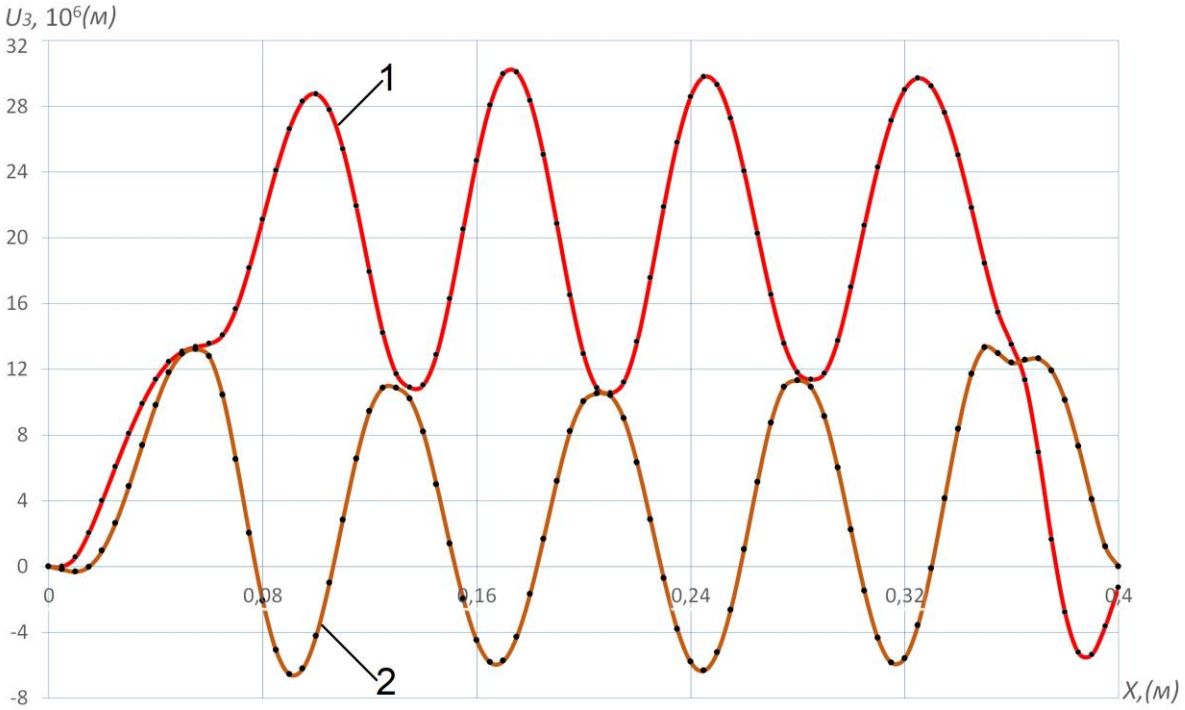


Рис. 3.10. Порівняльні графіки максимальних прогинів коливальних процесів в серединних поверхнях несучих шарів u_3^1 і u_3^2 від просторової координати x в момент часу t = 2,0Т без легкого заповнювача.

При розрахунках тришарових оболонок на міцність конструктору необхідно знати розподіл максимальних напружень в елементах тришарової структури. В зв'язку з цим проведемо дослідження напруженого стану даної симетричної тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким заповнювачем.

На Рис. 3.11 приведені порівняльні графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^{\text{і}}$ в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу t = 2,25Т для E_1^1/E_1^t= 500.

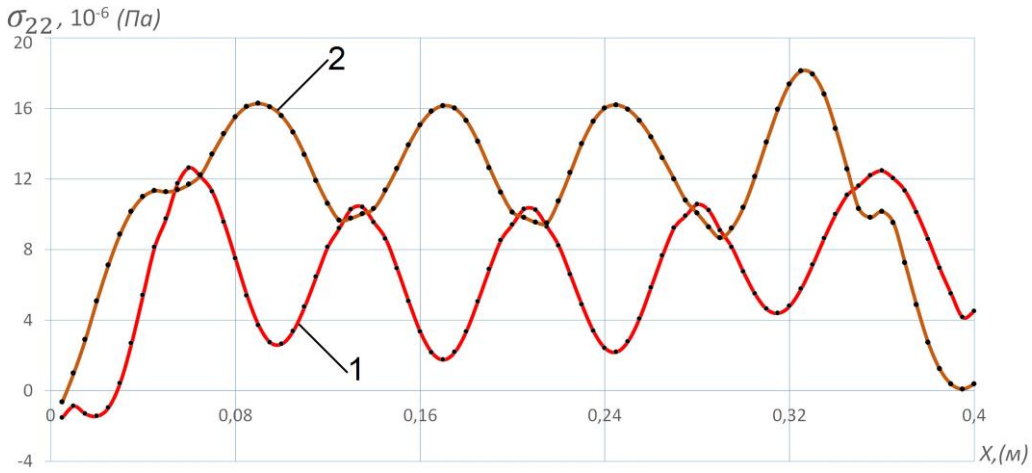


Рис. 3.11. Порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^{i} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати *x* в момент часу *t* = 2,25T для E_1^1/E_1^t= 500.

На Рис. 3.12. наведені порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^{i} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу *t* = 2,0T без легкого заповнювача.

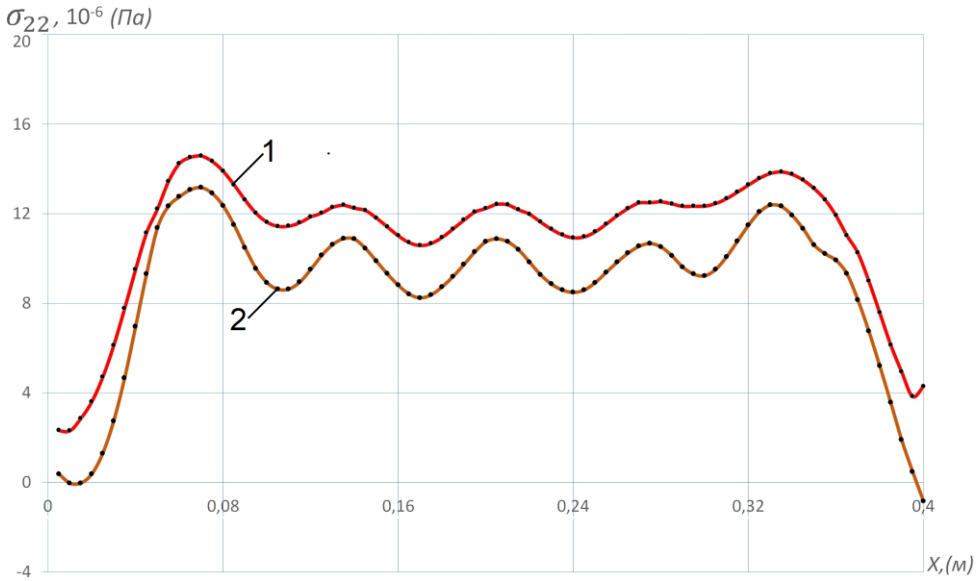


Рис. 3.12. Порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^{i} в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати *x* в момент часу *t* = 2,0T без легкого заповнювача.

Аналіз отриманих чисельних результатів вказує на значний вплив конструкції дискретно-симетричного з легким, армованим ребрами, заповнювача на динамічні характеристики тришарових циліндричних оболонок. Так для тришарової циліндричної оболонки з таким заповнювачем при відношенні

h/R = 0,4 перша власна частота змінюється в 1,5 рази, а при h/R = 0,2 – лише на 10 відсотків.

3.3. Розрахунок нестаціонарних вимушених осесиметричних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем

Часто з конструктивних міркувань, або вимог до міцності виробу, використовуються несиметричні тришарові структури. В зв'язку з цим виконаємо дослідження динамічної поведінки несиметричної тришарової циліндричної оболонки при нестаціонарних навантаженнях. Несиметричність такої конструкції полягає в тому, що її несучі шари виготовлені з різних матеріалів або з різною товщиною. Дослідимо конкретний випадок, коли несучі шари виготовлені з різних матеріалів, а всі армуючі елементи виготовлені з матеріалу одного з несучих шарів. В цьому випадку система рівнянь (3.5) розпадається на дві системи не лише за рахунок наявності армуючих ребер, а також за рахунок того, що несучі шари виготовлені з різних матеріалів. Відповідна початково-крайова задача розв’язується з допомогою скінчено-елементного методу [184].

Створена скінчено-елементна модель оболонки, що відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом зовнішніх навантажень має вигляд:

$$\Pi = E - W\,, \tag{3.6}$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал зовнішніх навантажень.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (3.6) набуває вигляду:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E}\left(E^{(e)} - W^{(e)}\right) = \sum_{e=1}^{E}\pi^{(e)} \tag{3.7}$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{3.8}$$

відповідають співвідношенням:

$$[K]=\sum_{e=1}^{E}\left[k^{(e)}\right], \tag{3.9}$$

$$\{F\}=-\sum_{e=1}^{E}\left\{f^{(e)}\right\}. \tag{3.10}$$

Досліджений динамічний напружено-деформований стан двох типів несиметричної тришарової циліндричної оболонки з несучими шарами, які виготовлені з різних матеріалів.

Геометричні і фізико-механічні параметри першого типу оболонки наступні:

L = 0,4 м; h_1 = 0,01 м = h_2; h_t = 0,02 м; R_1 = 0,08 м; R_2 = 0,11 м; R_t = 0,10 м;

$E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$Па; $\nu_2 = \nu_j$ = 0,3; $\rho_2 = \rho_j$ = 2,7$\cdot 10^3$ $кг/м^3$;

$E_1 = 2 \cdot 10^{11}$Па; ν_1 = 0,3; $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$; відношення модулів пружності несучих шарів і легкого заповнювача: $(E_1 + E_2)/2E_t$ = 50; $(E_1 + E_2)/2E_t = 500$; ρ_t = 25 $кг/м^3$, h/R =0,4.

Для другого типу оболонки:

L = 0,4 м; h_1 = 0,01 м = h_2; h_t = 0,02 м; R_1 = 0,08 м; R_2 = 0,11 м; R_t = 0,10 м;

$E_1 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$Па; $\nu_1 = \nu_j$ = 0,3; $\rho_1 = \rho_j$ = 2,7$\cdot 10^3$ $кг/м^3$;

$E_2 = 2 \cdot 10^{11}$Па; ν_2 = 0,3; $\rho_2 = 7{,}8 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$; відношення модулів пружності несучих шарів і легкого заповнювача: $(E_1 = E_2)/2E_t$ = 50; $(E_1 = E_2)/2E_t = 500$; ρ_t = 25 $кг/м^3$, h/R = 0,4.

В обох моделях використаний тривимірний об'ємний скінчений елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів. Створена модель (Рис. 3.13), включала 19200 скінчених елементів і 22680 вузлів.

На оболонку діє вісесиметрине імпульсне навантаження (3.4). Армуючі елементи розміщувалися в точках:

x_j = [11 + (k - 1)15]Δx; Δx = L/80 = 0,4м/80 = 0,05м. k = 1-5.

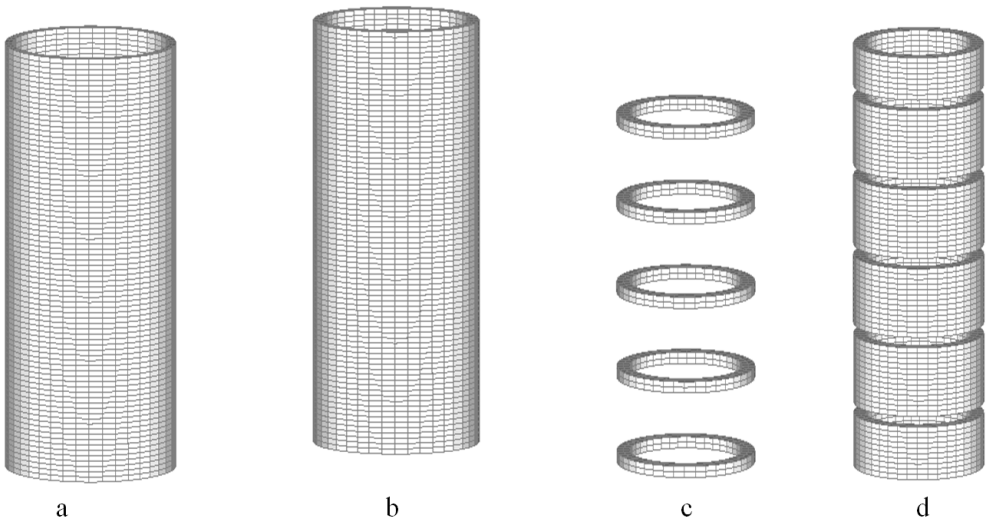


Рис. 3.13. a – верхній несучий шар, b – нижній несучий шар, c – армуючі ребра, d – легкий заповнювач.

На Рис. 3.14, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6, а внутрішній – зі сталі (перший випадок). Легкий заповнювач відсутній. Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу t = 3,0T, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2517 Гц.

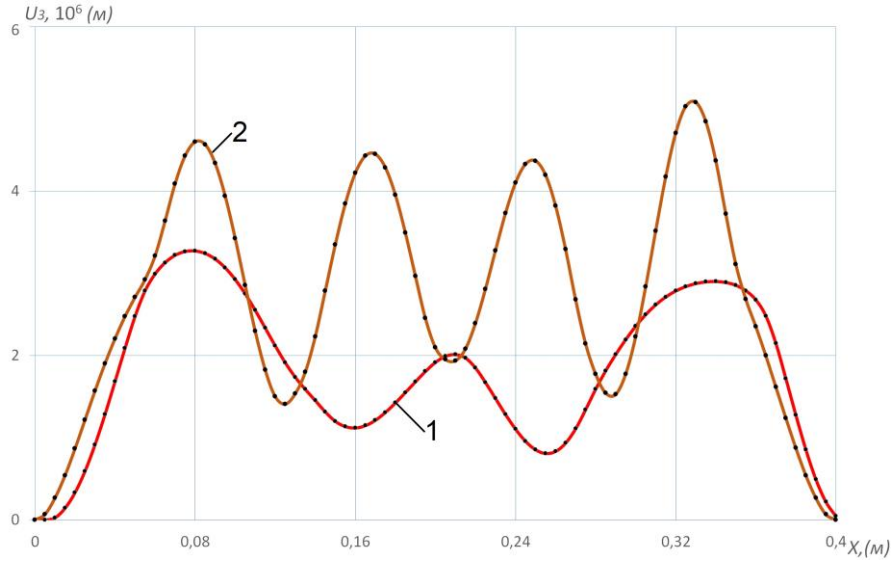


Рис. 3.14. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок)

На Рис. 3.15, в приведених масштабах, наведені залежності напруження σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки. Легкий заповнювач відсутній.

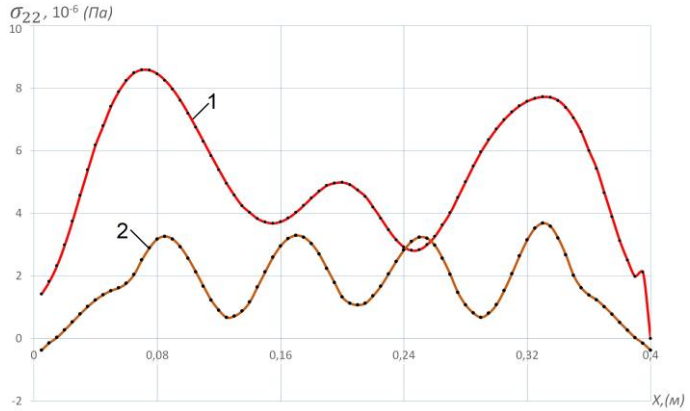


Рис. 3.15. Залежності напруження σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок).

На Рис. 3.16, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6, а внутрішній – зі сталі (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 50$. Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу t = 3,05Т, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2715 Гц.

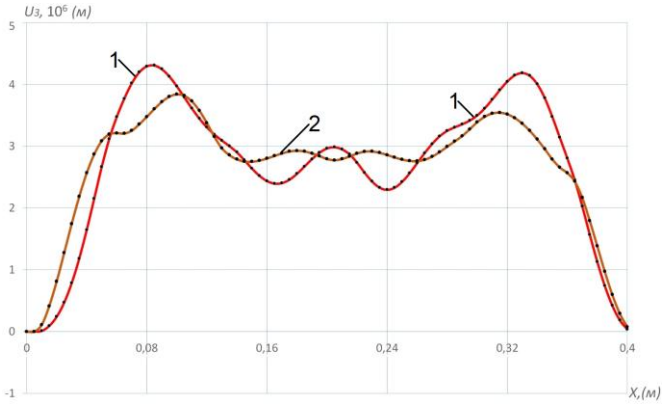


Рис. 3.16. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 50$

На Рис. 3.17, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6 (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1 = E_2)/2E_t = 50$.

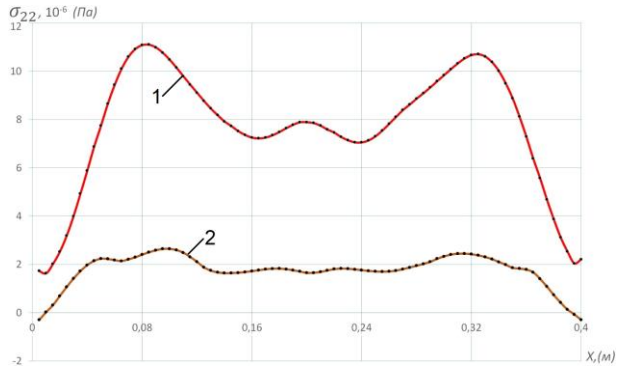


Рис. 3.17. Залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t=50$.

На Рис. 3.18, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, які досягаються в момент часу t = 3,15T, а у оболонки зовнішній несучий шар виготовлений зі сплаву АМГ-6, а внутрішній – зі сталі (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t$ = 500. Власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2549 Гц.

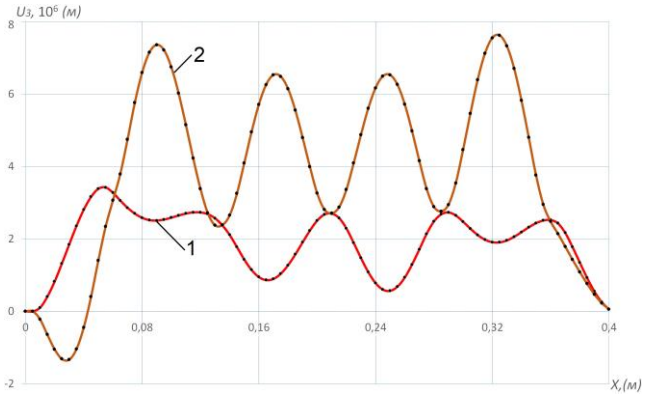


Рис. 3.18. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t$ = 500.

На Рис. 3.19, в приведених масштабах, наведені залежності напруження σ_{22} від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 500$. Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу $t = 3{,}15T$, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2549 Гц.

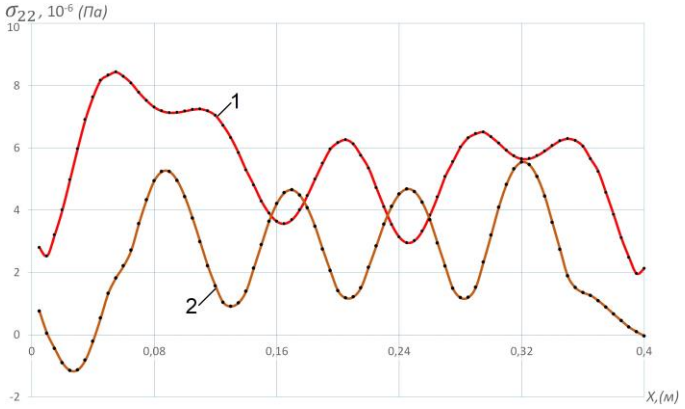


Рис. 3.19. Залежності напруження σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (перший випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 500$.

На Рис. 3.20, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сталі, а внутрішній – зі сплаву АМГ-6 – (другий випадок). Легкий заповнювач відсутній.

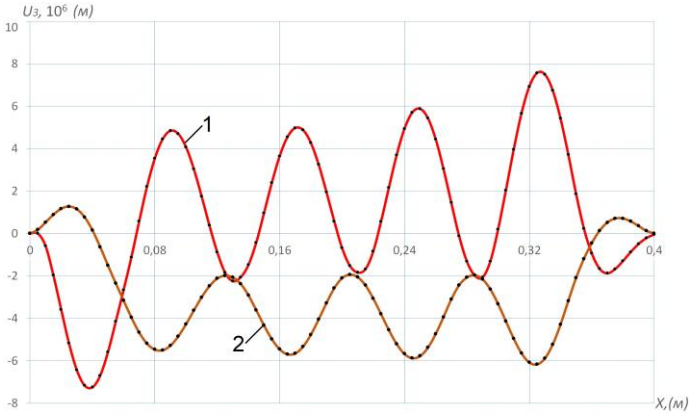


Рис. 3.20. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок) Легкий заповнювач відсутній.

Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу t = 2,5Т, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2394 Гц.

На Рис. 3.21, в приведених масштабах, наведені залежності напруження σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок).

