

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГЛУХОВ ЮРІЙ ПЕТРОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ
НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО
НАВАНТАЖЕННЯ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Ю.П. Глухов

Київ 2026

АНОТАЦІЯ

Глухов Ю.П. Динамічні задачі для шаруватої основи з початковими напруженнями при дії рухомого поверхневого навантаження. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». – Київ: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 2026.

У дисертаційній роботі досліджуються динамічні процеси в шаруватих пружних основах із початковими напруженнями при дії рухомих поверхневих навантажень.

Актуальність роботи зумовлена широким використанням шаруватих конструкцій у транспортній, будівельній, авіаційній та інших галузях, а також необхідністю створення надійних моделей для опису хвильової динаміки таких систем з урахуванням складної структури, контрастності механічних властивостей і початкових напружень.

Метою дослідження є розробка та обґрунтування загального аналітично-чисельного підходу для розв'язку динамічних просторових і двовимірних задач для багатошарової пружної основи з початковими (залишковими) напруженнями під дією рухомого навантаження, а також дослідження хвильових процесів у таких системах з урахуванням початкових напружень, різних швидкостей руху навантаження, різних типів граничних умов та механічних характеристик елементів шаруватого середовища.

Об'єктом дослідження є динамічні процеси в багатошарових пружних основах з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.

Предметом дослідження є математичні моделі, аналітичні методи, чисельні алгоритми та закономірності динамічної поведінки шаруватих основ з початковими напруженнями під дією рухомих навантажень.

Для досягнення поставленої мети вперше запропоновано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, який поєднує можливості

спектральних, інтегральних і матричних підходів та дозволяє подолати їхні ключові обмеження.

Основу запропонованого методу становить спектральне подання розв'язку з використанням інтегрального перетворення Фур'є. Для кожного шару отримано загальні представлення хвильових полів у частотній області, що містять як затухаючі, так і зростаючі експоненціальні складові. У класичних методах це призводить до числової нестабільності та необхідності складних деформацій контурів інтегрування у комплексній площині. Запропоновано нову форму регуляризації – структурну регуляризацію – яка ґрунтується на введенні спеціальних регуляційних коефіцієнтів. Ці коефіцієнти забезпечують автоматичне виділення фізично коректних (радіаційних) складових розв'язку та усунення зростаючих нефізичних компонентів.

Регуляційні коефіцієнти будуються таким чином, що вони зберігають енергетичну узгодженість хвильових полів між шарами. Це дозволяє отримати збіжні спектральні інтеграли без необхідності застосування методів типу контуру Зоммерфельда, методу найшвидшого спаду або штучного згасання. Запропонована схема забезпечує стабільність розрахунків у задачах із високою контрастністю механічних властивостей шарів, тонкими шарами, високими частотами та початковими (залишковими) напруженнями.

У дисертаційній роботі вперше наведені постановки й отримані аналітичні та чисельні розв'язки просторових і двовимірних задач про усталений рух багатошарових пружних основ із початковими напруженнями із стисливих і нестисливих матеріалів при дії рухомого поверхневого навантаження.

Всі дослідження були проведені в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. При розв'язуванні просторових і двовимірних задач використовувалися регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, метод інтегральних перетворень Фур'є і метод комплексних потенціалів. Для розв'язку систем неоднорідних алгебраїчних рівнянь та процедур оберненого інтегрування використовувалися класичні чисельні методи.

Розв'язок задач отримано в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової). В просторі зображень Фур'є отримано аналітичні розв'язки.

На основі отриманих результатів проведені чисельні дослідження впливу початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь та на напружено-деформований стан багат шарового середовища.

Виявлено ряд нових емерджентних механічних ефектів, що пов'язані з наявністю початкових напружень, швидкістю поверхневого навантаження та структурою багат шарової основи.

Чисельні дослідження виконані в рамках теорії скінчених початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом і для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенева-Хазановича.

Двовимірні задачі про збудження двошарового півпростору з початковими напруженнями розглянуто також із застосуванням комплексних потенціалів плоских динамічних лінеаризованих задач теорії пружності. У загальній формі для стисливих і нестисливих тіл у комплексних потенціалах наведено постановку задач і отримано розв'язок.

Проведено порівняння розв'язків двовимірних задач для різних моделей двошарового півпростору: пружний шар на пружному півпросторі; пластина на пружному півпросторі; зосереджені маси на пружному півпросторі.

На основі точних просторових розв'язків визначені межі застосування наближених моделей шаруватої основи.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованого підходу і методів для побудови фундаментальних розв'язків для різних класів статичних та динамічних задач для шаруватих конструкцій.

Порівняльний аналіз різних наближених і точних моделей шаруватих конструкцій може бути використаний для підвищення ефективності розв'язання конкретних інженерних задач.

Аналітичне розв'язання динамічних задач для багат шарових 2D і 3D основ під впливом рухомого навантаження відкриває широкі можливості для інженерних застосувань. Ключові напрямки використання: транспортна інфраструктура, будівництво і геотехніка, промислові об'єкти, сейсмічний захист і геофізика, оборонна сфера та інші.

Запропонований метод може використовуватися як інструмент високої точності для моделювання хвильових процесів у багат шарових середовищах, оцінки динамічної взаємодії рухомих навантажень із основами, аналізу резонансних ефектів та оптимізації структур інженерних конструкцій.

Розв'язки, наведені в роботі, можуть бути застосовані для перевірки чисельних методів, зокрема методів скінченних елементів, скінченних різниць та граничних елементів, а також для параметричної оптимізації багат шарових основ.

Отримані наукові результати є фундаментальними результатами в механіці деформівного твердого тіла, що створюють основу для побудови узагальненої теорії поширення хвиль в шаруватих пружних структурах, і використані в прикладних наукових дослідженнях та науково-дослідних і дослідно-конструкторських розробках.

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів забезпечуються строгістю математичних постановок задач у межах лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями, узгодженістю розв'язків для постановок різної складності при використанні єдиного методу, а також правильним фізичним характером розв'язків у граничних випадках і їх збігом із класичними моделями. Чисельні результати отримано з використанням апробованих методів та перевірені на тестових задачах.

Таким чином, робота є комплексним дослідженням динаміки попередньо напружених багат шарових пружних систем під дією рухомих навантажень. В

якості основного інструменту аналізу використовується новий регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією. Запропонований підхід поєднує високу точність, числову стійкість та фізичну коректність.

Ключові слова: багат шаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, стисливі і нестисливі матеріали, рухоме навантаження, регуляційно-спектральний метод, структурна регуляризація, метод інтегральних перетворень Фур'є, метод комплексних потенціалів, напружено-деформований стан, характеристичні рівняння, емерджентні механічні ефекти

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ АВТОРА ДИСЕРТАЦІЇ, РЕЗУЛЬТАТИ ЯКИХ СКЛАДАЮТЬ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії

1. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: издательство «Кременчуг», 2007. – 795 с. – ISBN 966-7513-70-X.

2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с. – ISBN: 978-3-659-76495-0.

Розділ в колективній монографії

3. *Glukhov Yu., Babich S., Kornienko V.* Stress-strain state of a two-layered half-space with initial stresses under the influence of a moving load // Aleksander N. Guz, Holm Altenbach, Viacheslav Bogdanov, Vladimir M. Nazarenko Editors «Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine», Switzerland: Springer, 2023. – P. 103 – 118. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>.

Статті в фахових виданнях України та в закордонних виданнях

4. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36–54. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamics of a Prestressed Compressible Layered Half-Space under Moving Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 3. – P. 268–285. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0043-0>. (Квартиль Q2).

5. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // *Прикл. механика.* – 2008. – 44, № 4. – С. 35–55. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamic Problem for a Prestressed Incompressible Layered Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 4. – P. 388–405. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0051-0>. (Квартиль Q2).

6. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // *Прикл. механика.* – 2008. – 44, № 5. – С. 3–15. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 5. – P. 481–492. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0060-z>. (Квартиль Q2).

7. *Глухов Ю.П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2010, № 2. – С. 53–58. – ISSN 2518-153X. – Режим доступа URI: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/19593>. (Категорія Б).

8. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием // *Вісник Черкаського національного університету.* Випуск 172. – Черкаси, 2010 – С. 20–24. – ISSN: 2076-5886. (Категорія Б).

9. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2011, № 7. – С.

52–57. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/43826>. (Категорія Б).

10. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача // Доповіді НАН України. – 2011, № 11. – С.65–69. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/38137>. (Категорія Б).

11. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании // Доповіді НАН України. – 2011, № 8. – С. 48–53. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/38570>. (Категорія Б).

12. Глухов Ю.П. Реакція багатопарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Нестисливий матеріал // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 14. – Львів, 2011. – С. 23–28. – ISSN 1816-1545. (Категорія Б).

13. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной полосы при воздействии подвижной нагрузки // Вісник НТУ «ХПІ». Випуск 42. – Харків, 2011. – С. 57–67. – ISSN 2222-0631. (Категорія Б).

14. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной плиты на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки // Доповіді НАН України. – 2012, № 2. – С.70–75. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/49035>. (Категорія Б).

15. Глухов Ю. П. Динамической задаче для двухслойной полосы на жестком основании. // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса, 2014. – № 2 (44). – С. 9–14. – ISBN 978-966-7598-61-1. (Категорія Б).

16. Глухов Ю. П. Динамическая задача для двухслойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – №2 – С. 46–52. – ISBN 978-966-599-743-1. (Категорія Б).

17. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Изгиб пластины на упругом основании при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2017. – 53, № 3. – С. 1–14. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. Bending a plate on prestressed elastic foundation under live static load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 287–299. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0810-x>. (Квартиль Q3).

18. *Бабич, С.Ю., Глухов, Ю.П., Корнієнко, В.Ф.* До задачі розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями // Доповіді НАН України. – 2019, № 10. – С. 21–28. – DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.021>. (Категорія Б).

19. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для многослойного полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2021. – 57, № 1. – С. 54–63. – ISSN 0001-5979.

Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 1. – P. 43–52. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>. (Квартиль Q3).

20. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 105–113. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).105-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).105-113). (Категорія Б).

21. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 114–122. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).114-122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).114-122). (Категорія Б).

22. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 39, № 2. – С. 116–124. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124). (Категорія Б).

23. *Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F., Zhiguts Yu. Yu.* Dynamics of a twolayer half-space with initial stresses under the impact of a moving load // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2022. Вип. 40, № 1. – С. 94–109. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).94-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).94-108). (Категорія Б).

24. *Глухов Ю.П.* Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватому нестисливому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1, 2023. XXI Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2023) 26 – 30 червня 2023, Київ-Харків. – Харків: ХНУ, 2023. – С. 75–81. – ISBN 978-966-623-990-5. (Категорія Б).

25. *Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Млавець Ю.Ю.* Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2023, том 43, № 2. – С. 82–95. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)). (Категорія Б).

26. *Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Корнієнко В.Ф.* Рухоме навантаження нестисливої півплощини з початковими напруженнями // Прикл. механіка. - 2024. – 60, № 2. – С. 3–18. – ISSN 0001-5979.

Glukhov, Y.P., Babich, S.Y. & Kornienko, V.F. Moving Load of Prestressed Incompressible Half-Plane. // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 2. – P. 123–136. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01267-9>. (Квартиль Q3).

27. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Маляр М.М., Млавець Ю.Ю. Напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями та захисним покриттям при дії рухомого навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2024, том 44, № 1. – С. 83–92. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).83-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).83-92). (Категорія Б).

28. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Реакція стисливого попередньо-напруженого півпростору із захисним покриттям на рухоме навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 3. – С. 45–58. – ISSN 0001-5979.

Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. Reaction of prestressed compressible half-space with protective coating to moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 3. – P. 291–304. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01282-w>. (Квартиль Q3).

29. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Пружна основа із захисним покриттям та початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 4. – С. 45–54. – ISSN 0001-5979.

Glukhov Yu. P., Babich S. Yu. Elastic base with a protective coating and initial stresses under action of moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 4. – P. 422–430. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01302-9>. (Квартиль Q3).

ЗМІСТ

ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.....	20
Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.....	21
Мета та задачі дослідження.....	22
Методи дослідження.....	24
Наукова новизна результатів роботи.....	24
Обґрунтованість та достовірність результатів.....	25
Практичне значення отриманих результатів.....	26
Апробація результатів дисертації.....	27
Публікації та особистий внесок здобувача.....	29
Структура та обсяг дисертаційної роботи.....	30
РОЗДІЛ 1. ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	31
1.1. Становлення теоретичних основ.....	31
1.2. Основні етапи в історії досліджень.....	32
1.2.1. Класичний період (XVIII-XIX століття).....	32
1.2.2. Розвиток інженерних моделей (початок XX століття)....	32
1.2.3. Формування сучасної теорії (1950-1970-ті роки).....	33
1.2.4. Розвиток обчислювальних методів для складних задач (1970-2000-ні роки).....	33
1.2.5. Сучасний етап (2000-ні роки - дотепер).....	34
1.3. Основні типи моделей шаруватих конструкцій та їх застосування.....	34
1.3.1. Моделі балок.....	35
1.3.2. Моделі пластин.....	36
1.3.3. Моделі пружної основи.....	37
1.4. Ключові вчені та їх внесок у розвиток теорії.....	38
1.5. Сучасні тенденції та напрями досліджень конструкцій на пружній основі при рухомому навантаженні.....	40

1.5.1. Балки на пружній основі при рухомому навантаженні....	41
1.5.2. Пластини на пружній основі при рухомому навантаженні.....	43
1.5.3. Пружний шар на пружній основі (багатошарова основа) при рухомому навантаженні.....	46
1.6. Дослідження динамічних задач для багатошарових основ з початковими напруженнями.....	50
1.7. Результати та обґрунтування актуальності дослідження.....	54
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ І РІВНЯННЯ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ. ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПРИ ОДНОРОДНІХ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕННЯХ.....	58
2.1 Принципи побудови лінеаризованої теорії пружності.....	58
2.2 Основні співвідношення і рівняння тривимірної лінеаризованої теорії пружності.....	59
2.2.1. Стисливі тіла.....	60
2.2.2. Нестисливі тіла.....	62
2.3 Представлення загальних розв'язків просторових задач при однорідних початкових деформаціях.....	63
2.3.1. Стисливі тіла.....	63
2.3.2. Нестисливі тіла.....	64
2.4. Результати та висновки.....	65
РОЗДІЛ 3. ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО НАВАНТАЖЕННЯ.....	66
3.1. Постановка тривимірних динамічних задач для шаруватої основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.....	66
3.1.1. Рівняння руху та основні співвідношення у випадку загального початкового напруженого стану.....	68

3.1.2. Рівняння руху та основні співвідношення у випадку симетричного початкового напруженого стану.....	87
3.1.3. Просторові граничні умови.....	91
3.2. Постановка двовимірних динамічних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого поверхневого навантаження.....	91
3.2.1. Рівняння руху та основні співвідношення для плоских задач.....	93
3.2.2. Граничні умови для двовимірних задач.....	95
3.3. Про фундаментальні розв'язки для точкового навантаження...	96
3.4. Результати та висновки.....	97
РОЗДІЛ 4. РЕГУЛЯЦІЙНО-СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД ЗІ СТРУКТУРНОЮ РЕГУЛЯРИЗАЦІЄЮ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ ПІД ДІЄЮ РУХОМИХ НАВАНТАЖЕНЬ .	98
4.1. Теоретичні засади запропонованого регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією підходу.....	101
4.2. Структурна регуляризація.....	103
4.3. Регуляційні коефіцієнти та їх роль.....	103
4.4. Алгоритмічна структура методу.....	104
4.5. Фізична інтерпретація регуляційно-спектрального методу.....	104
4.6. Переваги та відмінності запропонованого методу.....	105
4.7. Місце запропонованого регуляційно-спектрального методу серед існуючих підходів.....	106
4.8. Область застосування регуляційно-спектрального методу.....	109
4.9. Результати та висновки.....	110
РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ПРО УСТАЛЕНИЙ РУХ ШАРУВАТОГО ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ РЕГУЛЯЦІЙНО-СПЕКТРАЛЬНИМ МЕТОДОМ	111

5.1. Просторові задачі для шаруватого півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.....	111
5.1.1. Розв'язок задач у випадку загального початкового напруженого стану.....	111
5.1.1.1. Шарувата плита на пружному півпросторі.....	117
5.1.1.2. Шарувата плита на жорсткій основі.....	119
5.1.2. Розв'язок задач у випадку симетричного початкового напруженого стану.....	120
5.1.2.1. Шарувата плита на пружному півпросторі.....	122
5.1.2.2. Шарувата плита на жорсткій основі.....	124
5.2. Фундаментальний розв'язок плоских задач в просторі зображень Фур'є.....	126
5.2.1. Шарувата смуга на пружному півпросторі.....	128
5.2.2. Шарувата смуга на жорсткій основі.....	129
5.3. Результати та висновки.....	131
РОЗДІЛ 6. ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ПРО РУХОМІ НАВАНТАЖЕННЯ...	132
6.1. Дослідження характеристичних рівнянь для просторових динамічних задач.....	132
6.1.1 Випадок загального початкового напруженого стану	132
6.1.1.1. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для стисливих тіл. Загальний напружений початковий стан.....	136
6.1.1.2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для нестисливих тіл. Загальний напружений початковий стан.....	139
6.1.2. Випадок симетричного початкового напруженого стану.	144
6.1.2.1. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для стисливих тіл. Симетричний напружений початковий стан.....	146

6.1.2.2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для нестисливих тіл. Симетричний напружений початковий стан.....	150
6.2. Дослідження характеристичних рівнянь для двовимірних динамічних задач.....	152
6.2.1. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для стисливих тіл. Двовимірний випадок.....	154
6.2.2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для нестисливих тіл. Двовимірний випадок.....	158
6.3. Результати та висновки.....	163
РОЗДІЛ 7. НАБЛИЖЕНІ ДВОВИМІРНІ МОДЕЛІ ДВОШАРОВОГО ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО НАВАНТАЖЕННЯ.....	165
7.1. Загальна постановка задач для двошарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження.....	165
7.1.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.....	166
7.1.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.....	167
7.2. Застосування інтегрального методу Фур'є до наближених моделей двошарового пружного середовища з початковими напруженнями.....	169
7.2.1. Постановка задач для шаруватого півпростору під дією рухомого навантаження в рамках загальних розв'язків рівнянь руху.....	169
7.2.2. Розв'язок задач в області зображень Фур'є.....	173
7.2.2.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.....	174

