

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

ГЛУХОВ ЮРІЙ ПЕТРОВИЧ

УДК 539.3

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ
НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО
НАВАНТАЖЕННЯ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ 2026

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі динаміки і стійкості суцільних середовищ
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України, доктор фізико-
математичних наук, старший науковий співробітник
Токовий Юрій Владиславович,
завідувач відділу механіки деформівного твердого тіла,
заступник директора з наукової роботи
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор
Попов Всеволод Геннадійович,
завідувач кафедри вищої математики і фізики
Національного університету «Одеська морська академія»

доктор технічних наук, професор
Іванченко Григорій Михайлович,
професор кафедри будівельної механіки, декан
будівельного факультету Київського національного
університету будівництва і архітектури

Захист відбудеться 09 липня 2026 року об 11-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.02 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 311.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504, та на офіційному веб-сайті: <https://inmech.kyiv.ua/ua/dissertations/>.

Автореферат розісланий 09 червня 2026 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.02
доктор технічних наук

Юрій СКОСАРЕНКО

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасне машинобудування, транспортна та будівельна галузі широко застосовують шаруваті конструкції завдяки їхній високій міцності, малій вазі та стійкості до складних експлуатаційних впливів. Це вимагає точних моделей їхньої динамічної поведінки під дією різних навантажень, особливо рухомих, що виступають ключовими у задачах залізничної й автомобільної інфраструктури, злітно-посадкових смуг, мостів та покриттів.

Підвищення швидкостей транспортних засобів, широке використання композиційних матеріалів і необхідність прогнозування реакції шаруватих ґрунтів і основ на сейсмічні впливи зумовлюють потребу у вдосконаленні методів моделювання багат шарових середовищ. Динамічні задачі для таких систем ускладнюються різкими контрастами властивостей шарів, наявністю початкових напружень та складною хвильовою картиною.

Наразі для аналізу багат шарових конструкцій широко застосовуються чисельні методи, які зарекомендували себе як універсальні інструменти для розв'язання складних інженерних задач. Водночас у задачах хвильової динаміки з рухомими навантаженнями, що характеризуються наявністю дисперсійних ефектів і критичних режимів, застосування таких методів часто пов'язане зі значними обчислювальними витратами та потребує спеціальних заходів для забезпечення необхідної точності. Це зумовлює доцільність розвитку аналітично орієнтованих підходів, які дозволяють глибше дослідити механізми формування напружено-деформованого стану та можуть виступати еталоном для перевірки чисельних моделей.

Отже, дослідження динаміки шаруватих конструкцій під дією рухомих навантажень є важливим для інженерної практики, геомеханіки, транспортної інфраструктури та матеріалознавства, що і визначає актуальність обраної теми дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень

відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні таких науково-дослідних робіт:

- НДР 1.3.1.373 «Дослідження пружного деформування неоднорідних тіл при динамічному навантаженні» (№ державної реєстрації 0112U000240, I.2012 – IV.2015);
- НДР 1.3.1.397 «Дослідження динамічних процесів в шаруватих матеріалах та неоднорідних елементах конструкцій» (№ державної реєстрації 0115U005699, I.2016 – IV.2019);
- НДР 1.3.1.409 «Сучасні проблеми механіки матеріалів і елементів конструкцій з внутрішньою структурою та дефектами» (№ державної реєстрації 0117U000699, I.2017 – IV.2021);
- НДР 1.3.1.422 «Плоскі задачі для попередньо напружених шаруватих тіл під дією статичних і динамічних навантажень» (КПКВК 6541230) (№ державної реєстрації 0120U102798, I.2020 – IV.2021);
- НДР 1.3.1.426 «Розробка методів розв'язання задач статичної і динамічної механіки для неоднорідних матеріалів і тонкостінних елементів конструкцій» (№ державної реєстрації 0119U103761, I.2020 – IV.2024);
- НДР 1.3.1.451 «Механіка попередньо напружених тіл і нелінійно пружних оболонкових елементів конструкцій некругового поперечного перерізу» (№ державної реєстрації 0122U202076, I.2023 – IV.2027) (етап автора дисертації в 2025 році).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розробка загального аналітично-чисельного підходу для розв'язання динамічних просторових і двовимірних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження та проведенні на його основі дослідження хвильових процесів в пружних шаруватих тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого середовища, початкових напружень,

різних швидкостей руху навантаження, різних типів граничних умов та механічних характеристик елементів шаруватого середовища.

Досягнення цієї мети передбачає:

- розробку загального аналітично-чисельного підходу для розв'язання динамічних просторових і двовимірних задач для багат шарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження;
- розробка методів розв'язку просторових і двовимірних задач на основі інтегральних перетворень Фур'є;
- розв'язок конкретних тривимірних та двовимірних задач для різних моделей шаруватого середовища;
- розробка алгоритмів та програмного забезпечення для дослідження динамічних процесів в шаруватих конструкціях з початковими напруженнями при дії динамічних навантажень;
- дослідження впливу початкових напружень на напружено-деформований стан елементів шаруватої основи;
- аналіз напружено деформованого стану елементів шаруватих основ при дії рухомого поверхневого навантаження за різних способів з'єднання шарів;
- виявлення характерних закономірностей в розподілі полів швидкостей переміщень і напружень, викликаних прикладеним поверхневим навантаженням, та встановлення нових ефектів, пов'язаних з їх геометричними та механічними характеристиками;
- встановлення оцінок границь застосування прикладних теорій на основі точних просторових розв'язків.

Об'єктом дослідження є динамічні процеси в багат шарових пружних основах з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.

Предметом досліджень є вплив початкових напружень, швидкості руху навантаження, умов контакту між елементами шаруватої основи, геометричних та механічних параметрів елементів шаруватої основи на характеристики їх напружено-деформованого стану.

Методи дослідження. Всі дослідження були проведені в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями.

При розв'язуванні просторових задач використовувався регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією.

Для плоских задач використовувались регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, метод інтегральних перетворень Фур'є і метод комплексних потенціалів.

Для розв'язування систем неоднорідних алгебраїчних рівнянь і процедур оберненого інтегрування використовувалися класичні чисельні методи.

Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:

У дисертаційній роботі **вперше** сформульовано та розв'язано просторові та двовимірні задачі про усталений рух багатошарових пружних основ із початковими напруженнями, складених зі стисливих і нестисливих матеріалів під дією рухомого поверхневого навантаження.

Уперше отримано такі результати:

1. Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід до дослідження хвильової динаміки багатошарових пружних основ із початковими напруженнями.

2. Розроблено і вперше застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, який дозволяє розв'язувати динамічні задачі для багатошарових основ без необхідності використання традиційних прийомів регуляризації та контурних деформацій у комплексній площині.

3. Введено поняття регуляційних коефіцієнтів, що забезпечують фізично коректне узгодження хвильових полів між шарами та стабілізують числову реалізацію при високих частотах і контрастних властивостях матеріалів.

4. Побудовано узагальнену спектрально-матричну схему, у якій обчислення спектральних амплітуд виконується на основі збіжного спектрального інтегралу, що забезпечує числову стійкість і фізичну коректність.

5. Отримано нові аналітичні співвідношення для опису хвильових полів у шарах і на їхніх межах, які узагальнюють класичні розв'язки для півпростору та багатошарових систем, у тому числі з початковими напруженнями.

6. Обґрунтовано області застосування нового методу та показано його ефективність для моделювання рухомих навантажень, хвильової взаємодії у технічних основах, композитах та геоматеріалах.

7. Вперше розв'язано еталонну задачу про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження; така постановка не має відомих аналогів у науковій літературі й може використовуватися як базова для верифікації чисельних методів.

8. Встановлено низку нових фізико-механічних ефектів, зумовлених дією початкових напружень, швидкістю рухомого навантаження та структурою багатошарової основи.

9. На основі точних просторових розв'язків визначено межі застосування деяких наближених моделей шаруватих середовищ, що має значення для інженерного моделювання.

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями.

Узгодженість рішень і механічних ефектів для різних по складності постановок задач при використанні єдиного методу розв'язку служить незалежним підтвердженням коректності, відтворюваності, логічної несуперечливості, фізичної обґрунтованості і достовірності отриманих результатів. Це також свідчить про стійкість методу і його адекватність при моделюванні досліджуваних процесів.

Додаткову достовірність результатів підтверджує правильний фізичний характер розв'язків у граничних випадках та їх збіжність з існуючими класичними моделями при відсутності початкових напружень або зниженні складності задачі.

Усі основні результати роботи, отримані за допомогою різних методів, узгоджуються між собою і в окремих випадках - з результатами вже відомими.

Чисельні розв'язки отримано з використанням апробованих чисельних методів з перевіркою на аналітичних розв'язках канонічних тестових задач.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованого підходу і методів для побудови фундаментальних розв'язків для різних класів статичних та динамічних задач для шаруватих конструкцій.

Запропонований регуляційно-спектральний метод забезпечує точне й чисельно стійке моделювання хвильових процесів у багатошарових основах при дії рухомих та гармонічних навантажень. Завдяки структурній регуляризації метод усуває необхідність у складному контурному інтегруванні та дозволяє ефективно аналізувати системи з великою контрастністю матеріалів.

Аналітичне розв'язання динамічних задач для багатошарових 2D і 3D основ під впливом рухомого навантаження відкриває широкі можливості для інженерних застосувань. Ключові напрямки використання: транспортна інфраструктура, будівництво і геотехніка, промислові об'єкти, сейсмічний захист і геофізика, оборонна сфера та інші.

Отримані в цій дисертаційній роботі результати можуть бути використані під час вивчення впливу початкових напружень на динамічні процеси в шаруватих конструкціях, що піддаються в процесі експлуатації дії рухомих навантажень.

Порівняльний аналіз різних наближених і точних моделей шаруватих конструкцій може бути використаний для підвищення ефективності розв'язання конкретних інженерних задач.

Уперше вирішено еталонну задачу про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження, що не має відомих аналогів у науковій літературі. Це дозволяє розглядати отримані залежності, як базові та використовувати їх для верифікації чисельних методів.

Нові математичні моделі, аналітичні та чисельні методи розв'язання поставлених задач можуть бути включені до лекційних курсів із механіки деформівного твердого тіла.

Отримані наукові результати можуть бути охарактеризовані як фундаментальні результати в механіці деформівного твердого тіла, що створюють основу для побудови узагальненої теорії поширення хвиль в шаруватих пружних структурах, і використані в прикладних наукових дослідженнях та науково-дослідних і дослідно-конструкторських розробках.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових вітчизняних та міжнародних конференціях, зокрема: Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, Дніпро, 2006–2014, 2016, 2018, 2020–2025); XV–XVII Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (Київ, 2011, 2013, 2015); Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика» (Кременчук, 2011, 2013, 2015–2017); XIII Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (Миколаїв, 2011); Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Миколаїв, 2011, 2012); XIV, XV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012, 2014); Міжнародна конференція «Моделювання, управління і стійкість (MCS-2012)» (Севастополь, 2012); Міжнародна науково-технічна конференція «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки (ММАР-2013)» (Харків, 2013); Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», (Київ, 2013, 2015); I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2014); Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика» (Суми, 2014, 2015); IX, XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів,

2014, 2024); XIII, XV–XIX Міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів» (Кременчук, 2014, 2016–2020); II, III, VI, VIII, X міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса–Київ, 2015, 2016, 2019, 2021, 2024); Міжнародна науково-технічна конференція «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» (Тернопіль, 2015); IV Міжнародний інтернет-симпозіум «Сучасні проблеми інженерної механіки» (Луцьк, 2015); XV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» (Миколаїв, 2015); II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку» (Бердянськ, 2018); VIII, IX Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2018, 2020); III, IV всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів»: (Миколаїв, 2018, 2019); Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Прикладна математика та комп'ютерні науки» (Маріуполь, 2019, 2021); Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою» (Дніпро, 2022–2024); Міжнародна наукова конференція молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті» (Київ, 2023); XVI Міжнародна науково-технічна конференція «АВІА-2023» (Київ 2023); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 2023); VII International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics» (Kyiv, 2023); III Міжнародна науково-технічна конференція «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту» (Вінниця, 2023); Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки», (Київ, 2023); XXVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2023); VIII

Міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем (КМОСС-2023)» (Дніпро, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (Optima-2024)» (Кам'янець-Подільський, 2024); XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research» (Berlin, 2024); XXVI International Scientific and Practical Conference «World Problems and Ways of Solving Modern Problems» (Oslo, 2024); Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи» (Київ, 2024); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2024).