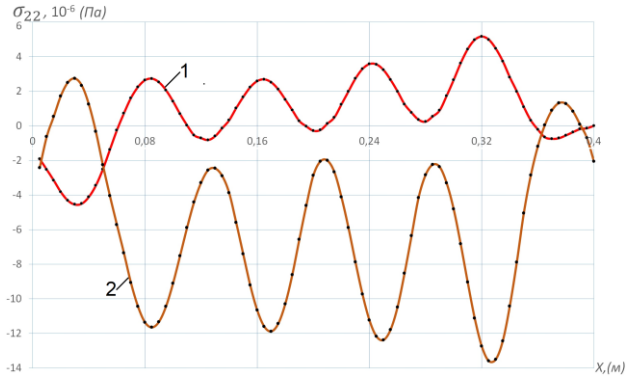


Рис. 3.21. Залежності напруження σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач відсутній.

На Рис. 3.22, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки, у якої зовнішній несучий шар виготовлений зі сталі, а внутрішній зі сплаву АМГ-6– (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t$ = 50. Максимуми досягаються в момент часу t = 3,35Т, а власна перша частота коливань такої конструкції несиметричної тришарової циліндричної оболонки становить 2651 Гц.

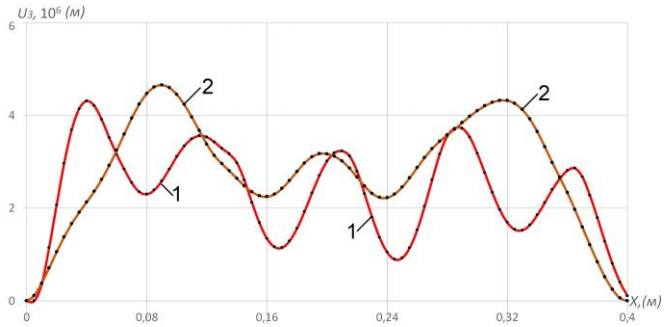


Рис. 3.22. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t$ = 50.

На Рис. 3.23, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 50$.

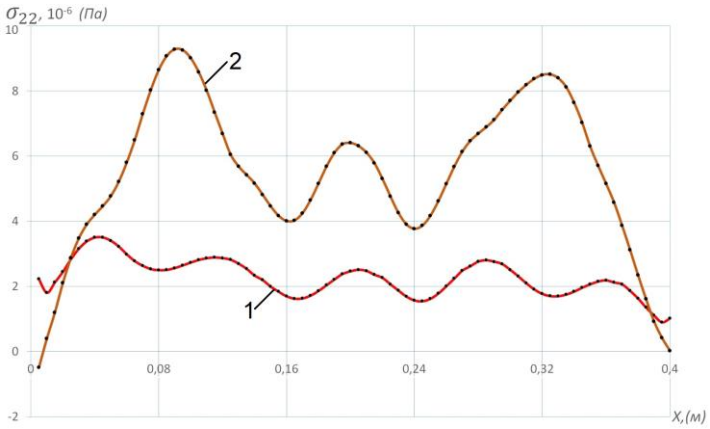


Рис. 3.23. Залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 50$.

На Рис. 3.24, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від просторової координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 500$. Максимуми досягаються в момент часу $t = 2{,}95T$, а власна перша складає 2424 Гц.

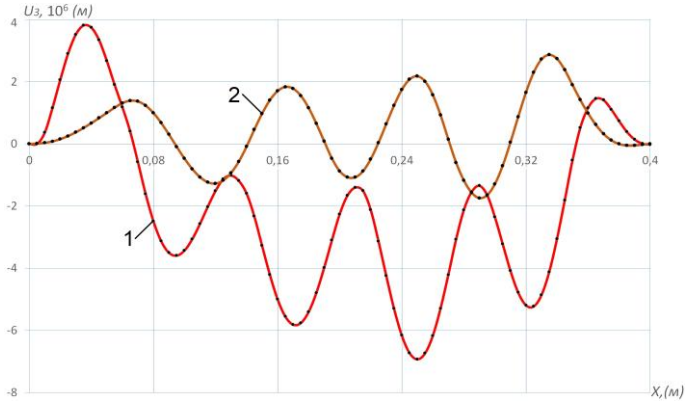


Рис. 3.24. Залежності максимальних нормальних прогинів u_3 від координати x в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок) $(E_1=E_2)/2E_t = 500$.

На Рис. 3.25, в приведених масштабах, наведені залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від просторової координати x в серединних поверхнях

несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок). Легкий заповнювач: $(E_1=E_2)/2E_t = 500$.

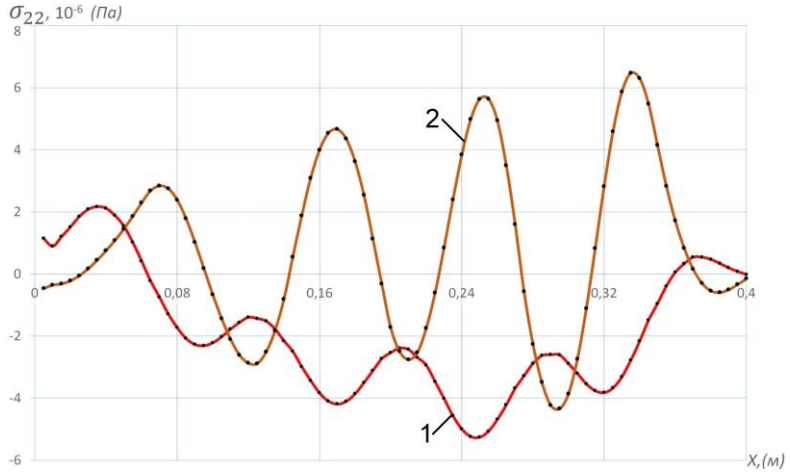


Рис. 3.25. Залежності максимальних нормальних напружень σ_{22} від координати *x* в серединних поверхнях несучих шарів несиметричної тришарової циліндричної оболонки (другий випадок) $(E_1=E_2)/2E_t = 500$.

В таблиці зведнні результати досліджень динаміки несиметричних тришарових циліндричних оболонок при дії навантаження (3.4). Верхня частна таблиці відпрвідає випадку, коли внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній з АМГ-6, нижній – навпаки.

Параметри / Конф. обол.		t	1 – внутрішня 2 – зовнішня	$u_3^{max}\cdot10^6$	$\sigma_{22}^{max}\cdot10^{-6}$	1 Власна частота, Гц
A/C h/R =0,4	б/п	3,0T	1	4,61	8,01	2517
			2	3,21	3,61	
	50	3,05T	1	4,35	10,75	2715
			2	3,75	2,87	
	500	3,15T	1	7,45	7,15	2549
			2	2,85	5,35	
C/A h/R =0,4	б/п	2,5T	1	-5,82	-12,05	2394
			2	6,01	3,81	
	50	3,35T	1	3,95	8,51	2651
			2	4,52	2,87	
	500	2,95T	1	-6,21	5,85	2424
			2	5,34	5,34	

Проведені в даному розділі дослідження використання в заповнювачі матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції (на 1-3 відсотки) істотно підвищити її згинальну жорсткість.

Висновки до третього розділу.

В даному розділі проведені досліджені закономірностей протікання хвильових процесів в несиметричних тришарових циліндричних оболонкових структурах з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях. Показано, що використання легкого заповнювача з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції на 1-3 відсотки істотно підвищити її згинальну жорсткість. Таким чином, дослідження нестаціонарних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок обертання, проведені в широкому діапазоні зміни фізико–механічних параметрів несучих шарів, виявили істотний вплив на параметри коливань: при виготовленні внутрішнього несучого шару зі сталі, а зовнішнього з АМГ 6, на 28% збільшує колові напруження σ_{22} в сталі, а перша власна частота такої оболонки збільшується на 136%. Такі результати демонструють значний вплив легкого заповнювача на динамічну поведінку несиметричної тришарової циліндричної оболонки. Розроблені інженерні методи розрахунків неоднорідних тришарових циліндричних оболонкових елементів при динамічних навантаженнях, що має велике значення при розрахунках тонкостінних конструкцій на міцність.

Розділ 4

Дослідження нестаціонарних вимушених коливань тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем

Дискретно–симетрична неоднорідна по товщині пружна структура конічного типу являє собою систему, що складається з внутрішньої і зовнішньої гладких конічних оболонок (внутрішній і зовнішній несучий шар) з відповідними товщинами і радіусами. Покладається, що серединні лінії цих оболонок паралельні, тобто кут конусності α загальний. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами і легким заповнювачем. Вважається, що тришарова конічна структура навантажена внутрішнім вісесиметричним розподіленим нестаціонарним нормальним навантаженням $P_3(s,t)$, де s і t – просторова і часова координати.

При розгляді вісесесиметричних коливань конічних оболонок зазвичай використовується система координат s, t, причому координата s відраховується від вершини конуса. У випадку зрізаної конічної оболонки, більш зручним є використання координати s, яка відраховується від краю оболонки з радіусом R_0. В такому випадку поточний радіус конічної оболонки вираховується згідно формули: $R_s = R_0 + s \cdot \sin\alpha$, де α – кут конусності.

Виходячи з приведених залежностей та рівнянь (2.36), які наведено в другому розділі дисертації запишемо рівняння коливань несиметричної тришарової конічної оболонки з легким дискретно-симетричним заповнювачем, армованим дискретними ребрами в наступному вигляді:

$$cos\alpha\frac{\partial T_{11}^i}{\partial s}+\frac{T_{13}^i}{R_{is}}-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}$$

$$cos\alpha\frac{\partial M_{11}^i}{\partial s}-T_{13}^i+\frac{2h_i}{h_t^2}M_{13}^i=\rho_i\frac{h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2} \qquad (4.1)$$

$$cos\alpha\frac{\partial T_{13}^{i}}{\partial s}-\frac{T_{11}^{i}}{R_{is}}-\frac{1}{R_{ts}h_t}M_{11}^{t}+\frac{1}{h_t}\frac{\partial M_{13}^{t}}{\partial x}-(1\pm\frac{h_i}{2R_{is}})\mathrm{P}_i=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_{03}^{i}}{\partial t^2}\qquad i=1,2$$

$$cos\alpha\frac{\partial T_{11}^{t}}{\partial s}+\frac{1}{R_{ts}}(T_{11}^{t}-T_{13}^{t})+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^{t}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{10}^{t}}{\partial t^2}$$

$$cos\alpha\frac{\partial M_{11}^{t}}{\partial s}-T_{13}^{t}+\frac{1}{R_{ts}}M_{13}^{t}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{11}^{t}}{\partial t^2}$$

$$cos\alpha\frac{\partial T_{13}^{t}}{\partial s}-\frac{1}{R_{ts}}T_{11}^{t}=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{30}^{t}}{\partial t^2}$$

$$\left[\mathrm{T}_{11}\right]_{\mathrm{j}}+\frac{1}{\mathrm{A}_2}\frac{\partial \mathrm{T}_{21\mathrm{j}}}{\partial\alpha_2}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{F}_{\mathrm{j}}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_{1\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{t}^2},\quad \left[\mathrm{T}_{13}\right]_{\mathrm{j}}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{F}_{\mathrm{j}}\frac{\partial^2 \mathrm{u}_{3\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{t}^2},\quad \left[\mathrm{M}_{11}\right]_{\mathrm{j}}=\rho_{\mathrm{j}}\mathrm{I}_{\mathrm{krj}}\frac{\partial^2\varphi_{1\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{t}^2},.$$

Це дві системи рівнянь дев’ятого порядку.

На лініях розривів в рівняннях коливань (4.1) $\left[\mathrm{T}_{11}\right]_{\mathrm{j}};\left[\mathrm{T}_{13}\right]_{\mathrm{j}};\left[\mathrm{M}_{11}\right]_{\mathrm{j}}$ – відповідають зусиллям–моментам, які діють на j– й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Співвідношення між величинами зусиль–моментів та відповідними величинами деформацій мають вигляд

$$\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{k}}=\mathrm{B}_{11}^{\mathrm{k}}(\varepsilon_{11}^{\mathrm{k}}+\nu_2^{\mathrm{k}}\varepsilon_{22}^{\mathrm{k}}),\quad \mathrm{T}_{22}^{\mathrm{k}}=\mathrm{B}_{11}^{\mathrm{k}}(\varepsilon_{22}^{\mathrm{k}}+\nu_1^{\mathrm{k}}\varepsilon_{11}^{\mathrm{k}}),\quad \mathrm{T}_{13}^{\mathrm{k}}=\mathrm{B}_{13}^{\mathrm{k}}\varepsilon_{13}^{\mathrm{k}},\quad \mathrm{M}_{11}^{\mathrm{k}}=\mathrm{D}_{11}^{\mathrm{k}}(\kappa_{11}^{\mathrm{k}}+\nu_2^{\mathrm{k}}\kappa_{22}^{\mathrm{k}}),\qquad (4.2)$$

$$\mathrm{M}_{22}^{\mathrm{k}}=\mathrm{D}_{22}^{\mathrm{k}}(\kappa_{22}^{\mathrm{k}}+\nu_1^{\mathrm{k}}\kappa_{11}^{\mathrm{k}}),\qquad \mathrm{T}_{22\mathrm{j}}=\mathrm{B}_{22\mathrm{j}}\varepsilon_{22\mathrm{j}}.$$

Співвідношення між величинами деформацій та величинами узагальнених векторів переміщень записуються у вигляді:

$$\varepsilon_{11}^{\mathrm{k}}=\frac{\partial \mathrm{u}_1^{\mathrm{k}}}{\partial \mathrm{s}},\quad \varepsilon_{22}^{\mathrm{k}}=\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}_{\mathrm{k}}}\mathrm{u}_1^{\mathrm{k}}+\frac{\cos\alpha}{\mathrm{R}_{\mathrm{k}}},\qquad \varepsilon_{13}^{\mathrm{k}}=\varphi_1^{\mathrm{k}}+\frac{\partial \mathrm{u}_3^{\mathrm{k}}}{\partial \mathrm{s}},\qquad (4.3)$$

$$\kappa_{11}^{\mathrm{k}}=\frac{\partial\varphi_1^{\mathrm{k}}}{\partial \mathrm{s}},\qquad \kappa_{22}^{\mathrm{k}}=\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}_{\mathrm{k}}}\varphi_1^{\mathrm{k}}.$$

Рівняння коливань (4.1) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

4.1. Нестаціонарні вимушені коливання симетричних тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем

Розглянута задача динамічного деформування тришарової конічної оболонки з жорстко защемленими торцями під дією внутрішнього розподіленого

навантаження $P_3(s,t)$. Граничні умови при $s = s_0$, $s = s_N$ для несучих шарів мають вигляд: $u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0$, $k = 1,2.$; початкові умови нульові: для несучих шарів при t = 0 $u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0$, $\frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial t} = 0$; $(i = 1, 2)$.

Нестаціонарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді (3.4).

В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах:

$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_j = 0{,}3$

$R_1 = 0{,}3$ м; $R_1 / h_1 = 30$; $h_1 = h_2 = 0{,}01$ м; $H_J = 2\, h_1$; $\alpha = \pi/12 = 15^0$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Звідси слідує, $F_J = H_j \cdot h_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2, а $h_j = 0{,}01$ м.

Дискретні підкріплюючі елементи розташовано в точках $s_j = [6 + (k - 1)16]\Delta s$ $k = \overline{1,5}$, $\Delta s = (s_N - s_0)/80$. $(s_N - s_o) = 0{,}39$ м.

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено–деформованого стану тришарової пружної структури конічного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$). Зокрема, на рис. 4.1, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів u_3 від просторової координати s. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3 зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 3,15T (час досягнення максимального значення величин u_3). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті (як частинний випадок, для циліндричної оболонки у випадку $\alpha = 0$ спостерігається симетрична картина відносно осі s).

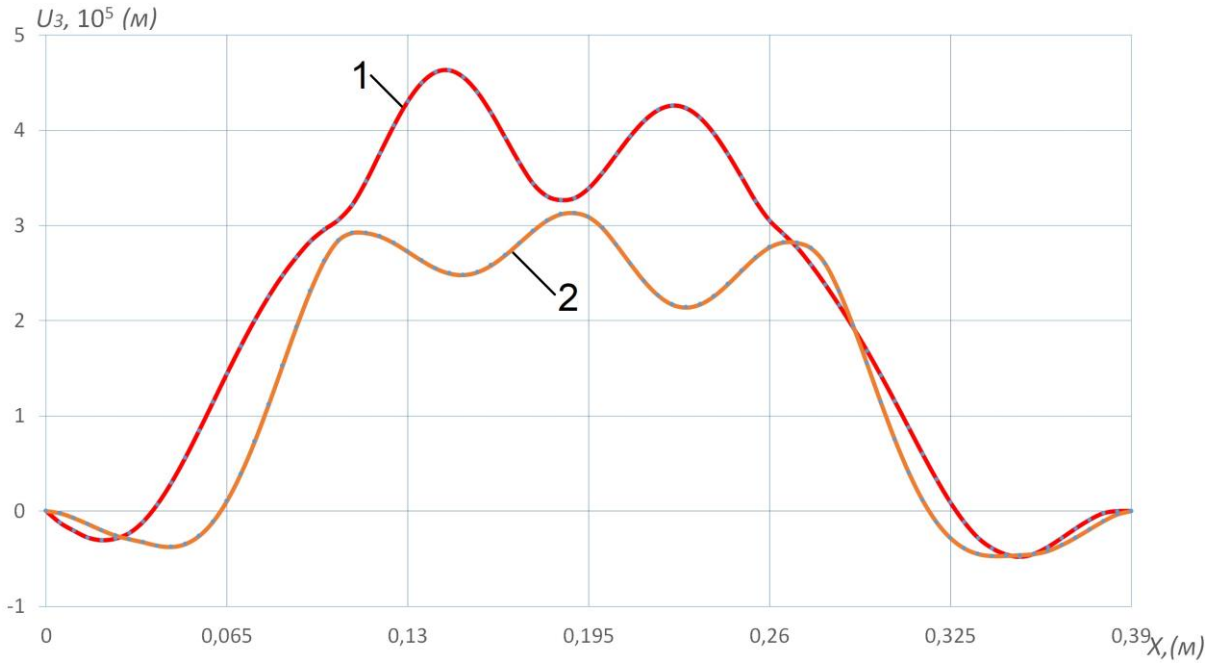


Рис. 4.1. Залежність величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від просторової координати s в конічній оболонці з ребристим заповнювачем без пінопласту в момент часу t = 3,15Т.

Отримані результати добре узгоджуються з результатами, які наведені в роботах [136, 144]. Перша власна частота даної тришарової структури складає 1602 Hz.

Окрім цього, для верифікації обчислювальної програми в розрахунках було покладено $\alpha = 0$, $s = x$. При цьому отримуються рівняння для циліндра радіусом R_0 і довжиною L = S_N = 0,39 м. Динамічні процеси досліджувалися в проміжку по часові $0 \leq t \leq 40$Т. На рис. 4.2 наведені графіки залежності нормальних прогинів для несучих шарів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від поздовжньої координати s в момент часу t = 3,15Т (час досягнення максимального значення величин u_3).

З графіка на рис.4.2. видно, що прогини u_3 для тришарової циліндричної оболонки симетричні відносно центрального перетину оболонки, що також є побічним підтвердженням достовірності результатів, отриманих для тришарової конічної оболонки. Перша власна частота даної циліндричної трьохшарової структури становить 1533 Гц.

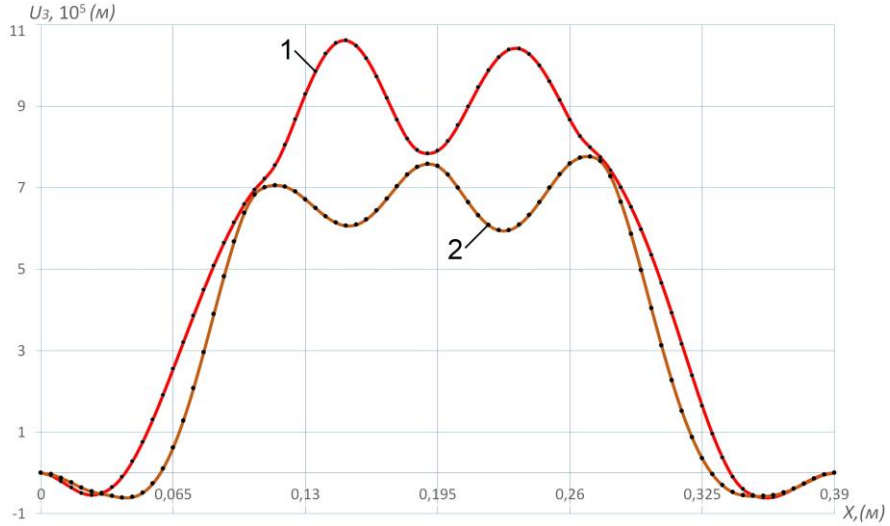


Рис. 4.2. Залежність величин u_3^1(1) і u_3^2(2) від просторової координати s в циліндричній оболонці з ребристим заповнювачем без пінопласту в момент часу t = 3,15Т.

Ці результати також добре узгоджуються з роботою [148].

На рис. 4.3, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1(1) і σ_{22}^2(2) від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22} внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22} зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 3,15Т (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Легкий заповнювач відсутній.