7.2.2.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.....	180
7.3. Комплексні потенціали в динамічних задачах для шаруватих основ з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження.....	187
7.3.1. Комплексні представлення для стисливих і нестисливих тіл.....	187
7.3.2. Постановка задач для двошарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження в комплексних потенціалах.....	190
7.3.2.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.....	190
7.3.2.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.....	192
7.3.3. Розв'язок задач в комплексних потенціалах.....	196
7.3.3.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.....	197
7.3.3.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.....	200
7.4. Результати та висновки.....	205
РОЗДІЛ 8. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ.....	206
8.1. Значення складових тензорів пружності для стисливих та нестисливих тіл з початковими напруженнями для конкретних пружних потенціалів.....	207
8.2. Наближені двовимірні моделі двошарового пружного півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.....	212

8.2.1. Вплив початкових напружень на характеристики НДС в нестисливому півпросторі.....	213
8.2.2. Вплив початкових напружень на характеристики НДС при різних швидкостях навантаження і умовах контакту захисного шару і півпростору. Стисливий матеріал.....	222
8.2.3. Аналіз характерних динамічних ефектів.....	227
8.2.4. Зауваження щодо меж застосування розглянутих моделей.....	230
8.3. Шаруватий півпростір з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження (2D модель).....	231
8.3.1. Смуга на жорсткій основі.....	232
8.3.2. Смуга на пружній основі.....	234
8.3.3. Двошарове покриття на жорсткій основі.....	236
8.3.4. Двошарове покриття на пружній основі.....	238
8.4. Шаруватий півпростір з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження (3D модель).....	240
8.4.1. Шар на жорсткій основі.....	241
8.4.2. Шар на пружній основі.....	243
8.5. Порівняльний аналіз розв'язків для різних моделей шаруватого півпростору.....	245
8.5.1. Порівняння розв'язків для наближених моделей шаруватого півпростору.....	246
8.5.2. Порівняння розв'язків для плоских задач.....	249
8.5.3. Порівняння точних розв'язків для 2D і 3D моделей.....	252
8.5.4. Оцінка достовірності та інженерної застосовності наближених моделей двошарової основи.....	255
8.5.5. Моделі багатошарового півпростору та межі їх застосування у динамічних задачах (огляд літератури та інженерні критерії).....	256
8.6. Результати та висновки.....	259

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	260
1. Найважливіші нові положення дослідження.....	261
2. Розробка теорії та методів для багатошарових основ.....	261
3. Чисельні дослідження та порівняльний аналіз.....	262
4. Емерджентні ефекти, характерні для досліджуваних систем.....	262
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	265
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА.....	298
ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ.....	324

ВСТУП

Шаруваті тіла, або багатошарові матеріали, являють собою структури, що складаються з кількох шарів різних матеріалів, поєднаних з метою досягнення заданих механічних, термічних, акустичних або інших експлуатаційних властивостей.

Багатошарові структури широко поширені в природі, техніці та сучасному матеріалознавстві. Їх класифікація залежить від сфери застосування, властивостей окремих шарів і функцій, які вони виконують. До таких структур належать природні багатошарові утворення (осадові породи, крижані керни, біомінеральні структури), інженерні конструкції (композитні ламінати, сендвіч-панелі, багатошарові метали й покриття, оптичні системи), електронні та енергетичні системи (багатошарові друковані плати, сонячні елементи, акумулятори), функціональні матеріали (МАХ-фази, графенові гетероструктури, метаматеріали), а також геологічні та тектонічні структури.

У сучасному машинобудуванні, авіації, суднобудуванні, транспортній і будівельній галузях шаруваті конструкції набули широкого застосування завдяки поєднанню високої міцності, малої маси та здатності ефективно сприймати значні експлуатаційні навантаження.

Актуальність дослідження динамічних задач для шаруватих основ зумовлена низкою чинників, серед яких особливе значення мають:

- **розвиток транспортної інфраструктури**, що супроводжується зростанням швидкостей та інтенсивності руху і вимагає точного аналізу напружено-деформованого стану дорожніх покриттів і рейкових систем;
- **широке застосування композиційних матеріалів**, які характеризуються складною механічною поведінкою та потребують спеціалізованих методів аналізу;
- **геофізичні дослідження**, пов'язані з вивченням поширення сейсмічних хвиль у шаруватих ґрунтах при прогнозуванні землетрусів і проектуванні сейсмостійких споруд;

- **підвищення енергетичної ефективності конструкцій**, що передбачає оптимізацію їхньої роботи під дією динамічних навантажень.

Таким чином, актуальність моделювання шаруватих конструкцій охоплює як практичні завдання інженерного аналізу, так і фундаментальні дослідження в галузі механіки та матеріалознавства. Це зумовлює необхідність комплексного вивчення деформаційних властивостей багат шарових систем за різних зовнішніх фізико-механічних впливів.

Розрахунок шаруватих конструкцій є складним багатофакторним процесом, що потребує врахування геометрії шарів, контрасту механічних властивостей матеріалів, умов контакту між шарами та характеру зовнішніх навантажень.

Серед задач динамічної поведінки багат шарових матеріалів особливе місце займають задачі, пов'язані з **рухомими навантаженнями**. Такі навантаження характерні для широкого кола інженерних об'єктів, зокрема автомобільних доріг, залізничних колій, злітно-посадкових смуг та інших транспортних споруд.

Динаміка шаруватих конструкцій під дією рухомих навантажень є важливою галуззю інженерної механіки, що досліджує напружено-деформований стан і хвильові процеси в багат шарових системах при дії транспортних, вітрових, сейсмічних та інших динамічних збурень.

Нині для аналізу напружено-деформованого стану багат шарових конструкцій із великою кількістю шарів переважно застосовуються чисельні методи, які часто потребують значних обчислювальних ресурсів і часу. Зазначені обставини обумовлюють необхідність подальшого розвитку ефективних методів моделювання та аналізу шаруватих систем.

Врахування наведених факторів визначає актуальність вибраної теми дисертаційного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні таких науково-дослідних робіт:

- НДР 1.3.1.373 «Дослідження пружного деформування неоднорідних тіл при динамічному навантаженні» (№ державної реєстрації 0112U000240, I.2012 – IV.2015);
- НДР 1.3.1.397 «Дослідження динамічних процесів в шаруватих матеріалах та неоднорідних елементах конструкцій» (№ державної реєстрації 0115U005699, I.2016 – IV.2019);
- НДР 1.3.1.409 «Сучасні проблеми механіки матеріалів і елементів конструкцій з внутрішньою структурою та дефектами» (№ державної реєстрації 0117U000699, I.2017 – IV.2021);
- НДР 1.3.1.422 «Плоскі задачі для попередньо напружених шаруватих тіл під дією статичних і динамічних навантажень» (КПКВК 6541230) (№ державної реєстрації 0120U102798, I.2020 – IV.2021);
- НДР 1.3.1.426 «Розробка методів розв'язання задач статичної і динамічної механіки для неоднорідних матеріалів і тонкостінних елементів конструкцій» (№ державної реєстрації 0119U103761, I.2020 – IV.2024);
- НДР 1.3.1.451 «Механіка попередньо напружених тіл і нелінійно пружних оболонкових елементів конструкцій некругового поперечного перерізу» (№ державної реєстрації 0122U202076, I.2023 – IV.2027) (етап автора дисертації в 2025 році).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розробка загального аналітично-чисельного підходу для розв'язання динамічних просторових і двовимірних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження та проведення на його основі дослідження хвильових процесів в пружних шаруватих тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого середовища, початкових напружень, різних швидкостей руху навантаження, різних типів граничних умов та механічних характеристик елементів шаруватого середовища.

Досягнення цієї мети передбачає:

- розробку загального аналітично-чисельного підходу для розв'язання динамічних просторових і двовимірних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження;
- розробка методів розв'язку просторових і двовимірних задач на основі інтегральних перетворень Фур'є;
- розв'язок конкретних тривимірних та двовимірних задач для різних моделей шаруватого середовища;
- розробка алгоритмів та програмного забезпечення для дослідження динамічних процесів в шаруватих конструкціях з початковими напруженнями при дії динамічних навантажень;
- дослідження впливу початкових напружень на напружено-деформований стан елементів шаруватої основи;
- аналіз напружено-деформованого стану елементів шаруватих основ при дії рухомого поверхневого навантаження за різних способів з'єднання шарів;
- виявлення характерних закономірностей в розподілі полів швидкостей переміщень і напружень, викликаних прикладеним поверхневим навантаженням, та встановлення нових ефектів, пов'язаних з їх геометричними та механічними характеристиками;
- встановлення оцінок границь застосування прикладних теорій на основі точних просторових розв'язків.

Об'єктом дослідження є динамічні процеси в багатошарових пружних основах з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження.

Предметом досліджень є вплив початкових напружень, швидкості руху навантаження, умов контакту між елементами шаруватої основи, геометричних та механічних параметрів елементів шаруватої основи на характеристики їх напружено-деформованого стану.

Методи дослідження. Всі дослідження були проведені в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями.

При розв'язуванні просторових задач використовувався регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією.

Для плоских задач використовувалися регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, метод інтегральних перетворень Фур'є і метод комплексних потенціалів.

Для розв'язання систем неоднорідних алгебраїчних рівнянь і процедур оберненого інтегрування використовувалися класичні чисельні методи.

Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:

У дисертаційній роботі **вперше** сформульовано та розв'язано просторові та двовимірні задачі про усталений рух багатошарових пружних основ із початковими напруженнями, складених зі стисливих і нестисливих матеріалів під дією рухомого поверхневого навантаження.

Уперше отримано такі результати:

1. Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід до дослідження хвильової динаміки багатошарових пружних основ із початковими напруженнями.

2. Розроблено і вперше застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, який дозволяє розв'язувати динамічні задачі для багатошарових основ без необхідності використання традиційних прийомів регуляризації та контурних деформацій у комплексній площині.

3. Введено поняття регуляційних коефіцієнтів, що забезпечують фізично коректне узгодження хвильових полів між шарами та стабілізують числову реалізацію при високих частотах і контрастних властивостях матеріалів.

4. Побудовано узагальнену спектрально-матричну схему, у якій обчислення спектральних амплітуд виконується на основі збіжного спектрального інтегралу, що забезпечує числову стійкість і фізичну коректність.

5. Отримано нові аналітичні співвідношення для опису хвильових полів у шарах і на їхніх межах, які узагальнюють класичні розв'язки для півпростору та багатошарових систем, у тому числі з початковими напруженнями.

6. Обґрунтовано області застосування нового методу та показано його ефективність для моделювання рухомих навантажень, хвильової взаємодії у технічних основах, композитах та геоматеріалах.

7. Вперше розв'язано еталонну задачу про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження; така постановка не має відомих аналогів у науковій літературі й може використовуватися як базова для верифікації чисельних методів.

8. Встановлено низку нових фізико-механічних ефектів, зумовлених дією початкових напружень, швидкістю рухомого навантаження та структурою багатошарової основи.

9. На основі точних просторових розв'язків визначено межі застосування деяких наближених моделей шаруватих середовищ, що має значення для інженерного моделювання.

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями.

Узгодженість рішень і механічних ефектів для різних по складності постановок задач при використанні єдиного методу розв'язку служить незалежним підтвердженням коректності, відтворюваності, логічної несуперечливості, фізичної обґрунтованості і достовірності отриманих результатів. Це також свідчить про стійкість методу і його адекватність при моделюванні досліджуваних процесів.

Додаткову достовірність результатів підтверджує правильний фізичний характер розв'язків у граничних випадках та їх збіжність з існуючими класичними моделями при відсутності початкових напружень або зниженні складності задачі.

Усі основні результати роботи, отримані за допомогою різних методів, узгоджуються між собою і в окремих випадках – з результатами вже відомими.

Чисельні розв'язки отримано з використанням апробованих чисельних методів з перевіркою на аналітичних розв'язках канонічних тестових задач.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованого підходу і методів для побудови фундаментальних розв'язків для різних класів статичних та динамічних задач для шаруватих конструкцій.

Запропонований регуляційно-спектральний метод забезпечує точне й чисельно стійке моделювання хвильових процесів у багатошарових основах при дії рухомих та гармонічних навантажень. Завдяки структурній регуляризації метод усуває необхідність у складному контурному інтегруванні та дозволяє ефективно аналізувати системи з великою контрастністю матеріалів.

Аналітичний розв'язок динамічних задач для багатошарових 2D і 3D основ під впливом рухомого навантаження відкриває широкі можливості для інженерних застосувань. Ключові напрямки використання: транспортна інфраструктура, будівництво і геотехніка, промислові об'єкти, сейсмічний захист і геофізика, оборонна сфера та інші.

Отримані в цій дисертаційній роботі результати можуть бути використані під час вивчення впливу початкових напружень на динамічні процеси в шаруватих конструкціях, що піддаються в процесі експлуатації дії рухомих навантажень.

Порівняльний аналіз різних наближених і точних моделей шаруватих конструкцій може бути використаний для підвищення ефективності розв'язання конкретних інженерних задач.

Уперше вирішено еталонну задачу про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження, що не має відомих аналогів у науковій літературі. Це дозволяє розглядати отримані залежності, як базові, та використовувати їх для верифікації чисельних методів.

Нові математичні моделі, аналітичні та чисельні методи розв'язання поставлених задач можуть бути включені до лекційних курсів із механіки деформівного твердого тіла.

Отримані наукові результати є фундаментальними результатами в механіці деформівного твердого тіла, що створюють основу для побудови узагальненої теорії поширення хвиль в шаруватих пружних структурах, і використані в прикладних наукових дослідженнях та науково-дослідних і дослідно-конструкторських розробках.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових вітчизняних та міжнародних конференціях, зокрема: Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, Дніпро, 2006–2014, 2016, 2018, 2020–2025); XV–XVII Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (Київ, 2011, 2013, 2015); Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика» (Кременчук, 2011, 2013, 2015–2017); XIII Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (Миколаїв, 2011); Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Миколаїв, 2011, 2012); XIV, XV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012, 2014); Міжнародна конференція «Моделювання, управління і стійкість (MCS-2012)» (Севастополь, 2012); Міжнародна науково-технічна конференція «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки (ММАР-2013)» (Харків, 2013); Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», (Київ, 2013, 2015); I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2014); Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика» (Суми, 2014, 2015); IX, XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів,

2014, 2024); XIII, XV–XIX Міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів» (Кременчук, 2014, 2016–2020); II, III, VI, VIII, X міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса–Київ, 2015, 2016, 2019, 2021, 2024); Міжнародна науково-технічна конференція «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» (Тернопіль, 2015); IV Міжнародний інтернет-симпозіум «Сучасні проблеми інженерної механіки» (Луцьк, 2015); XV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» (Миколаїв, 2015); II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку» (Бердянськ, 2018); VIII, IX Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2018, 2020); III, IV всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів»: (Миколаїв, 2018, 2019); Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Прикладна математика та комп'ютерні науки» (Маріуполь, 2019, 2021); Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою» (Дніпро, 2022–2024); Міжнародна наукова конференція молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті» (Київ, 2023); XVI Міжнародна науково-технічна конференція «АВІА-2023» (Київ, 2023); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 2023); VII International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics» (Kyiv, 2023); III Міжнародна науково-технічна конференція «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту» (Вінниця, 2023); Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки», (Київ, 2023); XXVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2023); VIII Міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та

оптимізація складних систем (КМОСС-2023)» (Дніпро, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (Optima-2024)» (Кам'янець-Подільський, 2024); XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research» (Berlin, 2024); XXVI International Scientific and Practical Conference «World Problems and Ways of Solving Modern Problems» (Oslo, 2024); Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи» (Київ, 2024); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2024).

У повному обсязі дисертація доповідалась й обговорювалась на науковому семінарі відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ (керівник – академік НАН України, д. ф.-м. н. Богданов В.Л., 2024, 2025 р.); на науковому семінарі за напрямком «Механіка композитних та неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., професор Рущицький Я.Я., 2025 р.); на загальноінститутських семінарах з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор Назаренко В.М., 2025 р.).

Результати кандидатської дисертації автора виконують допоміжну функцію як елемент загальної наукової еволюції, проте не включаються до блоку нових наукових положень докторської дисертації. Докторська робота містить принципово нові підходи та результати, що не були предметом попереднього дослідження.

Публікації та особистий внесок здобувача. За темою дисертації також опубліковано 29 наукових робіт:

дві колективні монографії — у співавторстві з О.М. Гузем і С.Ю. Бабичем в межах чітко окресленої наукової проблематики (статичні та динамічні задачі для пружної основи з початковими напруженнями); одна [3] — у складі широкого колективу Інституту механіки (видавництво Springer), де авторові належить окремий розділ (співавтори С.Ю. Бабич та В.Ф. Корнієнко), що безпосередньо відповідає темі дослідження;

26 наукових статей: 8 публікацій у міжнародному науковому журналі «Прикладна механіка - International Applied Mechanics» [4–6] (квартиль Q2) і [17, 19, 26, 28, 29] (квартиль Q3), 6 публікацій [7, 9–11, 14, 18] в журналі «Доповіді НАНУ» (категорія Б), решта публікацій [8, 12, 13, 15, 16, 20–25, 27] – в фахових виданнях України категорії Б.

Статті [7–16, 24] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, що опубліковані в співавторстві, здобувач брав участь у постановці задач, реалізації та розробці підходу до їх розв'язання. Здобувачеві повністю належить ідея і розробка регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією для розв'язання просторових і двовимірних задач для багат шарової основи з початковими напруженнями; програмна реалізація розробленої методики; отримання числових результатів та їх ілюстрація, інтерпретація отриманих розв'язків.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел із 251 найменування та двох додатків. Загальний обсяг дисертації складає 326 сторінок, разом із 62 рисунками та 5 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність академіку НАН України, доктору технічних наук, професору Гузю Олександровичу та доктору технічних наук, професору Бабичу Степану Юрійовичу за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи.