У повному обсязі дисертація доповідалась й обговорювалась на науковому семінарі відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ (керівник – академік НАН України, д. ф.-м. н. Богданов В. Л., 2024, 2025 р.); на науковому семінарі за напрямком " Механіка композитних та неоднорідних середовищ" Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – член-кореспондент НАН України, д. ф.-м. н., професор Руцицький Я. Я., 2025 р.); на загальноінститутських семінарах з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор Назаренко В. М., 2025 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації також опубліковано 29 наукових робіт:

дві колективні монографії [1, 2] — у співавторстві з О.М. Гузем і С.Ю. Бабичем в межах чітко окресленої наукової проблематики (статичні та динамічні задачі для пружної основи з початковими напруженнями); одна [3] — у складі широкого колективу Інституту механіки (видавництво Springer), де авторові належить окремий розділ (співавтори С.Ю. Бабич та В.Ф. Корнієнко), що безпосередньо відповідає темі дослідження;

26 наукових статей: 8 публікацій у міжнародному науковому журналі «Прикладна механіка - International Applied Mechanics» [4–6] (квартиль Q2) і [17, 19, 26, 28, 29] (квартиль Q3), 6 публікацій [7, 9–11, 14, 18] в журналі «Доповіди

НАНУ» (категорія Б), решта публікацій [8, 12, 13, 15, 16, 20–25, 27] – в фахових виданнях України категорії Б.

Статті [7–16, 24] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, що опубліковані в співавторстві, здобувач брав участь у постановці задач, реалізації та розробці підходу до їх розв'язання. Здобувачеві повністю належить ідея і розробка регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією для розв'язання просторових і двовимірних задач для багат шарової основи з початковими напруженнями; програмна реалізація розробленої методики; отримання числових результатів та їх ілюстрація, інтерпретація отриманих розв'язків.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел із 251 найменування та додатків. Загальний обсяг дисертації складає 326 сторінок, разом із 62 рисунками та 5 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність академіку НАН України, доктору технічних наук, професору Гузю Олександрю Миколайовичу та доктору технічних наук, професору Бабичу Степану Юрійовичу за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи.

Особливу подяку висловлюю своїй дружині Морозовій Тамарі Георгіївні, чие терпіння, турбота та постійна підтримка зробили можливим завершення цієї дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок роботи з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; наведено дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок в них здобувача, апробацію результатів дисертації та її структуру і обсяг.

У першому розділі приведений історичний огляд досліджень динамічних процесів у шаруватих середовищах. Важливу роль у формуванні математичного та теоретичного базису для вивчення динамічних процесів у пружних середовищах відіграли праці видатних учених: І. Ньютона, Р. Гука, Ж.-Б. Фур'є, О.-Л. Коші, С.-Д. Пуассона, К.-Л. Нав'є.

За останні два з половиною століття в історії досліджень динамічних процесів можна виділити кілька ключових етапів, пов'язаних з становленням теорії пружності, теорії балок і пластин, теорії композитних матеріалів, розвитком аналітичних та чисельних методів дослідження багат шарових конструкцій.

Історія механіки шаруватих середовищ відображає діалог між інженерною практикою та теоретичною наукою. Кожна модель – балка, пластина чи багат шаровий напівпростір – формувалася у відповідь на виклики свого часу.

Різноманітність типів багат шарових конструкцій та умов їх експлуатації призвела до істотного різноманіття математичних моделей та методів їх дослідження. За десятиліття сформувалася плеяда вчених, чиї роботи стали фундаментом для сучасних досліджень: Л. Ейлер, Д. Бернуллі, К.-Л. Нав'є, Г. Кірхгоф, О. Ляв, Е. Вінклер, С. Тимошенко, М. Хетеньї, В. Власов, Р. Міндлін, Н. Хаскелл, П. Пастернак, Д.Д. Ешелбі, Ю. Работнов, Р. Клаф, Я. Ахенбах, Е. Ерінген, З. Бажант, Ж. Фіш.

Представлені вчені створили багаторівневий фундамент для динаміки шаруватих конструкцій, що включає фундаментальну теорію, вдосконалені моделі балок та пластин, моделювання основи та шаруватих середовищ, механіку композитів та руйнування, обчислювальні методи.

У огляді розглядаються три основні підходи: балки на пружній основі, пластини на пружній основі та моделі пружного шару (багат шарові основи).

Методам розрахунку динамічного деформування шаруватих матеріалів присвячено досить багато досліджень, які викладені в статтях і монографіях А. Аврамеско, Г.Г. Адамса, С.Д. Акбарова, А.А. Амандосова, Я. Ахенбаха, М.Л. Барона, Б.М. Бахрамова, М.А. Біо, Л.М. Бреховських, К. Ватанабе, І.А.

Вікторова, В.Т. Грінченко, В.Т. Головчана, О.М. Гузя, В.М. Евінга, О.П. Жука, Л. Кан'яра, Г. Кольського, В.Д. Кубенка, Дж. Майлза, П.Г. Махорта, В.В. Мелешка, Дж. Мікловіца, В. Новацького, О. Нуржумаєва, Й.-Г. Пао, Ф. Преса, Дж. П. Райта, Х.А. Рахматуліна, Я.У. Саатова, П.Ф. Сабодаша, В.М. Сеймова, Дж. Л. Сэкмена, І.Г. Філіпова, В.Г. Чебана, М.А. Черевка, Н.А. Шульги, Н.З. Якушева, В.С. Ярдетського та інших авторів.

Розвиток моделей пружної основи при поверхневому рухомому навантаженні демонструє послідовний перехід від спрощених балочних схем до більш реалістичних багатопланових моделей, які дозволяють враховувати складніші ефекти хвильового поширення та взаємодії з навантаженням.

Це переважно 3D-континуальні, матричні та чисельно-аналітичні підходи, які значно розширюють можливості простих балкових чи пластинчастих схем і дозволяють описувати реалістичні процеси хвильового поширення, резонансів і взаємодії з рухомими навантаженнями.

В реальних пружних тілах практично завжди існують початкові напруження, які впливають на закономірності поширення хвиль, тому при дослідженні хвильових процесів є актуальним застосування моделей попередньо напруженого тіла.

Різні питання теорії пружності для тіл з початковими напруженнями та деформаціями розглянуті також у монографіях С.Д. Акбарова, С.Ю.Бабича, В.Л. Богданова, О.М.Гузя, О.М. Гуці, О.П.Жука, П.Г. Махорта, В.М. Назаренка, В.В. Новожилова, Л.І.Сєдова, К.А. Трусделла та інших.

Виходячи з проведеного аналізу можна стверджувати, що мета і завдання дисертаційного дослідження є актуальними, науково обґрунтованими та мають важливе теоретичне й практичне значення для розвитку механіки деформівного твердого тіла та суміжних галузей знань.

У **другому розділі** викладені основні принципи побудови лінеаризованої теорії пружності, основні рівняння і співвідношення для стисливих та нестисливих тіл з початковими (залишковими) напруженнями з пружним

потенціалом довільної структури, наведені представлення загальних розв'язків просторових задач для випадку однорідного початкового стану.

Наведені результати є загальними для різних моделей деформівних тіл і дають можливість досліджувати при єдиному підході досить широкі класи задач про поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями в тілах.

При викладі матеріалу використовувались термінологія, позначення і результати робіт академіка НАН України О.М. Гузя.

В **третьому розділі** наведені загальні постановки задач про усталений рух шаруватого попередньо напруженого стисливого або нестисливого півпростору, на вільну границю якого діє рухоме навантаження.

Загальна постановка класу задач, що досліджується, виглядає наступним чином: розглядається багатошарова плита, що складається із N шарів, які лежать на пружному півпросторі або жорсткій основі (рис. 1). Шари пронумеровані по порядку $s = \overline{1, N}$ зверху вниз. Порядковий номер підстиляючого півпростору – $N + 1$.

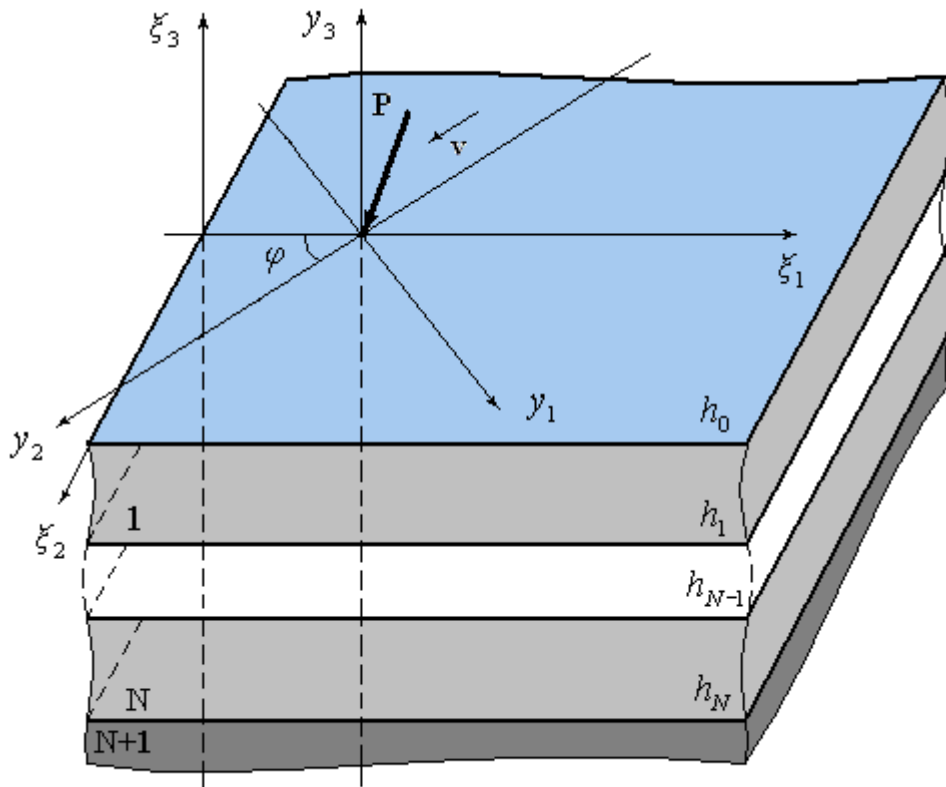


Рис. 1. Схематичне зображення багатошарової плити

Граничні поверхні шарів плоскі і паралельні між собою. Товщина шарів довільна і рівна $h_s - h_{s-1}$ ($h_0 = 0$).

Елементи шаруватого середовища складаються з стисливих або нестисливих попередньо напружених ізотропних нелінійно-пружних матеріалів з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного тіла вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей вибраної системи координат.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища є однорідним:

$$u_j^{0\{s\}} = \delta_{ij} (\lambda_i^{\{s\}} - 1) x_i; \quad \lambda_i^{\{s\}} = \text{const}, \quad \left(\sum_i \right). \quad (1)$$

Тут x_i лагранжеві координати, які в природному стані збігаються з декартовими, $\lambda_i^{\{s\}}$ – видовження; δ_{ij} – символ Кронекера.

Елементи багат шарового півпростору віднесені до декартових систем координат $\xi_i^{\{s\}}$ ($i = 1, 2, 3$), які відповідають початковому деформованому стану:

$$\xi_i^{\{s\}} = \lambda_i^{\{s\}} x_i, \quad \left(\sum_i \right). \quad (2)$$

До вільної границі першого шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координат $\xi_3^{\{s\}}$. Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений деформований стан.

Також припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, є значно менші початкових напружень. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

При таких припущеннях з урахуванням загальних розв'язків просторових динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями загальна постановка просторових задач про усталений рух пружної багат шарової плити, що лежить на пружному півпросторі або жорсткій

основі, включає рівняння руху елементів багат шарового середовища і граничні умови.

Розглядалися два випадки початкового напруженого стану:

загальний

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} \neq S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}}; \quad (3)$$

і симетричний

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} = S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}}. \quad (4)$$

В формулах (3) і (4) $S_{ii}^{0\{s\}}$ – компоненти тензора узагальнених напружень.

У загальному випадку початкового напруженого стану (3) в координатах (2) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору можна записати таким чином:

рівняння руху

$$\left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=3} A_{m,n,p,q}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (5)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_j^{\{s\}} = & \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(jj)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} \\ & + \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(j\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^{\{s\}} \partial \xi_\alpha^{\{s\}}} \Phi^{\{s\}(\alpha)} + \\ & + \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(j\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^{\{s\}} \partial \xi_\beta^{\{s\}}} \Phi^{\{s\}(\beta)}; \\ & j, \alpha, \beta = \overline{1,2,3}; \quad j \neq \alpha; \quad \alpha \neq \beta; \quad j \neq \beta; \quad s = \overline{1, N+1}; \end{aligned} \quad (6)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\beta\beta}^{\{s\}} = & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\beta\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)}; \\ \tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\{s\}} = & \sum_{\substack{j,\zeta=\alpha,\beta \\ j \neq \zeta}} \frac{\partial}{\partial \xi_\zeta^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\alpha\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} + \end{aligned} \quad (7)$$

$$+ \frac{\partial^3}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_2^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(\gamma)};$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad \alpha \neq \beta; \quad \gamma \neq \alpha; \quad \beta \neq \gamma; \quad s = \overline{1, N+1}.$$

Коефіцієнти $A_{i,j,k}^{\{s\}}$, $C_{i,j,k}^{\{s\}(n\alpha)}$, $E_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}$ у виразах (5)–(7) є функціями параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища: $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ – у випадку стисливого матеріалу і $\tilde{z}^{\{s\}}$ – у випадку нестисливого матеріалу.