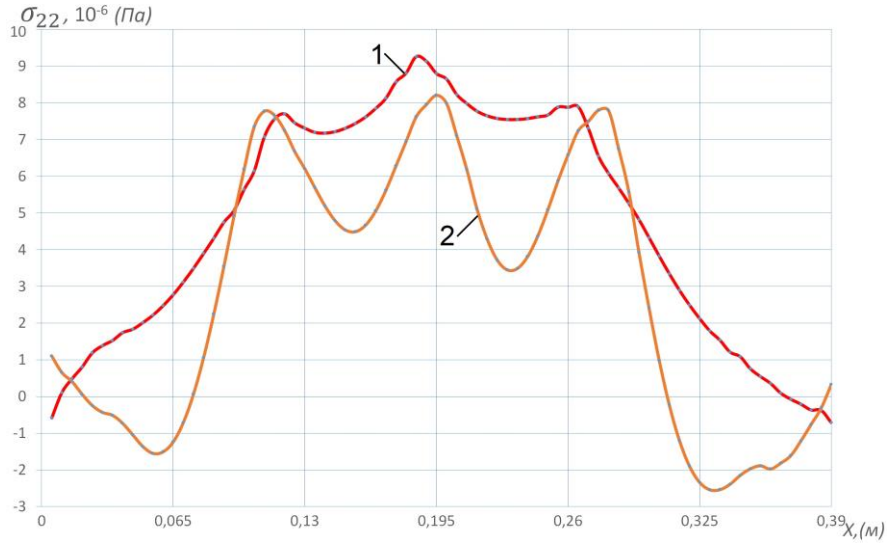


Рис. 4.3. Залежність величин σ_{22}^1(1) і σ_{22}^2(2) від просторової координати s в конічній оболонці з ребристим заповнювачем без пінопласту в момент часу t = 3,15Т. Перша власна частота даної трьохшарової структури становить 1602 Гц.

На рис. 4.4, в приведеному масштабі, наведені графіки залежності нормальних прогинів для несучих шарів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від поздовжньої координати s в момент часу t = 2,25T (час досягнення максимального значення величин u_3). Відношення модулів пружності несучих шарів до легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t$ = 50. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота даної трьохшарової структури становить 1774 Гц.

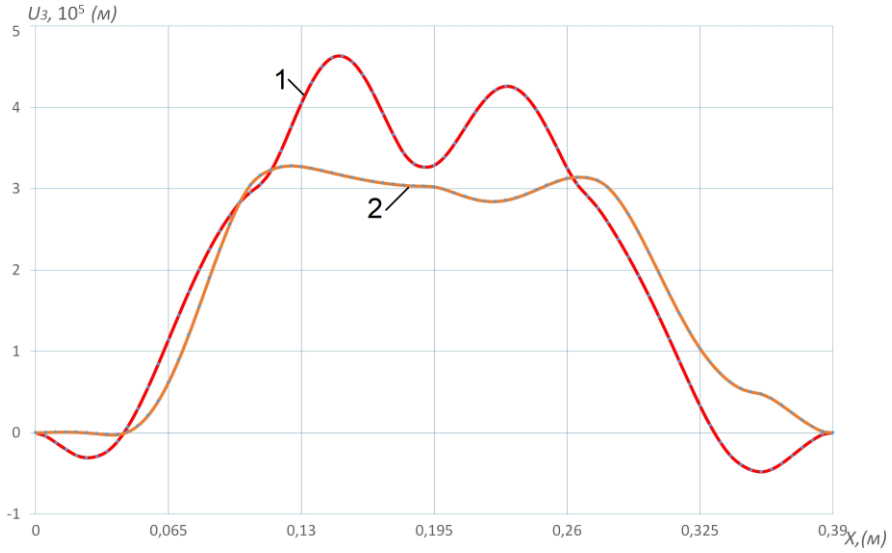


Рис. 4.4. Залежності нормальних прогинів для несучих шарів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від поздовжньої координати s в момент часу t = 2,25T, $E_{1,2}/E_t$ = 50.

На рис. 4.5, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}{}^1(1)$ і $\sigma_{22}{}^2(2)$ від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22} внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22} зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 2,25T (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). $E_{1,2}/E_t$ = 50. Перша власна частота даної трьохшарової структури становить 1774 Гц.

На рис. 4.6, в приведеному масштабі, наведені графіки залежності нормальних прогинів для несучих шарів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від поздовжньої координати s в момент часу t = 3,0T (час досягнення максимального значення величин u_3).

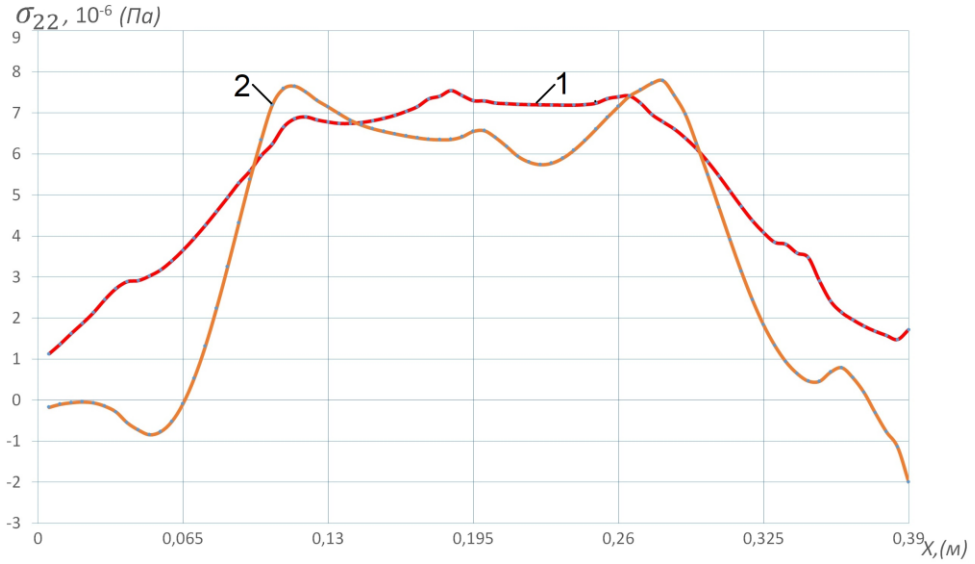


Рис. 4.5. Залежності величин нормальних напружень σ_{22}^{1}(1) і σ_{22}^{2}(2) від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці, $E_{1,2}/E_t = 50$.

Відношення модулів пружності несучих шарів до легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t = 500$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота даної трьохшарової структури становить 1620 Гц.

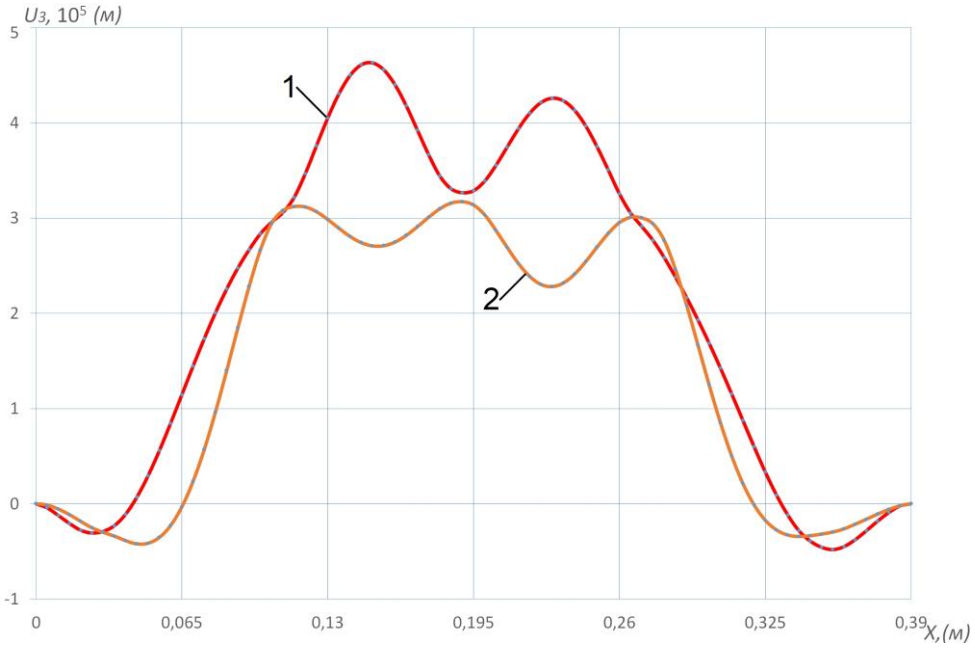


Рис. 4.6. Залежності нормальних прогинів для несучих шарів u_3^1(1) і u_3^2(2) від поздовжньої координати s в момент часу t = 3,0T, $E_{1,2}/E_t = 500$.

На рис. 4.7, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22} внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22} зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 3,0Т (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). $E_{1,2}/E_t$ = 500. Перша власна частота даної трьохшарової структури становить 1620 Гц.

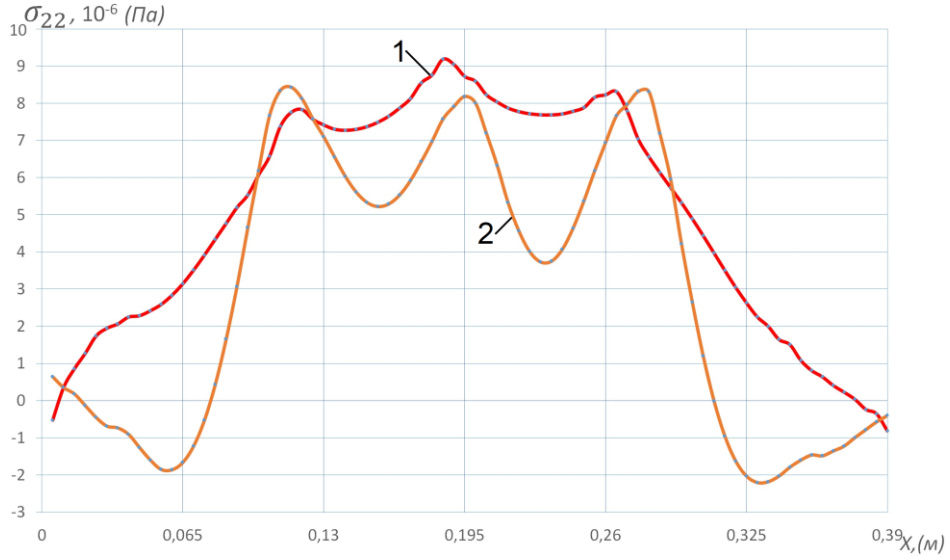


Рис. 4.7. Залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від просторової координати s в тришаровій конічній оболонці, $E_{1,2}/E_t$ = 500.

4.2. Нестаціонарні вимушені коливання несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем

Дослідимо нестаціонарні вимушені коливання несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно–симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем. Розрахунки проводились при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах:

$E_1^1 = 2 \times 10^{11}$Па; $E_1^2 = E_j = 7 \times 10^{10}$Па; $\rho_1^1 = 7{,}8 \times 10^3$кг/м^3,

$\rho_2^1 = \rho_j = 2{,}7 \times 10^3$кг/м^3, $R_1 = 0{,}3$м; $R_1 / h_1 = 30$; $h_1 = h_2 = 0{,}01$ м; $H_J = 2\,h_1$;

$\alpha = \pi/12 = 15^0$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$м^2. Звідси слідує, $F_J = H_j \cdot h_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2, а h_j = 0,01 м.

Це значить, що внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній – зі сплаву АМГ-6, товщина пінопластового шару буде 0,02 м. Відношення модулів

несучих шарів і легкого заповнювача $(E_1+E_2)/2E_t = 50$. Дискретні підкріплююі елементи розташовано в точках $s_j = [6 + (k - 1)16]\Delta s$ $k = \overline{1,5}$, $\Delta s = (s_N - s_0)/80$. $(s_N - s_o) = 0{,}39$ м

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено–деформованого стану несиметричної тришарової пружної структури конічного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$). Зокрема, на рис.4.8, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь u_3 від просторової координати s. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3 зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 3,1T (час досягнення максимального значення величин u_3). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота конічної структури становить 1559 Гц.

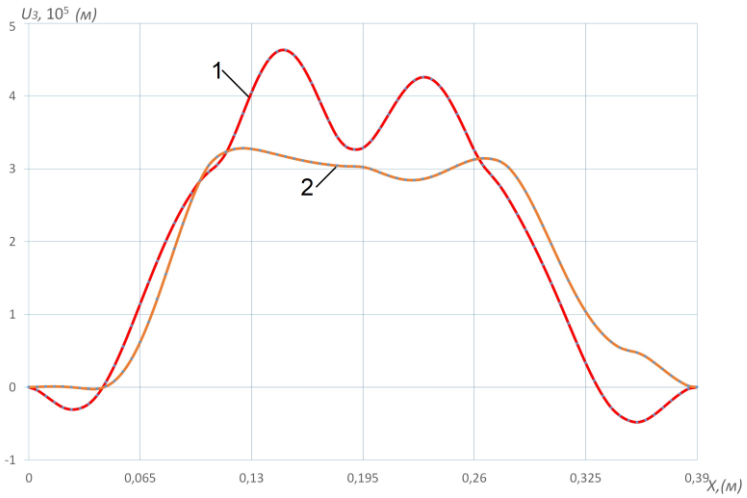


Рис. 4.8. Залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від просторової координати s. Легкий заповнювач відсутній.

На рис. 4.9, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень в серединних поверхнях σ_{22} від просторової координати s. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22} внутрішньої конічної оболонки, а з

індексом 2 – величині σ_{22} зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 3,1Т (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин σ_{22} по просторовій координаті.

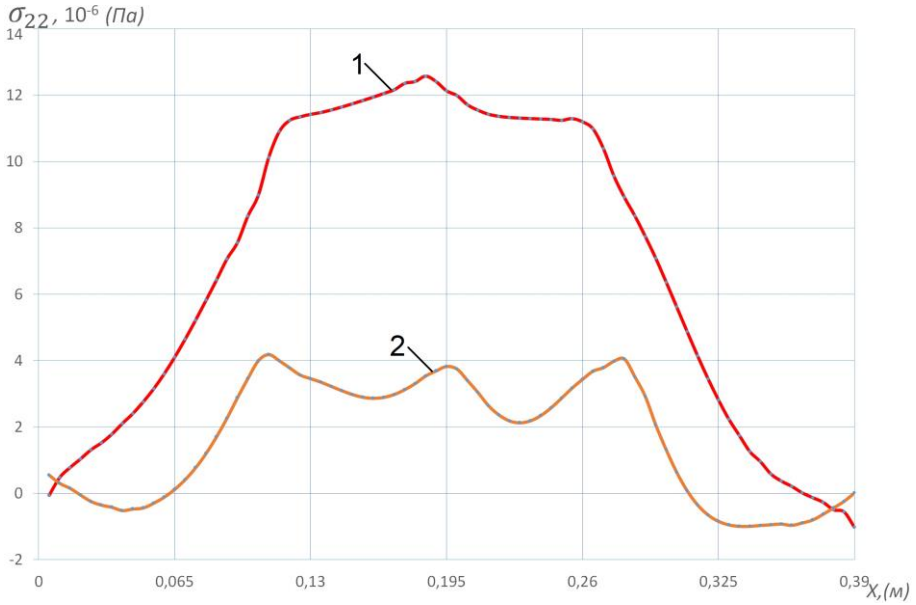


Рис. 4.9. Залежності величин нормальних напружень в серединних поверхнях σ_{22}^{1}(1) і σ_{22}^{2}(2) від просторової координати s. Легкий заповнювач відсутній.

На рис. 4.10, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь u_3 від просторової координати s. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3 внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3 зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 2,45Т (час досягнення максимального значення величин u_3). Відношення модулів пружності матеріалів несучих шарів до модулів пружності легкого заповнювача наступне $(E_1+E_2)/2E_t = 50$. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота конічної структури становить 1746 Гц.

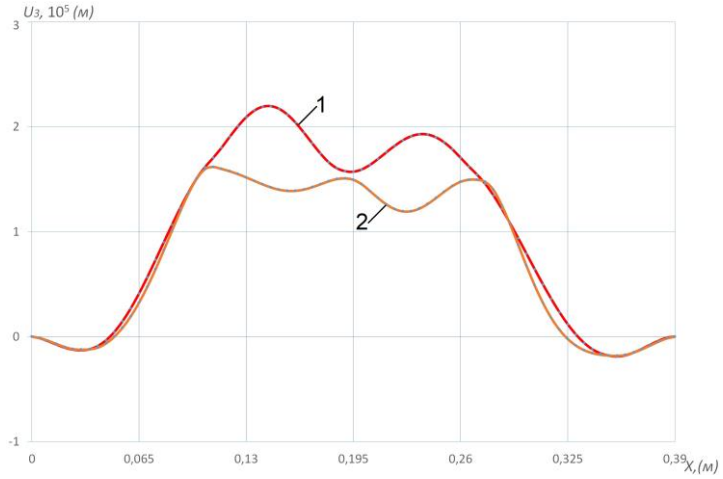


Рис. 4.10. Залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь u_3^1(1) і u_3^2(2) від просторової координати s. Для легкого заповнювача $(E_1+E_2)/2E_t = 50$.

На рис. 4.11, в приведеному масштабі, наведені залежності величин напружень в серединних поверхнях σ_{22} від просторової координати s. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22} внутрішньої конічної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22} зовнішньої конічної оболонки в момент часу t = 2,45T (час досягнення максимального значення величин σ_{22}). Відношення модулів пружності матеріалів несучих шарів до модулів пружності легкого заповнювача наступне $(E_1+E_2)/2E_t$ = 50. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота конічної структури становить 1746 Гц.

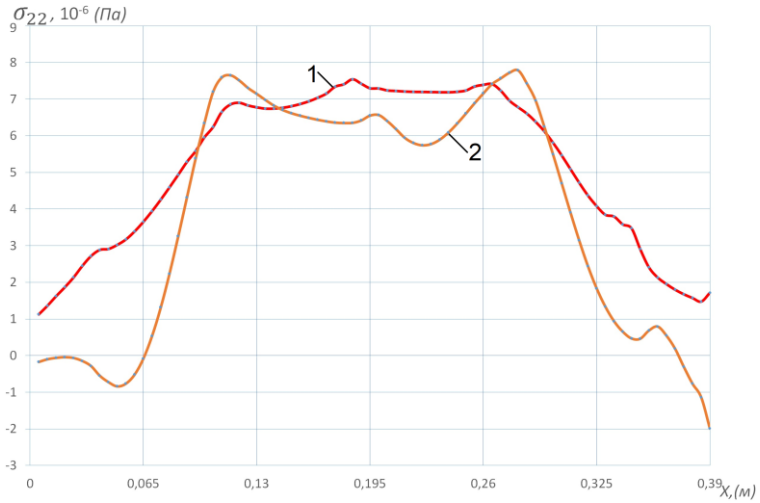


Рис. 4.11. залежності величин напружень в серединних поверхнях σ_{22}^1(1) і σ_{22}^2(2) від просторової координати s. Для легкого заповнювача $(E_1+E_2)/2E_t = 50$.

Висновки до четвертого розділу.

З проведених розрахунків слідує, що легкий заповнювач значно впливає на динамічні процеси в тришарових конічних оболонках з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем. В симетричній конічній структурі максимальні нормальні прогини $u_3^1(1)$ внутрішнього несучого шару за рахунок впливу пінопласту зменшуються в 2,61 рази, а і $u_3^2(2)$ для зовнішнього несучого шару – в 2,22 рази. Перша власна частота збільшується на 10,7% для симетричної конічної структури з пінопластом $E_{1,2}/E_t = 50$, а для пінопласту $E_{1,2}/E_t = 500$ практично не змінюється.

В несиметричній конічній структурі з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем, у якої внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній з АМГ-6, максимальні колові напруження $\sigma_{22}^1(1)$ внутрішнього несучого шару за рахунок впливу пінопласту зменшуються на 67%, а $\sigma_{22}^2(2)$ для зовнішнього несучого шару збільшуються майже на 53%. Перша власна частота для несиметричної конічної структури з пінопластом $(E_1+E_2)/2E_t = 50$ збільшується на 12%.

Отримані в даному розділі результати можуть бути використані в науково - дослідних і конструкторських організаціях для оцінки міцності і надійності елементів конструкцій, що мають форму несиметричних тришарових конічних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем.

Розділ 5.

Вісесиметричні коливання несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях

5.1. Динаміка конструктивно-ортотропної несиметричної тришарової сферичної структури з стільниковим заповнювачем при дії плоскої ударної хвилі

Тришарові сферичні оболонки при динамічних навантаженнях, які піддаються дослідженню традиційними методами математичної фізики та чисельного аналізу, досліджені порівняно докладно. Однак, останнім часом, створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення, в авіабудуванні і космічній техніці вимагає дослідження НДС тришарових оболонок обертання з легким заповнювачем складної геометрії. При цьому, зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного виду, в тому числі нестаціонарним навантаженням. Питання динамічної поведінки таких оболонок вивчені недостатньо.

Нижче проведене комплексне розрахунково-експериментальне дослідження динамічної поведінки сферичного елементу обтічника, який з'єднаний з циліндричним відсіком, при дії на нього плоскої ударної хвилі [3, 8]. Особливо відповідальний характер набувають експериментальні дослідження по визначенню граничних навантажень, при яких піддослідні об'єкти руйнуються або приймають якісні зміни. Звідси випливає актуальність розробки даної розрахунково - експериментальної методики.