Особливу подяку висловлюю своїй дружині Морозовій Тамарі Георгіївні, чие терпіння, турбота та постійна підтримка зробили можливим завершення цієї дисертації.

РОЗДІЛ 1. ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Дослідження динамічних процесів у шаруватих середовищах, що ґрунтуються на фундаментальних відкриттях у галузі механіки та математики, мають багату історію.

1.1. Становлення теоретичних основ

Важливу роль у формуванні математичного та теоретичного базису для вивчення динамічних процесів у пружних середовищах відіграли праці видатних учених:

Ісаак Ньютон (1642–1727) заклав основи механіки, що стали фундаментом для розуміння поширення хвиль у пружних середовищах. Його закони руху та розвиток математичного апарату мали вирішальне значення для опису хвильової поведінки.

Роберт Гук (1635–1703) відкрив закон пружності, який описує лінійну залежність між силою, прикладеною до пружини, і зміщенням, яке вона викликає. Його робота з теорії пружності стала фундаментальною для вивчення хвиль у пружних середовищах.

Роботи *Жана-Батиста Фур'є (1768–1830)* з аналітичної теорії теплоти ввели поняття ряду Фур'є, яке стало важливим для розв'язання хвильових рівнянь і розуміння поширення хвиль у різних середовищах.

Огюстен-Луї Коші (1789–1857) зробив значний внесок у теорію пружності та дослідження поширення хвиль. Його роботи з диференціальних рівнянь у частинних похідних та комплексного аналізу надали потужний апарат для розв'язання хвильових задач.

Роботи *Сімеона-Дені Пуассона (1781–1840)* з теорії пружності та поширення хвиль допомогли поглибити розуміння того, як поведуться хвилі в пружних середовищах. Він зробив внесок у розвиток математичних методів розв'язання хвильових рівнянь.

Роботи *Клода-Луї Нав'є (1785–1836)* з теорії пружності та механіки рідини заклали основу для розуміння поширення хвиль у пружних середовищах. Його рівняння досі використовуються для опису поведінки пружних хвиль.

Наукові досягнення цих учених продовжують впливати на сучасні дослідження в таких галузях, як акустика, геофізика та матеріалознавство.

1.2. Основні етапи в історії досліджень

За останні два з половиною століття в історії досліджень динамічних процесів можна виділити кілька ключових етапів:

1.2.1. Класичний період (XVIII-XIX століття)

Роботи Юнга, Коші, Нав'є, Сен-Венана, Ламе та Клапейрона стали фундаментом теорії пружності та подальших досліджень шаруватих середовищ.

Ейлер та Бернуллі заклали основи теорії вигину балок (балки Бернуллі-Ейлера), а Кірхгоф розробив теорію тонких пластин, що згодом дозволило перейти до аналізу багатошарових систем.

Еміль Вінклер запропонував першу модель пружної основи у вигляді системи незалежних пружин, яка досі використовується для розрахунків залізничних колій та фундаментів.

1.2.2. Розвиток інженерних моделей (початок XX століття)

У 1910–1920-х роках з'явилися перші дослідження впливу рухомих навантажень на пружні елементи.

Із розвитком авіаційної та будівельної техніки виникла потреба врахування неоднорідності матеріалів. У цей період сформувалися перші моделі багатошарових пластин та оболонок.

Розвиток залізничного та автомобільного транспорту у першій половині XX століття зумовив необхідність аналізу впливу рухомих навантажень на дорожні покриття та рейкові колії.

Класичні роботи Тимошенка (1920–1930-ті роки) внесли значний внесок у розуміння динаміки балок на пружній основі під дією рухомих навантажень, що стало основою для подальших досліджень багатошарових конструкцій.

У 1940–1950-х роках Тимошенко та Гудьєр розвинули теорію вигину багатошарових балок та пластин.

1.2.3. Формування сучасної теорії (1950–1970-ті роки)

Розвиток залізничного та дорожнього транспорту стимулював дослідження з розрахунку впливу рухомих навантажень на основи.

С. Г. Лехницький розробив загальну теорію пружності анізотропних тіл, що дозволило описувати складні механічні явища в шаруватих конструкціях.

У цей же період з'явилися нові моделі пружних основ (Пастернака, Керра, Власова та інших), які активно застосовуються для розрахунків шаруватих структур.

У 1950–1960-х роках роботи Рейсснера, Міндліна та інших дослідників дозволили уточнити моделі багатошарових пластин та оболонок з урахуванням зсувних деформацій та міжшарової взаємодії.

У 1950–1960-х роках з'явилися перші точні розв'язки задач про вплив рухомого навантаження на балки, що лежать на пружній основі.

У 1970–1980-х роках почали активно використовувати моделі пружної та в'язкопружної основи для розрахунку динаміки доріг та аеродромів.

Були розроблені рішення для балок та пластин на багатошарових основах.

Експериментально досліджувалися вібрації та їх вплив на фундаменти.

1.2.4. Розвиток обчислювальних методів для складних задач (1970–2000-ні роки)

Для цього періоду характерний активний розвиток теорії шаруватих середовищ та перехід до тривимірних задач, урахуванням анізотропії та в'язкопружності матеріалів.

Розвиток обчислювальних методів дозволив моделювати складні динамічні задачі. Метод скінченних елементів, метод граничних елементів та метод

скінченних різниць почали активно застосовувати для аналізу шаруватих конструкцій.

Динамічний аналіз шаруватих конструкцій перейшов від аналітичних моделей до чисельного моделювання.

У 1980–1990-х роках були проведені польові експерименти з динамічної поведінки ґрунту для перевірки обчислювальних моделей.

Досягнення в геотехнічному приладобудуванні дозволили проводити вимірювання вібрації ґрунту та поширення хвиль у польових умовах.

1.2.5. Сучасний етап (2000-ні роки – дотепер)

Для сучасного етапу характерна інтеграція різних фізичних процесів (механічних, теплових, електромагнітних, хімічних тощо) в єдиній обчислювальній моделі (мультифізичне моделювання). Вона є ключовим інструментом для розв'язання складних інженерних та наукових задач, де традиційні підходи, що розглядають процеси ізольовано, виявляються неефективними.

У експериментальних методах використовуються лазерна віброметрія, цифрові двійники та IoT-датчики для моніторингу. Отримали розвиток чисельні методи (метод скінченних елементів, метод граничних елементів) для аналізу складних задач. Досліджуються нелінійні ефекти, такі як пластичність, повзучість та руйнування. Сучасне програмне забезпечення (ABAQUS, COMSOL, ANSYS, OpenSees) широко використовується для моделювання багат шарових взаємодій ґрунту та конструкцій.

1.3. Основні типи моделей шаруватих конструкцій та їх застосування

Історія механіки шаруватих середовищ відображає діалог між інженерною практикою та теоретичною наукою.

Кожна модель – балка, пластина чи багат шаровий напівпростір – формувалася у відповідь на виклики свого часу.

Конструкції, такі як балки та пластини на пружній основі, вже понад століття є наріжним каменем інженерної практики та теоретичної механіки. Ці

моделі мають як самостійне значення для вирішення інженерних задач, так і слугують наближеними моделями багат шарових середовищ, виступаючи полігоном для перевірки гіпотез, методів та алгоритмів розрахунку, які згодом масштабуються на складніші системи.

Якщо балка наближено описує вузькі конструкції (наприклад, рейки), то пластина краще підходить для моделювання шаруватих основ доріг, злітних смуг, фундаментів. Аналітичні рішення для пластин є альтернативою до рішень, отриманих чисельними методами, особливо коли для розрахунків відповідальних об'єктів потрібне підтвердження достовірності отриманих результатів.

Шарувата структура ґрунту вимагає складніших моделей, що враховують неоднорідність механічних властивостей за глибиною. Шаруватий півпростір враховує неоднорідність ґрунту за глибиною, наближаючи модель до реальних умов. Балки та пластини в таких системах слугують інструментом аналізу взаємодії конструкцій зі складними основами.

Фізична модель шаруватого півпростору визначається фізичними моделями його елементів. Інтеграція цих моделей дозволяє розв'язувати задачі проектування з урахуванням як локальних деформацій балки чи пластини, так і глобальних властивостей основи.

Різноманітність типів багат шарових конструкцій та умов їх експлуатації призвела до істотного різноманіття математичних моделей та методів їх дослідження.

1.3.1. Моделі балок

В задачах, пов'язаних з балкою на пружній основі, вибір моделі залежить від властивостей балки, типу основи та характеру навантаження. Нижче представлені основні моделі, що використовуються в інженерних та наукових розрахунках:

Балка Бернуллі-Ейлера (класична модель) не враховує деформації зсуву та підходить для довгих тонких балок. Застосовується для розрахунку прогину

мостових балок під статичним навантаженням і використовується в більшості аналітичних розв'язків.

Балка Тимошенка враховує зсувні деформації і є точнішою для коротких балок та при високочастотних навантаженнях. Застосовується для аналізу вібрацій важких балок.

Ортотропні та композитні балки враховують анізотропію матеріалу (різні жорсткості по осях). Застосовуються для розрахунку балок з вуглепластика в авіаційних конструкціях.

Ключовими параметрами при виборі моделі балки є співвідношення жорсткостей балки та основи, довжина балки (короткі балки вимагають урахування зсуву), тип навантаження (статичне, динамічне, ударне), характер основи (однорідна, шарувата, нелінійна).

1.3.2. Моделі пластин

Моделі пластин можна розділити за такими категоріями:

Класична теорія Кірхгофа-Лява (тонкі пластини) ґрунтується на гіпотезі прямих нормалей (деформації зсуву нехтуються як малі). Застосовується для малих прогинів тонких металевих або композитних пластин у будівництві та авіації.

Теорія Рейсснера-Міндіна (товсті пластини) враховує зсувні деформації (гіпотеза Кірхгофа не виконується). Застосовується для залізобетонних плит та багат шарових композитів.

Ортотропні пластини враховують анізотропію матеріалу, циліндрична жорсткість замінюється тензором жорсткості. Застосовуються для дерев'яних панелей та композитних матеріалів з армуванням.

Нелінійні моделі (великі прогини) ґрунтуються на теорії фон Кармана, що враховує геометричну нелінійність. Застосовуються для розрахунку мембран та гнучких покриттів.

Ключовими параметрами при виборі моделі пластини є відношення товщини до основного розміру (визначає вибір між теоріями Кірхгофа та Рейсснера-Міндліна), характер навантаження (статичне, динамічне, ударне), анізотропія матеріалу (ізотропні або ортотропні пластини), властивості основи (лінійність, шаруватість, неоднорідність).

1.3.3. Моделі пружної основи

Існує кілька основних моделей, що використовуються для аналізу поведінки шаруватих середовищ під дією рухомих навантажень:

Модель Вінклера (однопараметрична модель) представляє основу як набір незалежних пружин. Тиск у будь-якій точці основи пропорційний осіданню, а коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт постелі) визначає властивості основи. Модель є простою та зручною для аналітичних розв'язків, підходить для швидких інженерних розрахунків, але не враховує зсувних напружень у основі та завищує локальні деформації.

Модель Пастернака (двопараметрична модель) враховує зсувну жорсткість основи та взаємодію сусідніх зон. Модель точніше описує розподіл навантаження, більш реалістична для шаруватих ґрунтів, зменшує помилки моделі Вінклера, але потребує визначення двох параметрів (коефіцієнта постелі та модуля зсуву основи). Застосовується для дорожніх покриттів з щебеним шаром та плит на пружній основі з арматурою.

Модель пружного півпростору розглядає основу як однорідний ізотропний пружний півпростір з використанням розв'язків теорії пружності. Забезпечує високу точність визначення напружено-деформованого стану, але аналітичні розрахунки є складними та можливі лише для простих випадків. Для практичних задач необхідні чисельні методи.

Модель шаруватої пружної основи представляє основу як набір шарів із різними механічними властивостями. Для кожного шару записуються рівняння теорії пружності. Методи розв'язку – аналітичні та чисельні. Модель забезпечує

високу точність, можливість урахування реальної структури основи та широкий спектр застосувань, але має недоліки у складності аналітичних рішень та збільшених обчислювальних витратах при чисельному моделюванні складних систем.

Нелінійні моделі застосовуються для ґрунтів з граничною несучою здатністю (глини, піски під великим навантаженням). Типи нелінійностей включають гіперболічну (Дункан-Чанг) та кубічну нелінійності.

В'язкопружні моделі застосовуються для основ з повзучістю (мерзлі ґрунти, полімерні матеріали).

Вибір моделі підстилаючої основи є компромісом між точністю, складністю та доступними даними. Моделі Вінклера та Пастернака дотепер залишаються базовими для інженерних розрахунків. Для більшості інженерних задач модель Пастернака є оптимальною, тоді як для наукових досліджень часто потрібне багат шарове або нелінійне моделювання. Слід зазначити, що на сьогодні не існує стандартизованих моделей для підстилаючої основи.

1.4. Ключові вчені та їх внесок у розвиток теорії

Вивчення динаміки шаруватих конструкцій та середовищ об'єднує зусилля вчених з різних епох та дисциплін. За десятиліття сформувалася плеяда вчених, чий роботи стали фундаментом для сучасних досліджень. Їхні ідеї, доповнюючи одна одну, дозволили перейти від спрощених схем до комплексного аналізу реальних систем.

Леонард Ейлер та Даніель Бернуллі розробили базову теорію вигину балок [152].

Клод Луї Нав'є вивів перші диференціальні рівняння для пластин [201].

Густав Кірхгоф сформулював теорію тонких пластин, запровадивши гіпотезу прямих нормалей. Його рівняння досі лежать в основі розрахунків плит [182].

Огастес Ляв розвинув теорію пластин та оболонок [191].

Еміль Вінклер запропонував першу модель пружної основи як системи незалежних пружин. Його підхід досі використовується для розрахунку залізничних колій та фундаментів [239].

Степан Тимошенко зробив значний внесок у розуміння динаміки балок та пластин на пружній основі під дією рухомих навантажень, що стало основою для подальших досліджень багатошарових конструкцій. Його праці з вигину балок та коливань пластин заклали основи механіки деформівних систем. Рівняння Тимошенка для балок, що враховує зсувні деформації, стало проривом в аналізі динаміки багатошарових конструкцій [229–231, 233].

Міклош Хетеньї розробив методи розрахунку балок, що враховують розподілену реакцію основи, об'єднав теорію балок з динамічними навантаженнями, заклавши основи аналізу вібрацій. Він є автором класичного підручника «Beams on Elastic Foundation» (1946), який досі використовується в інженерній практиці [169].

Валентин Власов розробив метод врахування неоднорідної основи, зв'язавши жорсткість пластини з реакцією ґрунту через інтегральні рівняння [20].

Реймонд Міндлін розширив теорію на товсті пластини, врахувавши зсувні деформації. Це дозволило моделювати динаміку злітних смуг та корпусів кораблів [198].

Норман Хаскелл розробив матричний метод для шаруватих середовищ, що став стандартом у сейсмології та геотехніці [167].

Петро Пастернак додав у модель пружної основи зсувну жорсткість, розв'язавши проблему «невидимих» поперечних взаємодій між точками основи (модель Пастернака) [82].

Джон Д. Ешелбі розробив теорію включень, що пояснила взаємодію шарів з неоднорідностями, що важливо для аналізу композитів з армувальними волокнами [150].

Юрій Работнов досліджував повзучість та в'язкопружність матеріалів, що допомогло моделювати довготривалу деформацію шаруватих конструкцій (наприклад, бетонних доріг під навантаженням) [213].

Рей Клаф був одним із творців методу скінченних елементів (МСЕ), який революціонізував розрахунок багат шарових систем, дозволивши враховувати складні граничні умови та анізотропію [142].

Ян Ахенбах розробив підходи для аналізу динамічної взаємодії шарів, включно з відбиттям та заломленням пружних хвиль [94].

Ердоган Ерінген запровадив концепцію мікрополярих середовищ, пояснивши поведінку композитів із жорсткими включеннями [149].

Зденек Бажант досліджував моделі руйнування бетону та композитів, критичні для аналізу втоми шаруватих конструкцій під циклічними навантаженнями [125].

Жакоб Фіш розробив адаптивні МСЕ-сітки для шаруватих структур [156].

Цей неповний список надає посилання на першоджерела, де були вперше викладені фундаментальні ідеї. Більшість цих робіт, особливо монографії ХХ століття, досі перевидаються та є стандартними посиланнями в науковій літературі.

Представлені вчені створили багаторівневий фундамент для динаміки шаруватих конструкцій, що включає фундаментальну теорію, вдосконалені моделі балок та пластин, моделювання основи та шаруватих середовищ, механіку композитів та руйнування, обчислювальні методи.

Роботи цих учених не лише є історично важливими, але й продовжують бути теоретичною та практичною основою для сучасних досліджень у аерокосмічній техніці, будівництві, машинобудуванні та нанотехнологіях.

1.5. Сучасні тенденції та напрями досліджень конструкцій на пружній основі при рухомому навантаженні

Сучасні моделі пружних основ дозволяють отримати якісне та кількісне уявлення про взаємодію конструкцій із ґрунтовим масивом, враховуючи вплив швидкості руху, інерційні ефекти та реологічні властивості ґрунту. У огляді розглядаються три основні підходи: балки на пружній основі, пластини на пружній основі та моделі пружного шару (багат шарові основи).

1.5.1. Балки на пружній основі при рухомому навантаженні

Задача динамічної поведінки балок на пружній основі під дією рухомих навантажень є класичною в теорії пружності та будівельній механіці. Вона має практичне застосування у транспортному будівництві (мости, залізничні колії, дорожні конструкції) та машинобудуванні.

Балочні моделі залишаються надзвичайно затребуваними у сучасній інженерній практиці та наукових дослідженнях. Вони забезпечують швидкі аналітичні оцінки впливу рухомого навантаження, що важливо на етапах попереднього проєктування.

Балочні схеми служать еталонними моделями для перевірки точності чисельних розрахунків (метод скінченних елементів, спектральні методи). Використання розширених моделей основи (Пастернака, в'язкопружної, фракційної) дозволяє врахувати реальну поведінку ґрунтів і баласту, що підвищує достовірність розрахунків.