Відмітимо, що всі рівняння (5) і вирази для переміщень (6) і напружень (7) представлені в різних системах координат $\xi_i^{\{s\}}$ ($i = \overline{1,3}$; $s = \overline{1, N+1}$), що відповідають початковому деформованому стану кожного елемента шаруватого півпростору. Виберемо одну з цих систем координат і зведемо всі формули (5) – (7) до цієї системи координат за допомогою співвідношень (2). Вибір такої системи координат може бути обумовлений зручністю обчислень або постановкою задачі. Позначимо вибрану систему координат $\xi_i^{\{n\}}$ ($i = \overline{1,3}$; $1 \leq n \leq N+1$). Маємо наступні співвідношення

$$\xi_i^{\{s\}} = \frac{\lambda_i^{\{s\}}}{\lambda_i^{\{n\}}} \xi_i^{\{n\}}; \quad \theta_i^{\{s\}} = \frac{\lambda_i^{\{n\}}}{\lambda_i^{\{s\}}}; \quad \theta_i^{\{s\}} \xi_i^{\{s\}} = \xi_i^{\{n\}}; \quad i = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (8)$$

Формули (8) є загальними для всіх варіантів створення шаруватого півпростору, в тому числі для варіанту, коли кожен елемент шаруватого півпростору отримує початкові напруження окремо від інших.

Якщо початкові деформації створюються одночасно в пакеті шарів, то необхідно також враховувати механічні характеристики (пружний потенціал) і додаткові умови: умову однорідності початкових напружень, початкове поверхневе напруження $S_0^{33\{s\}} = S_0$ і умову рівності контактних нормальних початкових напружень $S_0^{33\{s\}} = S_0^{33\{s+1\}}$.

Якщо вважати, що навантаження рухається по прямій, розташованій під кутом φ до осі $\xi_1^{\{n\}}$, то координати рухомої системи координат будуть визначатися формулами

$$y_1 = \xi_1^{\{n\}} - v \cos \varphi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2^{\{n\}} - v \sin \varphi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3^{\{n\}}. \quad (9)$$

Значення коефіцієнтів $\theta_i^{\{s\}}$ залежать від способу створення шаруватого середовища. Якщо весь пакет стискувався або розтягувався одночасно, то можна прийняти $\theta_i^{\{s\}} = 1$. Якщо початкові напруження в елементах шаруватого півпростору створювалися незалежно, то врахування (8) при переході до рухомої системи координат (9) є необхідним. Будемо вважати, що має місце умова

$$\theta_i^{\{s\}} = 1; \quad i = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (10)$$

У координатах рухомої системи координат (9) за умови (10) рівняння руху (5) і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору (6) і (7) можна записати

рівняння руху

$$\left(\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=3} \tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (11)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_j^{\{s\}} = & \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(jj)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)} + \\ & + \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(j\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_\alpha} \Phi^{\{s\}(\alpha)} + \\ & + \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(j\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_\beta} \Phi^{\{s\}(\beta)}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$j, \alpha, \beta = \overline{1,3}; \quad j \neq \alpha \neq \beta \neq j; \quad s = \overline{1, N+1};$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\beta\beta}^{\{s\}} = & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\beta\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)}; \\ \tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\{s\}} = & \sum_{\substack{j,\zeta=\alpha,\beta \\ j \neq \zeta}} \frac{\partial}{\partial y_\zeta} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\alpha\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)} \\ & + \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(\gamma)}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3}; \quad \alpha \neq \beta; \quad \gamma \neq \alpha; \quad \beta \neq \gamma; \quad s = \overline{1, N+1}.$$

Коефіцієнти $\tilde{A}_{i,j,k}^{\{s\}}$, $\tilde{C}_{i,j,k}^{\{s\}(n\alpha)}$, $\tilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}$ у виразах (11)–(13) є функціями параметрів v, φ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища: $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ – у випадку стисливого матеріалу і $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ – у випадку нестисливого матеріалу.

У випадку симетричного початкового напруженого стану (4) в координатах рухомої системи координат (9) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору з урахуванням (1) можна записати:

рівняння руху

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi^{\{s\}} = 0; \\ & \left[\left(\Delta_1 + \zeta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \zeta_3^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\tilde{B}^{\{s\}} \Delta_1 + \tilde{C}^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D}^{\{s\}} \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} \right] \chi^{\{s\}} = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_1^{\{s\}} &= \frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_3}; & u_2^{\{s\}} &= -\frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial y_2 \partial y_3}; \\ u_3^{\{s\}} &= \left(\tilde{\beta}_1^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi^{\{s\}}; \end{aligned} \quad (15)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_3}; & i = \overline{1,3}; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \left(\tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi^{\{s\}} - \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^3 \chi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}; & i, j = 1, 2; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_2 \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_1}; & i, j = 1, 3; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_2}; & i, j = 2, 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Коефіцієнти $\tilde{A}^{\{s\}}$, $\tilde{B}^{\{s\}}$, $\tilde{C}^{\{s\}}$, $\tilde{D}^{\{s\}}$, $\tilde{\beta}_j^{\{s\}}$, $\tilde{a}_{ij}^{\{s\}(m)}$, $\tilde{b}_{ij}^{\{s\}(m)}$ у виразах (14)–(16) є функціями параметрів v , φ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища.

Розглядаємо два варіанта контакту між елементами шаруватого середовища при $y_3 = -h_s$: жорсткий контакт і нежорсткий контакт. Умови контакту в загальному вигляді можна записати:

для шаруватої плити, що лежить на пружному півпросторі

$$\begin{aligned} u_3^{\{s\}} &= u_3^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{33}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{33}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{3j}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_j^{\{s+1\}} - u_j^{\{s\}}); \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (17)$$

для шаруватої плити, що лежить на жорсткому півпросторі

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{33}^{\{s\}} &= \tilde{Q}_{33}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{3j}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}}; \quad (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_j^{\{s+1\}} - u_j^{\{s\}}); \\ u_3^{\{s\}} &= u_3^{\{s+1\}}; \quad u_3^{\{N\}} = 0; \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_j^{\{N\}}; \quad s = \overline{1, N-1}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут $\theta_1^{\{s\}} = 1$ відповідає жорсткому контакту, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ – нежорсткому контакту між відповідними елементами шаруватого півпростору.

Граничні умови на вільній поверхні першого шару при $y_3 = 0$ мають вигляд

$$\tilde{Q}_{3j}^{\{1\}} = P_j \delta_{NN_1} \delta(y_1) \delta(y_2); \quad \tilde{Q}_{33}^{\{1\}} = P_3 \delta(y_1) \delta(y_2); \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

де $N_1 = \sum_{s=1}^N \theta_1^{\{s\}}$.

При викладених умовах маємо тривимірні усталені задачі, що полягають в розв'язуванні систем рівнянь руху (11) або (14) при відповідних граничних умовах на вільній поверхні першого шару (19) і умовах контакту елементів шаруватого середовища (17) або (18) і умові затухання на нескінченності.

Загальна постановка **двовимірних задач** схожа з постановкою тривимірних задач. Розглядається багат шарова смуга, що складається із N шарів, які лежать на пружному напівпросторі або жорсткій основі (рис. 2).

Координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (20)$$

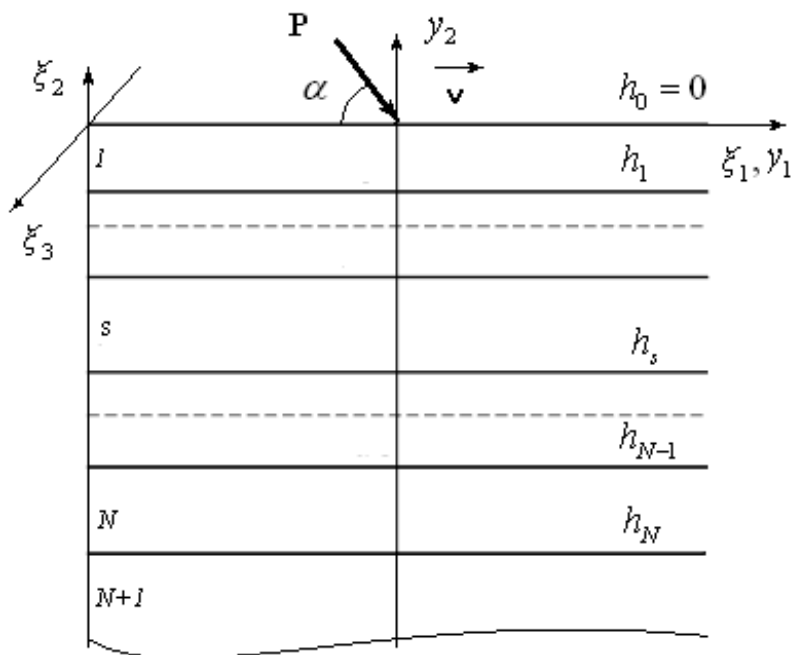


Рис. 2. Схематичне зображення багатошарової смуги

При вище вказаних припущеннях з урахуванням загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями загальна постановка плоских задач про усталений рух пружної багатошарової смуги, що лежить на пружному півпросторі або жорсткій основі, включає:

рівняння руху елементів багатошарового середовища

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (21)$$

і граничні умови при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \delta_{NN_1} P_1 \delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2 \delta(y_1); \quad (22)$$

і при $y_2 = -h_s$

для пружної основи

$$\begin{aligned} u_2^{\{s\}} &= u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (23)$$

для жорсткої основи

$$\begin{aligned}
u_2^{\{s\}} &= u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}}|_{y_2=-h_s} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\
(1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N-1}; \\
u_2^{\{N\}} &= 0; \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_1^{\{N\}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Функції $\eta_j^{\{s\}}$ в рівняннях руху (21) визначаються із рівнянь

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0. \tag{25}$$

Компоненти напружено-деформованого стану елементів багатошарового середовища визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
u_i^{\{s\}} &= -\beta_{i1}^{(i)\{s\}} \frac{\partial^2 \chi^{(i)\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\sum_{p=1}^2 \beta_{ip}^{(j)\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \chi^{(j)\{s\}}; \\
\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{p=1}^2 \alpha_{ij}^{(pk)\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \frac{\partial \chi^{(k)\{s\}}}{\partial y_{k-(-1)^k \delta_{ij}}}; \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Коефіцієнти $\eta_j^{\{s\}}$, $\beta_{ip}^{(j)\{s\}}$, $\alpha_{ij}^{(pk)\{s\}}$ у виразах (25) і (26) є функціями швидкості навантаження v і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища.

Таким чином, при використанні загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії задачі, що розглядаються, зводяться до краєвих задач для функцій $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$).

В **четвертому розділі** представлений основний інструмент розв'язку поставлених просторових і плоских задач, а саме, регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією.

У сучасній механіці деформівного тіла розв'язання динамічних задач для багатошарових пружних середовищ здійснюється переважно чисельними, матричними та інтегральними методами. Чисельні підходи (FEM, FDM, SEM) забезпечують універсальність, але вимагають значних обчислювальних ресурсів і є чутливими до моделювання необмежених областей. Матричні методи (transfer- і scattering-матриці) забезпечують компактне узгодження полів між шарами, проте втрачають числову стійкість при великій контрастності

властивостей або високих частотах. Інтегральні (спектральні) методи дають фізично коректні аналітичні розв'язки, але потребують регуляризації спектральних інтегралів та деформації контурів інтегрування, що ускладнює їх застосування у складних багатошарових системах.

Для подолання зазначених обмежень розроблено **регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією**, який поєднує аналітичну точність інтегральних методів із числовою стабільністю матричних схем. Ключовою особливістю методу є те, що збіжність спектральних інтегралів забезпечується конструктивно – шляхом відбору фізично допустимих хвильових складових відповідно до радіаційних умов, без деформації контурів та введення штучних параметрів згасання.

Метод ґрунтується на переході до спектральної області за допомогою інтегрального перетворення Фур'є та формуванні у кожному шарі хвильових складових у вигляді експоненціальних функцій. На відміну від класичного півпростору, для шару зберігається обидві експоненціальні складові, що потребує їх узгодження на межах. З цією метою введено **регуляційні коефіцієнти**, які описують передавання хвильової енергії між шарами та стабілізують розрахункову схему.