1. **Постановка задачі. Моделювання динамічної поведінки півсферичного елементу обтічника при дії ударних хвиль.**

Імпульсні навантаження є визначальними при розрахунку поведінки конструкцій. Оцінка таких навантажень є виключно важливою, бо вона значною мірою визначає точність остаточного рішення задачі. Для визначення динамічних навантажень на півсферичний елемент використані результати експериментальних досліджень представлених в роботах [177,178] рис. 5.1.

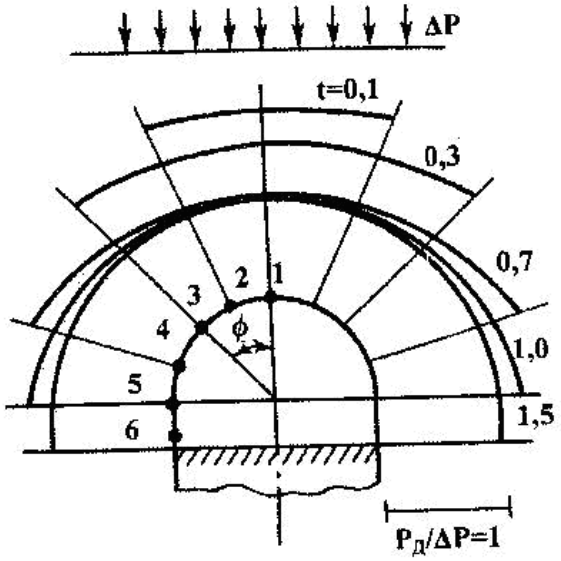


Рис. 5.1.

Рівняння коливань півсферичного елементу обтічника. Виходячи з отриманих експериментальних даних по визначенню параметрів дифракційної картини на жорсткій моделі циліндр-півсфера проведено математичне моделювання динаміки півсферичного елементу обтічника. Тришарова півсферична оболонка жорстко з'єднана з циліндричним відсіком того ж радіусу. Передбачається, що напружено-деформований стан такої пружної оболонки може бути визначено в рамках геометрично нелінійного варіанту теорії тонких оболонок типу С.П. Тимошенка в квадратичному наближенні – рівняння [173]:

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22}\right] + k_1\overline{T}_{13} = I_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2\overline{T}_{13})\right] - k_1T_{11} - k_2T_{22} + P_3(\alpha_1,t) = I_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22}\right] - T_{13} = I_2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2},$$

де

$$T_{11} = B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}),\ T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}), \tag{5.2}$$

$$\overline{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\Theta_1, T_{13} = B_{13}k^2\varepsilon_{13},$$
$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}), M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11});$$
$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\Theta_1^2 + k_1 u_3, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1 + k_2 u_3, \tag{5.3}$$
$$\varepsilon_{13} = \phi_1 + \Theta_1, \Theta_1 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1,$$
$$\kappa_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha_1}, \kappa_{22} = \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\phi_1;$$
$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, B_{22} = \frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, B_{13} = G_{13}h,$$
$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad I_1 = \rho h, \quad I_2 = \frac{\rho h^3}{12}.$$

У наведених рівняннях величини α_1, t – просторова й часова координати; A_1, A_2, k_1, k_2 – параметри серединної поверхні сферичної оболонки; u_1, u_3, φ_1 – компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні сферичної оболонки; $T_{11}, T_{22}, T_{13}, M_{11}, M_{22}$ – інтегральні характеристики напружень сферичної оболонки; I_1, I_2 - наведені інерційні жорсткісні параметри; h – загальна товщина оболонки; ρ – щільність матеріалу оболонки; $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{21}$ – фізико-механічні параметри матеріалу оболонки; $P_3(\alpha_1, t)$ – навантаження, яке формується на поверхні сферичної частини обтічника.

Рівняння руху сферичної частини обтічника (5.1) – (5.3) доповнюються відповідними граничними умовами. Початкові умови при $t = 0$ – нульові.

Відзначимо, що тут використовується конструктивно-ортотропна модель несиметричної тришарової сферичної структури з стільниковим заповнювачем, для якої інтегральні значення модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона визначаються згідно з експериментальними даними.

2. Чисельний алгоритм вирішення задачі.

Математичне моделювання напружено-деформованого стану сферичного елементу обтічника при нестаціонарних навантаженнях проводилося чисельними методами. Для вирішення наведених рівнянь використовувався інтегро-інтерполяційний метод побудови скінчено-різницевих схем по просторовій

координаті і явна схема інтегрування по часовій координаті t - різницеві рівняння [179,180].

При чисельних розрахунках оболонкових структур, які складаються з оболонкових елементів різної геометрії (сфера - циліндр, конус - циліндр, і т.д.) по лініях контактів зазначених елементів виникають особливості. Для усунення особливостей в точках зміни геометрії s оболонкових елементів використовується спеціальний алгоритм. Припустимо, що точка жорсткого з'єднання оболонкових елементів різної геометрії має координату s.

Виділимо перехідний елемент з'єднання оболонкових елементів різної геометрії $s_{j-1/2} \le s \le s_{j+1/2}$, і запишемо для нього такі умови:

$$u_1^+ = u_1^-;\ \varphi_1^+ = \varphi_1^-;\ \varphi_1^+ = \varphi_1^-, \tag{5.4}$$

$$T_{11}^+ - T_{11}^- = I_1 \Delta s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{5.5}$$

$$\overline{T}_{13}^+ - \overline{T}_{13}^- - k_{1j} T_{11j} - k_{2j} T_{22j} + P_3 \Delta s = I_1 \Delta s \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$M_{11}^+ - M_{11}^- - T_{13j} = I_2 \Delta s \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

де

$$T_{11j} = B_{11} \Delta s (k_{1j} + \nu_{21} k_{2j}) u_3, \quad T_{13j} = B_{13} \Delta s \varphi_1;$$

$$T_{22j} = B_{22} \Delta s (k_{2j} + \nu_{12} k_{1j}) u_3,$$

а величини $T_{11}^{\pm}$, $\overline{T}_{13}^{\pm}$, $M_{11}^{\pm}$ – компоненти узагальненого вектора зусиль, які діють на перехідний елемент $s_{j-1/2} \le s \le s_{j+1/2}$ зліва (верхній індекс мінус) і справа (верхній індекс плюс). Це, по суті, є граничними умовами для сферичного елементу обтічника.

При розрахунках в рівняннях (5.1) - (5.5) покладалося; $A_1 = R$; $A_2 = R \sin \alpha_1$, $k_1 = k_2 = 1/R$ для сферичної частини.

Використання явної скінчено-різницевої схеми інтегрування по часовій координаті дозволяє детально аналізувати характеристики напружено-

деформованого стану обтічника в будь-який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі.

3. Дослідження динамічної поведінки сферичного елементу обтічника. Розглянутий сферичний елемент обтічника являє собою тришарову структуру, яка складається з двох несучих шарів товщиною $1{,}3\cdot10^{-3}$м і $0{,}85\cdot10^{-3}$м і розташованим між ними стільниковим заповнювачем при загальній товщині $11\cdot10^{-3}$м. Таким чином, маємо несиметричну тришарову сферичну оболонку. Розрахунок по визначенню напружено-деформованого стану сферичного елементу обтічника згідно рівнянь (5.1) - (5.5) проведений при дії плоскої ударної хвилі згідно експериментальних даних [177,178], які наведені на рис. 5.1. Інтегральні фізико-механічні характеристики сферичного елементу обтічника бралися згідно паспортних даних виробу. При розрахунках сферичної частини обтічника в рівняннях покладалось: $R = 1.425$ м, ρ=$1{,}7\cdot10^{3}$ кг/м^3, $E = 6\cdot10^{9}$ Па, $\nu = 0{,}3$; h/R = 0,008; $A_1 = R, A_2 = R\sin\alpha_1$, $k_1 = k_2 = 1/R$, де α_1 – кут між віссю обертання і нормаллю в поточній точці. Розрахунок проводився на часовому інтервалі $0 \le t \le 10T$, де $T = R/c$, с – швидкість звуку в повітрі. В розрахунках покладалось $c = 340$ м/с. Як показали розрахунки, максимальні величини σ_{22} і u_3 спостерігаються в області полюса напівсферичної оболонки. Зокрема, на рис. 5.2, рис. 5.3 наведені залежності від часу вказаних величини в області полюса сферичної частини конструкції. Максимальний прогин не перевищує значення порядку $0{,}2h$ рис. 5.3. Слід зазначити, що порівняння результатів за наведеними рівняннями в лінійній постановці і геометрично нелінійній постановці відрізняються в ряді точок по максимальним величинам до 20-25% (нелінійної теорії відповідає пунктирна крива на рис. 5.3). Розрахунки показали, що максимальне переміщення в найнебезпечніших точках обтічника (полюс півсфери і середина циліндричної оболонки) не перевищує $0{,}2h$, а деформації $\varepsilon \le 10^{-3}$.

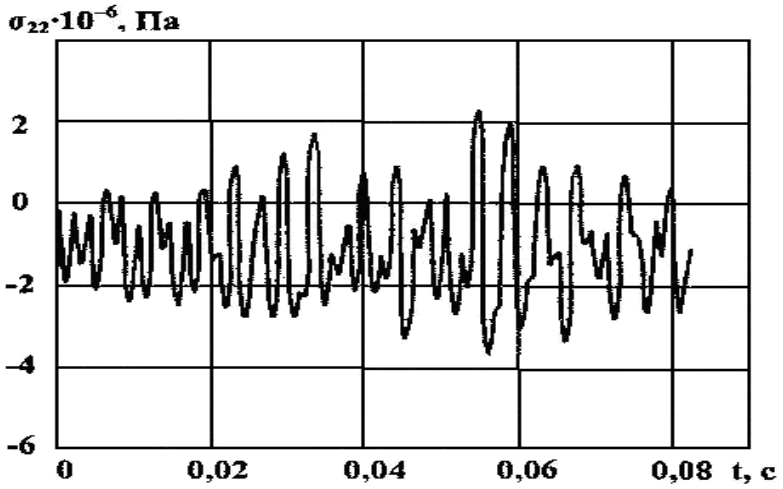


Рис. 5.2. Залежності від часу напружень σ_{22} в області полюса сферичної частини конструкції.

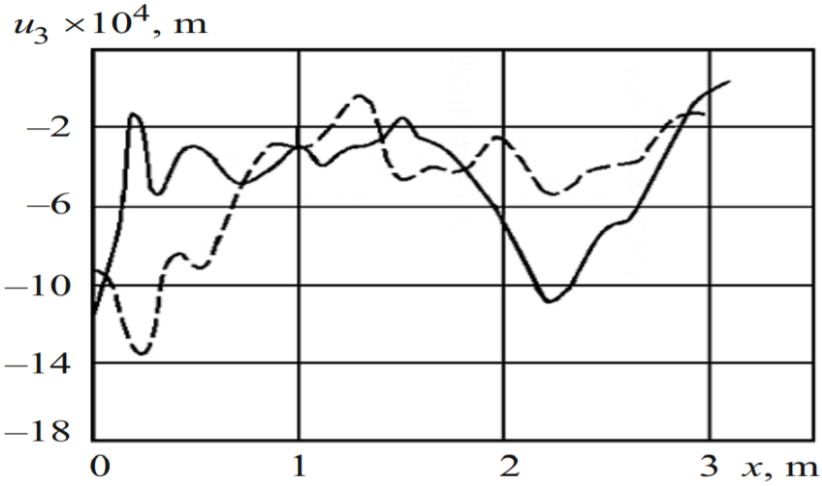


Рис. 5.3. Залежності від просторої координати переміщень u_3 сферичної частини конструкції.

Аналіз проведених досліджень показує, що обтічник зберігає свою працездатність після впливу на нього ударної хвилі в напрямку осі до $\Delta P = 0{,}2 \cdot 10^5$ Па.

5.2. Динаміка тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях (скінчено – різницевий метод)

Одними з перших робіт з дослідження нестаціонарної поведінки тришарових оболонок з дискретним заповнювачем були опубліковані статті [134 - 139]. Подальший розвиток зазначені дослідження знайшли своє продовження в дослідженнях, які наведені в огляді [37]. В роботах [4, 188] розглянуті питання

постановки і розв'язання динамічних задач поведінки сферичних оболонок з дискретно-симетричним ребристим заповнювачем (з відповідними граничними і початковими умовами), побудовані чисельні алгоритми, розв'язані відповідні задачі математичної фізики. Проведено чисельне моделювання сферичного купола, на який падає ударна хвиля. При цьому, застосовуються кінематичні і статичні гіпотези до кожного шару, що дає можливість більш адекватно описати динамічну поведінку тришарової оболонки.

1. Постановка завдання і вихідні співвідношення. Дискретно-неоднорідна по товщині пружна структура сферичного типу являє собою систему, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких сферичних оболонок (внутрішній і зовнішній несучі шари) з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами. Передбачається, що розглянута тришарова конструкція піддається дії нестаціонарного розподіленого нормального навантаження $P_3(s,t)$, де s,t – просторова й часова координати.

Математичною моделлю процесу динамічного деформування несиметричної тришарової пружною структури з дискретно-симетричним заповнювачем є система диференціальних рівнянь типу С.П. Тимошенка (2.36), яка для даного випадку набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha \quad T_{11}^i\right) - \frac{1}{R^i}\left(ctg\alpha T_{22}^i + T_{13}^i\right) = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha \quad T_{13}^i\right) - \frac{1}{R^i}\left(T_{11}^i - T_{22}^i\right) + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha_1 M_{11}^i\right) - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2},$$

$$\left[T_{11}\right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2},$$

$$\left[T_{13}\right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \qquad \left[M_{11}\right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.$$

Це дві системи рівнянь шостого порядку.

У рівняннях (5.6) величини $T_{11}^{i\pm} = [T_{11}]_j$; $[T_{13}]_j = T_{13}^{i\pm}$; $[M_{11}]_j = M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}$ (i = 1,2)

відповідають зусиллям-моментам, які діють на j - й дискретний елемент на лінії розриву $s_1 = s_{1j}$.

Рівняння руху (5.6), доповнюються відповідними граничними і початковими умовами.

Чисельний алгоритм вирішення задачі. Чисельний алгоритм рішень рівнянь (5.6), заснований на скінчено-різницевій апроксимації вихідних рівнянь із застосуванням явної скінчено-різницевої схеми типу "хрест" [36]. Рішення шукається в гладкій області – рівняння (5.6) і склеюються на лініях розривів. При побудові чисельного рішення в гладкій області використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь [178]. При цьому компоненти узагальнених векторів переміщень співвідносять до цілих точок різницевої сітки, а відповідні величини деформацій і зусиль до напівцілих точок. Різницеві рівняння, які апроксимують вихідні рівняння (5.6), записуються в такий спосіб

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\alpha_k}\left[(\sin\alpha_k T_{11}^i)_{k-1/2}^n\right]_{s_i} - \frac{1}{R^i}[\mathrm{ctg}\alpha_k (T_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n] = \rho_i h_i \left[(u_1^i)_k^n\right]_{\bar{t}t},\\
&\frac{1}{\sin\alpha_k}\left[(\sin\alpha_k T_{13}^i)_{k-1/2}^n\right]_{s_i} - \frac{1}{R^i}\left[(T_{11}^i)_k^n + (T_{22}^i)_k^n\right] + P_{3k}^n = \rho_i h_i \left[(u_3^i)_k^n\right]_{\bar{t}t},\\
&\frac{1}{\sin\alpha_k}\left[(\sin\alpha_k M_{11}^i)_{k-1/2}^n\right]_{s_i} - \frac{\mathrm{ctg}\alpha_k}{R^i}(M_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n = \rho_i \frac{h_i^3}{12}\left[(\varphi_3^i)_k^n\right]_{\bar{t}t}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Різницеві вирази для зусиль - моментів і відповідних величин деформацій мають вигляд:

$$(T_{11}^i)_{k\pm1/2}^n = B_{11}^i\left[(\varepsilon_{11}^i)_{k\pm1/2}^n + \nu_2^i(\varepsilon_{22}^i)_{k\pm1/2}^n\right], \tag{5.8}$$

$$(T_{22}^i)_{k\pm1/2}^n = B_{22}^i\left[(\varepsilon_{22}^i)_{k\pm1/2}^n + \nu_1^i(\varepsilon_{11}^i)_{k\pm1/2}^n\right],$$

$$(T_{13}^i)_{k\pm1/2}^n = B_{13}^i(\varepsilon_{11}^i)_{k\pm1/2}^n,$$

$$(M_{11}^i)_{k\pm1/2}^n = D_{11}^i\left[(\kappa_{11}^i)_{k\pm1/2}^n + \nu_2^i(\kappa_{22}^i)_{k\pm1/2}^n\right],$$

$$(M_{22}^i)_{k\pm1/2}^n = D_{22}^i\left[(\kappa_{22}^i)_{k\pm1/2}^n + \nu_1^i(\kappa_{11}^i)_{k\pm1/2}^n\right],$$

де

$$(\varepsilon_{11}^{i})_{k\pm1/2}^{n}=[(u_1^i)]_{k\,s_i}^{n}+\frac{(u_3^i)_k^n+(u_3^i)_{k+1}^n}{2R^i}, \qquad (5.9)$$

$$(\varepsilon_{22}^{i})_{k\pm1/2}^{n}=\frac{(u_1^i)_k^n+(u_1^i)_{k+1}^n}{2R^i}\operatorname{ctg}\alpha_{k+1/2}+\frac{(u_3^i)_k^n+(u_3^i)_{k+1}^n}{2R^i},$$

$$(\varepsilon_{13}^{i})_{k\pm1/2}^{n}=\frac{(\varphi_1^i)_k^n+(\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2R^i}$$

$$(\kappa_{11}^{i})_{k\pm1/2}^{n}=\left[(\varphi_1^i)_k^n\right]_{s_i},$$

$$(\kappa_{22}^{i})_{k\pm1/2}^{n}=\frac{(\varphi_1^i)_k^n+(\varphi_1^i)_{k+1}^n}{2R^i}\operatorname{ctg}\alpha_{k+1/2}.$$

У співвідношеннях (5.7) - (5.9) нижні індекси відповідають позначенням різницевої сітки по просторовій координаті, а верхні індекси визначають часовий шар. Позначення різницевих похідних по просторовій і часовій координатам в співвідношеннях (5.7) - (5.9) введено згідно [179]. Співвідношення для величин деформацій з індексом $k-1/2$ записуються аналогічно формулам (5.9) з урахуванням зсуву на одиницю.

Різницеві співвідношення на лініях розривів $s = s_j$ записуються наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{2}(T_{11}^{i\pm})_j^n=\rho_j F_j\left[(u_{1j})_j^n\right]_{\bar{t}\bar{t}}, \qquad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^{2}(T_{13}^{i\pm})_j^n=\rho_j F_J[(u_{3j})_j^n]\bar{t}\bar{t}$$

$$\sum_{i=1}^{2}(M_{11}^{i\pm}\mp h_j T_{11}^{i\pm})_j^n=\rho_j I_{кpj}\left[(\varphi_{1j})_j^n\right]_{\bar{t}\bar{t}}.$$

З огляду на те, що застосовується явна скінчено-різницева схема, при розрахунках різницеві кроки вибиралися виходячи з умови $\Delta t\le K\Delta s/c_{11}$,

$c_{11}^2 = E_1/[\rho(1-\nu_1\nu_2)]$, де К – число Куранта. При розрахунках покладалось К = 0,3-0,5, виходячи з практичної збіжності результатів.

У рівняннях (5.10) в квадратних дужках в позначення входять величини зусиль-моментів відповідно до кожного шару. Визначення величин компонент на лініях розриву для дискретних елементів, згідно формул (5.10), виконуємо перерахунок на внутрішню і зовнішню поверхню гладких несучих шарів

$$u_{1j}^n = u_1^{kn}(s_j) \pm H_j^k \varphi_1^{kn}(s_j), \qquad (5.11)$$

$$u_{3j}^n = u_3^{kn}(s_j), \quad \varphi_{1j}^n = \varphi_1^{kn}(s_j), \quad k = 1, 2.$$

Виходячи з вище отриманих формул, чисельний алгоритм вирішення поставленої задачі полягає в послідовності виконання наступних формул:

- на n-му часовому шарі в гладкій області по просторовій координаті обчислюється величини відповідних деформацій і зусиль-моментів за формулами (5.10);

- за обчисленими величинами деформацій і зусиль-моментів обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень несучих шарів в гладкій області на n + 1 часовому шарі;

- відповідно до формул (5.11) обчислюються величини компонент узагальненого вектору переміщень для j-го дискретного елементу на лініях розриву;

- по формулах (5.7) виконується перерахунок величин узагальненого вектору переміщень центру ваги поперечного зрізу j-го дискретного елементу заповнювача на відповідні поверхні несучих шарів на лініях розриву.

Отримана різницева схема згідно формул (5.7) - (5.9) явна в часовій координаті, і виходячи з цього, є умовно стійкою по просторовій і часовій координатам. В подальшому, при чисельному рішенні задач осесиметричних коливань, будемо виходити з відповідних формул для величин різницевих кроків Δs і τ.

В матрично-векторному вигляді різницеві рівняння (5.7) - (5.9) можна представити таким чином:

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t),$$

де [M] і [C] – матриці мас і жорсткості дискретної різницевої системи, $\bar{u}$ і $\bar{F}$ – вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження.

Вважаючи, що матриця [M] невироджена, запишемо останнє рівняння у вигляді:

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t),$$

де матриця $[D] = [M]^{-1}[C]$.