Сучасні дослідження зосереджені на таких аспектах:

- *Розширення класичних моделей.* Традиційна модель Вінклера використовується, але сьогодні її широко доповнюють і модифікують [184]. Використовуються моделі Пастернака, Тимошенка та багат шарові основи для більш точного опису взаємодії балки з основою [195].

- *Дослідження резонансних явищ:* аналіз хвильових режимів, локальних резонансів та «cut-off» частот при критичних швидкостях руху навантаження [173].

- *Нелінійні та в'язкопружні моделі:* врахування матеріальної нелінійності балки, нелінійної поведінки основи, в'язкопружності та дробових похідних для опису складної дисипації [224].

- *Прикладні дослідження:* вивчення мультишарової структури основи та взаємодії між шарами, а також взаємодії навантаження і основи [195].

- *Сучасні чисельні методи:* використання спектральних методів, скінченно-елементного та гранично-елементного підходів, методів зведення

моделей (model order reduction) для економних і стабільних розв'язків складних задач [158].

Основні напрями досліджень включають:

- Розвиток моделей основи (від моделі Вінклера до інерційних та атенуючих основ, моделей кінетичної реакції ґрунту для адекватного опису процесу поширення хвиль у ґрунті і впливу на реакцію балки) [195].
- Моделювання повноцінних рухомих систем замість ідеалізованих сил. Це впливає на динамічну взаємодію рухомої системи та балки (динамічний контакт, біфуркації) [184].
- Нелінійні та дисипативні ефекти. Врахування пластичних деформацій баласту, нелінійної жорсткості, в'язкопружності, фракційних моделей демпфування для реалістичних часових відгуків і прогнозу втоми [224].
- Дослідження процесу поширення хвиль, локалізації хвиль, cut-off частот, критичних швидкостей, впливу періодичності (наприклад, система «рельс/шпали» розглядається як періодична структура) [173].
- Методи та алгоритми (спеціальні елементи PML для рухомих навантажень, спектральні методи, ефективні схемні алгоритми FEM, адаптивні сітки, редукція) [158].
- Мультифізичні й масштаборозширені підходи (функціонально-градуйовані матеріали, мікро-/наномеханічні застосування, масштабування від лабораторних зразків до реальних споруд) [141].
- Стохастичні методи та оцінку надійності. Нерівномірність основи, змінні властивості матеріалів і випадкові навантаження вимагають застосування методів для оцінки ймовірнісних ризиків і надійності.
- Експериментальні дослідження включають польові випробування балкових конструкцій, лабораторні стенди з рухомими візками. Для впровадження в проєктну практику нових основ і нелінійних моделей критичною є валідація моделей [184].

Відкриті питання:

- Єдина «універсальна» модель основи – як адекватно, але економно описати ґрунт/баласт в широкому діапазоні швидкостей і навантажень?
- Керування вібрацією і енергетичні демпфери – оптимальні пасивні/активні рішення для зниження амплітуд без значних конструктивних змін.
- Вплив кліматичних/сезонних змін на параметри основи – довготривала поведінка та посилення/ослаблення підвали.
- Швидкі чисельні алгоритми для реального часу – для моніторингу й оперативної діагностики (digital twins – цифрові двійники).
- Мультидисциплінарні підходи – поєднання геотехніки, механіки конструкцій, транспортного інженерства та машинного навчання для параметричної ідентифікації моделей.

Дослідження балок на пружній основі сьогодні зосереджене на переході від спрощених до багатопараметрових моделей, а також на інтеграції чисельних методів і експериментальної валідації для практичного застосування [127, 159, 175].

1.5.2. Пластини на пружній основі при рухомому навантаженні

Пластинчасті моделі розвинули балочний підхід і стали важливим інструментом у проєктуванні та дослідженні дорожніх і аеродромних покриттів.

Вони дозволяють аналізувати двовимірний розподіл напружень і переміщень, що критично для покриттів під дією рухомих транспортних навантажень.

Модель «пластина на пружній основі» застосовується для оцінки довговічності плитних покриттів доріг і ЗПС, розрахунку армованих плитних систем, визначення областей можливого руйнування.

Пластини на пружній основі добре поєднуються з шаруватими моделями, описуючи багатошарові дорожні конструкції.

Сучасні дослідження зосереджені на врахуванні швидкісних ефектів, нелінійної роботи матеріалів, випадкових навантажень.

Пластини є ефективним інструментом для випробування та верифікації нових матеріалів (наприклад, композитних плитних покриттів).

Пластини на пружній основі під дією рухомих навантажень застосовуються для опису дорожніх та аеродромних покриттів, залізничних плит (slab-track), а також інженерних плит і фундаментів. На відміну від балок, пластини забезпечують двовимірний розподіл навантажень, що ускладнює аналіз, але робить модель ближчою до реальних конструкцій.

Класична мета – розрахувати прогини, напруження, хвильові режими, умови резонансу та поширення енергії в ґрунті/підшві. Базові аналітичні/напіваналітичні підходи часто доповнюються тонкими чисельними моделями і експериментальною валідацією [172].

Головні сучасні тенденції включають:

- *Перехід до багатопараметричних моделей основи:* моделі Пастернака, інерційні та в'язкопружні основи для точнішого опису хвильових процесів [242].
- *Мультишарові моделі:* аналіз взаємодії шарів з урахуванням взаємодії з транспортним засобом [135].
- *Нелінійність та демпфування:* врахування геометричної/матеріальної нелінійності, фракційних моделей демпфування [221].
- *Хвильова механіка:* дослідження резонансних швидкостей, локалізації хвиль, впливу періодичності структури [172].
- *Чисельні методи:* розвиток спеціалізованих елементів, PML для безвідбивного моделювання ґрунту, спектральні/гібридні методи та редукція порядку моделі для швидкого моделювання великомасштабних систем (digital twins, реальний час) [135].
- *Експериментальна валідація:* лабораторні стенди з рухомими візками, польові випробування, цифрова кореляція зображень (DIC) [204].

Основні напрямки досліджень:

- *Аналіз хвильової відповіді плити + основи:* визначення резонансних швидкостей, cut-off частот, поширення хвиль у системі. (аналітичні/напіваналітичні методи + спектральні перетворення) [172].

- *Моделювання рухомих мас (vehicle–plate interaction)*: замість ідеалізованої рухомої сили використовують багатостепеневі моделі вагонів/коліс з динамічним контактом, що дає інші відповіді [112].

- *Нелінійні та фракційні в'язкопружні підшви*: дослідження впливу в'язкопружності та гістерезису на амплітуду, фазові зсуви і втомні характеристики [221].

- *Багатошарові/порогові ефекти (включно з дефектами та пустотами)*: як локальні ушкодження в шарі під плитою змінюють динаміку при рухомих навантаженнях [174].

- *Оптимізація демпфування і пасивні/активні системи контролю*: розробка шарів/вставок, метаматеріалів чи активних демпферів для зниження вібрацій.

- *Стохастичні підходи та надійність*: випадковість властивостей підшви/баласту, зміни з часом (сезонність), методи невизначеностей.

- *Експерименти та валідація*: лабораторні стенди з рухомими візками, DIC (цифрова кореляція зображень) для поля деформацій; польові випробування slab-track чи дорожніх плит; інструментовані моніторингові системи [204].

Відкриті питання:

- Єдина економна модель основи, що коректна в широкому діапазоні швидкостей.

- Оптимальні рішення passive/active mitigation (активне/пасивне демпфування) (вставки, демпфери, метаматеріали) для зниження поштовхів та втомних впливів.

- Ідентифікація параметрів в польових умовах (inverse problems) – як по вимірах визначити ефективну жорсткість/демпфування [126].

- Вплив локальних дефектів/пустот у шарі під плитою на динаміку при рухомих навантаженнях [174].

- Цифрові двійники для моніторингу й прогнозу деформацій slab-track (плити для колії) з використанням зведених моделей (model reduction) і машинного навчання (ML – Machine Learning).

Сучасні дослідження пластин на пружній основі фокусуються на більш реалістичних моделях з урахуванням шаруватості, демпфування та хвильових процесів. Практичні застосування стосуються залізничних та аеродромних покриттів [129, 181, 219].

1.5.3. Пружний шар на пружній основі (багатошарова основа) при рухомому навантаженні

Динамічна взаємодія рухомого навантаження з пружними шарами на багатошаровій основі є класичною, але водночас актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла та транспортної інженерії. Такі моделі застосовуються для аналізу дорожніх та аеродромних покриттів, slab-track систем у залізничному будівництві та гідротехнічних плит.

Моделі пружного шару на пружній основі, особливо багатошарові, найбільш наближені до реальної поведінки дорожніх і ґрунтових систем. Вони враховують глибинний розподіл напружень і хвильові процеси, що критично для прогнозування деформацій та просядок. Такі моделі використовуються для аналізу динаміки дорожніх одягів, колій високошвидкісних поїздів, авіаційних смуг, де вплив рухомих навантажень особливо інтенсивний, і дозволяють оцінювати критичні швидкості руху, що можуть викликати резонансні ефекти у ґрунтових основах.

Мета – передбачити дефлекції/напруження, проаналізувати поширення хвиль у шарах, вплив демпфування й нелінійностей, а також визначити умови резонансних/критичних швидкостей [155].

Головні сучасні тенденції :

- Перехід від простих до багатопараметричних моделей основи. Багатошарові інерціальні моделі дають реалістичніший опис хвильових процесів та взаємодії шарів [131].

- Мультишарові моделі. Дослідження концентруються на тому, як взаємодія конкретних шарів (асфальт, бетонна плита, гідравлічно стабілізований шар,

грунт) змінює спектр хвильових швидкостей і динамічну реакцію під рухомим навантаженням [112].

- Нелінійні, в'язкопружні та фракційні (fractional) моделі демпфування. Реальна основа показує гістерезис і складну частотозалежну дисипацію; фракційні моделі та складні в'язкопружні моделі останнім часом широко застосовують для кращого узгодження з експериментом при широкому частотному діапазоні [217].

- Модель рухомої системи (маса/пружно-демпфуючий вузол) замість ідеалізованої точки-навантаження. Імітація рухомого транспортного засобу як багатоступеневої системи (колеса, візок, кузов) змінює динамічну взаємодію з шаром/основою й дає складніші ефекти (динамічний контакт, біфуркації) [134].

- Хвильова механіка, критичні швидкості і періодичність структури. Вивчаються умови, коли швидкість навантаження наближається до фазових/групових швидкостей хвиль у шарах, що викликає різке зростання амплітуд або локалізацію хвиль (важливо для високошвидкісного руху). Також досліджується ефект періодичності шарів (наприклад, повторювані шари/шпали) на бенд-структури [173].

- Чисельні методи нового покоління. Розвиток чисельних/гібридних методів і model-order reduction. Поєднання FEM (для конструкції) + BEM або PML/спектральних методів (для ґрунту) і використання редукції порядку моделі дозволяють робити великомасштабні моделювання та близькі до реального часу симуляції (digital twins, оперативний аналіз) [151].

- Експериментальна валідація. Зростає кількість лабораторних стендів із рухомими візками, польових випробувань slab-track і застосування методів NDT (impact-echo), DIC, сенсорних мереж для ідентифікації параметрів і валідації моделей [185].

Основні напрями досліджень:

- Аналіз хвильової відповіді мультишарової системи (швидкості, cut-off частоти, локалізація, дисперсія) під рухомим навантаженням; вплив товщин/жорсткостей шарів на критичні режими [212].

- Інверсні задачі / ідентифікація параметрів – по вимірюваннях визначити ефективні моделі та параметри шарів (особливо для нерівномірних/сезонно змінюваних основ) [185].

- Нелінійні ефекти та пластична/ув'язко-еластична поведінка шарів при великих навантаженнях або багаторазовому циклі навантажень (втома) [212].

- Оптимізація для зменшення вібрацій: пасивні вставки, демпфуючі шари, метаматеріали/ґрати для редирекції хвиль, а також активні системи контролю.

- Стохастичні моделі та надійність: вплив просторової неоднорідності властивостей шарів і випадкових навантажень на довговічність конструкції.

- Мультифізичні задачі: температурні/гідрологічні зміни в шарі, вплив морозопучинності/вологості на ефективну жорсткість.

- Експерименти й валідація: лабораторні стенди із рухомими візками, DIC для кращого поля деформацій, NDT-методи (impact-echo) для виявлення відшарувань/пустот у шарі, польові інструментовані випробування slab-track. Валідація залишається критичною проблемою – особливо для нелінійних і фракційних моделей [185].

Відкриті питання, що мають високу наукову та прикладну цінність:

- Економна, але адекватна модель основи, яка працює в широкому діапазоні швидкостей і частот.

- Узгодження фракційних/в'язкопружних моделей з польовими вимірюваннями (верифікація параметрів дисипації) [217].

- Ідентифікація параметрів шарів в польових умовах (inverse problems) з урахуванням шуму й нерівномірностей [185].

- Оптимальні рішення passive/active mitigation і застосування метаматеріалів для контролю хвиль.

- Моделювання взаємодії складних рухомих систем (реальні вагони/автомобілі) з мультишаровими підшвами для прогнозу довговічності [134].

Розвиток моделей пружної основи при поверхневому рухомому навантаженні демонструє послідовний перехід від спрощених балочних схем до більш реалістичних багат шарових моделей [128, 154, 183, 187, 220, 225].

Методам розрахунку динамічного деформування шаруватих матеріалів присвячено досить багато досліджень, які викладені в статтях і монографіях А. Аврамеско [113, 114], Г.Г. Адамса [96], С.Д. Акбарова [100], А.А. Амандосова, О.Нуржумаєва и П.Ф.Сабодаша [1], Я. Ахенбаха [94], М.А. Біо [133], Л.М. Бреховських [17], К. Ватанабе [238], І.А. Вікторова [18, 19], В.Т. Грінченка і В.В. Мелешка [22], О.М. Гузя і В.Т. Головчана [69], О.М. Гузя, О.П. Жука і П.Г. Махорта [70], О.М. Гузя, В.Д. Кубенка і М.А. Черевка [71], В.М. Евінга, В.С. Ярдетського і Ф. Преса [153], Л. Кан'яра [137], Г. Кольского [75], В.Д. Кубенка [76], Дж. Майлза [78], Дж. Мікловіца [197], В. Новацького [80], Й.-Г. Пао [206], Дж. П. Райта и М.Л. Барона [240], Х.А. Рахматуліна, Я.У. Саатова, П.Ф. Сабодаша і І.Г. Філіпова [83], В.М.Сеймова [85], Дж. Л. Сэкмена [215], І.Г. Філіпова і Б.М. Бахрамова [87], В.Г. Чебана і П.Ф. Сабодаша [88], Н.А. Шульги [89], Н.З. Якушева [90–92] та інших авторів.

Сучасні дослідження в галузі динаміки конструкцій на пружній основі значною мірою базуються на розвинених методах аналізу балок та пластин, що знайшли своє продовження у вивченні багат шарових середовищ. Зокрема, актуальні наукові роботи зосереджені на:

- розвитку моделей для прогнозування поведінки балок на пружних основах різного типу [98, 130, 148, 157, 159, 188, 189, 195, 200, 203, 210, 211, 224, 228, 236, 249];
- аналізі динаміки пластин при дії рухомих навантажень з використанням сучасних чисельно-аналітичних підходів [99, 135, 136, 141, 144, 168, 193, 202, 207, 208];
- дослідженню складної поведінки багат шарових середовищ, що є основою для моделювання композитних матеріалів та ґрунтових масивів [97, 112, 131, 138, 143, 166, 171, 186, 199, 218, 222, 237, 243, 244, 246, 250].

Окрім моделей балки, пластини й пружного шару (багатошарової основи), у теорії багатошарового півпростору застосовують і інші підходи, які дозволяють враховувати складніші ефекти хвильового поширення та взаємодії з навантаженням.

Інші моделі багатошарового півпростору – це переважно 3D-континуальні, матричні та чисельно-аналітичні підходи, які значно розширюють можливості простих балкових чи пластинчастих схем і дозволяють описувати реалістичні процеси хвильового поширення, резонансів і взаємодії з рухомими навантаженнями [124, 139, 146, 170, 205, 214, 216, 245, 247].

Сучасні експерименти дозволили перейти від спрощених моделей до складних, але більш адекватних уявлень про динаміку шаруватих систем. Однак валідація таких моделей вимагає ретельного експериментального підтвердження. На сьогоднішній день існує значна кількість експериментальних даних, що розкривають особливості динамічної поведінки багатошарових конструкцій. Найбільш показові з них представлені в наступних публікаціях: [93, 131, 140, 190, 223, 227, 248, 251]. Усі наведені матеріали містять реальні експерименти або їх поєднання з чисельними методами для верифікації.

1.6. Дослідження динамічних задач для багатошарових основ з початковими напруженнями

В реальних пружних тілах практично завжди існують початкові напруження, які впливають на закономірності поширення хвиль. Тому при дослідженні хвильових процесів є актуальним застосування моделей попередньо напруженого тіла.

У загальному випадку вивчення закономірностей поширення хвиль у тілах з початковими напруженнями можливе лише на основі нелінійної теорії пружності. Нелінійність процесу тут виявляється в тому, що швидкість поширення малих збурень залежить як від властивостей матеріалу тіла, так і від початкових напружень [73, 74]. Внаслідок застосування нелінійної теорії виникають великі труднощі як на стадії постановки динамічних задач, так і при їх вирішенні. У зв'язку з цим велику роль відіграють різні міркування фізичного

характеру, на основі яких можливі ті чи інші спрощення постановки вихідних завдань. Так, якщо припустити, що в динамічних процесах, що вивчаються, додаткові напруження (збурення) значно менше початкових напруг, то можна зробити лінеаризацію рівнянь нелінійної теорії. Лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими напруженнями, розвинена в рамках такого підходу, будучи, по суті, узагальненням класичної лінійної теорії пружності, допускає ефективне застосування методів сучасної математичної фізики при вивченні законів поширення пружних хвиль малої амплітуди в тілах, що знаходяться в попередньо напруженому стані і в цілому ряді випадків отримувати результати із звичайно прийнятою в механіці точністю.

Лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими напруженнями є потужним апаратом для аналізу динаміки попередньо напружених середовищ, поєднуючи відносну простоту лінійного підходу з урахуванням ключових нелінійних ефектів, пов'язаних з початковими напруженнями. Саме цей підхід (лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими напруженнями) є теоретичною основою даного дисертаційного дослідження.

У сучасному представленні теорія пружності для тіл з початковими напруженнями вперше викладена в роботах [132, 234]. Подальший свій розвиток ця теорія отримала у статтях Прагера [209], Гріна, Рівліна і Шилда [164] та інших.

Різні питання теорії пружності для тіл з початковими напруженнями та деформаціями розглянуті також у монографіях О.М.Гузя [59–61], О.М.Гузя, О.П.Жука, П.Г. Махорта [70], О.М. Гузя, П.Г. Махорта, О.М. Гуці [72], О.М.Гузя, С.Ю.Бабича, Ю.П. Глухова [67, 68], В.В. Новожилова [81], Л.І.Сєдова [84], К.А. Трусделла [86] та ін.

Велику кількість робіт з дослідження поширення пружних хвиль у тілах з початковими напруженнями виконано співробітниками інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України О.М. Гузя. Результати досліджень відображені в оглядовій статті А.Н.Гузя [63] та в узагальнюючих монографіях [64–66, 165] та інших.

У останні роки спостерігається значне збільшення кількості досліджень, присвячених впливу рухомих та гармонічних (вібруючих) навантажень на шаруваті середовища з початковими напруженнями [9–11, 95, 100–109, 111, 145, 147, 180, 196, 198 та ін.]. Актуальність цих робіт зумовлена їх практичною значущістю для ключових галузей сучасної техніки, зокрема для розробки високошвидкісних та коливальних механічних систем. Огляд вищезгаданих досліджень було зроблено в роботі Акбарова [100].

Задачі, пов'язані з динамікою гармонічних за часом сил, що діють на напівпростір, часто називають гармонійними за часом задачами Лемба.

Однією з перших спроб в цій галузі була робота Achenbach J.D., Keshava S.P., Herman G. [98], де рівняння руху покривного шару були записані в рамках наближеної теорії пластин, а рівняння руху півплощини - в рамках класичної лінійної теорії пружності.

Було розглянуто плоский напружено-деформований стан і зроблено припущення, що матеріали складових є ізотропними. Встановлено, що якщо матеріал покривного шару жорсткіший за матеріал півплощини, то з'являється критична швидкість рухомого навантаження.

З часом робота Ахенбаха та ін. [98] постійно вдосконалювалася та розвивалася. Схожі дослідження описані в роботах Дітермана та Метрікіна [145] та Merikine and Vrouwenvelder [196], але в цих дослідженнях не були враховані початкові напруження.

Перша спроба врахувати початкові напруження на значення критичної швидкості рухомого вантажу була зроблена Керром [180]. Керр розглядав систему, що складається з крижаної пластини, яка лежить на шарі води. У цій роботі рух пластини описано в рамках теорії Кірхгофа [191] і встановлено, що початкове розтягнення (стиснення) призводить до збільшення (зменшення) значень критичної швидкості.

У роботах Бабича, Глухова та Гузя [9–11] динамічний відгук розглянуто для системи, що складається з шару та попередньо напруженої півплощини. Рівняння руху для покривного шару описувалося за допомогою теорії пластин з

урахуванням зсуву та інерції обертання (пластина Міндліна [198]), а рівняння руху півплощини описувалося в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. Розв'язок відповідної крайової задачі отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Відповідні чисельні дослідження були проведені для стисливих тіл з пружним потенціалом гармонічного типу і нестисливих тіл з пружним потенціалом типу Бартенева-Хазановича. Швидкість рухомого вантажу вважалася постійною. Критичні швидкості розглядалися для дозвукового випадку.

Задача Лемба для системи, що складається з попередньо напруженого покривного шару і попередньо напруженої півплощини, була вперше розглянута Акбаровим та Озайдіном [111] для плоскодеформованого стану. Надалі це дослідження було розширено в різних аспектах Акбаровим та Гюлером [105, 106]. Більше того, відповідна осесиметрична задача Лемба для попередньо напруженого півпростору з попередньо напруженим шаром була предметом вивчення в роботах Акбарова [101, 102]. У роботі Акбарова [103] вивчалася схожа задача для плити з нестисливого функціонально-градієнтного матеріалу на жорсткій основі. Відповідна тривимірна задача Лемба була досліджена в роботах Акбарова та ін [104] та Еміроглу та ін [147].

Акбаров та ін. [107] використали висновки Бабича та ін. [9–11] при дослідженні випадку, коли коли покривний шар також є початково напруженим, і коли рівняння руху для цього шару також описуються в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [64]. Було досліджено вплив параметрів задачі на критичну швидкість. Однак Акбаров та ін. [107] припускали, що матеріали оболонки та півплощини ізотропними. Це припущення суттєво обмежує теоретичні дослідження з точки зору контролю значень критичної швидкості для рухомого вантажу і напружень, що діють на межі розділу площині через механічні властивості матеріалів шару та півплощини. Тому дослідження Акбаров та Ільхан [108] розвинули дослідження Акбарова та ін. [107] для випадку, коли матеріали покривного шару і півплощини анізотропні (ортотропні).

У всіх вищезгаданих роботах передбачалося, що матеріали елементів шаруватого середовища є ізотропними. В роботі Акбарова та Ільхана [109] це припущення не робилося і вважалося, що матеріали покривного шару і півплощини є ортотропними і розглядався плоскодеформований стан.

Слід зазначити, що в усіх наведених вище дослідженнях, пов'язаних з динамікою рухомого навантаження, що діє на систему, яка складається з покривного шару і півпростору, розглядалися двовимірні (відносно просторових координат) задачі. Методи дослідження – інтегральні перетворення Фур'є та Ханкеля.

У статті Akbarov S.D., Ilhan N., Temügan A. [110] досліджено тривимірний динамічний відгук системи, що складається з напруженого покривного шару та попередньо напруженого півпростору, на гармонічне в часі коливальне рухоме поверхнєве навантаження. Дослідження проведені в рамках моделі кусково-однорідного тіла з використанням тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. Матеріали покривного шару та півпростору вважалися однорідними та ізотропними. Розглядався ідеальний контакт. Для розв'язку задачі використовувалось подвійне інтегральне перетворення Фур'є. Для обчислення обернених інтегралів використовувалися два типи алгоритмів. Перший з них базується на інтегруванні в сенсі головного значення Коші, а другий - на використанні контуру Зоммерфельда [226].

Представлені числові результати для критичної швидкості та розподілу напружень на площині розділу фаз. Зокрема, встановлено, що мінімальне значення критичної швидкості, отримане для 3D задачі збігається з критичною швидкістю, отриманою для відповідної двовимірної (плоскодеформований стан) задачі.

1.7. Результати та обґрунтування актуальності дослідження

Проведений аналітичний огляд дозволяє сформулювати низку ключових висновків щодо сучасного стану досліджень динаміки шаруватих основ та виокремити наукові прогалини, що зумовлюють актуальність даного дисертаційного дослідження.

1. Домінування чисельних методів та необхідність аналітичних еталонів. Основним інструментом аналізу динамічних задач шаруватих конструкцій у наш час стали чисельні методи (МСЕ, МГЕ). Однак їхня ефективна валідація, інтерпретація складних хвильових картин та аналіз чутливості ускладнені через брак точних аналітичних розв'язків для систем високої складності, що обмежує надійність прогнозування.

2. Незамінна роль аналітичних методів. Для фундаментального розуміння фізики процесів, формулювання коректних постановок задач та верифікації чисельних алгоритмів залишаються незамінними аналітичні та напіваналітичні методи. Вони забезпечують базові рішення в ідеалізованих умовах, що слугують критично важливою опорою для розвитку більш реалістичних моделей.

3. Дефіцит універсальних методів для складних багат шарових систем. Незважаючи на значний обсяг накопичених знань, залишається актуальною проблема побудови ефективних аналітичних і чисельно-аналітичних методів для розв'язання тривимірних задач з довільною кількістю шарів, контрастними механічними характеристиками та складними умовами контакту між ними. Існуючі підходи часто обмежені двома шарами або суттєвими спрощеннями.

4. Відрив теорії від експерименту в частині валідації складних моделей. Експериментальні методи моніторингу шаруватих конструкцій інтенсивно розвиваються. Однак їхній повноцінний зв'язок з теоретичними моделями, особливо для задач із початковими напруженнями та рухомими навантаженнями, залишається слабким. Необхідні методики параметричної ідентифікації та обернених задач для корегування математичних моделей на основі експериментальних даних.

5. Необхідність тривимірних просторових моделей. Адекватний опис динамічної поведінки шаруватих структур під дією рухомих навантажень вимагає застосування тривимірних просторових моделей. Існуючі двовимірні та осесиметричні постановки нехтують важливими ефектами, що обмежує область їх застосування.

6. Обмеженість класичної гіпотези пружного ізотропного півпростору.

Хоча гіпотеза пружного ізотропного півпростору є важливим інструментом, методи розрахунку на її основі призводять до надзвичайно складних математичних проблем. Практично прийнятні аналітичні розв'язки отримані лише для вузького кола задач, що не покриває потреб сучасного інженерного аналізу шаруватих систем.

7. Ключова прогалина: динаміка попередньо напружених шаруватих середовищ. Особливо недостатньо дослідженою залишається область динаміки шаруватих пружних основ зі значними початковими (залишковими) напруженнями під дією рухомих навантажень. Питання поширення стаціонарних хвиль у частково обмежених тілах складної шаруватої структури (багатошарові смуги, пластини на основах) з початковими напруженнями практично не вивчалися. Вплив початкових напружень на критичні швидкості, хвильові режими та емерджентні ефекти у системах з трьома і більше шарами потребує системного дослідження.

Таким чином, проведений огляд літератури чітко виявляє наступні актуальні потреби, на які спрямоване дане дисертаційне дослідження:

- у розробці нового універсального аналітично-чисельного методу, здатного ефективно розв'язувати просторові та плоскі задачі для багатошарових систем з контрастними властивостями та початковими напруженнями;
- у отриманні точних аналітичних розв'язків для класу стаціонарних задач про рух навантаження по попередньо напруженій багатошаровій основі, які могли б служити еталонами;
- у системному дослідженні емерджентних ефектів, що виникають від спільної дії шаруватості, початкових напружень та руху навантаження, зокрема у визначенні нових критичних режимів та закономірностей розподілу напружень.

Виходячи з вищевикладеного, мета і завдання дисертаційного дослідження є актуальними, науково обґрунтованими та мають важливе

теоретичне й практичне значення для розвитку механіки деформівного твердого тіла та суміжних галузей знань.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ І РІВНЯННЯ ТРЬОХВИМІРНОЇ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ. ЗАГАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПРИ ОДНОРОДНИХ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕННЯХ

У другому розділі викладені основні рівняння і співвідношення лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл з початковими (залишковими) напруженнями з пружним потенціалом довільної структури, наведені представлення загальних розв'язків просторових задач для випадку однорідного початкового стану.

При викладі матеріалу використовується термінологія, позначення і результати робіт [59, 61, 64, 65].

Усі основні співвідношення наведені в лагранжевих координатах в рамках методу Лагранжа із залученням відповідної системи координат.

2.1. Принципи побудови лінеаризованої теорії пружності

Лінеаризована теорія пружності для тіл з початковими (залишковими) напруженнями і деформаціями припускає існування трьох станів пружного тіла: природного, початкового деформованого і збуреного.

У природному стані напруження і деформації відсутні. Збурений стан описується величинами, які є сумою величин, що описують початковий стан і збурення. Припускаючи величини збурень малими в порівнянні з відповідними величинами початкового стану, основні співвідношення для третього стану лінеаризуються і з них віднімаються відповідні співвідношення другого(початкового) стану. Отримані таким чином співвідношення і вважаються основними співвідношеннями лінеаризованої теорії пружності. Тобто, якщо одне із співвідношень нелінійної теорії пружності має вигляд

$$y = f(x), \quad (2.1)$$

то відповідно до другого і третього станів пружного тіла дане співвідношення можна записати

$$y_0 = f(x_0), \quad (2.2)$$

$$y_0 + y = f(x_0 + x). \quad (2.3)$$

Лінеаризуємо співвідношення (2.3)

$$y_0 + y \approx f(x_0) + x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (2.4)$$

Віднімаючи від лінеаризованого співвідношення (2.4) для третього стану пружного тіла співвідношення (2.2) для другого (початкового) стану, маємо основне співвідношення лінеаризованої теорії пружності

$$y \approx x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (2.5)$$

Така теорія, на відміну від класичної лінійної теорії пружності, яка розглядає нескінченно малі деформації відносно природного стану пружного тіла, тобто стану з нульовими початковими напруженнями і деформаціями, більш повно відображає властивості реальних деформованих тіл.

Основи лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими деформаціями детально викладені в роботах [59, 61, 64, 65].

2.2. Основні співвідношення і рівняння тривимірної лінеаризованої теорії пружності

У даному параграфі розглянемо основні співвідношення лінеаризованої теорії для стисливих та нестисливих тіл у разі однорідного початкового стану. Усі величини, що розглядаються нижче, віднесені до розмірів тіла в початковому (незбуреному) стані.

Використовуємо лагранжеві координати x_i , які в природному стані збігаються з декартовими. В цьому випадку початковий стан визначається переміщеннями

$$u^0_j = \delta_{ij} (\lambda_i - 1) x_i; \quad \lambda_i = const; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (\mathcal{Z}_i), \quad (2.6)$$

де λ_i – видовження; δ_{ij} – символ Кронекера. Усі величини, що відносяться до початкового стану, відмічатимемо індексом "нуль".

Тіло вважатимемо ізотропним нелінійно-пружним з довільним потенціалом. У разі ортотропного тіла вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрями збігаються з напрямками координатних ліній $x_i = const$.

Разом з лагранжевими координатами x_i введемо декартові координати ξ_i початкового деформованого стану, які пов'язані з координатами x_i наступними співвідношеннями

$$\xi_i = \lambda_i x_i; \quad (\mathcal{Z}_i). \quad (2.7)$$

Представимо усі співвідношення лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями в координатах ξ_i .

Надалі введені такі позначення: \tilde{Q}_{ij} – складова уздовж осі $O\xi_j$ вектору напруження на площині $\xi_i = const$ віднесена до одиниці площі перетину $\xi_i = const$ у початковому (незбуреному) деформованому стані; \tilde{Q}_j – складові вектору напруження на площині з ортом нормалі \bar{N}^0 ; N_i^0 – складова уздовж осі $O\xi_j$ орта нормалі \bar{N}^0 до поверхні тіла в початковому деформованому стані; $\tilde{\rho}$ і ρ – щільність матеріалу в початковому деформованому і природному недеформованому станах; V – об'єм тіла в початковому (незбуреному) стані; $S = S_1 + S_2$ – поверхня тіла в початковому (незбуреному) стані; P_j – складові поверхневого навантаження, що діє на поверхню в деформованому (третьому) стані, але віднесеного до розмірів майданчика в початковому деформованому (другому) стані.

2.2.1. Стисливі тіла

Для стисливих пружних тіл в координатах ξ_i основні співвідношення мають вигляд:

співвідношення пружності

$$\tilde{Q}_{ij} = \tilde{\omega}_{ija\beta} u_{a,\beta}; \quad i, j, a, \beta = \overline{1,3}; \quad (\cdot)_{,n} = \frac{\partial}{\partial \xi_n} (\cdot), \quad (2.8)$$

рівняння руху

$$\tilde{Q}_{ij,i} - \tilde{\rho} \ddot{u}_j = 0; \quad y_n \in V; \quad (\ddot{\cdot}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\cdot), \quad (2.9)$$

граничні умови в напруженнях на частині поверхні S_1

$$\tilde{Q}_{j|S_1} = P_j; \quad \xi_n \in S_1; \quad \tilde{Q}_j = N_i^0 \tilde{Q}_{ij}, \quad (2.10)$$

граничні умови в переміщеннях на частині поверхні S_2

$$u_{j|S_2} = f_j; \quad \xi_n \in S_2. \quad (2.11)$$

Приймемо до уваги, що

$$\tilde{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho. \quad (2.12)$$

Тензор $\tilde{\omega}$ відповідно до [59, 61, 64, 65] симетричний, тобто

$$\tilde{\omega}_{ija\beta} = \tilde{\omega}_{\beta a ji}. \quad (2.13)$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій вирази для визначення складових тензора $\tilde{\omega}$ мають вигляд [59, 61, 64, 65]

$$\tilde{\omega}_{ija\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_a \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \times \\ \times [\delta_{ij} \delta_{a\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{ia} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{ja}) \mu_{ij} + \lambda_j^{-1} \lambda_a^{-1} \delta_{i\beta} \delta_{ja} S_0^{\beta\beta}]. \quad (2.14)$$

Для другого варіанту теорії малих початкових деформацій компоненти тензора $\tilde{\omega}$ визначаються по формулах

$$\tilde{\omega}_{ija\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} [\delta_{ij} \delta_{a\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{ia} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{ja}) \mu_{ij} + \delta_{i\beta} \delta_{ja} \sigma_{\beta\beta}^0]. \quad (2.15)$$

Тут $S_0^{\beta\beta} \equiv \sigma_{\beta\beta}^0$ – компоненти узагальненого напруження в початковому деформованому стані. Формули (2.8) – (2.13) справедливі як для теорії

великих(скінченних) початкових деформацій, так і для усіх варіантів теорії малих початкових деформацій. Вирази для обчислення величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} і $S_0^{\beta\beta}$ через пружний потенціал для різних постановок задач наведені в роботах [59, 61, 64, 65].

2.2.2. Нестисливі тіла

Основні співвідношення для нестисливих тіл в координатах ξ_i зводяться до таких виразів [59, 61, 64, 65]:

співвідношення пружності

$$\tilde{Q}_{ij} = \tilde{\chi}_{ija\beta} u_{a,\beta} + \tilde{q}_{ij} p; \quad \xi_n \in V, \quad (2.16)$$

рівняння нестисливості

$$\tilde{q}_{ij} u_{j,i} = 0, \quad (2.17)$$

і співвідношенням (2.9) – (2.11).