Структурна регуляризація забезпечує природну збіжність спектрального інтегралу, а регуляційні коефіцієнти – числову стійкість навіть при значних відмінностях у жорсткості та щільності шарів. Метод дозволяє одержувати фізично коректні та обчислювально ефективні розв'язки для задач при рухомих і гармонічних навантаженнях.

Запропонований підхід займає проміжне, але узгоджене місце між інтегральними та матричними методами й поєднує їхні переваги в єдиній фізично обґрунтованій та чисельно стабільній схемі.

У **розділі 5** відповідно до постановок, приведених в розділі 3, наведено розв'язок просторових і плоских задач про дію рухомого навантаження на багатошаровий півпростір із залишковими напруженнями. Для отримання

фізично коректних спектральних представлень застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією.

Для розв'язування просторових задач скористаємося подвійним перетворенням Фур'є по координатах y_1 та y_2 .

У випадку загального початкового напруженого стану (3) в просторі зображень Фур'є рівняння руху (11) можна представити у вигляді

$$\left(B_1^{\{s\}} \frac{d^6}{dy_3^6} - B_2^{\{s\}} \frac{d^4}{dy_3^4} + B_3^{\{s\}} \frac{d^2}{dy_3^2} - B_4^{\{s\}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}, \quad (27)$$

де коефіцієнти $B_m^{\{s\}}$ є функціями параметрів $\tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}}$ і параметрів подвійного перетворення Фур'є.

Розв'язок рівнянь (27) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi^{\{s\}F(j)} = & \delta_0^{\{s\}(j)} \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_2^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_s)} + \right. \\ & + \left[1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_3 + h_s) \right] \left[C_3^{\{s\}(j)} e^{\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right] \\ & + \left[1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} (y_3 + h_s) + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} (y_3 + h_s)^2 \right] \times \\ & \times \left[C_5^{\{s\}(j)} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_6^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right] \left. \right\}; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}; \end{aligned} \quad (28)$$

Тут

$$\delta_0^{\{s\}(j)} = 1 + \delta_{2j} \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \right)^2 - (\delta_{2j} + \delta_{3j}) \left(1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right); \quad \delta_{\mu_m\mu_j}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & \mu_m^2 = \mu_j^2; \\ 0, & \mu_m^2 \neq \mu_j^2; \end{cases}$$

$$\gamma_j^{\{s\}} = \sigma_j^{\{s\}} \mu_j^{\{s\}};$$

$\mu_j^{\{s\}2}$ ($j = \overline{1,3}$) – корені бікубічного характеристичного рівняння диференціального рівняння (27); $\sigma_j^{\{s\}} \equiv \sigma^{\{s\}} = \left| \mu_j^{\{s\}} \right| / \mu_j^{\{s\}}$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} > 0$, $\sigma_j^{\{s\}} = i$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} < 0$ і $\gamma_j^{\{s\}} = \sigma \operatorname{Re} \mu_j^{\{s\}} - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j^{\{s\}}$, якщо μ_j^2 приймає комплексні значення.

Розв'язок (28) включає випадки рівних і нерівних коренів бікубічного характеристичного рівняння диференціального рівняння (27) (параметр $\delta_{\mu_m\mu_j}^{\{s\}}$) та

регуляційні коефіцієнти для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{\gamma_j^{(s)} h_{s-1}}$, $e^{-\gamma_j^{(s)} h_s}$ $j = \overline{1,3}$).

Трансформанти виразів (12) і (13) з урахуванням (28) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
u_n^{\{s\}F} &= i^{\delta_{3n}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{m-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{m-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right\}; \\
\tilde{Q}_{nm}^{\{s\}F} &= i^{\delta_{nm} + \delta_{3,n+m}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{q-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{q-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right\}; \\
n, m &= \overline{1,3}; \quad \tau = \delta_{j_1} + \delta_{j_2} + 2(\delta_{j_3} + \delta_{j_4}) + 3(\delta_{j_5} + \delta_{j_6}); \quad (29)
\end{aligned}$$

де $\alpha_{jm}^{\{s\}(n)}$, $\gamma_{jq}^{\{s\}(nm)}$ – функції параметрів подвійного перетворення Фур'є і параметрів, що характеризують навантаження і шаруватий півпростір.

Якщо підставимо (29) в трансформовану систему рівнянь (17), (19), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для пружної

ОСНОВИ

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} e^{-\gamma_j^{\{1\}} h_1} = i^{-\delta_{3m}} P_m^F; \\
&\quad m = \overline{1,3}; \\
&\quad \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} - \\
&\quad - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_j^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} = 0; \quad (30) \\
&\quad \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_j^{\{s+1\}} h_s} - \\
&\quad - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_j^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{s\}}) \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} - \\
& - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \right\} = 0; \\
& \quad m = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{N+1\}(3)} \Delta h_{N+1}^{m-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(33)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} - \\
& - \theta_1^{\{N\}} \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{N\}}) \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} - \\
& - \theta_1^{\{N\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{N+1\}(m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} \right\} = 0; \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

В результаті розв'язок задачі про усталений рух багаточислової плити з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження у випадку пружної

основи в просторі зображень Фур'є зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (30) відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$.

Для того, щоб перейти в формулах (29) до оригіналів необхідно скористатися зворотним подвійним перетворенням Фур'є.

Аналогічно, якщо підставимо (29) в перетворену систему рівнянь (18), (19), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для жорсткої основи.

Таким чином, задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого півпростору при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, за умови (3) зводиться до інтегрування виразів (29) з урахуванням значень коренів характеристичних рівнянь диференціальних рівнянь (27) і умов контакту між елементами шаруватого середовища (17), (19) або (18), (19).

У випадку симетричного початкового напруженого стану (4) в просторі зображень Фур'є рівняння руху (14) можна представити у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_1^{\{s\}2}\right)\Psi^{F\{s\}} = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_2^{\{s\}2}\right)\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_3^{\{s\}2}\right)\chi^{F\{s\}} = 0; \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_1^{\{s\}2} &= \zeta_1^{\{s\}-2} \left(k_1^2 \tilde{A}^{\{s\}} + k_2^2\right); \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = B_1^{\{s\}} \pm \sqrt{B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}}}; \\ 2B_1^{\{s\}} &= \zeta_2^{\{s\}-2} \zeta_3^{\{s\}-2} \left[\left(\zeta_2^{\{s\}2} + \zeta_3^{\{s\}2}\right) \left(k_1^2 + k_2^2\right) - k_1^2 \tilde{C}^{\{s\}} \right]; \\ B_2^{\{s\}} &= \zeta_2^{\{s\}-2} \zeta_3^{\{s\}-2} \left[\left(k_1^2 + k_2^2\right)^2 + k_1^2 k_2^2 \tilde{B}^{\{s\}} + \left(\tilde{B}^{\{s\}} + \tilde{D}^{\{s\}}\right) k_1^4 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Розв'язок перетворених рівнянь (31) з урахуванням затухання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi^{\{s\}F} &= C_1^{\{s\}} e^{\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_2^{\{s\}} e^{-\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_s)}; \\ \chi^{\{s\}F} &= C_3^{\{s\}} e^{\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}} e^{-\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_s)} + \\ &+ \left[1 - \delta_{\mu_2^{\{s\}}}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2^{\{s\}}}^{\{s\}} (y_3 + h_{s-1})\right] \left[C_5^{\{s\}} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_6^{\{s\}} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Тут

$$\delta_{\mu_m \mu_j}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, \mu_m^2 = \mu_j^2; \\ 0, \mu_m^2 \neq \mu_j^2; \end{cases} \quad m, j = 2, 3; \quad m \neq j; \quad \gamma_j^{\{s\}} = \sigma_j^{\{s\}} \mu_j^{\{s\}};$$

$\mu_j^{\{s\}2}$ ($j = \overline{1,3}$) визначаються за формулами (32); $\sigma_j^{\{s\}} \equiv \sigma^{\{s\}} = \left| \mu_j^{\{s\}} \right| / \mu_j^{\{s\}}$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} > 0$, $\sigma_j^{\{s\}} = i$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} < 0$ і $\gamma_j^{\{s\}} = \sigma \operatorname{Re} \mu_j^{\{s\}} - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j^{\{s\}}$, якщо μ_j^2 приймає комплексні значення.

Розв'язок (33) включає випадки рівних і нерівних коренів (32) (параметр $\delta_{\mu_m \mu_j}^{\{s\}}$) та регуляційні коефіцієнти для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{\gamma_j^{\{s\}} h_{s-1}}$, $e^{-\gamma_j^{\{s\}} h_s}$, $j = \overline{1,3}$).

Трансформанти виразів (15) і (16) з урахуванням (33) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u_n^{\{s\}F} &= (-1)^{n+1} i^{(1-\delta_{3n})} \left(\sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{(m-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_j^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{(m-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}}(y_3 + h_s)} \right); \\ \tilde{Q}_{nm}^{\{s\}F} &= i^{\theta_{nm}} \left(\sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{(q-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_j^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{(q-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}}(y_3 + h_s)} \right); \quad (34) \\ \theta_{nm} &= (\delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{m1} + \delta_{m2})(\delta_{n3} + \delta_{m3}). \end{aligned}$$

Якщо підставимо (34) в трансформовані системи рівнянь (17), (19) (пружна основа) або (18), (19) (жорстка основа), отримаємо системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ типу (30).

Таким чином, задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого півпростору при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, за умови (4) зводиться до інтегрування виразів (34) з урахуванням значень коренів характеристичних рівнянь диференціальних рівнянь (32) і умов контакту між елементами шаруватого середовища (17), (19) або (18), (19).

Поставлені в розділі 3 двовимірні крайові задачі розв'язуються за допомогою перетворення Фур'є по змінній y_1 .

Розв'язок перетворених рівнянь (21) з урахуванням затухання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \chi^{\{s\}(j)F} = & \left[1 - \delta_{j2}^{\{s\}} (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \right] \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_3^{\{s\}(j)} e^{-k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + \right. \\ & \left. + \left[1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_s) \right] \left(C_2^{\{s\}(j)} e^{k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (35)$$

де $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j=1,2$; $m=\overline{1,4}$) – постійні інтегрування, k – параметр перетворення Фур'є,

$$\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}} \\ 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}} \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}.$$

В представленні (35) $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, якщо $\eta_j^{\{s\}2} > 0$, і $k_j = i$, якщо $\eta_j^{\{s\}2} < 0$. У випадку, якщо $\eta_j^{\{s\}}$ приймає комплексні значення, то в представленні розв'язку (35) необхідно покласти $k_j = 1$, $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$, $j=1,2$.

Розв'язок (35) включає випадки рівних і нерівних коренів біквдратного характеристичного рівняння (25) (параметр $\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}$) та регуляційні коефіцієнти для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{k_j k \eta_j^{\{s\}} h_{s-1}}$, $e^{-k_j k \eta_j^{\{s\}} h_s}$ $j=1,2$).

Компоненти напружено-деформованого стану (26) в області зображень з урахуванням (35) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} = & i^{1-\delta_{nj}} k^2 \sum_{m=1}^2 \left[\gamma_{nj}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{k \gamma_m^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) \gamma_{nj}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} e^{-k \gamma_m^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right]; \\ u_n^{\{s\}F} = & i^{\delta_{1n}} k \sum_{m=1}^2 \left[\alpha_n^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{k \gamma_m^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) \alpha_n^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} e^{-k \gamma_m^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right]; \end{aligned} \quad (36)$$

$$n, j = 1, 2.$$

Параметри $\gamma_{mj}^{\{s\}(n)}$, $\alpha_1^{\{s\}(1)}$ в формулах (5.19) є функціями параметрів k , $\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}$,

$\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{(j)\{s\}}$, $\alpha_{ij}^{(km)\{s\}}$.

Якщо підставимо (36) в трансформовані системи рівнянь (22), (23) (пружна основа) або (22), (24) (жорстка основа), отримаємо системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$.

Таким чином, двовимірна задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого півпростору при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, зводиться до інтегрування виразів (36) з урахуванням значень коренів характеристичних рівнянь (25) диференціальних рівнянь (21) і умов контакту між елементами шаруватого середовища (22), (23) або (22), (24). Для того, щоб перейти в формулах (36) до оригіналів, потрібно скористатися зворотним перетворенням Фур'є.

Для розглянутих постановок в розділі 3 в просторі зображень Фур'є отримані аналітичні розв'язки задач:

- для пружного шару (смуги), що лежить на пружному півпросторі,
- для пружного шару (смуги), що лежить на жорсткій основі,
- для багат шарової пружної плити (смуги), що лежить на пружному півпросторі,
- для багат шарової пружної плити (смуги), що лежить на жорсткій основі.

Розв'язок задач отримано в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

В розділі 6 в межах загальних постановок задач, викладених у розділі 3, вивчено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для стисливих і нестисливих елементів шаруватого середовища.