У роботах [36, 139, 148] встановлено, що при використанні явної скінчено-різницевої схеми для інтегрування рівнянь необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь є умова такого вигляду:

$$\tau \le 2/\Omega_{max} = 2\sqrt{\beta(D)},$$

де Ω_{max} – максимальна частота власних коливань різницевої системи; $\beta(D)$ – верхня межа спектра матриці [D].

Використовуючи для оцінки $\beta(D)$ значення зверху теорему Гершгоріна, отримаємо:

$$\beta = \Omega_{max}^2 \le \max \sum_j |d_{ij}|,$$

де d_{ij} – елементи матриці [D].

Де Ω_{max} визначається виходячи з наступних нерівностей:

$$\Omega_{max}^2 \le \max\left(\Omega_{max\,0}^2,\ \Omega_{max\,j}^2\right),$$

$$\Omega_{max\,0}^2 \le \max\left([\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2\right), \quad k = 1, 2,$$

$$\Omega_{max\,j}^2 \le \max \Omega_{1j}^2, \quad j = \overline{1, J}.$$

Величини, $[\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2, \Omega_{1j}^2$ визначаються відповідно до співвідношень:

$$[\Omega_1^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}\left[\frac{4}{(\Delta s_k)^2} + \nu_{21}^k\left(\frac{1}{R^k\Delta s_k}\right)\right],$$

$$[\Omega_2^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}\left\{\frac{G_{13}^k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}{E_1^k}\left[\frac{1}{\Delta s_k\, h_k} + \frac{4}{(\Delta s_k)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{E_2^k}{E_1^k}\left[\frac{1}{(R^k)^2} + \nu_{12}^k\frac{1}{R^k\,\Delta s_k}\right]\right\},$$

$$[\Omega_3^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}\left\{\frac{4}{(\Delta s_k)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{12G_{13}^k(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)}{E_1^k}\left[\frac{1}{\Delta xs_k\, h_k} + \frac{1}{h_k^2}\right]\right\}, \qquad \rho_j F_j \Omega_{1j}^2 = \frac{E_j F_j}{R_j^2}.$$

3. Чисельні результати. Математичне моделювання напружено-деформованого стану тришарової півсфери з дискретно-симетричним ребристим заповнювачем (паралелями) при імпульсному внутрішньому навантаженні проводилося чисельними методами. Для вирішення наведених рівнянь використовувався інтегро-інтерполяційний метод побудови скінчено - різницевих схем по просторовій координаті і явна схема інтегрування по часовій координаті t - різницеві рівняння [178].

Дискретно - неоднорідна по товщині пружна структура сферичного типу являє собою систему, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких сферичних оболонок (внутрішній і зовнішній несучі шари) з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою системою ребер (паралелей).

В роботі [139] розглянута півсфера з отвором з вільними крайками в її вершині при внутрішньому імпульсному навантаженні. В даному випадку, завдання вирішувалася на просторовому інтервалі $[-\pi/2;\ \pi/2]$. В силу симетрії щодо вершини сфери при $\alpha_1 = 0$, то розглядався інтервал $[0;\ \pi/2]$. Розрахунок проводився при кількості дискретних інтервалів $N = 160$, тобто $\Delta\alpha_1 = (\pi/2)/N$.

Дискретні підкріплючі ребра (паралелі) перебувають у точках:

$$\alpha_{\mathrm{k}} = [41 + 40(\mathrm{k} - 1)]\Delta\alpha_1, \quad \mathrm{k} = \overline{1,\ 3}$$

У вершині сфери є особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при $\alpha_1 = 0$ в наступному вигляді:

$$u_1^k = \varphi_1^k = 0, \quad 2\frac{\partial T_{13}^k}{\partial s} - P_3(s_0, t)\,\delta_{2k} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \tag{5.12}$$

- при $\alpha_1 = \pi / 2$ – жорстке защемлення:

$$u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2\,. \tag{5.13}$$

У формулах (5.12) δ_{2k} – символ Кронекера.

Зовнішнє навантаження $P_3(s, t)$ задавалося у вигляді:

$$P_3(s, t) = \begin{cases} A(1 - t/T) + P_0, & 0 \le t \le T, \\ P_0, & t > T; \end{cases}$$

де $A = 10^6$ Па; $P_0 = 10^5$ Па; $T = R_1 / c$; $c^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1^2)]$.

Розрахунки проводилися при наступних геометричних і фізико - механічних параметрах: $\mathrm{E}_1^1 = \mathrm{E}_1^2 = \mathrm{E_j} = 7 \cdot 10^{10}$Па; $\nu_j = \nu_1^1 = \nu_1^2 = 0{,}3$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\mathrm{j}} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\mathrm{h}_1 = \mathrm{h}_2 = 0{,}01$ м; $\mathrm{h_j} = 2\mathrm{h}_2$; $R_1 = 0{,}3\,м$; $\mathrm{F_J} = 2\times10^{-4}$ м^2, $h/R = 0{,}13$.

Використовуючи принцип субмоделінгу, були прораховані залежності параметрів нормального прогину внутрішнього $u_3^1\,(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів, а також їх НДС від часу симетричної тришарової сферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії ударної хвилі.

На рис. 5.4 – 5.6 в приведеному масштабі показані результати розрахунків. Криві на малюнках 5.4 - 5.6. відповідають залежностям величин $u_3^1\,(1)$ і $u_3^2(2)$; $\varepsilon_{22}^1(1)$і ε_{22}^2; $(2)\ \sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від часу. Індексом 1 позначені величини u_3 внутрішнього несучого шару, індексом 2 – зовнішнього несучого шару.

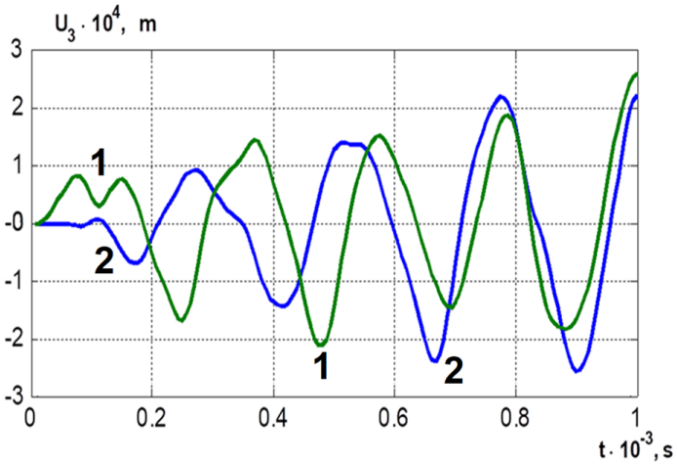


Рис. 5.4. Залежність переміщень $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від часу в полюсі оболонки,

1 – внутрішня оболонка, 2 – зовнішня оболонка

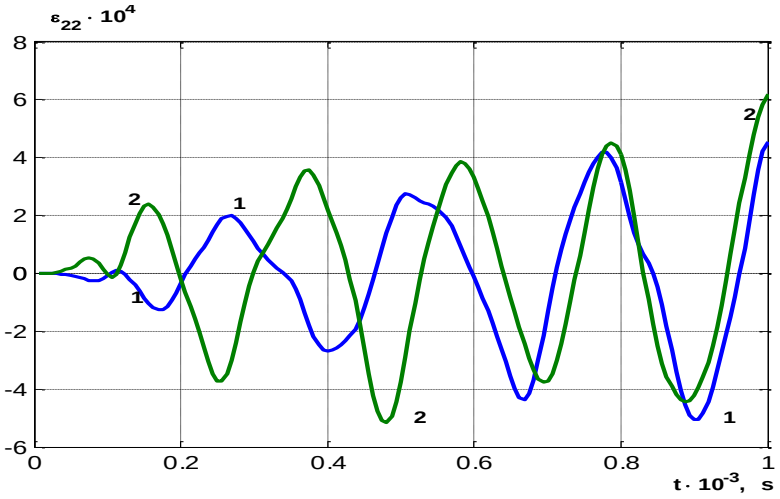


Рис. 5.5. Залежність деформацій $\varepsilon_{22}^1(1)$ і $\varepsilon_{22}^2(2)$ від часу в полюсі оболонки,

1 – внутрішня оболонка, 2 – зовнішня оболонка

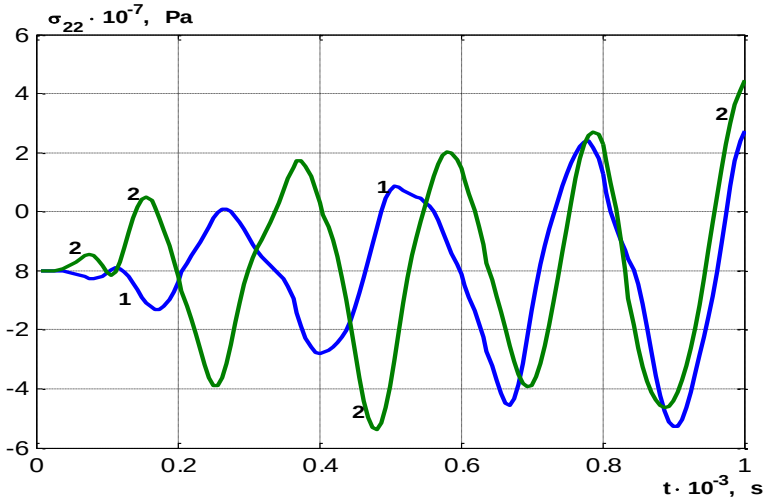


Рис. 5.6. Залежність напруження $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від часу в полюсі оболонки,

1 – внутрішня оболонка, 2 – зовнішня оболонка

5.3. Динаміка несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях (скінчено – елементний метод)

Дискретно - неоднорідна по товщині пружна структура сферичного типу являє собою систему, яка складається з внутрішньої і зовнішньої гладких сферичних оболонок (внутрішній і зовнішній несучі шари) з відповідними товщинами і радіусами серединних поверхонь. Оболонки жорстко з'єднані між собою системою ребер, які являються армуючими елементами для легкого заповнювача, який заповнює проміжки між несучими шарами і ребрами.

Рівняння симетричних коливань несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при нестаціонарних навантаженнях, які отримані з рівнянь (2.36), мають вигляд:

$$\frac{1}{\sin\propto}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha\, T_{11}^i\right)-\frac{1}{R^i}\left(ctg\alpha T_{22}^i-T_{13}^i\right)-\frac{4}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \qquad (5.6)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha\, T_{13}^i\right)-\frac{1}{R^i}\left(T_{11}^i+T_{22}^i\right)-\frac{1}{R_t h_t}\left(M_{11}^t+M_{22}^t\right)+\mathrm{P}_3=\rho_i h_i\frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(\sin\alpha\, M_{11}^i\right)-\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{R^i}M_{22}^i-T_{13}^i=\frac{\rho_i h_i^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\sin\alpha\, T_{11}^t\right)+\frac{1}{R_{1t}}\left(T_{11}^t-T_{13}^t\right)+\frac{8}{h_t^2}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\sin\alpha\, M_{11}^t\right)-T_{13}^t+\frac{1}{R_{t1}}M_{13}^t=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\sin\alpha\, T_{13}^t\right)-\frac{1}{R_{t1}}\left(T_{11}^t+T_{22}^t\right)=\rho_t h_t\frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2};$$

$$\left[\mathrm{T}_{11}\right]_\mathrm{j}=\rho_\mathrm{j}\mathrm{F}_\mathrm{j}\frac{\partial^2\mathrm{u}_{1\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},\quad \left[\mathrm{T}_{13}\right]_\mathrm{j}=\rho_\mathrm{j}\mathrm{F}_\mathrm{j}\frac{\partial^2\mathrm{u}_{3\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},\quad \left[\mathrm{M}_{11}\right]_\mathrm{j}=\rho_\mathrm{j}\mathrm{I}_{\mathrm{krj}}\frac{\partial^2\varphi_{1\mathrm{j}}}{\partial\mathrm{t}^2},$$

Це дві системи рівнянь дев’ятого порядку.

При створенні скінчено-елементного методу в моделях був використаний тривимірний об'ємний скінчений елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів. Створена модель (Рис. 5.7 a-d), включала 32240 скінчених елементів і 49680 вузлів. Півсфера з трьома ребрами.

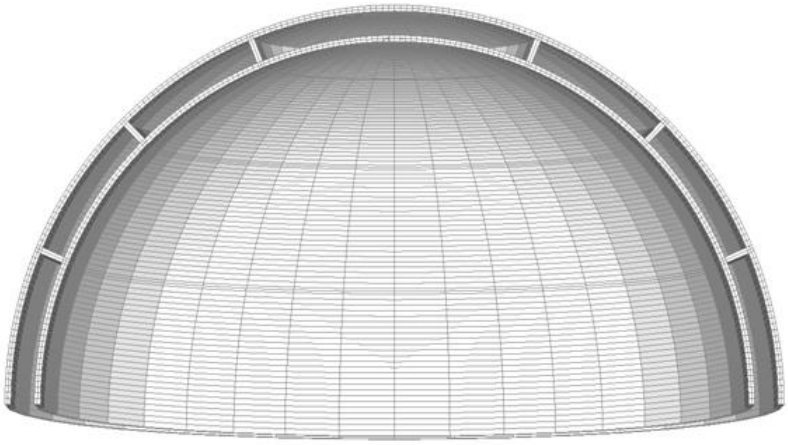


Рис. 5.7. Вид в перерізі XZ скінченно елементної моделі 3 ребра a)

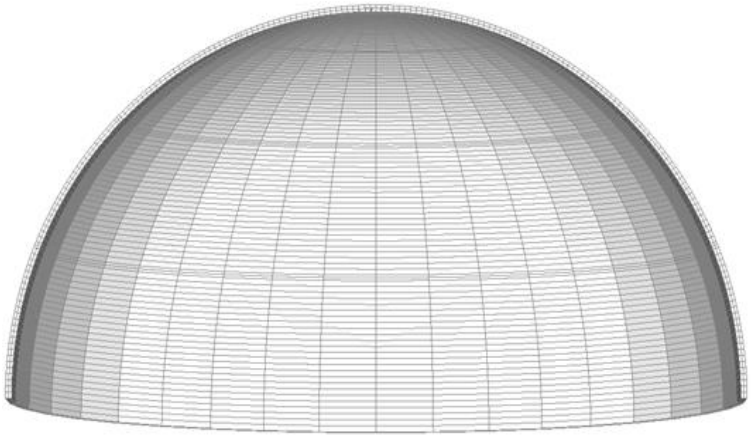


Рис. 5.7. Вид в перерізі XZ внутрішньої оболонки моделі 3 ребра b)

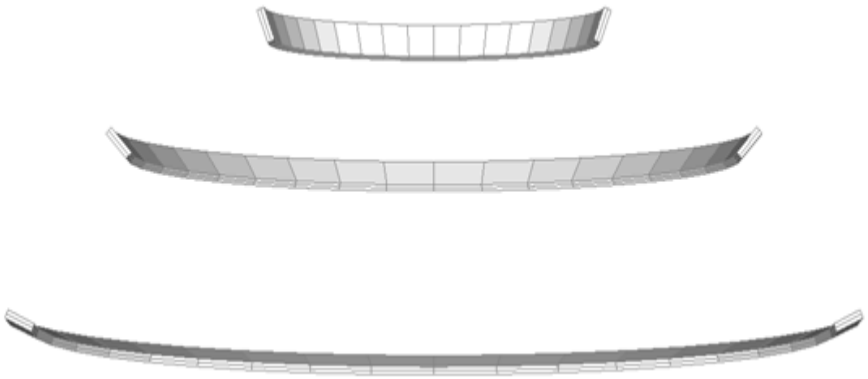


Рис. 5.7. Вид в перерізі XZ ребер моделі 3 ребра c)

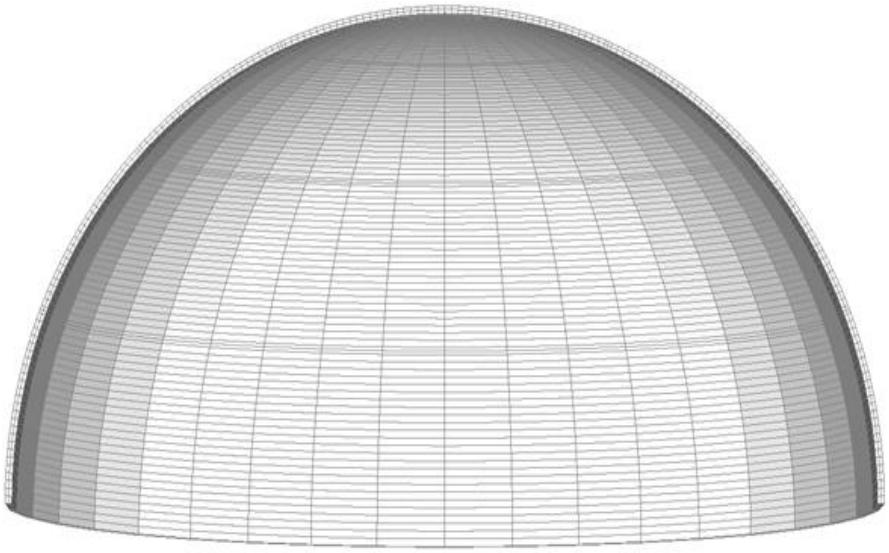


Рис. 5.7. Вид в перерізі XZ зовнішньої оболонки моделі 3 ребра d)

Рис. 5.7. Вид в перерізі XZ пінопласт моделі 3 ребра.

Розрахунки проводилися при таких же геометричних і фізико - механічних параметрах, як і для розрахунків методом скінчених різниць *h/R* = 0,13.

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено–деформованого стану тришарової пружної структури сферичного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$). На рис. 5.8 наведені залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,75T (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. З представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ по просторовій координаті. Перша власна частота конструкції 1441Гц.

На рис. 5.9, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і σ_{22}^2 (2) від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,75T (час

досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$). Легкий заповнювач відсутній.

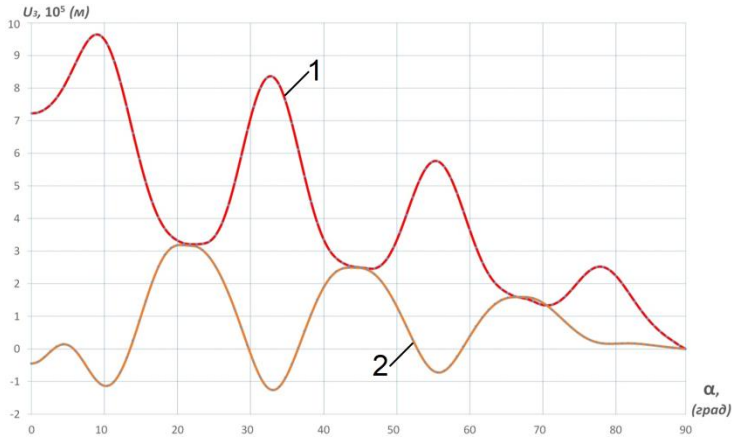


Рис. 5.8. Залежності величин нормальних прогинів $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α при t = 1,75Т без пінопласту.

Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$. Перша власна частота конструкції 1441Гц.

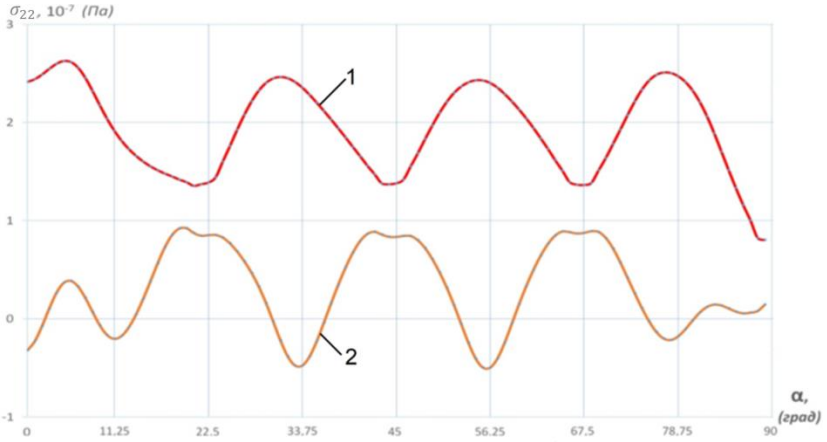


Рис. 5.9 Залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від кутової координати при t = 1,75Т без пінопласту.

На рис. 5.10, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів $u_3^1\ (1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,8Т (час досягнення максимального значення величин $u_3^1\ (1) i\ u_3^2(2)$). Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t$ = 50.

Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ по кутовій координаті. Перша власна частота конструкції 1516Гц.

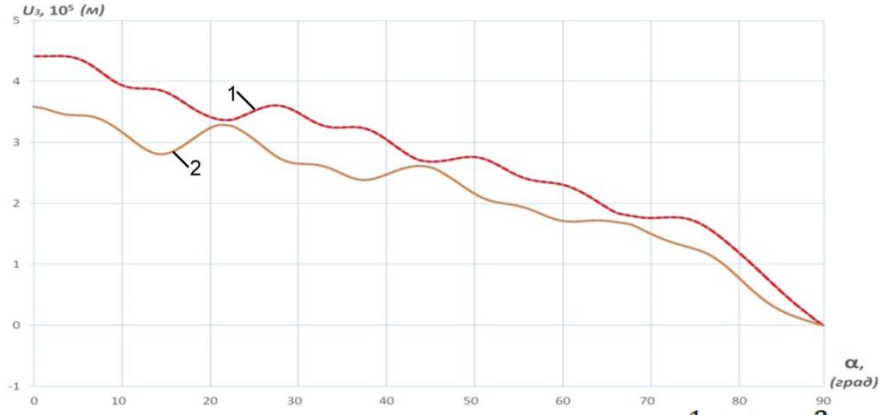


Рис. 5.10. Залежності величин нормальних прогинів $u_3^1\ (1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α, $E_{1,2}/E_t = 50$.