Тут

$$\tilde{q}_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i q_i \quad (2.18)$$

і

$$\tilde{\rho} = \rho; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (2.19)$$

Тензор $\tilde{\chi}$ має відповідно до [59, 61, 64, 65] властивості симетрії

$$\tilde{\chi}_{ija\beta} = \tilde{\chi}_{\beta aji}. \quad (2.20)$$

Складові тензора $\tilde{\chi}$ для конкретних постановок задач визначаються з виразів (2.14) або (2.15), де $\tilde{\omega}_{ija\beta}$ слід замінити на $\tilde{\chi}_{ija\beta}$ з урахуванням другої формули в (2.19). Вирази для обчислення величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} , $S_0^{\beta\beta}$ і q_i через пружний потенціал у разі теорії великих (скінченних) початкових деформацій, а також спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій наведені в роботах [59, 61, 64, 65].

Таким чином, основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями для стисливих тіл мають вигляд (2.8) і (2.9), а для нестисливих тіл – (2.16), (2.17) і (2.9).

2.3. Представлення загальних розв'язків просторових задач при однорідних початкових деформаціях

Коротко розглянемо побудову загальних розв'язків відповідних систем рівнянь лінеаризованої динамічної теорії пружності для тіл з початковими напруженнями у випадку однорідного початкового стану, що визначається формулами (2.6). Дослідження виконаємо в лагранжевих координатах y_n , які в початковому (незбуреному) напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами і пов'язані з лагранжевими координатами x_n виразами (2.7).

2.3.1. Стисливі тіла

Лінеаризовані рівняння руху в переміщеннях для пружних стисливих тіл можна отримати після підстановки співвідношень (2.8) в рівняння (2.9). Таким чином, в координатах y_n рівняння руху в переміщеннях при однорідному початковому стані можна представити у вигляді

$$L_{m\alpha} u_\alpha = 0; \quad L_{m\alpha} = \tilde{\omega}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_\beta} - \tilde{\rho} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \xi_n \in V. \quad (2.21)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь в переміщеннях (2.21) можна представити в одній з наступних (відносно індексу j) форм або у вигляді їх лінійної комбінації:

$$u_\alpha^{(j)} = \left[\frac{\partial \det \|L_{rs}\|}{\partial (L_{j\alpha})} \right] \Phi^{(j)}; \quad j, \alpha = \overline{1,3}, \quad (2.22)$$

де функції $\Phi^{(j)}$ визначаються з рівняння

$$\det \|L_{rs}\| \Phi^{(j)} = 0. \quad (2.23)$$

Такий підхід реалізований в роботах [59, 61, 64, 65].

2.3.2. Нестисливі тіла

Лінеаризовані рівняння руху в переміщеннях для нестисливих пружних тіл можна отримати після підстановки (2.16) в (2.9) і (2.17). У координатах y_n для нестисливих тіл рівняння руху і умова нестисливості при однорідному початковому стані має вигляд

$$\begin{aligned}
 N_{m\alpha} u_\alpha &= 0; \\
 N_{m\alpha} &= \left(\tilde{\kappa}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_\beta} - \tilde{\rho} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (1 - \delta_{\alpha 4}) (1 - \delta_{m 4}) + \\
 &+ \delta_{\alpha 4} (1 - \delta_{m 4}) \frac{\partial}{\partial \xi_m} + \delta_{m 4} (1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}; \\
 u_4 &\equiv p; \quad \xi_n \in V; \quad m, \alpha = \overline{1, 4}; \quad i, \beta = \overline{1, 3}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Рівняння (2.24) записані відносно переміщень u_1, u_2, u_3 і скалярної функції p .

За аналогією з (2.22) розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.24) відносно переміщень u_a ($a = \overline{1, 4}$) можна представити в одній з наступних форм (відносно індексу y_n j) чи у вигляді їх лінійної комбінації

$$u_\alpha^{(j)} = \left[\frac{\partial \det \|N_{rs}\|}{\partial (N_{j\alpha})} \right] \Phi^{(j)}; \quad j, \alpha = \overline{1, 4}. \tag{2.25}$$

У (2.25) функції $\Phi^{(j)}$ визначаються з одного і того ж рівняння, яке можна представити у виді

$$\det \|N_{rs}\| \Phi^{(j)} = 0. \tag{2.26}$$

Загальні розв'язки (2.22) і (2.25) дають можливість досліджувати при єдиному підході досить широкі класи задач про поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями в тілах з різною геометричною формою.

2.4. Результати та висновки

Таким чином, в другому розділі коротко викладені основні співвідношення лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл відповідно до теорії скінченних (великих) початкових деформацій і до двох варіантів теорії малих початкових деформацій в досить загальній постановці. Наведені результати є загальними для різних моделей деформівних тіл.

РОЗДІЛ 3

ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

У цьому розділі формулюються тривимірні та двовимірні динамічні задачі для багатошарової пружної основи під дією рухомого поверхневого навантаження в умовах наявності попереднього напруженого стану. Постановки подаються в найбільш загальній тривимірній формі.

Тривимірна постановка задачі дозволяє врахувати повну структуру просторового хвильового поля, однак у ряді практично важливих випадків, коли навантаження та геометрія однорідні в одному з координатних напрямів, хвильовий процес має квазі-двовимірний характер. За цих умов залежність розв'язку від поперечної координати зникає, що забезпечує коректний перехід від 3D до 2D моделі без втрати основних фізичних особливостей задачі й дозволяє отримати компактніші та аналітично керовані представлення хвильових полів.

3.1. Постановка тривимірних динамічних задач для шаруватої основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження

Загальна постановка класу задач, що досліджується, виглядає наступним чином [24, 26–28, 30, 34]. Розглядається багатошарова плита, що складається із N шарів, які лежать на пружному півпросторі або жорсткій основі (рис. 3.1). Шари пронумеровані по порядку $s = \overline{1, N}$ зверху вниз. Порядковий номер підстилаючого півпростору – $N + 1$.

Граничні поверхні шарів плоскі і паралельні між собою. Товщина шарів довільна і рівна h_s ($h_0 = 0$).

Елементи шаруватого середовища складаються із стисливих або нестисливих попередньо напружених ізотропних нелінійно-пружних матеріалів з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного тіла

вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей вибраної системи координат.

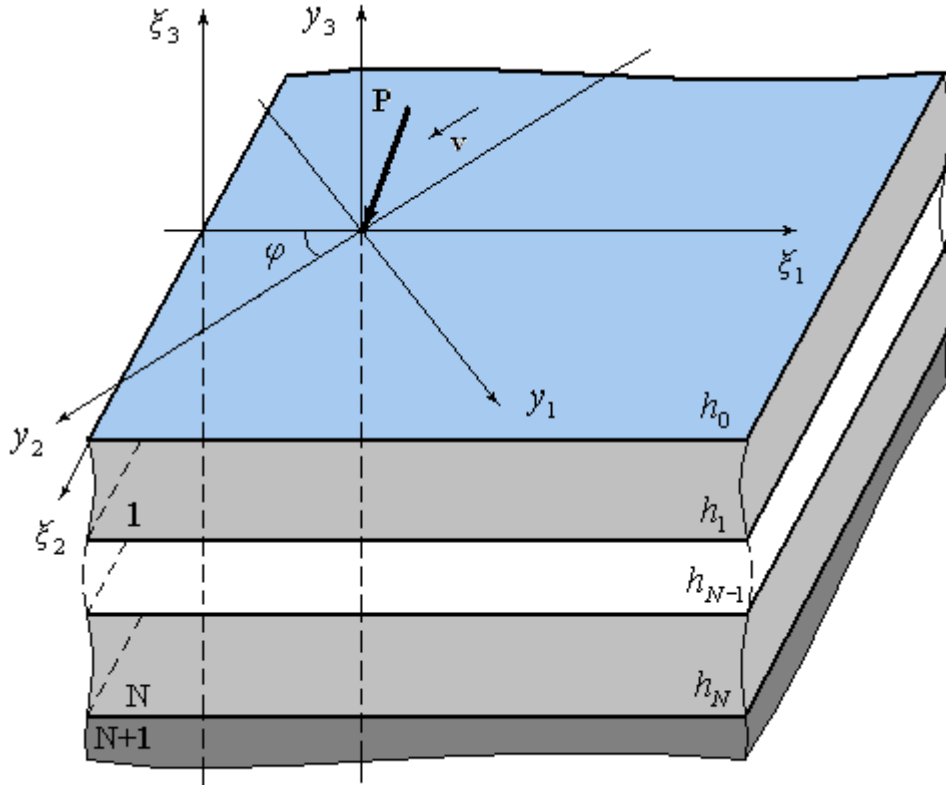


Рис. 3.1. Схематичне зображення багатошарової плити

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища є однорідним:

$$u_j^{0\{s\}} = \delta_{ij} (\lambda_i^{\{s\}} - 1) x_i; \quad \lambda_i^{\{s\}} = \text{const}, \quad \left(\sum_i \right). \quad (3.1)$$

Тут x_i – лагранжеві координати, які в природному стані збігаються з декартовими, $\lambda_i^{\{s\}}$ – видовження; δ_{ij} – символ Кронекера.

Елементи багатошарового півпростору віднесені до декартових систем координат $\xi_i^{\{s\}}$ ($i=1,2,3$), які відповідають початковому деформованому стану:

$$\xi_i^{\{s\}} = \lambda_i^{\{s\}} x_i, \quad \left(\sum_i \right). \quad (3.2)$$

До вільної границі першого шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю v протягом протязі великого проміжку часу і не залежить від координат $\xi_3^{\{s\}}$. Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений деформований стан.

Також припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, є значно менші початкових напружень. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

При таких припущеннях з урахуванням загальних розв'язків просторових динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями загальна постановка просторових задач про усталений рух пружної багатошарової плити, що лежить на пружному півпросторі або жорсткій основі, включає рівняння руху елементів багатошарового середовища і граничні умови.

Розглядалися два випадки початкового напруженого стану:
загальний [24, 28, 34]

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} \neq S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}} \quad (3.3)$$

і симетричний [26, 27, 30]

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} = S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}}. \quad (3.4)$$

В формулах (3.3) і (3.4) $S_{ii}^{0\{s\}}$ - компоненти тензора узагальнених напружень.

3.1.1. Рівняння руху та основні співвідношення у випадку загального початкового напруженого стану

У загальному випадку початкового напруженого стану (3.3) в координатах (3.2) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору можна записати таким чином [24, 28, 34]:

рівняння руху

$$\left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=3} A_{m,n,p,q}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (3.5)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_j^{\{s\}} &= \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(jj)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} \\ &+ \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(j\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^{\{s\}} \partial \xi_\alpha^{\{s\}}} \Phi^{\{s\}(\alpha)} + \\ &+ \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} C_{m,n,p,q}^{\{s\}(j\beta)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^{\{s\}} \partial \xi_\beta^{\{s\}}} \Phi^{\{s\}(\beta)}; \\ &j, \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad j \neq \alpha; \quad \alpha \neq \beta; \quad j \neq \beta; \quad s = \overline{1, N+1}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\beta\beta}^{\{s\}} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\beta\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)}; \\ \tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\{s\}} &= \sum_{\substack{j,\zeta=\alpha,\beta \\ j \neq \zeta}} \frac{\partial}{\partial \xi_\zeta^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=2} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\alpha\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} + \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_2^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}} \left(\sum_{m,n,p,q=0}^{m+n+p+q=1} E_{m,n,p,q}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2m} \partial \xi_2^{\{s\}2n} \partial \xi_3^{\{s\}2p} \partial t^{2q}} \right) \Phi^{\{s\}(\gamma)}; \\ &\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad \alpha \neq \beta; \quad \gamma \neq \alpha; \quad \beta \neq \gamma; \quad s = \overline{1, N+1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В формулах (3.5)–(3.7) введені позначення:

у випадку стисливих тіл

$$\begin{aligned} A_{3,0,0,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}}; \quad A_{0,3,0,0}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}}; \\ A_{0,0,3,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}}; \quad A_{0,0,0,3}^{\{s\}} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}3}; \\ A_{2,1,0,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right)^2; \\ A_{2,0,1,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right)^2; \\ A_{1,2,0,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{0,2,1,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right)^2; \\
A_{1,0,2,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right)^2; \\
A_{0,1,2,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right)^2; \\
A_{2,0,0,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,2,0,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,0,2,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right); \\
A_{1,1,0,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right)^2 \right]; \\
A_{1,0,1,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right)^2 \right]; \\
A_{0,1,1,1}^{\{s\}} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right)^2 \right]; \\
A_{1,1,1,0}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right) + \\
&+ \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right) + 2 \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) - \\
&- \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right)^2 - \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right)^2 - \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right)^2; \\
A_{1,0,0,2}^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}2} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right); \quad A_{0,1,0,2}^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}2} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,0,1,2}^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}2} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right); \\
C_{2,0,0,0}^{\{s\}(11)} &= \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}}; \quad C_{0,2,0,0}^{\{s\}(11)} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,2,0}^{\{s\}(11)} = \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,0,2}^{\{s\}(11)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(12)} &= -\tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,1,1,0}^{\{s\}(11)} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} - \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right)^2; \\
C_{1,1,0,0}^{\{s\}(11)} &= \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}; \quad C_{1,0,1,0}^{\{s\}(11)} = \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}}; \\
C_{0,0,0,1}^{\{s\}(13)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \quad C_{1,0,0,1}^{\{s\}(11)} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,1,0,1}^{\{s\}(11)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,1,1}^{\{s\}(11)} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(12)} &= -\tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,0,1}^{\{s\}(12)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)} &= -\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \quad C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)} = -\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right);
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(12)} &= -\left[\tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(13)} &= -\left[\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(13)} &= -\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \quad C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} = -\tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)} &= -\tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,0,2}^{\{s\}(22)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; \\
C_{0,2,0,0}^{\{s\}(22)} &= \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,2,0}^{\{s\}(22)} = \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}}; \quad C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \\
C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} - \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right)^2; \quad C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}; \\
C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)} &= -\left[\tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,0,1}^{\{s\}(21)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)} &= -\left[\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{2,0,0,0}^{\{s\}(22)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)} = -\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)} = -\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)} &= -\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)} = -\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)} &= -\left[\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)} &= -\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,0,1}^{\{s\}(31)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right); \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)} &= -\left[\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(32)} &= -\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)} = \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}}; \quad C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)} = \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; \\
C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right)^2; \\
C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}}; \quad C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}; \\
C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}; \quad C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} \right); \\
C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \right); \quad C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)} = -\tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} \right); \\
E_{2,0,0,0}^{\{s\}(111)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(11)}; \quad E_{0,2,0,0}^{\{s\}(111)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)}; \\
E_{0,0,0,2}^{\{s\}(111)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(11)}; \quad E_{0,0,2,0}^{\{s\}(111)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)}; \\
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(111)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)}; \quad E_{1,0,1,0}^{\{s\}(111)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)}; \\
E_{0,1,1,0}^{\{s\}(111)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)}; \quad E_{1,0,0,1}^{\{s\}(111)} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(11)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(12)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)}; & E_{0,1,1,0}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)}; \\
E_{1,0,1,0}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(12)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)}; \\
E_{1,0,0,1}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)} + \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(12)}; & E_{0,2,0,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)}; \\
E_{0,0,1,1}^{\{s\}(112)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)}; & E_{2,0,0,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(13)} + \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,0,1,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(13)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,1,1,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,0,0,1}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(13)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)} + \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(113)} &= \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)},
\end{aligned}$$