У випадку загального початкового напруженого стану (3) рух багат шарового об'єкта в загальному випадку описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку (5). У рухомій

системі координат ці рівняння мають вигляд (11). В просторі зображень ці рівняння представлені формулами (27), а характеристичні рівняння мають вигляд

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (37)$$

Коефіцієнти $a_j^{\{s\}}$, $j = \overline{0,3}$ – функції параметрів перетворення Фур'є і параметрів, що характеризують навантаження і шаруватий півпростір.

Значення функцій $\eta^{\{s\}}$ визначають вид рівнянь руху елементів шаруватого півпростору і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Так як рівняння (37) є бікубічні алгебраїчні рівняння, то їх розв'язок можна отримати класичним способом.

За симетричного початкового напруженого стану (4) рівняння руху елемента шаруватого середовища розпадається на два диференціальні рівняння другого і четвертого порядку (14), які після подвійного перетворення Фур'є можна представити у вигляді (31). Характеристичні рівняння являють собою квадратне і бікватратне алгебраїчні рівняння. Характеристичні корені визначаються по формулам (32).

Для двовимірних задач рівняння руху елемента шаруватого середовища (21) є диференціальним рівнянням четвертого порядку. Характеристичні рівняння (25) є бікватратними алгебраїчними рівняннями.

Для просторових і двовимірних задач досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для стисливих і нестисливих елементів шаруватого середовища.

Проведено оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказано необхідні та достатні умови існування кратних коренів характеристичних рівнянь.

У загальному випадку значення характеристичних коренів визначаються параметрами руху навантаження, властивостями матеріалу елемента шаруватого середовища, початковим напруженим станом і (для 3D задач) значеннями параметрів подвійного інтегрального перетворення Фур'є.

Для стисливих і нестисливих матеріалів існують дозвуківі швидкості руху навантаження, при яких можливе існування дійсних кратних коренів характеристичних рівнянь.

Початкові (залишкові) деформації суттєво впливають на значення коренів характеристичних рівнянь, особливо при дозвуківих швидкостях руху навантаження.

Від напрямку руху навантаження залежить розташування області найменшого впливу початкових напружень.

Чисельні дослідження виконані в рамках теорії скінчених початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом і для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенєва-Хазановича.

Аналіз отриманих результатів свідчить про істотний вплив початкових (залишкових) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, особливо для дозвуківих швидкостях руху навантаження.

При відповідних значеннях швидкостей навантаження вплив початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь може значно зменшуватись або збільшуватись.

В розділі 7 розглянуто дві наближені моделі двошарового стисливого або нестисливого півпростору:

- пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару (модель 1);
- пружна пластина на пружному півпросторі (модель 2). Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю.

Загальна постановка задач для наближених моделей двошарового півпростору при дії рухомого навантаження відповідає постановці плоских задач, викладеній в розділі 3 (підрозділ 3.2).

Для моделі 1 тонкий поверхневий шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1 . Для моделі 2 динамічна поведінка шару була описана за допомогою системи рівнянь теорії пластин, записаних з

урахуванням зсуву та інерції обертання. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю.

Розв'язок задач отримано із застосуванням інтегрального метода Фур'є і метода комплексних потенціалів.

При застосуванні метода комплексних потенціалів для розв'язку задач застосовується метод Мусхелішвілі, оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. При цьому задача зводиться до розв'язку систем звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих аналітичних функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати наведені в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є.

Числові результати досліджень наближених моделей двошарового півпростору наведені в **розділі 8**.

Основні задачі, що вирішувались в результаті чисельних досліджень:

- Дослідження впливу початкових напружень при різних швидкостях руху поверхневого навантаження, умовах контакту між елементами багатошарового середовища та механічних і геометричних параметрів на напружено-деформований стан шаруватого півпростору;
- Порівняння розв'язків двовимірних задач для різних моделей двошарового півпростору: пружний шар на пружному півпросторі; пластина на пружному півпросторі; зосереджені маси на пружному півпросторі.
- Порівняння розв'язків просторових і плоских задач в точній постановці.
- Визначення меж застосування наближених моделей.

Чисельно досліджувались і порівнювались:

1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару – модель «зосереджені маси».

2. Пластина Тимошенка на пружному півпросторі

3. Пружна смуга (шар), пружний півпростір

Контакт: повний (жорсткий) і неповний (нежорсткий).

Швидкість: весь діапазон швидкостей (в дозвуковій області розглядалися докритичні швидкості).

Чисельні дослідження були проведені для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу та для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенева-Хазановича в рамках теорії скінченних (великих) початкових деформацій.

Значна частина розділу присвячена динамічним процесам, які відбуваються у двошаровому пружному півпросторі за дії рухомого навантаження, із залученням як точних, так і наближених моделей різного рівня складності. Особливу увагу приділено аналізу напружено-деформованого стану поверхневого шару та основи в широкому діапазоні швидкісних режимів – від дозвукових до транс- та надзвукових – а також дослідженню впливу початкових напружень, стисливості матеріалу та умов контакту між шарами.

Використання узгодженої системи моделей різної складності дозволяє провести систематичне порівняння результатів і визначити критерії коректності застосування наближених двовимірних схем у динамічних задачах механіки суцільного середовища.

Для тонкого поверхневого шару запропоновано два спрощені підходи: модель пластини Тимошенка, яка враховує згинні, зсувні та інерційні ефекти, та інерційну модель зосереджених мас, що апроксимує поверхневий шар як систему дискретних елементів із локальною жорсткістю та масою. Ці моделі застосовуються з метою дослідити ключові закономірності хвильового процесу, виділити домінуючі фактори, визначити вплив параметрів навантаження та фізико-механічних характеристик матеріалу. Наближені моделі дозволяють отримати якісну та кількісну оцінку динамічної реакції основи у випадках, коли

точно тривимірне моделювання залишається надмірно ресурсомістким або недоцільним з інженерної точки зору.

Порівняння розв'язків двовимірних задач для різних моделей двошарового півпростору представлено на рис.3.

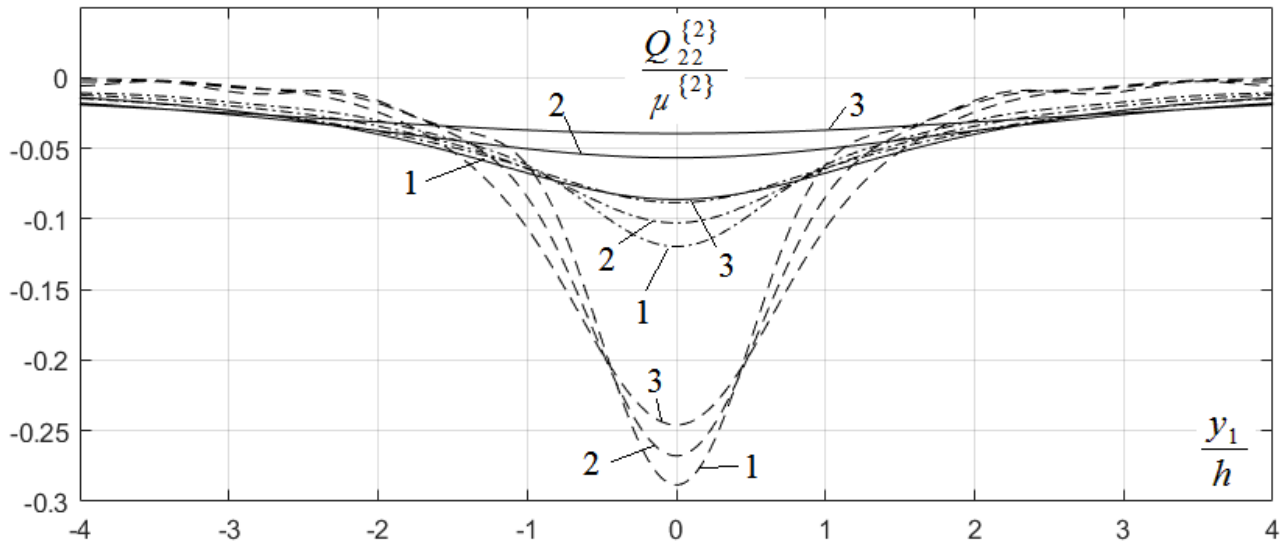


Рис. 3. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$

На рис. 3 порівнюються результати для стисливого матеріалу (гармонічний потенціал) і жорсткого контакту на глибині $y_2 = -2h/\lambda_2^{(2)}$ при швидкості навантаження $v^2/c_0^2 = 0.1$ ($c_0^2 = \mu^{(2)}/\rho^{(2)}$). Порівнюються точки основи, які збігаються в ненапруженому стані. Криві 1,2, 3 на рис. 8.1 відповідають значенням $\lambda_1^{(2)} = 0.9$, $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_1^{(2)} = 1.1$. На рис. 3 суцільними лініями позначені результати для моделі «пружна смуга на півпросторі», штрихпунктирними лініями – результати для пластини Тимошенка і пунктирними лініями – результати для моделі «зосереджені маси». Основні розрахункові параметри:

$$P/\eta^{(2)} = 0.5; \eta^{(2)}/\eta^{(1)} = \rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5; v^{(1)} = 0.3; v^{(2)} = 0.25; \lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 1; \alpha = \pi/2.$$

Паралельно проведено чисельні дослідження на основі точних просторових (3D) та плоских (2D) розв'язків, отриманих регуляційно-спектральним методом зі структурною регуляризацією.

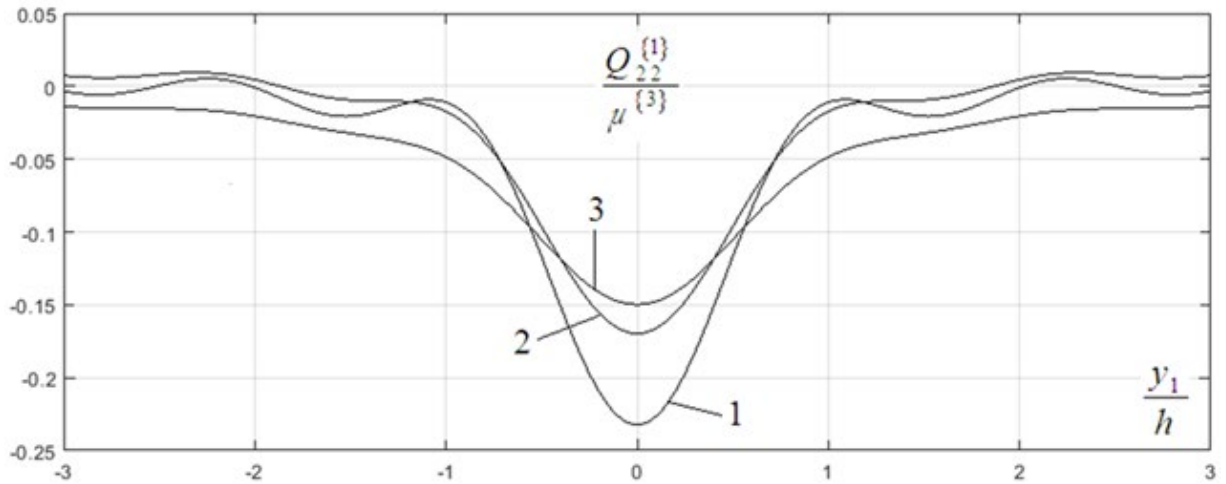


Рис. 4. Узагальнені напруження у 1-й смузі $\tilde{Q}_{22}^{(1)}$ при $y_2 = -h/(2\lambda_2^{(3)})$

На рис. 4, 5 і 6 показані узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} в елементах тришарового півпростору (дві смуги однакової товщини лежать на пружному півпросторі). Матеріал для всіх елементів стисливий (гармонічний потенціал), контакт між елементами шаруватого середовища жорсткий. Криві 1,2, 3 на рис. 4–6 відповідають значенням $\lambda_1^{(3)} = 0.9$, $\lambda_1^{(3)} = 1$, $\lambda_1^{(3)} = 1.1$. Основні розрахункові параметри: $P/\eta^{(3)} = 0.5$; $h^{(1)} = h^{(2)} = h$; $\nu^2/c_0^2 = 0.1$; $c_0^2 = \mu^{(3)}/\rho^{(3)}$; $\nu^{(1)} = 0.25$; $\nu^{(2)} = 0.27$; $\nu^{(2)} = 0.3$; $\eta^{(3)}/\eta^{(1)} = 0.6$; $\rho^{(3)}/\rho^{(1)} = 0.8$; $\eta^{(3)}/\eta^{(2)} = 0.4$; $\rho^{(3)}/\rho^{(2)} = 0.5$; $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = 1$; $\alpha = \pi/2$.