На рис. 5.11, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^{1} внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^{2} зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,8Т (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$). Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини u_3 по просторовій координаті. Перша власна частота конструкції 1516Гц.

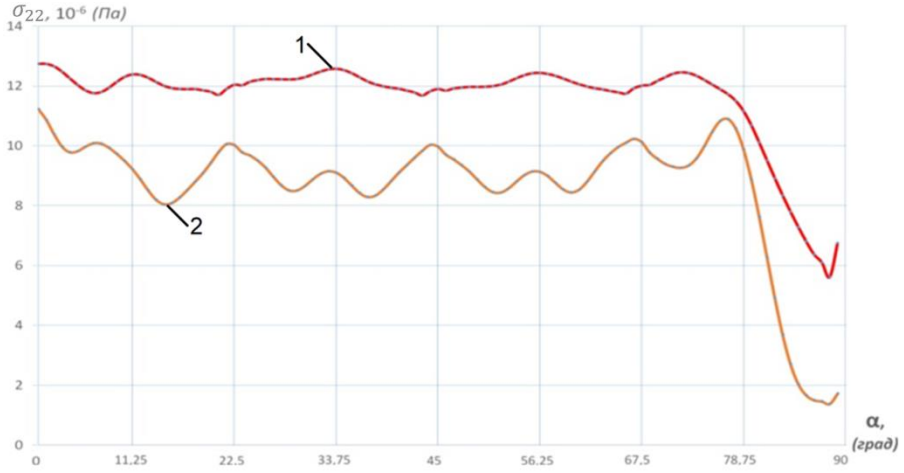


Рис. 5.11. Залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від кутової координати α, $E_{1,2}/E_t = 50$.

На рис. 5.12, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів $u_3^1\,(1)\;i\;u_3^2(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,5Т (час досягнення максимального значення величин $u_3^1\,(1)\;i\;u_3^2(2)$). Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача $E_{1,2}/E_t$ = 500. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини $u_3^1\,(1)\;i\;u_3^2(2)$ по просторовій координаті. Перша власна частота конструкції 1442Гц.

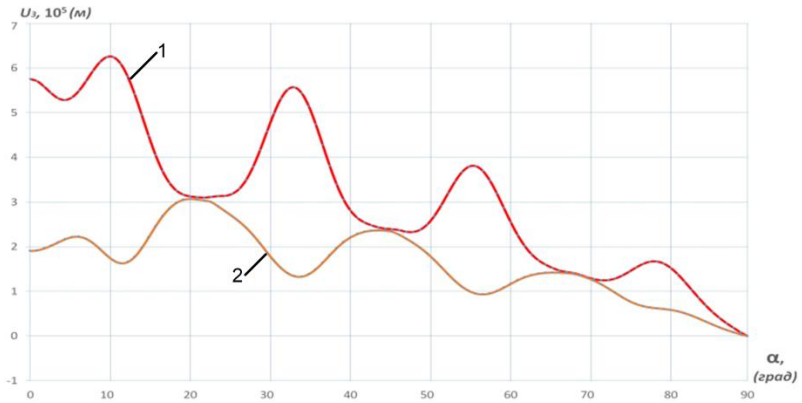


Рис. 5.12. Залежності величин нормальних прогинів $u_3^1\,(1)\;i\;u_3^2(2)$ від кутової координати α, $E_{1,2}/E_t$ = 500.

На рис. 5.13, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1\,(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 1,5Т (час досягнення максимального значення величин $\sigma_{22}^1\,(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$). Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величини $u_3^1(1)\;i\;u_3^2(2)$ по просторовій координаті. Перша власна частота конструкції 1442Гц.

На рис. 5.14 приведені залежності величин нормальних прогинів внутрішнього $u_3^1\,(1)$ і зовнішнього $u_3^2(2)$ несучих шарів, а також їх нормальних

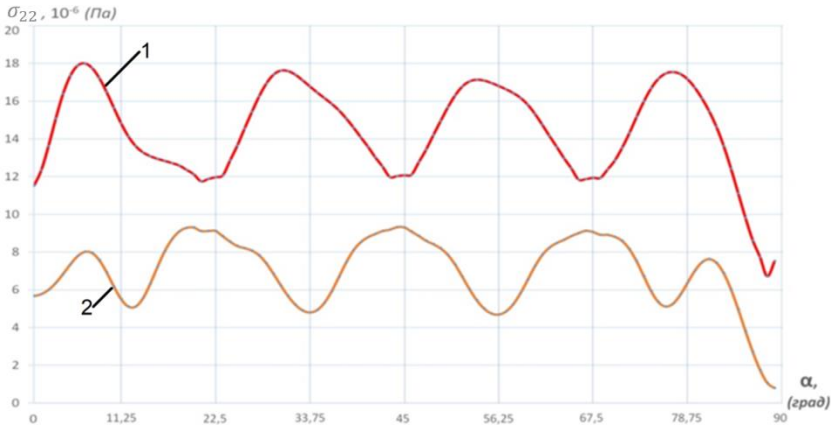


Рис. 5.13. Залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від кутової координати α $E_{1,2}/E_t = 500$.

напружень σ_{22}^{1} (1) і $\sigma_{22}^{2}(2)$ – рис. 5.15 від часу симетричної тришарової сферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії імпульсного навантаження. Легкий заповнювач – відсутній. Індексом 1 позначені величини внутрішнього несучого шару, індексом 2 – зовнішнього несучого шару.

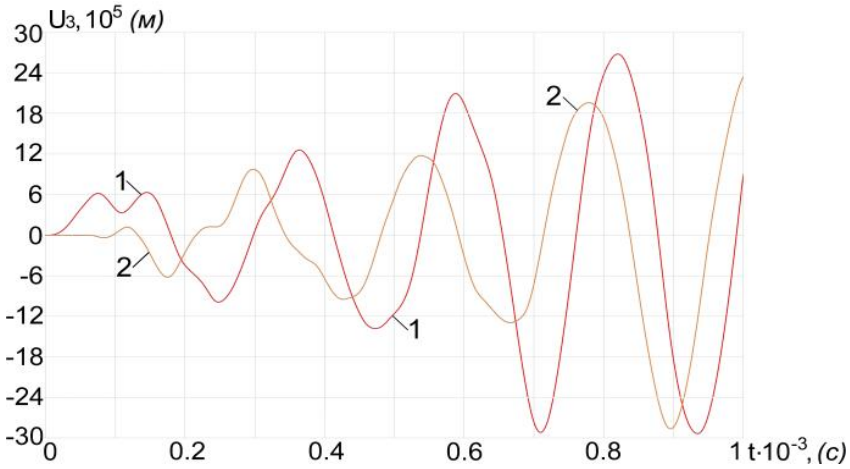


Рис. 5.14. Залежності величин $u_3^1(1)$ і $u_3^2(2)$ від часу у вершині сферичної оболонки при відсутності легкого заповнювача.

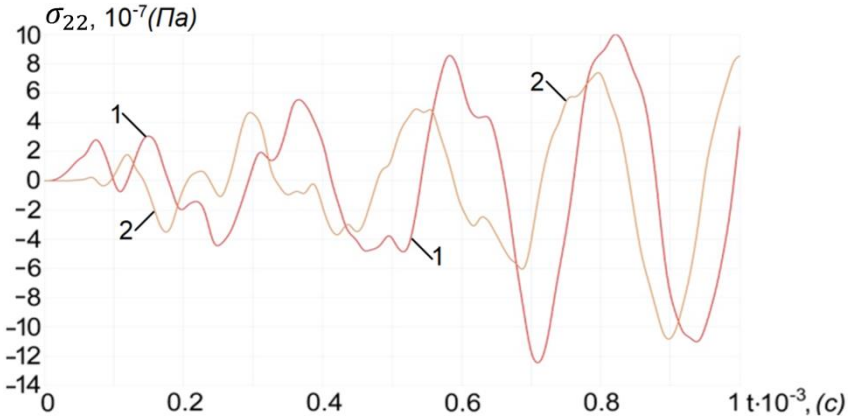


Рис. 5.15. Залежності величин $\sigma_{22}^{1}(1)$ і $\sigma_{22}^{2}(2)$ від часу у вершині сферичної оболонки при відсутності легкого заповнювача.

Слід зауважити, що графіки на рис. 5.14, рис. 5.15 добре узгоджуються з відповідними графіками на рис. 5.4, рис. 5.6 відповідно.

При використанні скінчено-елементного методу в моделях був використаний тривимірний об'ємний скінчений елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів.

Для дослідження динаміки несиметричної тришарової сферичної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем створена скінчено-елементна модель (Рис. 5.16 a-d), яка включала 43200 скінчених елементів і 52680 вузлів. Півсфера з п’ятьма ребрами.

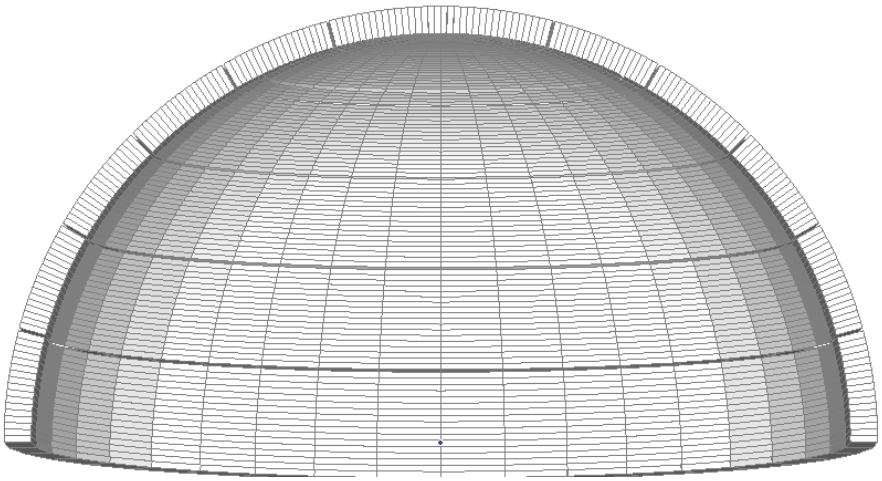
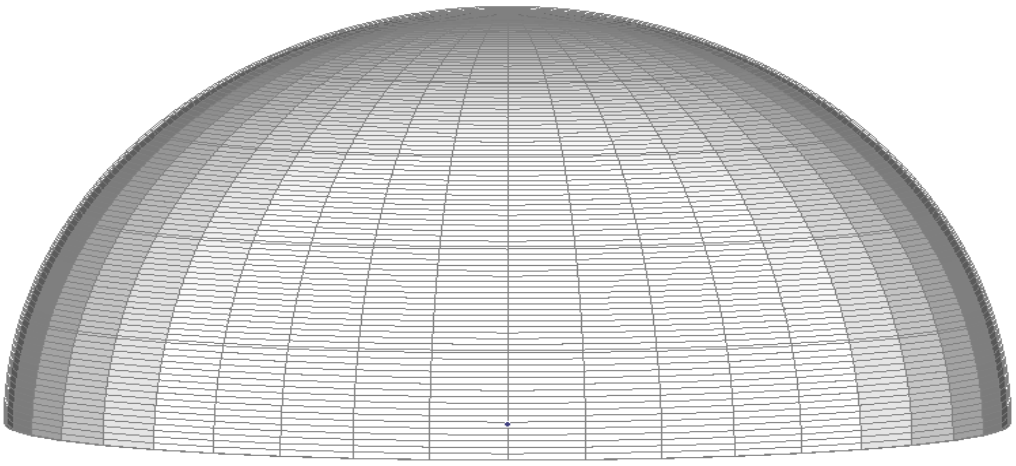
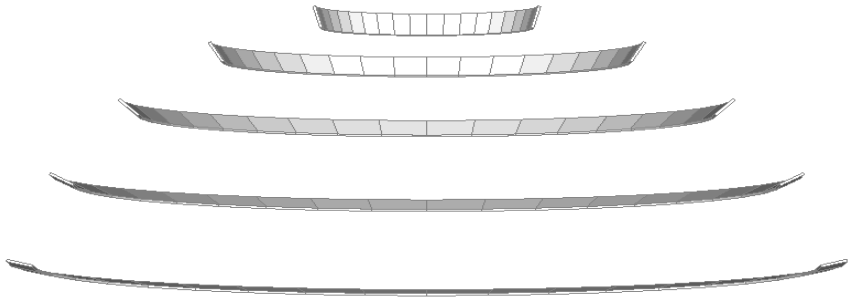


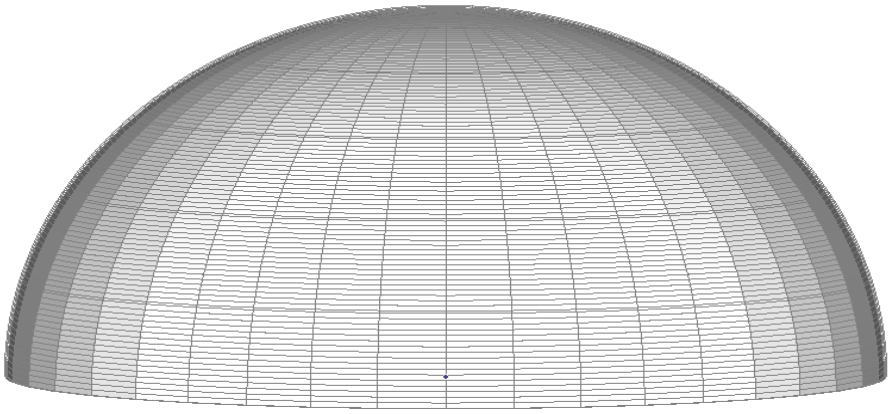
Рис. 5.16. Вид в перерізі XZ скінчено-елементної моделі з пінопластом.5 ребер a)



5.16. Вид в перерізі XZ внутрішнього несучого шару 5 ребер b)



5.16. Вид в перетині XZ ребер моделі 5 ребер c)



5.16. Вид в перетині XZ зовнішнього несучого шару 5 ребер d)

Розрахунки проводилися при наступних геометричних і фізико - механічних параметрах: $E_1^1 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_j = \nu_1^1 = 0{,}3$; $\rho_1 = \rho_j = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3; $h_1 = h_2 = 0{,}005$м; $h_j = 2h_2$; $R_1 = 0{,}3$ *м*; $R_2 = 0{,}322$м; $F_J = 4 \times 10^{-5}$м^2, $E_1^2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\nu_1^2 = 0{,}3$; $(E_1^1 + E_1^2)/2E_t = 50$; $h/R = 0{,}075$. Звідси слідує, що зовнішній несучий шар виготовлений зі сталі, а внутрішній - зі сплаву АМГ6.

Дискретні армуючі ребра (паралелі) перебувають у точках: $\frac{\pi}{12} i = x_i$; $i = \overline{1,5}$. На лобову точку сферичної оболонки діє зосереджений удар, дію якого можна описати наступним чином:

$$P(0,t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{t}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}, \quad A = 10^6 \text{Па}, \quad T = 50 \times 10^{-6} \text{с}.$$

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено–деформованого стану тришарової пружної структури сферичного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \le t \le 40T$). Зокрема, на рис.

5.17, в приведеному масштабі, приведені залежності величин нормальних прогинів u_3 від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 5,85Т (час досягнення максимального значення величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$). Легкий заповнювач відсутній. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив сферичності структури на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ по просторовій координаті. Перша власна частота конструкції 1440Гц.

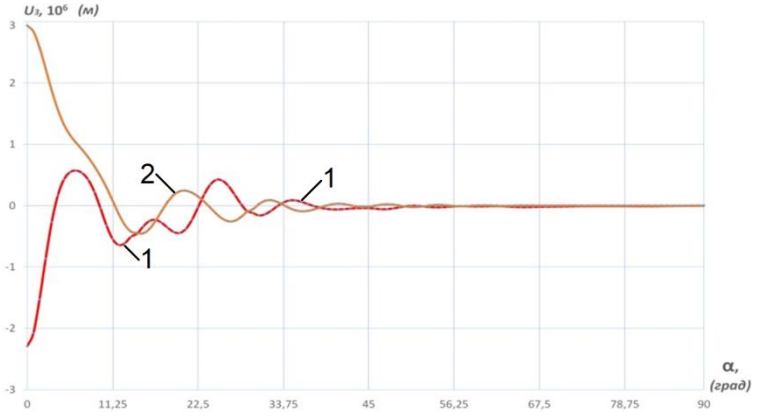


Рис. 5.17. Залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α. Легкий заповнювач відсутній

На рис. 5.18, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^2 – зовнішньої, в момент часу t = 5,85Т. Перша власна частота конструкції 1440Гц.

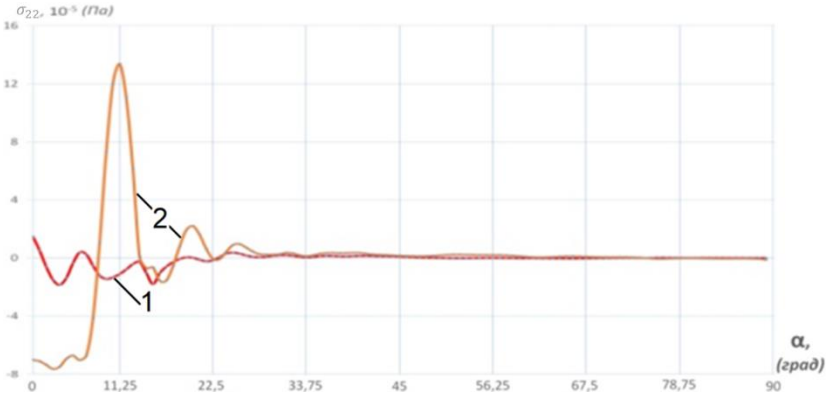


Рис. 5.18, Залежності величин нормальних напружень $\sigma_{22}^1(1)$ і $\sigma_{22}^2(2)$ від кутової координати α. Легкий заповнювач відсутній

На рис. 5.19, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних прогинів $u_3^1\,(1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині u_3^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині u_3^2 зовнішньої сферичної оболонки в момент часу t = 9,55Т. Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача $(E_1^1 + E_1^2)/2E_t = 50$. З графічного матеріалу видно вплив сферичності структури і легкого заповнювача на антисиметричність розподілу величин $u_3^1(1)\ i\ u_3^2(2)$ по кутовій координаті. Перша власна частота конструкції 1576Гц.

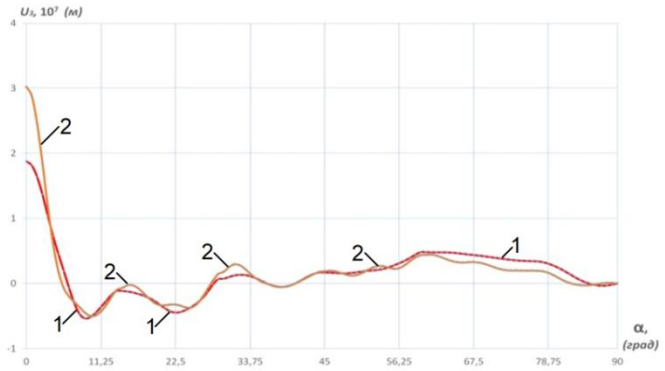


Рис. 5.19. Залежності величин нормальних прогинів серединних поверхонь $u_3^1\,(1)\ i\ u_3^2(2)$ від кутової координати α. $(E_1^1 + E_1^2)/2E_t = 50$.

На рис. 5.20, в приведеному масштабі, наведені залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 (1) і σ_{22}^2(2) від координати α. Крива з індексом 1 відповідає величині σ_{22}^1 внутрішньої сферичної оболонки, а з індексом 2 – величині σ_{22}^2 – зовнішньої, в момент часу t = 9,55Т. Перша власна частота конструкції 1576Гц.

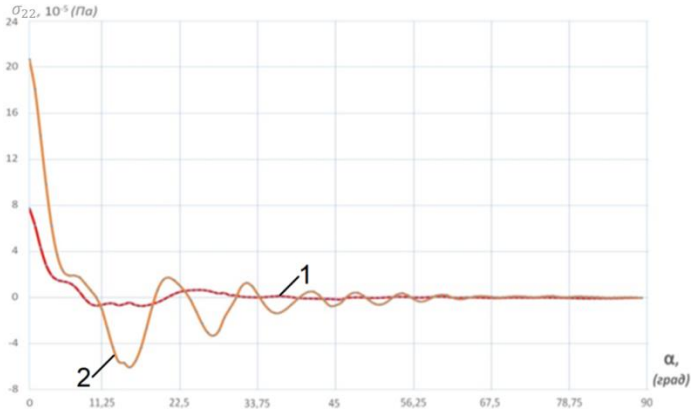


Рис. 5.20. Залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 від кутової координати α. $(E_1^1 + E_1^2)/2E_t = 50$

З порівнянь графіків на рис. 5.17 і 5.19 видно на скільки суттєво впливає легкий заповнювач на характер коливань внутрішнього несучого шару, лобова точка якого міняє значення нормального прогину на протилежне, а перша власна частота конструкції змінилася на 9,5%. Окрім цього, обидва графіки демонструють здатність таких несиметричних тришарових конструкцій ефективно гасити збурення від локальних ударних навантажень.