а у випадку нестисливих тіл

$$\begin{aligned}
A_{3,0,0,0}^{\{s\}} &= q_1^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}}; & A_{0,3,0,0}^{\{s\}} &= q_2^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}}; & A_{0,0,3,0}^{\{s\}} &= q_3^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}}; & A_{0,0,0,3}^{\{s\}} &= 0; \\
A_{1,1,1,0}^{\{s\}} &= 2q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left[\left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) - \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) \right] + \\
&+ 2q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left[\left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) - \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) \right] + \\
&+ 2q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \left[\left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) - \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) \right] + \\
&+ q_1^{\{s\}2} \left[\left(\tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right)^2 \right] + \\
&+ q_2^{\{s\}2} \left[\left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right)^2 \right] + q_3^{\{s\}2} \left[\left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right)^2 \right]; \\
A_{2,1,0,0}^{\{s\}} &= -2q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} + q_1^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} \right) + q_2^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}}; \\
A_{2,0,1,0}^{\{s\}} &= -2q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} + q_1^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} \right) + q_3^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}}; \\
A_{1,2,0,0}^{\{s\}} &= -2q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} + q_1^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} + q_2^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,2,1,0}^{\{s\}} &= -2q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} + q_2^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} \right) + q_3^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}}; & (3.9) \\
A_{1,0,2,0}^{\{s\}} &= -2q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} + q_1^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + q_3^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,1,2,0}^{\{s\}} &= -2q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} + q_2^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + q_3^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \right); \\
A_{2,0,0,1}^{\{s\}} &= -q_1^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} \right); & A_{0,2,0,1}^{\{s\}} &= -q_2^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} \right); \\
A_{0,0,2,1}^{\{s\}} &= -q_3^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} \right); \\
A_{1,1,0,1}^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[2q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right) - q_1^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2332}^{\{s\}} \right) - q_2^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} \right) \right]; \\
A_{1,0,1,1}^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[2q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} \right) - q_1^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{3223}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} \right) - q_3^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} \right) \right]; \\
A_{0,1,1,1}^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left[2q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\chi}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2323}^{\{s\}} \right) - q_2^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \right) - q_3^{\{s\}2} \left(\tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1,0,0,2}^{\{s\}} &= q_1^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; & A_{0,1,0,2}^{\{s\}} &= q_2^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; & A_{0,0,1,2}^{\{s\}} &= q_3^{\{s\}2} \tilde{\varrho}^{\{s\}2}; \\
C_{2,0,0,0}^{\{s\}(11)} &= 0; & C_{0,2,0,0}^{\{s\}(11)} &= -q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2332}^{\{s\}}; & C_{0,0,2,0}^{\{s\}(11)} &= -q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3223}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,2}^{\{s\}(11)} &= 0; \\
C_{1,1,0,0}^{\{s\}(11)} &= -q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1331}^{\{s\}}; & C_{1,0,1,0}^{\{s\}(11)} &= -q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}}; & C_{1,0,0,1}^{\{s\}(11)} &= 0; & C_{0,1,0,1}^{\{s\}(11)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_2^{\{s\}2}; \\
C_{0,1,1,0}^{\{s\}(11)} &= 2q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) - q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3333}^{\{s\}} - q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}}; & C_{0,0,1,1}^{\{s\}(11)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_3^{\{s\}2}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(12)} &= -q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1331}^{\{s\}}; & C_{0,1,0,0}^{\{s\}(12)} &= -q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2332}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(12)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)} &= q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}}; & C_{0,0,1,0}^{\{s\}(13)} &= q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3223}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(13)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}}; \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(12)} &= -q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3333}^{\{s\}} + q_3^{\{s\}} \left[q_1^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) + q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) - \right. \\
&\quad \left. -q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) \right]; & C_{0,1,0,0}^{\{s\}(13)} &= q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} - q_2^{\{s\}} \left[q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) - \right. \\
&\quad \left. -q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) + q_1^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) \right]; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} &= -q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1331}^{\{s\}}; & C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)} &= -q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2332}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(21)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}}; \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)} &= -q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}}; & C_{2,0,0,0}^{\{s\}(22)} &= -q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1331}^{\{s\}}; & C_{0,2,0,0}^{\{s\}(22)} &= 0; & C_{0,0,2,0}^{\{s\}(22)} &= -q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3113}^{\{s\}}; \\
C_{0,0,0,2}^{\{s\}(22)} &= 0; & C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)} &= -q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2332}^{\{s\}}; & C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^2; \\
C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)} &= 2q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) - q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3333}^{\{s\}} - q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}}; & C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)} &= -q_3^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}}; \\
C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)} &= 0; & C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_3^{\{s\}2}; & C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)} &= -q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3113}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}}; \\
C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)} &= q_3^{\{s\}} \left[q_1^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) + q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) - q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) \right] - q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3333}^{\{s\}}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)} &= q_1^{\{s\}} \left[q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) + q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) q_1^{\{s\}} \right] - q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)} &= q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}}; & C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)} &= q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3223}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(31)} &= -\tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}}; \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)} &= -q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}}; & C_{0,0,1,0}^{\{s\}(32)} &= -q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{3113}^{\{s\}}; & C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}}; \\
C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)} &= q_2^{\{s\}} \left[\left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) q_2^{\{s\}} - \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) q_1^{\{s\}} - q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) \right] + \\
&\quad + q_1^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}}; & C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)} &= -q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}}; & C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)} &= -q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}}; \\
C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)} &= q_1^{\{s\}} \left[\left(\tilde{\kappa}_{1313}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1133}^{\{s\}} \right) q_2^{\{s\}} + q_3^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) - \left(\tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{2323}^{\{s\}} \right) q_1^{\{s\}} \right] - \\
&\quad -q_2^{\{s\}} q_3^{\{s\}} \tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}}; & C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)} &= 2q_1^{\{s\}} q_2^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right) - q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} - q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}}; \\
C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)} &= 0; & C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)} &= 0; & C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_1^{\{s\}2}; & C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)} &= -q_2^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3113}^{\{s\}}; \\
C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} q_2^{\{s\}2}; & C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)} &= 0; & C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} &= -q_1^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{3223}^{\{s\}}; \\
E_{2,0,0,0}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(41)}; & E_{0,2,0,0}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(41)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\kappa}_{2233}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(41)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(11)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(41)}; \\
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(11)} + \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(41)}; & E_{1,0,0,1}^{\{s\}(221)} &= \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(11)} + \tilde{q}_2^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(41)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3113}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(13)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{1,0,1,0}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3113}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)}; \\
E_{0,1,1,0}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3113}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(13)}; & E_{1,0,0,1}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)}; \\
E_{0,1,0,1}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(313)} &= \tilde{\alpha}_{3131}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3113}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(13)}; \\
E_{1,0,0,0}^{\{s\}(231)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)}; & E_{0,1,0,0}^{\{s\}(231)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)}; \\
E_{0,0,1,0}^{\{s\}(231)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)}; & E_{0,0,0,1}^{\{s\}(231)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(31)}; \\
E_{0,2,0,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)}; & E_{1,1,0,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)}; \\
E_{0,1,1,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(32)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)}; \\
E_{1,0,1,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)}; & E_{0,1,1,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(22)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(22)}; & E_{1,0,1,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)}; \\
E_{1,0,0,1}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)}; & E_{2,0,0,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)}; \\
E_{0,2,0,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)}; & E_{1,1,0,0}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,0,0,1}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(233)} &= \tilde{\alpha}_{2332}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)}; & E_{2,0,0,0}^{\{s\}(232)} &= \tilde{\alpha}_{2323}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(22)}; \\
E_{1,0,0,0}^{\{s\}(321)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)}; & E_{0,1,0,0}^{\{s\}(321)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)}; \\
E_{0,0,1,0}^{\{s\}(321)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)}; & E_{0,0,0,1}^{\{s\}(321)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(21)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(31)}; \\
E_{0,2,0,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)}; & E_{1,1,0,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)}; \\
E_{0,1,1,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(32)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)} + \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)}; & E_{1,0,1,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)}; \\
E_{0,1,1,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)} + \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)}; \\
E_{0,0,2,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,2,0}^{\{s\}(22)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(22)}; & E_{2,0,0,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(22)}; \\
E_{1,0,1,0}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)}; & E_{1,0,0,1}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)}; & E_{0,0,1,1}^{\{s\}(322)} &= \tilde{\alpha}_{3223}^{\{s\}} C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)}; \\
E_{2,0,0,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,2,0,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{0,0,0,2}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)}; \\
E_{1,1,0,0}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)}; & E_{1,0,0,1}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)}; & E_{0,1,0,1}^{\{s\}(323)} &= \tilde{\alpha}_{3232}^{\{s\}} C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)};
\end{aligned}$$

У вище наведених формулах $\rho^{\{s\}}$ і $\tilde{\rho}^{\{s\}}$ – щільність матеріалу елементів шаруватого середовища в природному і попередньо напруженому станах.

Коефіцієнти $A_{i,j,k}^{\{s\}}$, $C_{i,j,k}^{\{s\}(n\alpha)}$, $E_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}$ у виразах (3.5)–(3.7) є функціями параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища: $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ – у випадку стисливого матеріалу і $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ – у випадку нестисливого матеріалу. Формули для обчислення компонентів тензорів $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ і $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ для різних варіантів теорій кінцевих і малих початкових деформацій наведені в [64, 65].

Відмітимо, що всі рівняння (3.5) і вирази для переміщень (3.6) і напружень (3.7) представлені в різних системах координат $\xi_i^{\{s\}}$ ($i = \overline{1,3}$; $s = \overline{1, N+1}$), що відповідають початковому деформованому стану кожного елемента шаруватого півпростору. Виберемо одну з цих систем координат і зведемо всі формули (3.5)–(3.7) до цієї системи координат за допомогою співвідношень (3.2). Вибір такої системи координат може бути обумовлений зручністю обчислень або постановкою задачі. Позначимо вибрану систему координат $\xi_i^{\{n\}}$ ($i = \overline{1,3}$; $1 \leq n \leq N+1$). Маємо наступні співвідношення

$$\xi_i^{\{s\}} = \frac{\lambda_i^{\{s\}}}{\lambda_i^{\{n\}}} \xi_i^{\{n\}}; \quad \theta_i^{\{s\}} = \frac{\lambda_i^{\{n\}}}{\lambda_i^{\{s\}}}; \quad \theta_i^{\{s\}} \xi_i^{\{s\}} = \xi_i^{\{n\}}; \quad i = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (3.10)$$

Формули (3.10) є загальними для всіх варіантів утворення шаруватого півпростору, в тому числі для варіанту, коли кожен елемент шаруватого півпростору отримує початкові напруження окремо від інших.

Якщо початкові деформації створюються одночасно в пакеті шарів, то необхідно також враховувати механічні характеристики (пружний потенціал) і додаткові умови: умову однорідності початкових напружень, початкове поверхневе напруження $S_0^{33\{s\}} = S_0$ і умову рівності контактних нормальних початкових напружень $S_0^{33\{s\}} = S_0^{33\{s+1\}}$.

Якщо вважати, що навантаження рухається по прямій, розташованій під кутом φ до осі $\xi_1^{\{n\}}$, то координати рухомої системи координат будуть визначатися формулами

$$y_1 = \xi_1^{\{n\}} - v \cos \varphi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2^{\{n\}} - v \sin \varphi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3^{\{n\}}. \quad (3.11)$$

Значення коефіцієнтів $\theta_i^{\{s\}}$ залежать від способу створення шаруватого середовища. Якщо весь пакет стискувався або розтягувався одночасно, то можна прийняти $\theta_i^{\{s\}} = 1$. Якщо початкові напруження в елементах шаруватого півпростору створювалися незалежно, то врахування (3.10) при переході до рухомої системи координат (3.11) є необхідним. Будемо вважати, що має місце умова

$$\theta_i^{\{s\}} = 1; \quad i = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (3.12)$$

У координатах рухомої системи координат (3.11) за умови (3.12) рівняння руху (3.5) і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору (3.6) і (3.7) можна записати

рівняння руху

$$\left(\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=3} \tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (3.13)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_j^{\{s\}} = & \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(jj)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)} + \\ & + \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(j\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_\alpha} \Phi^{\{s\}(\alpha)} + \\ & + \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{C}_{m,n,p}^{\{s\}(j\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_\beta} \Phi^{\{s\}(\beta)}; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$j, \alpha, \beta = \overline{1,3}; \quad j \neq \alpha \neq \beta \neq j; \quad s = \overline{1, N+1};$$

Напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\beta\beta}^{\{s\}} = & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\beta\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)}; \\ \tilde{Q}_{\alpha\beta}^{\{s\}} = & \sum_{\substack{j,\zeta=\alpha,\beta \\ j \neq \zeta}} \frac{\partial}{\partial y_\zeta} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=2} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\alpha\beta j)} \frac{\partial^4}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(j)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} \left[\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=1} \tilde{E}_{m,n,p}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right] \Phi^{\{s\}(\gamma)}; \quad (3.15)$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 3}; \quad \alpha \neq \beta; \quad \gamma \neq \alpha; \quad \beta \neq \gamma; \quad s = \overline{1, N+1}.$$

В формулах (3.13)–(3.15) введені позначення

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3,0,0}^{\{s\}} &= A_{3,0,0,0}^{\{s\}} + A_{2,0,0,1}^{\{s\}} v^2 \cos^2 \varphi + A_{1,0,0,2}^{\{s\}} v^4 \cos^4 \varphi + A_{0,0,0,3}^{\{s\}} v^6 \cos^6 \varphi; \\ \tilde{A}_{0,3,0}^{\{s\}} &= A_{0,3,0,0}^{\{s\}} + A_{0,2,0,1}^{\{s\}} v^2 \sin^2 \varphi + A_{0,1,0,2}^{\{s\}} v^4 \sin^4 \varphi; \quad \tilde{A}_{0,0,3}^{\{s\}} = A_{0,0,3,0}^{\{s\}}; \\ \tilde{A}_{2,1,0}^{\{s\}} &= A_{2,1,0,0}^{\{s\}} + A_{1,1,0,1}^{\{s\}} v^2 \cos^2 \varphi; \quad \tilde{A}_{2,0,1}^{\{s\}} = A_{2,0,1,0}^{\{s\}}; \quad \tilde{A}_{0,2,1}^{\{s\}} = A_{0,2,1,0}^{\{s\}}; \\ \tilde{A}_{1,2,0}^{\{s\}} &= A_{1,2,0,0}^{\{s\}}; \quad \tilde{A}_{1,0,2}^{\{s\}} = A_{1,0,2,0}^{\{s\}} + A_{0,0,2,1}^{\{s\}} v^2 \cos^2 \varphi; \quad \tilde{A}_{0,1,2}^{\{s\}} = A_{0,1,2,0}^{\{s\}}; \\ \tilde{A}_{1,1,1}^{\{s\}} &= A_{0,0,1,2}^{\{s\}} v^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + A_{1,0,1,1}^{\{s\}} v^2 \sin^2 \varphi + A_{0,1,1,1}^{\{s\}} v^2 \cos^2 \varphi + A_{1,1,1,0}^{\{s\}}; \\ \tilde{C}_{2,0,0}^{\{s\}(11)} &= C_{2,0,0,0}^{\{s\}(11)} + v^4 \cos^4 \varphi C_{0,0,0,2}^{\{s\}(11)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{1,0,0,1}^{\{s\}(11)}; \quad \tilde{C}_{0,2,0}^{\{s\}(11)} = C_{0,2,0,0}^{\{s\}(11)}; \\ \tilde{C}_{1,1,0}^{\{s\}(11)} &= C_{1,1,0,0}^{\{s\}(11)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,1,0,1}^{\{s\}(11)}; \quad \tilde{C}_{1,0,1}^{\{s\}(11)} = C_{1,0,1,0}^{\{s\}(11)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,1,1}^{\{s\}(11)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(12)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(12)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(12)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(12)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(12)}; \quad \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(12)} = C_{0,0,1,0}^{\{s\}(12)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(13)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(13)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(13)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(13)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(13)}; \quad \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(13)} = C_{0,0,1,0}^{\{s\}(13)}; \\ \tilde{C}_{0,0,2}^{\{s\}(11)} &= C_{0,0,2,0}^{\{s\}(11)}; \quad \tilde{C}_{0,1,1}^{\{s\}(11)} = C_{0,1,1,0}^{\{s\}(11)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(21)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(21)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(21)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(21)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(21)}; \quad \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(21)} = C_{0,0,1,0}^{\{s\}(21)}; \\ \tilde{C}_{2,0,0}^{\{s\}(22)} &= C_{2,0,0,0}^{\{s\}(22)} + v^4 \cos^4 \varphi C_{0,0,0,2}^{\{s\}(22)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{1,0,0,1}^{\{s\}(22)}; \quad \tilde{C}_{0,2,0}^{\{s\}(22)} = C_{0,2,0,0}^{\{s\}(22)}; \\ \tilde{C}_{0,0,2}^{\{s\}(22)} &= C_{0,0,2,0}^{\{s\}(22)}; \quad \tilde{C}_{1,1,0}^{\{s\}(22)} = C_{1,1,0,0}^{\{s\}(22)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,1,0,1}^{\{s\}(22)}; \quad \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(23)} = C_{0,0,1,0}^{\{s\}(23)}; \\ \tilde{C}_{1,0,1}^{\{s\}(22)} &= C_{1,0,1,0}^{\{s\}(22)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,1,1}^{\{s\}(22)}; \quad \tilde{C}_{0,1,1}^{\{s\}(22)} = C_{0,1,1,0}^{\{s\}(22)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(23)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(23)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(23)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(23)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(23)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(31)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(31)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(31)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(31)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(31)}; \quad \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(31)} = C_{0,0,1,0}^{\{s\}(31)}; \\ \tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(32)} &= C_{1,0,0,0}^{\{s\}(32)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,0,1}^{\{s\}(32)}; \quad \tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(32)} = C_{0,1,0,0}^{\{s\}(32)}; \quad \tilde{C}_{0,0,2}^{\{s\}(33)} = C_{0,0,2,0}^{\{s\}(33)}; \\ \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(32)} &= C_{0,0,1,0}^{\{s\}(32)}; \quad \tilde{C}_{2,0,0}^{\{s\}(33)} = C_{2,0,0,0}^{\{s\}(33)} + v^4 \cos^4 \varphi C_{0,0,0,2}^{\{s\}(33)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{1,0,0,1}^{\{s\}(33)}; \\ \tilde{C}_{1,1,0}^{\{s\}(33)} &= C_{1,1,0,0}^{\{s\}(33)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,1,0,1}^{\{s\}(33)}; \quad \tilde{C}_{1,0,1}^{\{s\}(33)} = C_{1,0,1,0}^{\{s\}(33)} + v^2 \cos^2 \varphi C_{0,0,1,1}^{\{s\}(33)}; \\ \tilde{C}_{0,1,1}^{\{s\}(33)} &= C_{0,1,1,0}^{\{s\}(33)}; \quad \tilde{C}_{0,2,0}^{\{s\}(33)} = C_{0,2,0,0}^{\{s\}(33)}; \\ \tilde{E}_{2,0,0}^{\{s\}(111)} &= E_{2,0,0,0}^{\{s\}(111)} + v^4 \cos^4 \varphi E_{0,0,0,2}^{\{s\}(111)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{1,0,0,1}^{\{s\}(111)}; \quad \tilde{E}_{0,2,0}^{\{s\}(111)} = E_{0,2,0,0}^{\{s\}(111)}; \\ \tilde{E}_{1,1,0}^{\{s\}(111)} &= E_{1,1,0,0}^{\{s\}(111)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{0,1,0,1}^{\{s\}(111)}; \quad \tilde{E}_{1,0,1}^{\{s\}(111)} = E_{1,0,1,0}^{\{s\}(111)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{0,0,1,1}^{\{s\}(111)}; \\ \tilde{E}_{2,0,0}^{\{s\}(112)} &= E_{2,0,0,0}^{\{s\}(112)} + v^4 \cos^4 \varphi E_{0,0,0,2}^{\{s\}(112)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{1,0,0,1}^{\{s\}(112)}; \quad \tilde{E}_{0,2,0}^{\{s\}(112)} = E_{0,2,0,0}^{\{s\}(112)}; \\ \tilde{E}_{1,1,0}^{\{s\}(112)} &= E_{1,1,0,0}^{\{s\}(112)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{0,1,0,1}^{\{s\}(112)}; \quad \tilde{E}_{1,0,1}^{\{s\}(112)} = E_{1,0,1,0}^{\{s\}(112)} + v^2 \cos^2 \varphi E_{0,0,1,1}^{\{s\}(112)}; \end{aligned}$$

Коефіцієнти $\tilde{A}_{i,j,k}^{\{s\}}$, $\tilde{C}_{i,j,k}^{\{s\}(n\alpha)}$, $\tilde{E}_{i,j,k}^{\{s\}(\alpha\beta\gamma)}$ у виразах (3.13)–(3.15) є функціями параметрів v, φ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища: $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ – у випадку стисливого матеріалу і $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ – у випадку нестисливого матеріалу.