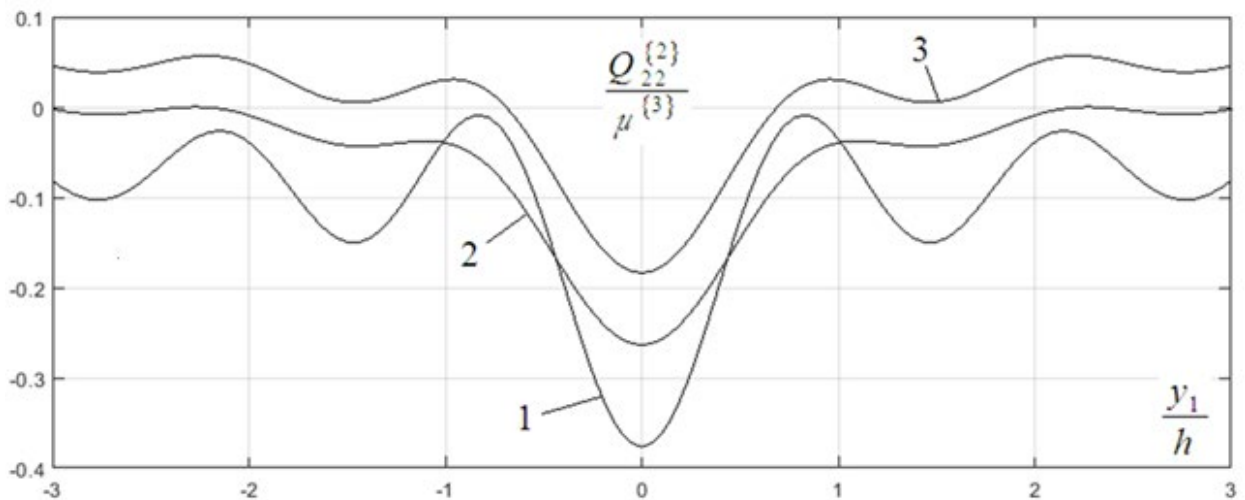


Рис. 5. Узагальнені напруження у 2-й смузі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $y_2 = -3h/(2\lambda_2^{(3)})$

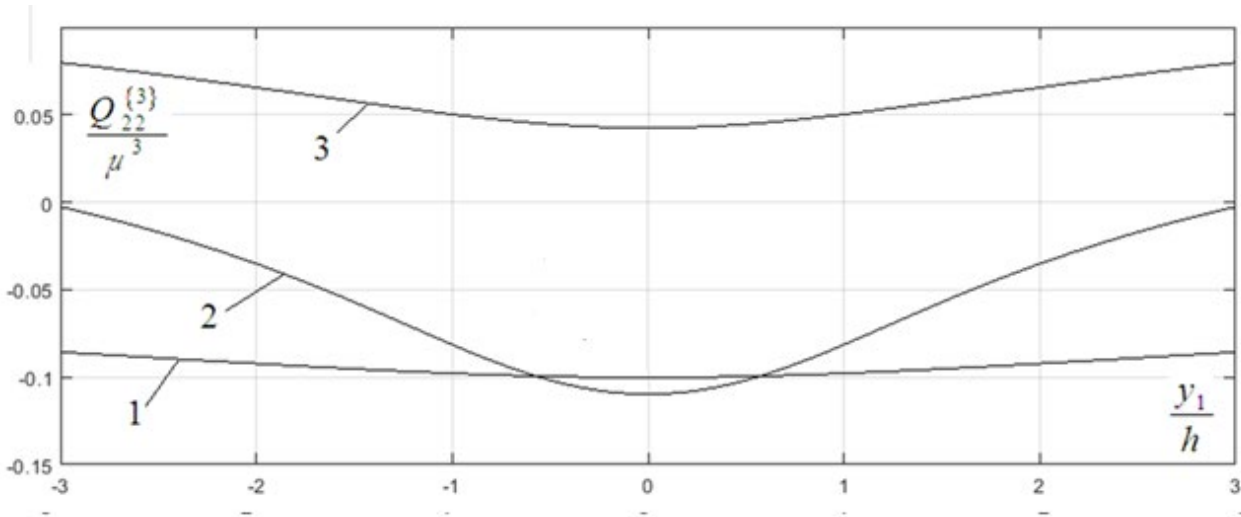


Рис. 6. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(3)}$ при $y_2 = -3h/\lambda_2^{(3)}$

На рис. 7 і 8 показані узагальнені напруження \tilde{Q}_{33} в елементах двошарового півпростору (пружний шар лежить на пружному півпросторі – модель 3D). Матеріал для всіх елементів стисливий (гармонічний потенціал), контакт між елементами шаруватого середовища нежорсткий. Основні розрахункові параметри: $P/\eta^{(2)} = 0.5$; $h^{(1)} = h$; $v^2/c_0^2 = 0.1$; $c_0^2 = \mu^{(2)}/\rho^{(2)}$; $\nu^{(1)} = 0.3$; $\nu^{(2)} = 0.25$; $\eta^{(2)}/\eta^{(1)} = 0.5$; $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5$; $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = 1$; $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = 1$; $\alpha = \pi/2$.

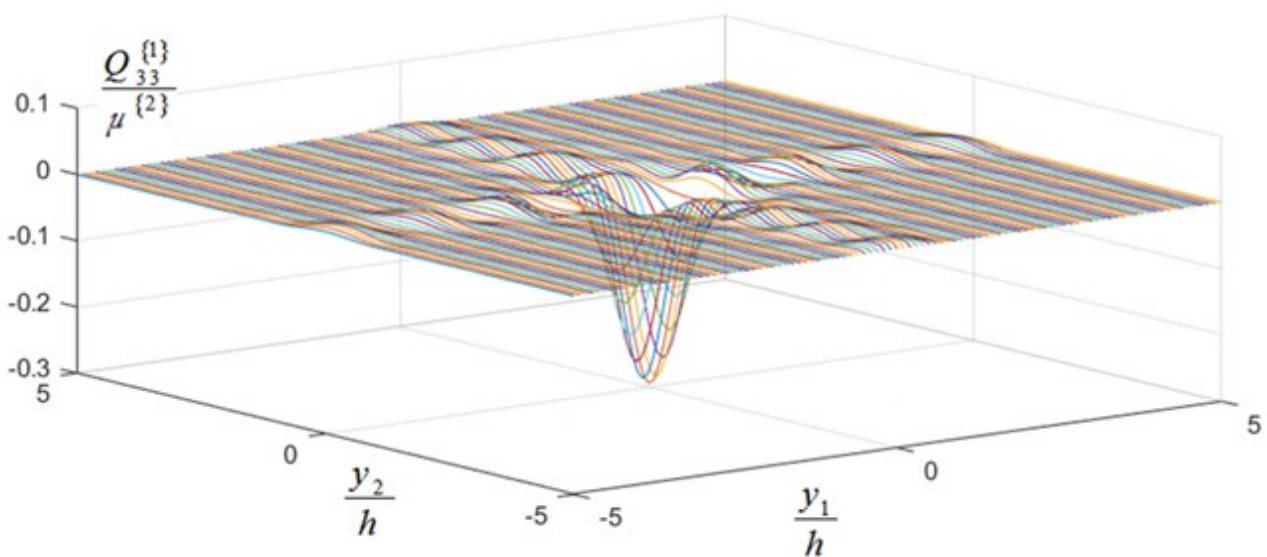


Рис. 7. Узагальнені напруження у шарі $\tilde{Q}_{33}^{(1)}$ при $y_3 = -h/(2\lambda_3^{(2)})$

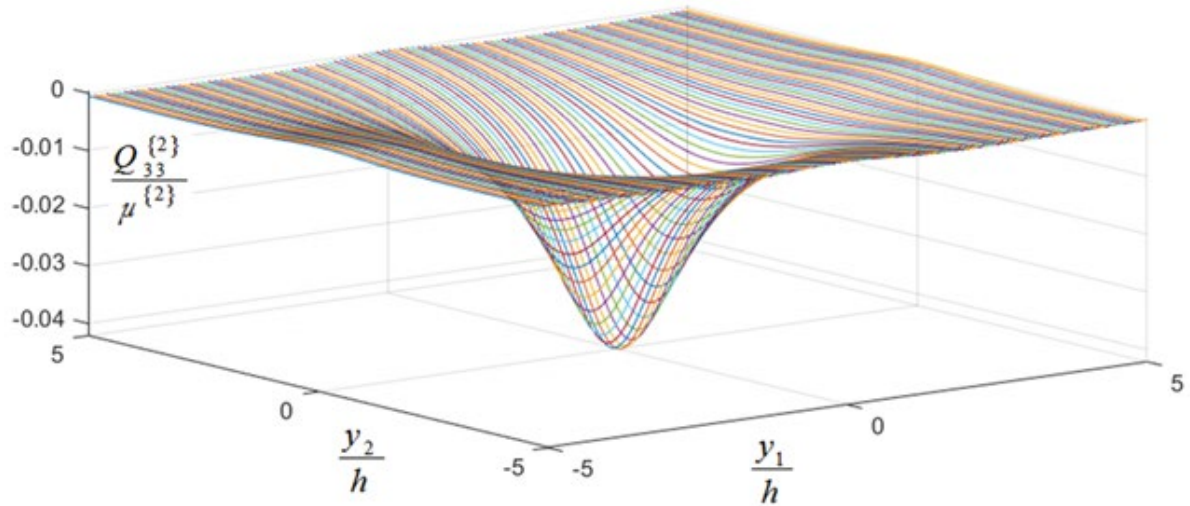


Рис. 8. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{33}^{(2)}$ при $y_3 = -2h/\lambda_3^{(2)}$

На рис. 9–11 порівнюються двовимірні та тривимірні моделі. Розглядаються і порівнюються смуга (2D) і шар (3D) на жорсткій основі. Матеріал вважається стисливим (гармонічний потенціал), контакт жорстким. Основні розрахункові параметри: $\alpha = \pi/2$; $v^2/c_0^2 = 0.01$; $P/\eta = 0.5$; $\nu = 0.25$; $\lambda_1^{(3D)} = \lambda_2^{(3D)} = 1$; $y_2^{(2D)} = -h/(2\lambda_2^{(2D)})$; $y_2^{(3D)} = 0$; $y_3^{(3D)} = -h/(2\lambda_3^{(3D)})$.

На рис. 9 смуга (шар) попередньо стиснуті, на рис. 10 – без попереднього напруження, на рис. 11 – попередньо розтягнуті.

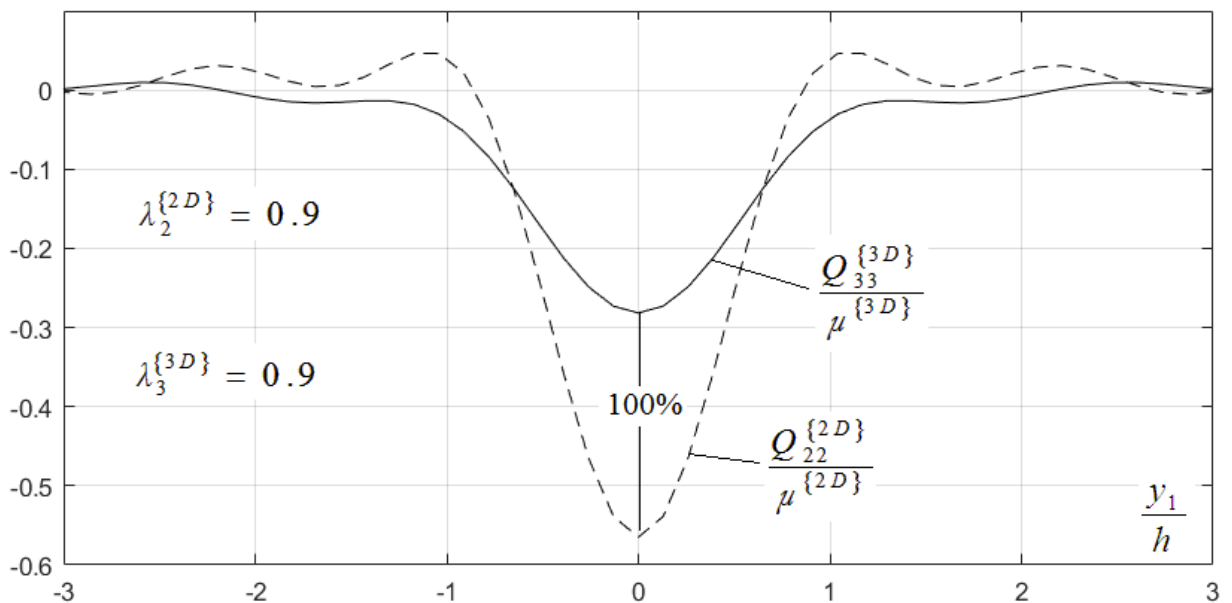


Рис. 9. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{(2D)} = \lambda_3^{(3D)} = 0.9$