Висновки до п'ятого розділу

Створена комплексна методика розрахунку динаміки складних оболонкових конструкцій обертання при нестаціонарних навантаженнях. Методика включає: постановку задач теорії несиметричних оболонок обертання, чисельний метод рішення задач, графічну обробку отриманих результатів. Постановка задач теорії конструктивно-неоднорідних оболонок обертання, яка заснована на застосуванні рівнянь коливань оболонок на базі уточненої моделі С.П. Тимошенка. Для чисельного розв'язку динамічних задач застосований скінчено - різницевий підхід, заснований на використанні інтегро - інтерполяційного методу побудови скінчено - різницевих схем по просторовій координаті і явній апроксимації по часовій координаті. Використання такого підходу дозволило визначити напружено–деформований стан тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при імпульсних навантаженнях.

Детально досліджено широкий спектр симетричних і несиметричних тришарових сферичних структур з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, неоднорідним заповнювачем з допомогою методу скінчених елементів. Отримані чисельні розв’язки несиметричних тришарових сферичних оболонок з неоднорідним заповнювачем при різних граничних умовах і розподілених і локальних нестаціонарних навантаженнях. Це дає можливість індуктивно оцінювати результати, необхідних при розрахунку на конструктивну міцність досліджуваних тонкостінних об'єктів.

Загальні висновки

З наведеного вище огляду літератури слідує, що особливе місце серед тришарових оболонок займають оболонки з легким пружним заповнювачем, бо завдяки такій тришаровій структурі можна досягти необхідної жорсткості при малій питомій вазі. Це також стосується тришарових оболонок з дискретним ребристим заповнювачем. У випадку, коли розміри ребер, відстані між ними та товщини несучих шарів порівнянні за величиною, можна використати конструктивно-ортотропну модель. В тришарових оболонках, в яких розміри ребер заповнювача значно менші ніж відстані між ними при вимушених динамічних навантаженнях виникає великоградієнтний напружений стан, тому для їх дослідження слід застосовувати підхід незалежних гіпотез для кожного шару. В цьому напрямку є незначна кількість робіт для симетричних конструкцій і способів їх навантаження. Цей фактор обумовлює актуальність теми досліджень, яка полягає у вивченні динамічної поведінки тришарових оболонок обертання з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, а також впливу несиметрії тришарових оболонок і характеру нестаціонарного навантаження на їх напружено-деформований стан.

Слід також звернути увагу на вдосконалення чисельних методів та розв’язування конкретних задач з допомогою скінчено-елементних засобів.

Наявність широкого кола порівняльних даних дозволить виявити характер і ступінь впливу дискретного неоднорідного заповнювач, уточнити межі придатності прикладних двовимірних рівнянь і в їх рамках вказати найбільш прості і в той же час досить точні підходи до аналізу динаміки тришарових оболонкових систем з дискретним неоднорідним заповнювачем.

В дисертації дана постановка задач та вивід рівнянь неосесиметричних коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з урахуванням наявності легкого дискретно-симетричного заповнювача, армованого дискретними ребрами. Покладалося, що напружено–деформований стан неоднорідної тришарової пружної структури, а саме – несучих шарів і армуючих

дискретних ребер, може бути визначений в рамках теорії оболонок і стрижнів згідно гіпотезам С.П. Тимошенка. Кінематичні залежності для легкого заповнювача вибрані згідно лінійної моделі [174], а умови неперервності переміщень між заповнювачем і несучими шарами записані за зразком роботи [175]. Для виводу рівнянь коливань несиметричної неоднорідної тришарової структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Записуються вирази для потенціальної та кінетичної енергій несучих шарів, легкого заповнювача та відповідних дискретних армуючих ребер жорсткості, які виготовлені з відповідних матеріалів. Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі, отримано рівняння неосесиметричних коливань для несучих шарів, легкого заповнювача та відповідних повздовжніх і поперечних дискретних армуючих елементів. Ці коливання несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами рівнянь математичної фізики 20 порядку. Приведені природні граничні та початкові умови для несучих шарів, легкого заповнювача і дискретних армуючих елементів заповнювача.

Дослідження використання легкого заповнювача з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівняно невеликому збільшенні ваги конструкції (на 1-3 відсотки) істотно підвищити її згинальну жорсткість. Таким чином, дослідження нестаціонарних коливань несиметричних тришарових циліндричних оболонок обертання в широкому діапазоні зміни фізико–механічних параметрів несучих шарів істотно впливає на параметри коливань: виготовлення внутрішнього несучого шару зі сталі на 28% збільшує колові напруження σ_{22}, а перша власна частота такої оболонки збільшується на 136%. Такі результати демонструють значний вплив легкого заповнювача на динамічну поведінку несиметричних тришарових циліндричних оболонок.

В симетричній конічній структурі максимальні нормальні прогини u_3 внутрішнього несучого шару за рахунок впливу пінопласту зменшуються в 2,61 рази, а u_3 для зовнішнього несучого шару в 2,22 рази. В несиметричній конічній структурі з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем, у

якої внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній з АМГ6, максимальні колові напруження σ_{22} внутрішнього несучого шару за рахунок впливу пінопласту зменшуються в 3,11 рази, а σ_{22} для зовнішнього несучого шару - майже не змінюються.

Створена комплексна методика розрахунку динаміки складних оболонкових конструкцій обертання при нестаціонарних навантаженнях. Методика включає: постановку задач теорії несиметричних оболонок обертання, чисельний метод рішення задач, графічну обробку отриманих результатів. Методика заснована на базі уточненої моделі С.П. Тимошенка. Застосований скінчено - різницевий підхід, заснований на використанні інтегро - інтерполяційного методу побудови скінчено - різницевих схем по просторовій координаті і явній апроксимації по часовій координаті. Це дозволило визначати НДС тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при імпульсних навантаженнях.

Детально досліджено широкий спектр симетричних і несиметричних тришарових сферичних структур з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, неоднорідним заповнювачем з допомогою методу скінчених елементів. Отримані чисельні розв’язки несиметричних тришарових сферичних оболонок з неоднорідним заповнювачем при різних граничних умовах і розподілених і локальних нестаціонарних навантаженнях.

Список використаних джерел

1. Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo O.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features//Intern. Appl. Mech. – 2019, **55**, № 5. – P**.** 524–533.

2. Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Применение метода сплайн – коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доповіді НАН України. 2019. № 8, – С.25 – 33. https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.025.

3. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Meish Yu. A., Orlenko S. P. Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads //Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 1 – P. 22–32.

4. Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 3 – С. 19 – 27. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.03.019.

5. Орленко С.П. Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестаціонарних навантаженнях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2020. Т. 1. № 31. – С. 78 – 89.

6. Орленко С.П. Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 8– С. 35 – 42. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.08.035.

7. Луговий П.З., Шугайло О.П., Орленко С.П., Деменков Коливання теплоізоляційних тришарових циліндричних труб при експлуатаційних навантаженнях // Ядерная и радиационная безопасность. – Киев: ГНТЦ ЯРБ, № 3, 2020, – С.55 – 61 .

8. Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамика составных оболочечных конструкций вращения при нестационарных загрузках // Міжнародна наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019. Матеріали конференції. Дніпро, Кам’янське – 2019. – С.15.

9. Луговий П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Методика дослідження напружено-деформованого стану оболонок з конструктивними особливостями. // Міжнародна наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019. Матеріали конференції. Дніпро, Кам'янське – 2019. – С.17.

10. Луговий П.З., Орленко С.П. К постановке и решению динамических задач теории трехслойных конических оболочек с дискретным ребристым наполнителем // XVII міжнародна науково - технічна конференція " Удосконалювання енергоустановок методами математичного та фізичного моделювання" 7-11 жовтня 2019 р., м. Харків, Україна. 2019. – С.14.

11. Орленко С.П. Динаміка тришарових конічних оболонок з підкріпленням та масами // 10 Міжнародна наукова конференція. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» Львів. 2019. – С. 72-73.

12. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамические задачи теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно – однородным заполнителем / Тези доповідей другої міжнародної науково – технічної конференції пам'яті академіка В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпро, 10-12 жовтня, 2019. – С. 178.

13. Мейш Ю.А., Орленко С.П. К численному расчету нестационарных колебаний трехслойных цилиндрических оболочек с поперечным дискретным ребристым наполнителем / Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей VI Міжнародної конференції. – Одеса, 20 – 24 травня, 2019. - С. 215 – 216.

14. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. До чисельного моделювання динамічної поведінки рівнянь оболонок типу еліптичного параболоїду при нестаціонарних навантаженнях // І Міжнародна науково-технічна інтернет-конференція «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» 18 квітня 2019 р. м. Київ, Україна. С. – 177.

15. Орленко С.П. Дослідження динаміки тришарового сферичного куполу з дискретно-неоднорідним заповнювачем // Science, society, education: topical issues

and development prospects. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Kharkiv, Ukraine. 2020. Pp. 111-114. URL: https://sci-conf.com.ua.

16. Лехницкий С.Г. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела // Прикл. мат. и мех. 1937, №1. – С. 77 – 90.

17. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М. –Л.: ОГИЗ, 1947. – 355 с.

18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М: Наука,1977.- 416 с.

19. Амбарцумян С.А.Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки // Докл. АН Арм. ССР.– 1948. – № 5. – С.203- 210.

20. Ambartsumyan, S. A. On the Theory of Anisotropic Shells and Plates. // Proceedings of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics on Non-Homogeniety in Elasticity and Plasticity Symposium, 1958. Ed. by Olszak, W., Warsaw, Paper No. 1, –P. 83–94.

21. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек / Москва : Физматгиз, 1961. – 384 с.

22. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / М.: Наука, 1974. – 448 с.

23. Reissner E. Formulation of Variational Theorems in Geometrically Nonlinear Elasticity // 1984, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 110, – P. 1377-1390.

24. Reissner, E. “Reflections on the Theory of Elastic Plates,” Applied Mechanics Reviews, 1985, Vol. 38, –P. 1453–1464 .

25. Reissner, E. On the Equations of an 8th Order Theory for Nonhomogeneous Transversely Isotropic Plates // International Journal of Solids and Structures, 1994, **31**, No. 1, - P. 89-96.

26. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики вып. 2 / Пер. с англ. под ред. В. Н. Жаркова. - М.: Мир, 1970. - 352 с.;

27. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел Киев: Наук, думка, 1971.-275 с.

28. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек Киев: Вища школа, 1980. - 167 с.

29. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Мех. композит, матер. – 1988. – №2. – С.287 – 298.

30. Ghugal Y. M., Shimpi R. P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates // J. Reinforced Plastics and Komposit. 2002 V 21, № 9, – P. 775–813. https://doi.org/10.1177/073168402128988481;

31. Мейш В.Ф., Кравченко Н. В. Неосесимметричпые колебания неоднородных многослойных дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. мех. – 2003. – **39**. №9. – С. 88–95.

32. Meish V. F., Khamrenko Yu. A. Comparative Analysis of the Dynamic Responses of Transiently Loaded Sandwich Shells Predicted by Various Applied Theories // Intern. Appl. Mech. – 2003, **39,** № 7, – P. 856–861.

33. Nasihatgozar M ., Khalili SMR. Vibration and buckling analysis of laminated sandwich conical shells using higher order shear deformation theory and differential quadrature method // J. of Sandwich Structures & Materials. 2017. **21**, № 4, – P. 1445-1480. https://doi.org/10.1177/1099636217715806

34. Lur'e SA, Shumova NP. Kinematic models of refined theories concerning composite beams plates and shells // Int Appl Mech. 1996. 32. – P. 422–430.

35. Zarutskij V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic Problems and Stress Strain State of Inhomogeneous Shell Structures under Stationary and Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 245 – 272.

36. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с

37. Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamics of inhomogeneous shell systems under nonstationary loading (suevey) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 5. – P. 481–537

38. Sciuva M.D., Abrate S. Multilayer Models for Composite and Sandwich Structures // Comprehensive Composite Materials II**.** V.1, 2018, – P. 399-425.

39. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and Shells. // Applied Mechanics Reviews. –2003, 56 287–308.

40. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. К.: Наук. думка, 1973. – 288 с.

41. Mueller W.,Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G. Mechanics of Anisotropic Heterogeneous Shells: Fundamental Relations for Different Models / from book Recent Developments in Anisotropic Heterogeneous Shell Theory. 2016. DOI: 10.1007/978-981-10-0353-0.

42. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкцій . – К; Будівельник, 1986. – 176с.

43. Рассказов О. А., Соколовская Н. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых орто-тропных пластин и оболочек. Киев: Вища школа, 1986. - 192 с.

44. Барсуков В.Н. Общая теория пологих многослойных оболочек нерегулярной структуры с сжимаемым заполнителем. – К.; –1975 – 41с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 14.02.75. № 2794.

45. Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А. Динамика трехслойных сферических оболочек несимметричной структуры // Труды XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997, т. 1. С.47-52.

46. Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, ASME Proc of PVP Conf, New Orleans, 1985 , PVP–Vol 98–2, 257–263.:

47. Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane response // ASME J. Appl. Mech. 1986. **53.** – P. 661– 666.

48. Pagano, N. J., Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending, J. Comp. Mat. 1970. **3**, –P. 398–411.

49. Pagano, N. J., Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates, J. Comp. Mat. 1970., **4**, –P. 20–34.

50. Pagano, N. J. and Hatfield, S.J., Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites, AIAA Journal, 1972. **10**, –P. 931–933.

51. Kreja I. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. // Open Engineering Volume 1, Issue 1. Published Online: 2011-0 18 | DOI: https://doi.org/10.2478/s13531.

52. Carrera E., On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells // Computers and Structures. – 2004. **82,** №. 7–8, –P. 541–554.

53. Carrera E, Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems // Composite Structures. 2005. V. **69**, № 3. - P. 271-293. DOI:10.1016/j.compstruct.2004.07.003.

54. Kumar P. Srinivasa C.V. On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells: A review // J. of Thermoplastic Composite Materials. 2018. https://doi.org/10.1177/0892705718809810.

55. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates**.** 1st Edition**.** Imprint: Academic Press. 2004. – 426p.

56. Noor A. K., Burton W. S. Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates // Applied Mechanics Reviews, 1989, **42**, – P. 1-13.

57. Noor A. K., Burton W. S. Three Dimensional Solutions for Antisymmetrically Laminated Anisotropic Plates // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 1990, V. 57, No. 1, – P. 182–188.

58. Noor A. K. Mechanics of Anisotropic Plates and Shells_A New Look at an Old Subject, Computer and Structures, 1992, **44**, – P. 499-514.

59. Noor A. K. Burton W. S. and Bert, C. W. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Applied Mechanics Reviews, 1996, V. 49, – P. 155–199.

60. Reddy, J. Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and application, Boca Raton, FL: CRC Press, 2003.

61. Soldatos, K. P. A General Laminated Plate Theory Accounting for Continuity of Displacements and Transverse Shear Stresses at Material Interfaces // Composite Structures, 1992, V. 20, - P. 195-211.

62. Soldatos K. P. and Watson P. A Method for Improving the Stress Analysis Performance of One-and Two-Dimensional Theories for Laminated Composite // Acta Mechanica, 1997, **V.** 123, - P. 163-186].

63. Librescu L., Hause T., Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey, Composite Structures. 2000, 48, 1–17.

64. Lee Y.S.and Lee K.D. Dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads // Comput. Struct. – 1997 V. 63. №1, – P. 149 – 157.

65. Tabiei A., Tanov R. and Simitses G.J. Numerical simulation of cylindrical laminated shells under impulse lateral pressure // AIAA J., –1999. V.37, № 5. – P.629 – 633.

66. Chun C.K. and Dong S.B. Shear constitutive relations for laminated anisotropic shells and plates: Part 1 – Methodology // ASME J. Appl.Mech., –1992. V.59, № 2. – P.372 – 379.

67. Chun C.K. and Dong S.B. Shear constitutive relations for laminated anisotropic shells and plates: Part 2 – Vibrations of composite cylinders // ASME J. Appl.Mech., – 1992. V.59, № 2. – P.380 – 389.

68. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек / – К.: Вища школа, 1984. – 208 С.

69. Бабаев А.Э., Кубенко В.Д. Нестационарная аэроупругость слоистых оболочек / –К.: Наук. думка. 1999. – с.247 – 261. – (Механика композитов Т.9 Динамика элементов конструкций).

70. Кохманюк С.С., Дмитриев Ф.С., Шелудько Г.А.,Шупиков А.Н. и др. Динамика конструкцій при воздействии кратковременных на гузок / –К.: Наук. думка. 1989. –304с.

71. Шупиков А.Н.,Сметанкина Н.В. Колебания многослойных пластин при кратковременных интенсивных воздействиях // Поблемы машиностроения. – 1992. Вып. 38. – С 17 – 22.

72. Шупиков А.Н., Долгополова Н.В. Колебания многослойных цилиндрических панелей при импульсных воздействиях // Вестник Харьковского гос. политех. ун-та. 1998. Вып. 10. – С 104 – 111.

73. Баженов В.Г., Батанин М.А., Зефиров С.В и др. Численное решение двухмерных нестационарных задач динамики тонкостенных упругопластических конструкцій с заполнителем // Прикладные проблемы прочности и пластичности.

Методы решения задач упру гости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т. 1981. – С. 46 – 57.

74. Богданович А.Е. Решение нелинейных задач динамического выпучивания подкрепленных слоистых цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1986.–**22.** № 8.– С.57 – 66.

75. Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. О решении нелинейной задачи динамического выпучивания цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости // Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. – Рига: Изд-во Латв. Ун – та, 1982. – С. 123 – 135.

76. Bogdonovic A.E., Sierakowsky R. Composite materials and structures: science technology and application // Appl Mech Rev. 1999. 52. – P. 366–551.

77. Chai G. B., Zhu S. A review of low-velocity impact on sandwichstructures // Journal of Materials: Design and Applications. 2011.

78. Abrate S. Blast Loading on Sandwich Structures: A Critical Assessment // IMECE. 2011-64121, – P. 557-566; 10 pages https://doi.org/10.1115/IMECE2011-64121

79. Arora H., Kelly M., Worley A., Del Linz P. ets. Compressive strength after blast of sandwich composite materials // Philos Trans A Math Phys Eng Sci. 2014 May 372(2015): 20130212. doi: 10.1098/rsta.2013.0212.

80. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении // Проблемы прочности. – 2000. № 4. — С. 86-96.

81. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку наружено – деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестаціонарних навантаженнях // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2002. – Вип. № 3. – С. 210 – 216.

82. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. Вимушені коливання багатошарових сферичних оболонок з підкріпленим отвором при нестаціонарному навантаженні // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 146 – 150.

83. Meish V. F., Kravchenko N. V. Nonaxisymmetric Vibrations of Discretely Reinforced Inhomogeneous Multilayer Cylindrical Shells under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2003, **39**. № 9. –P. 1066–1072.

84. Мейш В., Кравченко Н.В. Застосування різницевих апроксимацій типу Річардсона для розв'язування динамічних задач теорії багатошарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2004. – № 3.–С. 115 – 121.

85. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. Вимушені коливання п'ятишарових конічних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестаціонарних навантаженнях // Системні технології. Мате-матичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2008. – № 4 (57). – С. 120 – 124.

86. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания многослойных продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных загрузках // Методи розв'язу-вання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2009. – Вип. 10. – С. 199 – 205.

87. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. До розрахунку осесиметричних коливань п'ятишарових підкріплених циліндричних оболонок при повздовжньому крайовому навантаженні // Проблеми обчислюваль-ної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський нац. ун-т. – 2010. – Вип. 15. – С. 89 – 96.

88. Meish V.F., Mikhalyak A.M. Forced Vibrations of Three – Layer Elliptic Cylindrical Shells under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. − 2010, − **46**, N 2. – P. 195 – 200.

89. MeishV.F., Meish Yu. A., Arnauta N. V Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry // Int. Appl. Mech. − 2019, − 46, N 2. – P. 426-433.

90. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания пятислойных цилиндрических оболочек с продольно-поперечным дискретным подкреплением при распределенном нагружении // Методи

розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2011. – № 12. – С. 203 – 209.

91. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000-2010 //Open Journal of Composite Materials. 2012. Vol. 2 No. 3, Article ID: 21295 , 16 p.

92. Qatu M. S., Sullivan R. W. and Wang W. Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // Composite Structures, Vol. 93, No. 1, 2010, – P. 14–31.

93. Maturi D. A., Ferreira A. J. M., Zenkour A. M., and Mashat D. S. Analysis of Laminated Shells by Murakami’s Zig-Zag Theory and Radial Basis Functions Collocation // Journal of Applied Mathematics. 2013. V. 2013. Article D 123465 . – P.1 –14. https://doi.org/10.1155/2013/123465.79.

94. Прохоров Б.Ф., Кобелев В.Н. Трехслойные конструкции в судостроении / Л.; 1972,Судостроение , 334с.

95. Лизин В.Т., Пяткин А.А., Проектирование тонкостенных конструкций. М.; Машиностроение , 1976, 408с.

96. Панин В.Ф. Конструкции с сотовым заполнителем.М.:Машиностроение, 1982,152 с.

97. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций / – М.: Машиностроение, 1984. – 308с.