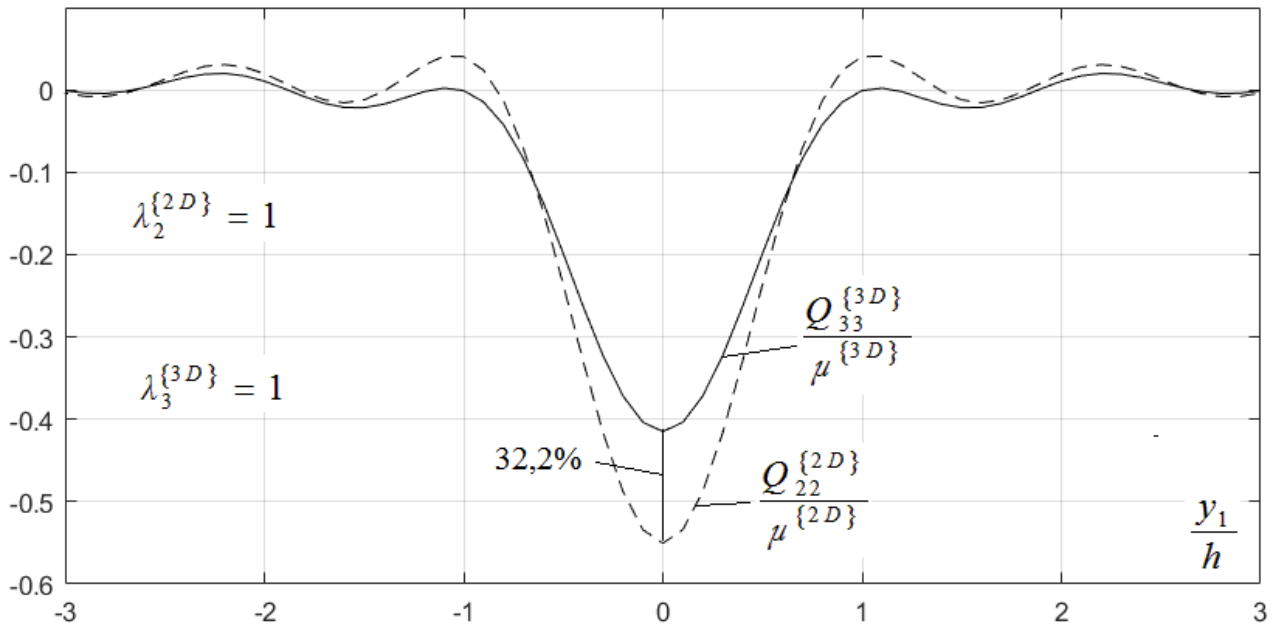


Рис. 10. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{\{2D\}} = \lambda_3^{\{3D\}} = 1$

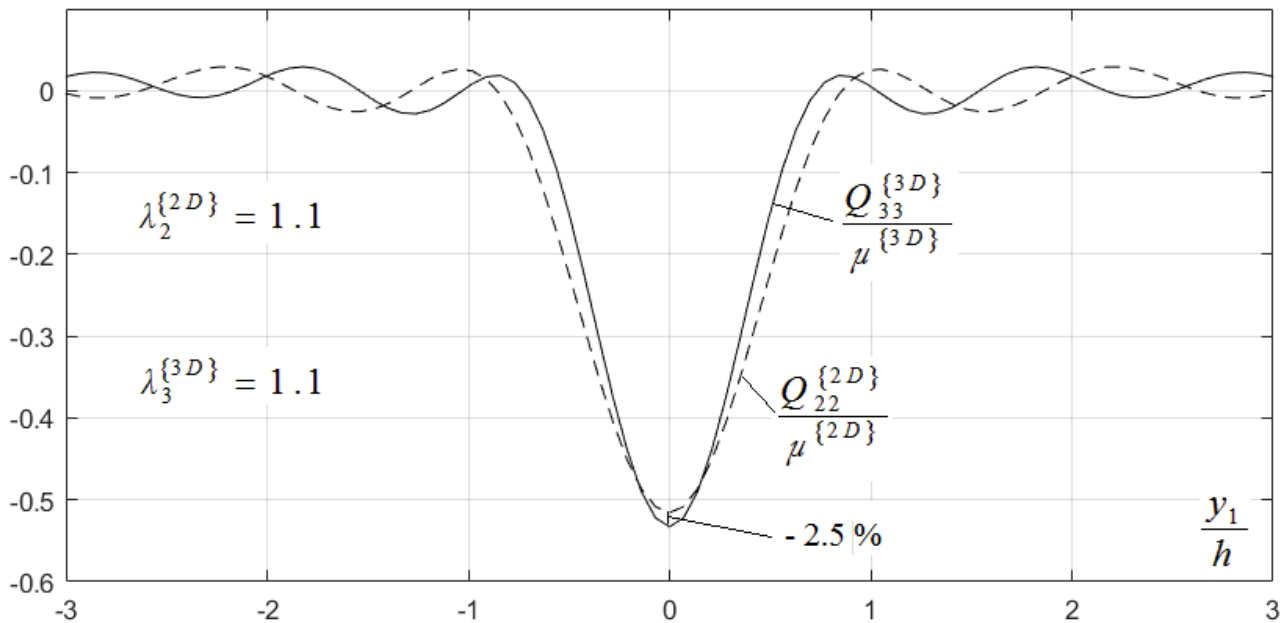


Рис. 11. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{\{2D\}} = \lambda_3^{\{3D\}} = 1.1$

Порівняння 2D- та 3D-моделей двошарової основи справді показує, що в локальній зоні дії навантаження – на відстані приблизно однієї–двох товщин шару – різниця між амплітудами може досягати 100 %, а для простіших наближених моделей, таких як пластина на півпросторі або система зосереджених мас, – до 300–400 %. Такі значення не є ознакою некоректності

моделей. Це природна властивість тривимірної теорії пружності: у вузькій області збудження формується просторово локалізоване хвильове поле, яке 2D-моделі за визначенням згладжують і усереднюють.

З інженерної точки зору головним критерієм якості наближеної моделі є не абсолютне значення локальних піків, а точність відтворення глобальних характеристик: розподілу напружень у глибину, загальної форми хвильового поля, інтегральних енергетичних параметрів та реакції основи. Саме ці величини визначають несучу здатність конструкції, усталені переміщення, втомну міцність та експлуатаційну надійність. За цими параметрами наближені моделі демонструють високу узгодженість із тривимірним розв'язком.

Багаторічний інженерний досвід – моделі Вінклера, Хетеньї, Міндліна, підходи Власова, а також сучасні чисельні схеми – підтверджує, що локальні відмінності у пікових значеннях не лише прийнятні, а й типові для всіх спрощених моделей. Вони не впливають на правильність інженерного прогнозу за умови коректної інтерпретації результатів.

Тому наближені моделі двошарової основи можна вважати інженерно застосовними та надійними, якщо задача передбачає аналіз глобальних параметрів або якщо потрібно отримати швидку оцінку НДС, підтверджену якісним збігом із тривимірною картиною деформування. Локальні розбіжності – це властивість рівня моделі, а не обмеження, яке унеможлиблює її використання.

Комплексний характер проведених досліджень дозволив сформулювати узагальнену картину динамічної поведінки шаруватого півпростору, визначити межі застосування наближених двовимірних моделей та обґрунтувати необхідність використання точних просторових методів у специфічних режимах навантаження.

Запропонований регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією було апробовано під час чисельного аналізу просторових і плоских моделей багатошарових конструкцій різної будови. Розв'язання тестових задач для шаруватого півпростору, пластин та моделей із зосередженими масами підтвердило збіжність, стійкість і фізичну коректність

методу у широкому діапазоні швидкостей рухомих навантажень. Порівняння з точними 3D-розв'язками та результатами FEM-дискретизації засвідчило високу точність підходу й обґрунтувало його практичну придатність.

Отримані результати забезпечують наукове підґрунтя для подальшого моделювання багатошарових конструкцій та є практично важливими для інженерних розрахунків дорожніх, залізничних, будівельних та композитних систем.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Таким чином, у дисертаційній роботі вперше подано постановки та отримано аналітичні й чисельні розв'язки просторових і двовимірних задач про усталений рух багатошарових пружних основ із початковими напруженнями зі стисливих і нестисливих матеріалів під дією рухомого поверхневого навантаження.

До основних результатів, отриманих у роботі, належать такі.

1. Найважливіші нові положення дослідження

Уперше:

1.1. *Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід до дослідження хвильової динаміки багатошарових пружних основ із початковими напруженнями.*

1.2. *Розроблено і вперше застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, який дозволяє ефективно розв'язувати динамічні задачі для багатошарових основ без необхідності використання традиційних прийомів регуляризації та контурних деформацій у комплексній площині.*

1.3. *Введено поняття регуляційних коефіцієнтів, що забезпечують фізично коректне узгодження хвильових полів між окремими шарами та стабілізують числову реалізацію методу.*

1.4. *Побудовано узагальнену спектрально-матричну схему, у якій обчислення спектральних амплітуд хвильових полів виконується на основі*

збіжного спектрального інтегралу, що забезпечує числову стійкість і фізичну коректність результату.

1.5. *Отримано нові аналітичні співвідношення* для опису хвильових полів у елементах шаруватого середовища, які узагальнюють класичні розв'язки для півпростору та багатошарових систем, у тому числі з початковими напруженнями.

1.6. *Вперше розв'язано базову (еталонну) задачу* про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження; така постановка не має відомих аналогів у науковій літературі й може використовуватися як тестова для верифікації чисельних методів.

1.7. *Обґрунтовано області застосування нового методу* та показано його ефективність для моделювання рухомих навантажень, хвильової взаємодії у технічних основах, композитах та геоматеріалах.

2. Розробка теорії та методів для багатошарових основ

2.1. У рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями вперше сформульовано постановки та розроблено методи розв'язку просторових і плоских задач про реакцію багатошарової основи на поверхневе навантаження, що рухається з постійною швидкістю.

2.2. Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід для якісного дослідження динамічних процесів у багатошарових конструкціях з плоско-паралельними границями під дією рухомого навантаження. Отримані точні розв'язки можуть служити еталоном для перевірки чисельних методів.

2.3. Розв'язки просторових і плоских задач в загальній постановці отримано із застосуванням *регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією*.

2.4. Постановки задач та їх розв'язки представлені у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл з довільним пружним потенціалом, для випадків рівних і нерівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення шарів та для будь-якої швидкості руху навантаження.

2.5. Задачі для наближених моделей двошарового півпростору з початковими напруженнями розглянуто із застосуванням інтегрального методу Фур'є та методу комплексних потенціалів. Показано збіг результатів, отриманих цими незалежними підходами.

3. Чисельні дослідження та порівняльний аналіз

3.1. На основі отриманих аналітичних розв'язків проведено чисельні дослідження впливу початкових напружень та швидкості руху навантаження на корені характеристичних рівнянь та напружено-деформований стан багатошарових середовищ. Дослідження виконано в рамках теорії скінченних початкових деформацій для стисливого матеріалу з потенціалом гармонічного типу та для нестисливого матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича.

3.2. Встановлено низку нових фізико-механічних ефектів, зумовлених дією початкових напружень, швидкістю рухомого навантаження та структурою багатошарової основи.

3.3. Проведено порівняння розв'язків двовимірних задач для різних наближених моделей двошарового півпростору: пружна смуга на пружному півпросторі; пластина на пружному півпросторі; зосереджені маси на пружному півпросторі.

3.4. Виконано порівняльний аналіз розв'язків просторових і плоских задач у точній постановці для оцінки меж застосування двовимірних моделей.

3.5. На основі точних просторових розв'язків визначено межі застосування низки наближених моделей шаруватих середовищ, що має практичне значення для інженерного моделювання та проектування.

4. Емерджентні ефекти, характерні для досліджуваних систем

4.1. Отримані аналітичні співвідношення та чисельні результати підтверджують практичну ефективність запропонованого підходу та демонструють, що кожна шарувата конфігурація формує власний набір

емерджентних характеристик - власних хвильових чисел, критичних швидкостей і форм коливань.

4.2. *Важливим результатом дослідження є виявлення емерджентних механічних ефектів* - явищ, що виникають саме на рівні взаємодії шарів унікальної шаруватої системи та не можуть бути зведені до суми властивостей окремих її компонентів. До них належать:

4.2.1. *Системний вплив початкових напружень*. Виявлено, що наявність у шаруватій основі елемента з початковими напруженнями суттєво змінює реакцію всієї конструкції та перерозподіл напружень у сусідніх шарах.

4.2.2. *Чутливість характеристичних коренів до початкових напружень*. Встановлено, що залежно від способу формування шаруватої конструкції вплив початкових напружень на характеристичні корені може бути значним. Виявлено, що при певних дозвукових швидкостях можуть існувати дійсні кратні корені характеристичних рівнянь.

4.2.3. *Локальність впливу початкових напружень*. Показано, що найсуттєвіший вплив початкових напружень на напружено-деформований стан спостерігається у безпосередній близькості від точки прикладення навантаження. У віддалених зонах цей вплив стає другорядним через розсіювання хвиль.

4.2.4. *Асиметрія впливу стиску та розтягу*. Встановлено, що попереднє стискання середовища призводить до інтенсивнішого зростання амплітуд напружень і переміщень порівняно з попереднім розтягуванням, що зумовлено зміною ефективною жорсткості та хвильових швидкостей. Це має ключове значення для оцінки міцності попередньо стиснутих конструкцій (наприклад, у ґрунтах під фундаментами). Затухання збурень з віддаленням від навантаження відбувається повільніше при попередньому стисканні.

4.2.5. *Зони слабкої чутливості*. Виявлено області в середовищі, де напружено-деформований стан практично не залежить від початкових деформацій, що дозволяє в окремих інженерних розрахунках нехтувати цим фактором без суттєвої втрати точності.

4.2.6. *Складна взаємодія швидкісного режиму та початкових напружень.* Зі збільшенням швидкості навантаження загальний рівень амплітуд знижується, однак відносний вплив початкових напружень посилюється, особливо для попередньо стиснених матеріалів.

4.2.7. *Зміна симетрії хвильового поля залежно від швидкісного режиму.*

- У дозвуковому режимі спостерігається симетричність поля напружень і переміщень відносно точки навантаження, що узгоджується з класичними уявленнями для лінійних стаціонарних задач.
- У транс- та надзвуковому режимах виникає виражена асиметрія, зумовлена формуванням конусів Маха та різним затуханням прямих і зворотних хвиль.
- У надзвуковому режимі можливі збурення, що випереджають навантаження. Вони виникають в результаті взаємодії шарів унікальної шаруватої системи

4.2.8. *Вплив властивостей поверхневого шару та умов контакту.*

- Збільшення жорсткості верхнього шару призводить до екранування та зменшення амплітуд у півпросторі.
- Жорсткий контакт між шарами забезпечує більш рівномірний розподіл енергії та зменшує чутливість системи до швидкості навантаження та початкових напружень порівняно з нежорстким контактом.

4.3. У 2D- та 3D-постановках у точному формулюванні зростає варіантність поведінки системи, що, у свою чергу, підсилює емерджентний характер отриманих результатів.

Отже, основним науковим внеском роботи є не лише розв'язок окремих задач, а створення методичного інструментарію (регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією) для виявлення та аналізу емерджентних динамічних властивостей шаруватих систем. Отримані результати узгоджуються з фізичними уявленнями про хвильові процеси та формують основу для

прогнозування напружено-деформованого стану шаруватих середовищ під дією рухомих навантажень у широкому діапазоні швидкостей.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії

1. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: издательство «Кременчуг», 2007. – 795 с. – ISBN 966-7513-70-X.

2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с. – ISBN: 978-3-659-76495-0.

Розділ в колективній монографії

3. *Glukhov Yu., Babich S., Kornienko V.* Stress-strain state of a two-layered half-space with initial stresses under the influence of a moving load // Aleksander N. Guz, Holm Altenbach, Viacheslav Bogdanov, Vladimir M. Nazarenko Editors «Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine», Switzerland: Springer, 2023. – P. 103–118. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>.

Статті в фахових виданнях України та в закордонних виданнях

4. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36–54. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamics of a Prestressed Compressible Layered Half-Space under Moving Load // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 3. – P. 268–285. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0043-0>. (Квартиль Q2).

5. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 4. – С. 35–55. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamic Problem for a Prestressed Incompressible Layered Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 4. – P. 388–405. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0051-0>. (Квартиль Q2).

6. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // *Прикл. механика.* – 2008. – 44, № 5. – С. 3–15. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 5. – P. 481–492. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0060-z>. (Квартиль Q2).

7. *Глухов Ю.П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2010, № 2. – С. 53–58. – ISSN 2518-153X. – Режим доступа URI: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/19593>. (Категорія Б).

8. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием // *Вісник Черкаського національного університету.* Випуск 172. – Черкаси, 2010 – С. 20–24. – ISSN: 2076-5886. (Категорія Б).

9. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2011, № 7. – С. 52–57. – ISSN 1025-6415. – Режим доступа URI: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/43826>. (Категорія Б).

10. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача // *Доповіді НАН України.* – 2011, № 11. – С.65–69. – ISSN 1025-6415. – Режим доступа URI: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/38137>. (Категорія Б).

11. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании // *Доповіді НАН України.* – 2011, № 8. – С. 48–53. – ISSN

1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/38570>. (Категорія Б).

12. Глухов Ю.П. Реакція багат шарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Нестисливий матеріал // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 14. – Львів, 2011. – С. 23–28. – ISSN 1816-1545. (Категорія Б).

13. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной полосы при воздействии подвижной нагрузки // Вісник НТУ «ХПІ». Випуск 42. – Харків, 2011. – С. 57–67. – ISSN 2222-0631. (Категорія Б).

14. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной плиты на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки // Доповіді НАН України. – 2012, № 2. – С. 70–75. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/49035>. (Категорія Б).

15. Глухов Ю. П. Динамической задаче для двухслойной полосы на жестком основании. // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса, 2014. – № 2 (44). – С. 9–14. – ISBN 978-966-7598-61-1. (Категорія Б).

16. Глухов Ю. П. Динамическая задача для двухслойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – №2 – С. 46–52. – ISBN 978-966-599-743-1. (Категорія Б).

17. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Изгиб пластины на упругом основании при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2017. – 53, № 3. – С. 1–14. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. Bending a plate on prestressed elastic foundation under live static load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 287–299. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0810-x>. (Квартиль Q3).

18. *Бабич, С.Ю., Глухов, Ю.П., Корнієнко, В.Ф.* До задачі розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями // Доповіді НАН України. – 2019, № 10. – С. 21–28. – DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.021>. (Категорія Б).

19. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для многослойного полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2021. – 57, № 1. – С. 54–63. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 1. – P. 43–52. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>. (Квартиль Q3).

20. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 105–113. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).105–113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).105–113). (Категорія Б).

21. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 114–122. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).114–122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).114–122). (Категорія Б).

22. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 39, № 2. – С. 116–124. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124). (Категорія Б).

23. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F., Zhiguts Yu. Yu. Dynamics of a twolayer half-space with initial stresses under the impact of a moving load // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2022. Вип. 40, № 1. – С. 94–109. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).94-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).94-108). (Категорія Б).

24. Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватому нестисливому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1, 2023. XXI Міжнародний симпозиум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2023) 26–30 червня 2023, Київ-Харків. – Харків: ХНУ, 2023. – С. 75–81. – ISBN 978-966-623-990-5. (Категорія Б).

25. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Млавець Ю.Ю. Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2023, том 43, № 2. – С. 82–95. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)). (Категорія Б).

26. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Корнієнко В.Ф. Рухоме навантаження нестисливої півплощини з початковими напруженнями // Прикл. механіка. - 2024. – 60, № 2. – С. 3–18. – ISSN 0001-5979.

Glukhov, Y.P., Babich, S.Y. & Kornienko, V.F. Moving Load of Prestressed Incompressible Half-Plane. // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 2. – P. 123–136. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01267-9>. (Квартиль Q3).

27. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Маляр М.М., Млавець Ю.Ю. Напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями та захисним покриттям при дії рухомого навантаження// Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2024, том 44, № 1. – С. 83–92. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).83-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).83-92). (Категорія Б).

28. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Реакція стисливого попередньо-напруженого півпростору із захисним покриттям на рухоме навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 3. – С. 45–58. – ISSN 0001-5979.

Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. Reaction of prestressed compressible half-space with protective coating to moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 3. – P. 291–304. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01282-w>. (Квартиль Q3).

29. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Пружна основа із захисним покриттям та початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 4. – С. 45–54. – ISSN 0001-5979.

Glukhov Yu. P., Babich S. Yu. Elastic base with a protective coating and initial stresses under action of moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 4. – P. 422–430. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01302-9>. (Квартиль Q3).

АНОТАЦІЯ

Глухов Ю.П. Динамічні задачі для шаруватої основи з початковими напруженнями при дії рухомого поверхневого навантаження. – Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 "Механіка деформівного твердого тіла". – Київ: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 2026.

Дисертацію присвячено дослідженню динамічної поведінки шаруватого пружного півпростору з початковими напруженнями при дії рухомих поверхневих навантажень.

Актуальність роботи зумовлена потребою в точних та фізично коректних моделях взаємодії рухомих навантажень із багат шаровими конструкціями, які широко застосовуються в транспортному будівництві, геотехніці та механіці композитів.

Метою роботи є створення ефективного аналітико-чисельного підходу до розв'язання просторових і плоских задач про усталений рух навантажень по поверхні багат шарового півпростору. У дисертації запропоновано регуляційно-

спектральний метод зі структурною регуляризацією, який забезпечує збіжність спектральних інтегралів і фізичну коректність хвильових полів. Метод ґрунтується на введенні спеціальних регуляційних коефіцієнтів, що автоматично усувають нефізичні експоненційно зростаючі складові розв'язку та зберігають тільки радіаційні компоненти. Це дозволяє уникнути використання контурів Зоммерфельда та інших складних процедур комплексного інтегрування.

У дисертаційній роботі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями вперше дані постановки й отримані аналітичні та чисельні розв'язки просторових і двовимірних задач про усталений рух багат шарових пружних основ із початковими напруженнями із стисливих і нестисливих матеріалів при дії рухомого поверхневого навантаження.

Проведено порівняння розв'язків двовимірних задач для різних моделей двошарового півпростору: пружний шар на пружному півпросторі; пластина на пружному півпросторі; зосереджені маси на пружному півпросторі.

На основі точних просторових розв'язків визначені межі застосування наближених моделей шаруватої основи.

Практичне значення роботи полягає в можливості застосування отриманих результатів для динамічного аналізу та оптимізації конструкцій транспортних основ, дорожніх покриттів, залізничних колій і багат шарових композитних систем. Запропонований метод може використовуватися як точний еталон для перевірки чисельних методів, а також як інструмент інженерного моделювання хвильових процесів у шаруватих основах.

Ключові слова: багат шаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, стисливі і нестисливі матеріали, рухоме навантаження, регуляційно-спектральний метод, структурна регуляризація, метод інтегральних перетворень Фур'є, метод комплексних потенціалів, напружено-деформований стан, характеристичні рівняння, емерджентні механічні ефекти

ANNOTATION

Hlukhov Yu.P. Dynamic Problems for a Layered Foundation with Initial Stresses under the Action of a Moving Surface Load. – Manuscript. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 01.02.04 "Mechanics of Deformable Solid." – Kyiv : S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2026.

The dissertation is devoted to the investigation of the dynamic behavior of a layered elastic half-space with initial stresses under the action of moving surface loads.

The relevance of the work is driven by the need for accurate and physically sound models of the interaction between moving loads and multilayer structures, which are widely used in transportation engineering, geotechnics, and composite mechanics.

The aim of the work is to develop an effective analytical-numerical approach for solving spatial and plane problems of the steady-state motion of loads on the surface of a multilayer half-space. The dissertation proposes a regularization-spectral method with structural regularization, which ensures the convergence of spectral integrals and the physical correctness of wave fields. The method is based on the introduction of special regularization coefficients that automatically eliminate non-physical exponentially growing components of the solution and preserve only the radiative components. This avoids the use of Sommerfeld contours and other complex integration procedures.

Within the framework of the three-dimensional linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, the thesis provides, for the first time, the formulations and obtains analytical and numerical solutions to spatial and two-dimensional problems of the steady-state motion of multilayer elastic foundations with initial stresses made of compressible and incompressible materials under the action of a moving surface load.

A comparison of solutions to two-dimensional problems for different models of a two-layer half-space is conducted: an elastic layer on an elastic half-space; a plate on an elastic half-space; concentrated masses on an elastic half-space.

Based on accurate spatial solutions, the limits of applicability of approximate models of layered foundations have been established.

The practical significance of the work lies in the possibility of applying the obtained results for the dynamic analysis and optimization of transportation foundations, pavement structures, railway track systems, and multilayer composite configurations. The proposed method may serve both as an accurate benchmark for verifying numerical methods and as an engineering tool for modeling wave processes in layered foundations.

Keywords: layered half-space, initial stresses, compressible and incompressible materials, moving load, regulation–spectral method, structural regularization, Fourier integral transform method, complex potential method, stress–strain state, characteristic equations, emergent mechanical effects.