98. Кобелев В.Н., Потопахин В.А. Динамика многослойных оболочек / – Ростов: Изд-во РГУ, 1985. – 160 с.

99. Устарханов О.М., Муселемов Х. М., Акаева З.К. Расчёт параметров дискретного заполнителя в виде усеченной пирамиды // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2010. № 19, – С.59 – 65.

100. Вишталов Р.И., Муселемов Х.М., Устарханов О.М. Определение приведенных характеристик сотовых заполнителей различных форм // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2016, т.2, № 3. – С. 75 – 81.

101. Adams R.D. and Maheri M.R. The dynamic shear properties of structural honeycomb materials // Compos. Sci. Technol. 1993 47 15 – 23.

102. Shi G., Tong P. Equivalent transverse shear stiffness of honeycomb cores // Intern. J. of Solids and Structures. 1995,V 32, Issue 10, –P.1383-1393. doi.org/10.1016/0020-7683(94)00202-8. Еквівалентна поперечна зсувна жорсткість сотових заповнювачів.

103. Hohe J. and Becker W. Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties // Appl. Mech. Rev. 2002, 55(1). –P. 61-87. https://doi.org/10.1115/1.1425394.

104. Ali I. and Jun Y. J. Mathematical Models for in-Plane Moduli of Honeycomb Structures-A Review // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. 2014 . **3**. –P.581-592. dx.doi.org/10.19026/rjaset.7.294.

105. Webber J. P. H. Governing Equations for Thick Sandwich Shells with Honeycomb Cores and Laminated Faces // Aeronautical Quarterly. 1974. 25(04). –P. 271-286.

106. Ciccarelli D.**,** Greco L., Panaccio L., ets. Mechanical properties of sandwich composite panels // AIP Conference Proceedings. 2019. 2113(1):180010. DOI: 10.1063/1.5112748.

107. Карпов В.В., Брагина М. Ю., Рыбакова О.В. Вариационно-параметрический метод расчета трехслойных пологих оболочек с дискретным внутренним слоем // Проблемы механики сплошной среды: Тез. докл., представленных на II Междунар. школе по механике сплошной среды, Саратов, 1996. – С. 24-27.

108. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Вахрушева М.Ю., Рыбакова О.В. Трехслойные оболочки с дискретным внутренним слоем.// Труды ХУШ Международной конференции по теории оболочек и пластин, т.3, Саратов, 1997г.– С.83-87.

109. Вахрушева М.Ю. Применение вариационно-параметрического метода для получения линейной системы алгебраических уравнений при расчете трехслойных пологих оболочек с дискретным внутренним слоем. //Математическое моделирование, численные методы'и комплексы задач. Сб. трудов СПбГАСУ, 1998, – С. 63-71,

110. Вахрушева М.Ю. Применение вариационно-параметрического метода для получения линейной системы алгебраических уравнений при расчете трехслойных пологих оболочек с дискретным внутренним слоем при учете различия в прогибах внешних слоев.//Материалы XIX научно-технической конференции. Труды Братского индустриального института. Братск, 1998г. – С. 75-78.

111. Карпов В.В., Вахрушева М.Ю. Модель трехслойной пологой оболочки с дискретным внутренним слоем с учетом различия в прогибах внешних слоев при конечных прогибах.//Труды молодых ученых. Часть 1. СПбГАСУ, 1998г. – С. 8-11.

112. Карпов В.В., Вахрушева М.Ю., Рыбакова О.В. Эффективность применения трехслойных оболочек с дискретным внутренним слоем по сравнению с ребристыми оболочками // Надежность и долговечность строительных материалов и конструкций: Материалы междунар. науч.-техн. конф. 4.2/ ВолгГАСА. – Волгоград: 1998. – С.113 –11

113. Hause T.,Librescu L .Postbucling of Anisotropic Flat and Doubly-Curved Sanwich Panels under Complex Loading Conditions // Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35, N 23, – P. 3007 3027,

114. Hohe J., Librescu L., Advances in the Structural Modeling of Elastic Sandwich Panels, Mechanics of Advanced Materials & Structures 11, 2004, 395–424.

115. Xu J., Li Y., Liu B., Zhu M., Ge D. Experimental study on mechanical behavior of PVB laminated glass under quasi-static and dynamic loadings // Composites: 2011. Part B, 42. –P. 302–308.

116. Foraboschi P. Analytical model for laminated-glass plate // Composites Part B Engineering. 2012. 43(5). –P. 2094–2106 . DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.03.010.

117. Yating L., Lancaster F., Izzuddin B. A. Effective Modelling of Structural Glass with Laminated Shell Elements // Composite Structures . 2016. 156. –P. 47-62.

118. Eremeyev V. A., Naumenko K. On the Models of Three-Layered Plates and Shells with Thin Soft Core //from book Analytical and Computer Methods to Evaluate

Mechanical Properties of the Metamaterials Based on Various Models of Polymeric Chains. 2017. –P. 159 – 171. DOI: 10.1007/978-981-10-3797-9_9.

119. Vedrtnam A. Laminated Plate Theories and Fracture of Laminated Glass Plate- A Review // Engineering Fracture Mechanics. 2017.186. –P.316-330. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.10.020.

120. Chai G. B., Zhu S. A review of low-velocity impact on sandwich structures // Issue published 2011: Volume: 225, № 4, – P. 207-230.

121. Abrate S. Localized Impact on Sandwich Structures With Laminated Facings // Appl. Mech. Rev.-1997, 50(2). – P. 69-82. https://doi.org/10.1115/1.3101689 - 26.

122. Hohe J., Librescu L., Nonlinear theory for double-curved anisotropic sandwich shells with cross-compressed cores //, Int. J. Solid and Struct, 2003. 40,(5). – P.1059–1088.

123. Hause T.,Librescu L. Dynamic response of doubly-curved anisotropic sandwich panels impacted by blast loadings // Intern.J. Solids and Structures. – 2007. V 44, № 20, – P. 6678 – 6700.

124. Li R., Kardomateas G.A., Simitses G. J. Nonlinear Response of a Shallow Sandwich Shell With Compressible Core to Blast Loading // Journal of Applied Mechanics by ASME. –2008, V. 75 / 061023–1.

125. Malekzadeh Fard K., Livani M., Veisi A. and Gholami M. Improved high-order bending analysis of double curved sandwich panels subjected to multiple loading conditions // Latin American J. of Solids and Structures. 2014. **11**, – P.1591-1614. https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000900006.

126. Pourmoayed A.R., Malekzadeh Fard K., Shahravi M. Vibration Analysis of a Cylindrical Sandwich Panel with Flexible Core Using an Improved Higher-Order Theory // Lat. Am. j. solids struct. 2017. **14**, № 4 https://doi.org/10.1590/1679-78253410.

127. Хамренко Ю.А. Численное моделирование динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. трудов. Ин – т математики НАН України. Киев. 1998. – С. 222–225.

128. Мейш В.Ф., Мукоєд А.П., Хамренко Ю.А. Динамічна поведінка тришарової еліпсоїдальної оболонки обертання при осесиметричному нестаціонарному навантаженні // Вісн. Київ. Ун–ту. Фіз.–мат. науки. – 1998. – Вип. 3. – С. 71–76.

129. Shul'ga N. A., Meish V. F., Khamrenko Yu. A. Nonstationary oscillations of three-layer cylindrical shells under axisymmetric loading // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, N8. – P. 751-758.

130. Шульга М.О., Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. До теорії нестаціонарних осесиметричних коливань тришарових оболонок обертання // Доповіді НАН України. – 1999, N 9. – С. 69–73.

131. Shul'ga N. A., Meish V. F. Forced Vibration of Three-Layered Spherical and Ellipsoidal Shells under Axisymmetric Loads // Mechanics of Composite Materials, **39**, N 5, 2003. – P. 439 – 446.

132. Королев В.И. Тонкие ортотропные трехслойные пластинки и оболочки с легким упругим заполнителем // Теория пластин и оболочек. Труды 2 всесоюзной конференции. Львов, 15 – 21 сентября 1961.Изд-во АН Украинской ССР, Киев.1962. –С. 132 – 136.

133. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core under Local Loads // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 4. – P. 359 – 367.

134. Мейш В.Ф., Стрюк В.К., Кот Л.В. Нестаціонарна поведінка тришарових дискретно підкріплених оболонок обертання при повздовжньому імпульсному навантаженні // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія фіз.-матем. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 171 – 175.

135. Мейш В.Ф., Мукоїд А.П., Штанцель Е.А. Порівняльний аналіз динамічної поведінки тришарових циліндричних оболонок з неоднорідним заповнювачем в рамках прикладних теорій // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія фіз.-матем. науки. – 2000. − Вип. 3. – С. 163 – 168.

136. Мейш В.Ф., Штанцель С.Е. Розрахунок нестаціонарних вимушених коливань тришарових конічних оболонок з неоднорідним заповнювачем // Системні методи керування, технологія та організація виробництва, ремонту і

експлуатації автомобілів. Збірник наукових праць Національного транспортного університету. – Вип.№ 12, 2001. – С.417 – 420.

137. Мейш В. Ф., Штанцель С. Э. К построению численного алгоритма решения динамических задач теории трехслойных оболочек с неоднородным наполнителем // Сист. технології. - Днепропетровск: - 2001. - 2 (13). - С. 97-102.

138. Штанцель С.Э. Численное моделирование динамического поведения трехслойных сферических оболочек с дискретным наполнителем при нестационарных нагрузках // Космічна наука і технологія. – Т.8, №1. – 2002. – С. 159 – 163.

139. Meish V.F., Shtantsel S E. Dynamic Problems in the Theory of Sandwich Shells of Revolution with a Discrete Core under Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech., - 2002. **38** № 12, - P. 1501 - 1507.

140. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки / – М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер.Механика твердого деформированного гела. 1983. – 15. – С.3 – 68.

141. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Успехи механики: В 6-ти томах / Под редакцией А.Н. Гузя. Т.3. –К.: “А.С.К.” 2007.– С. 141 – 175.

142. Мейш В. Ф., Мейш Ю. А. Постановка и численный алгоритм решения задач вынужденных колебаний теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем // Сист. технології.- 2003. № 2.- С. 21-26.

143. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Чисельний розв’язок задач вимушених коливань тришарових циліндричних оболонок з кусково – однорідним заповнювачем // Вісник Національного транспортного університету. – Київ: НТУ, 2003, № 8. – С. 432–437

144. Мейш Ю.А. До розрахунку вимушених осесиметричних коливань тришарових конічних оболонок при дії нестаціонарного навантаження // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпропетровськ, 2004, №3 (32). – С. 154 – 160.

145. Мейш В.Ф., Латанская Л.А. Осесимметричные колебания трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем при нестационарном нагружении // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 161 – 164.

146. Латанская Л.А., Мейш В.Ф., Каиров В.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных сферических оболочек с кусочно-однородным заполнителем при импульсном нагружении // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій (Дніпропетровський нац. ун-т). – 2010. – Вип. 14. – С. 216 – 223.

147. Мейш В.Ф., Штанцель С.Е. Неосесиметричні коливання тришарових циліндричних оболонок з неоднорідним заповнювачем при динамічних навантаженнях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.– мат. науки. Вип. № 5, 2001. – С. 342–347.

148. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel S.E., Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // Int. Appl. Mech. – 2005. , № 2. –P. 161 – 167.

149. Мейш В. Ф., Бойко В. Н. Постановка и численный алгоритм решения неосесимметричных динамических задач теории трехслойных цилиндрических оболочек (дискретно-структурный подход) // Систем. технології. - 2005. - № 2. - С. 116-122

150. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. До розрахунку осесиметричних коливань тришарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестаціонарних навантаженнях // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузівський збірник наук. праць. – Дніпропетровськ. – 2009. – № 3 (62) – С. 40 – 44.

151. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. Чисельний алгоритм розрахунку осесиметричних коливань тришарових підкріплених циліндричних оболонок з застосуванням скінченно-різницевих апроксимацій Річардсона // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій / Дніпропетровський нац. ун-т. – 2010. – Вип. 14. – С. 246 – 253.

152. Латанська Л.О., Мейш В.Ф. Чисельний розв’язок динамічних осесиметричних задач теорії еліпсоїдальних оболонок з кусково однорідним заповнювачем // Вісник Дніпропетров. нац. ун – ту. Серія Механіка. – 2007. – **2**, вип. 11. – С. 110 – 116.

153. Мейш В. Ф., Михаляк А. М. О вынужденных колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при распределенных нагрузках // Прикл. механика. - 2010. **- 46**, № 2. - С. 86-92.

154. Meish V. F., Pavlyuk A. V. Nonstationary Vibrations of Elliptic Cylindrical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Stringers // Int. Appl. Mech. – 2017, **53**, № 1, - P. 67-75.

155. Meish V. F., Meish Yu. A.., Pavlyuk A.V. Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. 2018**, 54**, № 2, - P. 172–179.

156. Кириченко В.Л., Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения устойчивости пологой трехслойной оболочки с легким заполнителем, подкрепленной ребрами жесткости //«Вестник» Херсонского государственного технического университета, 1999. – №3(6). – С. 248 – 251.

157. Кириченко В.Л., Ємельянова Т.А. Стійкість тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості за умовами поздовжнього стиску // Таврійський науковий вісник. – Херсон: Айлант , 2000. – №14 . – С.185-197.

158. Емельянова Т.А. Устойчивость трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, подкрепленной продольными ребрами жесткости // Сборник «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике» (по материалам Международной научно – технической конференции), Минск: УП «Технопринт». - 2001. – С. 193 – 197.

159. Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости // Теоретическая и прикладная механика: сборник научных трудов. – Минск: УП «Технопринт», 2002. – С. 169 – 181.

160. Кириченко В.Л., Ємельянова Т.А., Голубкова Ю.А. Вільні коливання тришарової кругової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена кільцевими ребрами жорсткості // Сборник – Херсон : ХДАУ, 2004. – С. 45 – 46.

161. Ємельянова Т.А. Моделирование устойчивости трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, которая подкреплена продольными ребрами жесткости // Вестник Херсонского национального технического университета. 2011. № 3. – С. 200-203.

162. Ємельянова Т.А. Розв'язуюче рівняння вільних коливань тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена ребрами жорсткості // Вісник Херсонського національного технічного університету. 2016. 2(57). – С.11 – 16.

163. Емельянова Т. А., Сурьянинов Н. Г., Чучмай А. М. Свободные колебания техслойной пологой оболочки подкрепленной ребрами жосткости // ws-conference – com. 2018. № 5(33), Т.1, - С.19 – 24.

164. Surianinov M., Yemelianova T., Shyliaiev O. Investigation of Free Vibrations of Three-Layered Circular Shell Supported by Annular Ribs of Rigidity // Materials Science Forum **V.** 968**,** Actual Problems of Eng. Mech. 2019. - P. 437 - 443. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.437

165. Surianinov M., Yemelianova T., Lazarieva D. Investigation of free vibrations of threelayered cylindrical shell supported by transverse ribs // Intern.J. of Engineering and Technology. 2019. **11** №1. – P. 61– 66.

166. Tekalur S. A., Bogdanovich A. E., Shukla A. Shock loading response of sandwich panels with 3-D woven E-glass composite skins and stitched foam core // Composites Science and Technology. 2009. **69**(6) – P. 736-753. DOI: 10.1016/j.compscitech.2008.03.017.

167. Wang, E., Gardner, N., and Shukla, A., "The Blast Resistance of Sandwich Composites With Stepwise Graded Cores," Int. J. Solids Struct. 2009, **46**(18 – 19), – P. 3492–3502.

168. Wu Z., Zeng J., Xiao J., Liu J. Flexural performance of integrated 3D composite sandwich structures // J. of Reinforced Plastics and Composites. 2014. **33**(16). – P.1496 –1507. DOI: 10.1177/0731684414539026.

169. Eyvazian A., Taghizadeh S. A., Hamouda A. M.,Tarlochan F. Buckling and crushing behavior of foam-core hybrid composite sandwich columns under quasi-static edgewise compression // Journal of Sandwich Structures and Materials. 2019 DOI: 10.1177/1099636219894665.

170. Masoumiasl S. S. Rahimi G.H., Experimental and numerical investigation of effect of shape of ribs on flexural behavior of curved composite sandwich panels with lattice core // In Persian Journal of Science and Technology of Composites. 2019. 6, № 3. – P. 351 – 362. 10.22068/jstc.2019.92523.1465

171. Azarafza R., Davar A., Shoaa J. F. Experimental and numerical analysis of low-velocity impact on composite sandwich panels with grid stiffened core // Journal of Science and Technology of Composites; 10.22068/jstc.2019.110374.1563.

172. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / М.: Наука, 1966. – 636 с.

173. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек /Л.: Судпромгиз, 1962, 431 с.

174. Kheirikhah, M.M., Khalili, S.M.R. and Malekzadeh Fard, K. Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory // European Journal of Mechanics A/Solids. 2011. **31** – P. 54–66.

175. Frostig, Y. and Thomsen, O.T. Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. of Solids and Structures. 2004. **41**. – P. 1697–1724. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.051

176. Lugovoi P.Z. , Meish V.F. Numerical modeling of the dynamic behavior of reinforced shells of revolution under nonsteady loads // Int. Appl. Mech. – 1992, **28**, № 11, - P. 720-724.

177. Anik'ev I. I., Mikhailova M. I., Sushchenko E. A. Dynamic loading of cylindrical and spherical bodies interacting with a shock wave // Int. Appl. Mech. – 2004, **40**, № 12, - P. 1405 – 1410.

178. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / Под ред. А.Н.Гузя и В.А. Заруцкого. – К.: Наук. думка, 1984.-240 с.

179. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 536с.

180. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.

181. Grigorenko, A.Y., Loza, I.A., Yaremchenko, S.N. Numerical Analysis of Free Vibrations of Piezoelectric Cylinders/Advanced Structured MaterialsVolume 108, 2019, Pages 187-196.

182. Grigorenko, A.Y., Loza, I.A. Propagation of Axisymmetric Electroelastic Waves in a Hollow Layered Cylinder Under Mechanical Excitation/ International Applied Mechanics, 2017, 53(5), pp. 562-567.

183. Grigorenko, A.Y., Loza, I.A. Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material/ International Applied Mechanics, 2017, 53(4), pp. 374-380.

184. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

185. Gaydayichuk V., Kotenko K., Kedyk Development of theoretical and experimental dynamic monitoring of large-scale building structure // Technology Audit and Production Reserver. — 2018. — Vol. 39, Issue 1/2. — P. 38–45.

186. Гайдайчук В.В., Кошевий О.О., Кошевий О.П. Оптимальне проектування і розрахунок на міцність оболонок і пластин при дії комбінованих навантажень в програмному комлексі Femap Nastran // Сучасні проблеми архітектури. Наук.-техн. Зб. – К.: КНУБА. 2018. Вип.50.– С.314 – 324.

187. Gaydayichuk V., Kotenko K., Tkachenko I. Integrated monitoring the technical condition of large-scale building structure // Underwater technologies. — 2017. — Vol. 05. — P. 61– 66.

188. Lugovoi, P.Z., Meish, V.F., Orlenko, S.P. Numerical Simulation of the Dynamics of Spherical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Ribs Under a Shockwave// Intern. Appl. Mech. – 2020, 56, № 5. – P. 590–598. doi.org/10.1007/s10778-020-01037-3

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Начальник комплексу
проектно-теоретичних та
розрахункових робіт
ДП КБ «Південне»
кандидат технічних наук
_____ В.М. Сіренко
«12» ____11_____2020 р.

Акт
впровадження результатів дисертаційної роботи
Орленка Сергія Петровича
«Динаміка тришарових оболонок обертання з дискретно неоднорідним заповнювачем»

«Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» з метою виконання проектно-теоретичних та розрахункових робіт для теоретичної оцінки експлуатаційного стану відповідальних оболонкових елементів космічної техніки заключили з Інститутом механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України Договір про наукове співробітництво № 7 від 14 квітня 2013р., підпунктом 1.2 якого в 2018р. є «Побудова нових моделей напружено-деформованого стану неоднорідних елементів конструкцій, зокрема дискретно підкріплених, при дії навантажень різної фізичної природи».

Співвиконавцем цієї тематики є аспірант Орленко С.П.. Результати кандидатської дисертаційної роботи Орленка С.П. знайшли практичне застосування в «Конструкторському бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», зокрема, при дослідженні впливу зовнішнього навантаження на динамічні характеристики тришарових циліндричних адаптерів з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем на основі вдосконалених ефективних чисельно-аналітичних підходів і скінчено-елементного методу. Завдяки теоретичним розрахункам, запропонованих Орленком С.П. «Конструкторському бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», визначені діапазони власних частот неоднорідних оболонкових елементів корпусів ракет носіїв, при яких можуть виникати резонансні явища, що може призвести до аварії. Це дозволить вибрати режими роботи двигунів ракет носіїв, або запропонувати відповідні конструкції підкріплень, при яких унеможливлюються резонансні явища. Розроблені в дисертації теоретичні методики дозволяють дослідити характер і затухання коливань в оболонкових конструкціях ракетно-космічної техніки при дії на них розподілених і локальних вибухових навантажень.

Начальник відділу міцності,
навантажень, динамічних характеристик,
кандидат технічних наук _____ 12.11.2020 Д.В. Клименко

Вчений секретар
ДП «КБ «Південне»,
кандидат технічних наук _____ 12.11.2020 Л. П. Потапович