3.1.2. Рівняння руху та основні співвідношення у випадку симетричного початкового напруженого стану

У випадку симетричного початкового напруженого стану (3.4) в координатах (3.2) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору з урахуванням (3.1) можна записати так [26, 27, 30]:

рівняння руху

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_1 + \zeta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} - A^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi^{\{s\}} = 0; \\ & \left[\left(\Delta_1 + \zeta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} \right) \left(\Delta_1 + \zeta_3^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} \right) - \right. \\ & \left. - \left(B^{\{s\}} \Delta_1 + C^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D^{\{s\}} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] \chi^{\{s\}} = 0; \\ & \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^{\{s\}2}}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_1^{\{s\}} &= \frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial \xi_2^{\{s\}}} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}}; \quad u_2^{\{s\}} = -\frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}}} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_2^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}}; \\ u_3^{\{s\}} &= \left(\beta_1^{\{s\}} \Delta_1 + \beta_2^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} - \beta_3^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi^{\{s\}}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii}^{\{s\}} &= a_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_2^{\{s\}}} + \\ &+ \left(b_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2}} + b_{ii}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^{\{s\}2}} + b_{ii}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} - b_{ii}^{\{s\}(4)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_3^{\{s\}}}; \\ & i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \left(a_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2}} + a_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^{\{s\}2}} \right) \Psi^{\{s\}} - b_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^3 \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_2^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}}; \\
& \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \\
\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= a_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial \xi_2^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}} + \\
& + \left(b_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2}} + b_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^{\{s\}2}} + b_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} - b_{ij}^{\{s\}(4)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}}}; \\
& \quad i, j = 1, 3; \quad i \neq j; \\
\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= a_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial \xi_1^{\{s\}} \partial \xi_3^{\{s\}}} + \\
& + \left(b_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^{\{s\}2}} + b_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^{\{s\}2}} + b_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^{\{s\}2}} - b_{ij}^{\{s\}(4)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial \xi_2^{\{s\}}}; \\
& \quad i, j = 2, 3; \quad i \neq j,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

де коефіцієнти $A, B, C, D, \zeta_j, \beta_j, a_{ij}^{(m)}, b_{ij}^{(m)}$ у виразах (3.17)–(3.19) є функціями параметрів v, φ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища.

У випадку стисливого тіла

$$\begin{aligned}
A^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}-1}; \quad B^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}-1} D^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \right); \\
C^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}-1} D^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \right); \quad D^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}2} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}-1} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}-1}; \\
\beta_1^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}-1} \beta_3^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}}; \quad \beta_2^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}-1} \beta_3^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}; \quad \beta_3^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}} \right)^{-1}; \\
a_{ii}^{\{s\}(1)} &= \tilde{\omega}_{ii11}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{ii22}^{\{s\}}; \quad b_{ii}^{\{s\}(1)} = \frac{\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{ii33}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}} - \tilde{\omega}_{ii11}^{\{s\}}; \quad b_{ii}^{\{s\}(2)} = \frac{\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{ii33}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}} - \tilde{\omega}_{ii22}^{\{s\}}; \\
b_{ii}^{\{s\}(3)} &= \frac{\tilde{\omega}_{ii33}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad b_{ii}^{\{s\}(4)} = \frac{\tilde{\omega}_{ii33}^{\{s\}} \tilde{\varrho}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad i = \overline{1, 3}; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= -\tilde{\omega}_{ij21}^{\{s\}}; \quad a_{ij}^{\{s\}(2)} = \tilde{\omega}_{ij12}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = \tilde{\omega}_{ij12}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{ij21}^{\{s\}}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= \tilde{\omega}_{ij13}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(2)} = \frac{\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{ij31}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(3)} = \frac{\tilde{\omega}_{ij31}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}} - \tilde{\omega}_{ij13}^{\{s\}};
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{\{s\}(4)} &= \frac{\tilde{\omega}_{ij31}^{\{s\}} \tilde{\varrho}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad i, j = 1, 3; \quad i \neq j; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= -\tilde{\omega}_{ij23}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(2)} = \frac{\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{ij32}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(3)} = \frac{\tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{ij32}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}} - \tilde{\omega}_{ij23}^{\{s\}}; \\
b_{ij}^{\{s\}(4)} &= \frac{\tilde{\omega}_{ij32}^{\{s\}} \tilde{\varrho}^{\{s\}}}{\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}}; \quad i, j = 2, 3; \quad i \neq j; \\
\zeta_1^{\{s\}2} &= \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s-1\}}; \quad \zeta_{2,3}^{\{s\}2} = c^{\{s\}} \pm (c^{\{s\}2} - \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s-1\}} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s-1\}})^{\frac{1}{2}}; \\
2c^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} - (\tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}})^2,
\end{aligned}$$

а у випадку нестисливого тіла

$$\begin{aligned}
A^{\{s\}} &= \tilde{\varrho}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s-1\}}; \quad B^{\{s\}} = \tilde{\varrho}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s-1\}}; \quad C^{\{s\}} = \lambda_1^{\{s-2\}} q_1^{\{s-2\}} \lambda_3^{\{s-2\}} q_3^{\{s-2\}} B^{\{s\}}; \\
D^{\{s\}} &= 0; \quad \beta_1^{\{s\}} = \lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}} \lambda_3^{\{s-1\}} q_3^{\{s-1\}}; \quad \beta_2^{\{s\}} = \beta_3^{\{s\}} = 0; \\
a_{ii}^{\{s\}(1)} &= \tilde{\chi}_{ii11}^{\{s\}} - \tilde{\chi}_{ii22}^{\{s\}}; \\
b_{ii}^{\{s\}(1)} &= \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}} - \tilde{\chi}_{ii11}^{\{s\}} - \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}} q_3^{\{s\}}} (\tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}}) + \frac{\tilde{\chi}_{ii33}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}} q_3^{\{s\}}}; \\
b_{ii}^{\{s\}(2)} &= \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}} - \tilde{\chi}_{ii22}^{\{s\}} - \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}} q_3^{\{s\}}} (\tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}}) + \frac{\tilde{\chi}_{ii33}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}} q_3^{\{s\}}}; \\
b_{ii}^{\{s\}(3)} &= \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}}; \quad b_{ii}^{\{s\}(4)} = \frac{\tilde{q}_{ii}^{\{s\}} \tilde{\varrho}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}}}; \quad i = \overline{1, 3}; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= -\tilde{\chi}_{ij21}^{\{s\}}; \quad a_{ij}^{\{s\}(2)} = \tilde{\chi}_{ij12}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = \tilde{\chi}_{ij12}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{ij21}^{\{s\}}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= \tilde{\chi}_{ij13}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(2)} = \tilde{\chi}_{ij31}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}} \lambda_3^{\{s-1\}} q_3^{\{s-1\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(3)} = -\tilde{\chi}_{ij13}^{\{s\}}; \\
b_{ij}^{\{s\}(4)} &= 0; \quad i, j = 1, 3; \quad i \neq j; \\
a_{ij}^{\{s\}(1)} &= -\tilde{\chi}_{ij23}^{\{s\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(2)} = \tilde{\chi}_{ij32}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} q_1^{\{s\}} \lambda_3^{\{s-1\}} q_3^{\{s-1\}}; \quad b_{ij}^{\{s\}(3)} = -\tilde{\chi}_{ij23}^{\{s\}}; \\
b_{ij}^{\{s\}(4)} &= 0; \quad i, j = 2, 3; \quad i \neq j; \\
\zeta_1^{\{s\}2} &= \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1221}^{\{s-1\}}; \quad \zeta_{2,3}^{\{s\}2} = c^{\{s\}} \pm (c^{\{s\}2} - \lambda_1^{\{s-2\}} q_1^{\{s-2\}} \lambda_3^{\{s-2\}} q_3^{\{s-2\}} \tilde{\chi}_{3113}^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s-1\}})^{\frac{1}{2}}; \\
2c^{\{s\}} \tilde{\chi}_{1331}^{\{s\}} &= \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \lambda_1^{\{s-2\}} q_1^{\{s-2\}} \lambda_3^{\{s-2\}} q_3^{\{s-2\}} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - 2\lambda_1^{\{s-1\}} q_1^{\{s-1\}} \lambda_3^{\{s-1\}} q_3^{\{s\}} (\tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}}).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

З урахуванням (3.1) в координатах рухомої системи координат (3.11) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану шаруватого півпростору у випадку симетричного початкового напруженого стану (3.4) можна записати в загальному вигляді таким чином [26, 27, 30]:

рівняння руху

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi^{\{s\}} = 0; \\ & \left[\left(\Delta_1 + \zeta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \zeta_3^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\tilde{B}^{\{s\}} \Delta_1 + \tilde{C}^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D}^{\{s\}} \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} \right] \chi^{\{s\}} = 0; \end{aligned} \quad (3.22)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_1^{\{s\}} &= \frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_3}; \quad u_2^{\{s\}} = -\frac{\partial \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}}}{\partial y_2 \partial y_3}; \\ u_3^{\{s\}} &= \left(\tilde{\beta}_1^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3^{\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi^{\{s\}}; \end{aligned} \quad (3.23)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{ii}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_3}; \quad i = \overline{1,3}; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \left(\tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi^{\{s\}} - \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^3 \chi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}; \quad i, j = 1, 2; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_2 \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_1}; \quad i, j = 1, 3; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2 \Psi^{\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi^{\{s\}}}{\partial y_2}; \quad i, j = 2, 3. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В формулах (3.22)–(3.24) введені позначення

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{\{s\}} &= 1 - A^{\{s\}} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \quad \tilde{B}^{\{s\}} = B^{\{s\}} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \\ \tilde{C}^{\{s\}} &= C^{\{s\}} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \quad \tilde{D}^{\{s\}} = D^{\{s\}} \mathbf{v}^4 \cos^4 \varphi; \\ \tilde{\beta}_1^{\{s\}} &= \beta_1^{\{s\}} - \beta_3^{\{s\}} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \quad \tilde{\beta}_2^{\{s\}} = \beta_1^{\{s\}}; \quad \tilde{\beta}_3^{\{s\}} = \beta_2^{\{s\}}; \\ \tilde{a}_{ii}^{\{s\}(1)} &= a_{ii}^{\{s\}(1)}; \quad \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(1)} = b_{ii}^{\{s\}(1)} - b_{ii}^{\{s\}(4)} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \\ \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(2)} &= b_{ii}^{\{s\}(2)}; \quad \tilde{b}_{ii}^{\{s\}(3)} = b_{ii}^{\{s\}(3)}; \quad i = \overline{1,3}; \\ \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} &= a_{ij}^{\{s\}(1)}; \quad \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(2)} = a_{ij}^{\{s\}(2)}; \quad \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(1)}; \quad i, j = 1, 2; \\ \tilde{a}_{ij}^{\{s\}(1)} &= a_{ij}^{\{s\}(1)}; \quad \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(1)} = b_{ij}^{\{s\}(1)} - b_{ij}^{\{s\}(4)} \mathbf{v}^2 \cos^2 \varphi; \\ \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(2)} &= b_{ij}^{\{s\}(2)}; \quad \tilde{b}_{ij}^{\{s\}(3)} = b_{ij}^{\{s\}(3)}; \quad i, j = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Коефіцієнти \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} , $\tilde{\zeta}_j$, $\tilde{\beta}_j$, $\tilde{a}_{ij}^{(m)}$, $\tilde{b}_{ij}^{(m)}$ у виразах (3.17)–(3.19) є функціями параметрів v , φ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища.

3.1.3. Просторові граничні умови

Розглядаємо два варіанта контакту між елементами шаруватого середовища при $y_3 = -h_s$: жорсткий контакт і нежорсткий контакт. Умови контакту в загальному вигляді можна записати:

для шаруватої плити, що лежить на пружному півпросторі [24, 26]

$$\begin{aligned} u_3^{\{s\}} &= u_3^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{33}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{33}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{3j}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_j^{\{s+1\}} - u_j^{\{s\}}); \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

для шаруватої плити, що лежить на жорсткому півпросторі [27, 28, 30, 34]

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{33}^{\{s\}} &= \tilde{Q}_{33}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{3j}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}}; \quad (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_j^{\{s+1\}} - u_j^{\{s\}}); \\ u_3^{\{s\}} &= u_3^{\{s+1\}}; \quad u_3^{\{N\}} = 0; \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{3j}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_j^{\{N\}}; \quad s = \overline{1, N-1}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Тут $\theta_1^{\{s\}} = 1$ відповідає жорсткому контакту, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ – нежорсткому контакту між відповідними елементами шаруватого півпростору.

Граничні умови на вільній поверхні першого шару при $y_3 = 0$ мають вигляд

$$\tilde{Q}_{3j}^{\{1\}} = P_j \delta_{NN_1} \delta(y_1) \delta(y_2); \quad \tilde{Q}_{33}^{\{1\}} = P_3 \delta(y_1) \delta(y_2); \quad j = 1, 2, \quad (3.28)$$

де $N_1 = \sum_{s=1}^N \theta_1^{\{s\}}$.

3.2. Постановка двовимірних динамічних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії рухомого поверхневого навантаження

Загальна постановка класу задач, що досліджується, за основними пунктами збігається з постановкою тривимірних задач [3, 14, 25, 29, 31, 33, 50, 51–53].

Розглядається багатошарова смуга, що складається із N шарів, які лежать на пружному півпросторі або жорсткій основі (рис.3.2). Шари пронумеровані по

порядку $s = \overline{1, N}$ зверху вниз. Порядковий номер підстилаючого півпростору – $N + 1$.

Граничні поверхні шарів плоскі і паралельні між собою. Товщина шарів довільна і рівна h_s .

Елементи шаруватого середовища складаються з стисливих або нестисливих попередньо напружених ізотропних нелінійно-пружних матеріалів з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного тіла вважаємо, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей вибраної системи координат.

Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища є однорідним (3.1).

Тут x_i лагранжеві координати, які в природному стані збігаються з декартовими, $\lambda_i^{\{s\}}$ – видовження; δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ii}^{0\{s\}}$ – компоненти тензора узагальнених напружень.

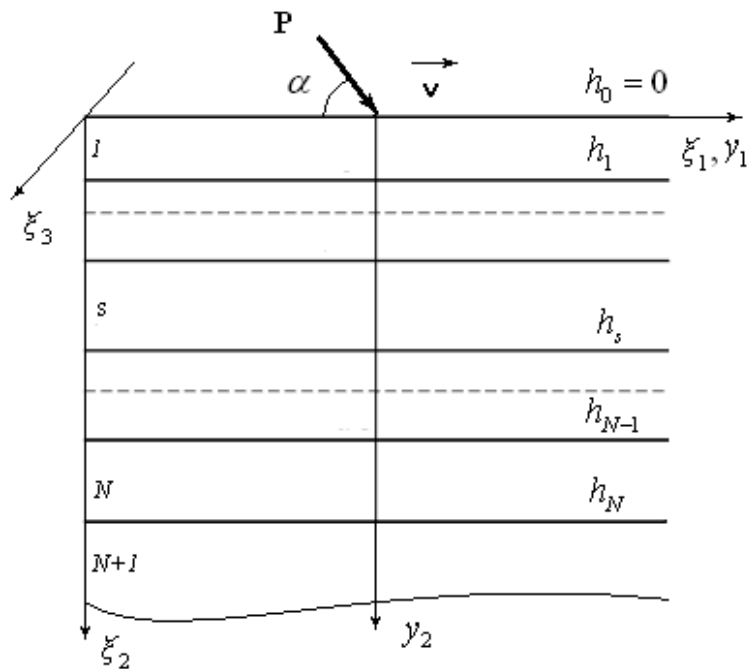


Рис. 3.2. Схематичне зображення багатошарової смуги

Багатошаровий напівпростір віднесений до декартової системи координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), яка відповідає початковому деформованому стану (3.2).

До вільної границі першого шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 . Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений плоский деформований стан.

Координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (3.29)$$

Також припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менші початкових напружень. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

3.2.1. Рівняння руху та основні співвідношення для плоских задач

У рухомій системі координат (3.29) рівняння усталеного руху елементів шаруватого середовища для стисливих і нестисливих тіл можна представити у вигляді [61, 64, 65]

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad (3.30)$$

$$j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1}.$$

Функції $\eta_j^{\{s\}}$ в рівняннях руху (3.30) визначаються із рівнянь

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0, \quad (3.31)$$

де для стисливого тіла

$$2A^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} \right)^2; \quad (3.32)$$

$$A_1^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right) \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right); \quad \tilde{\varrho}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} = \varrho^{\{s\}},$$

а для нестисливого

$$2A^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \left(\tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right) - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} \right); \quad (3.33)$$

$$A_1^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} \left(\tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\varrho}^{\{s\}} v^2 \right); \quad \tilde{q}_{ij}^{\{s\}} = \delta_{ij} \lambda_i^{\{s\}} q_i^{\{s\}}; \quad \tilde{\varrho}^{\{s\}} = \varrho^{\{s\}},$$

$\rho^{\{s\}}$ – щільність матеріалу елементів багат шарового середовища в природному стані. $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ і $\tilde{\chi}^{\{s\}}$ – параметри, що характеризують матеріал елементів багат шарового середовища.

Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}(v)$ і $\eta_2^{\{s\}2}(v)$ визначають вид рівнянь руху (3.30) і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Компоненти напружено-деформованого стану елементів багат шарового середовища визначаються по формулам [61, 64, 65]

$$\begin{aligned} u_i^{\{s\}} &= -\beta_{i1}^{(i)\{s\}} \frac{\partial^2 \chi^{(i)\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\sum_{p=1}^2 \beta_{ip}^{(j)\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \chi^{(j)\{s\}}; \\ \tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} &= \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{p=1}^2 \alpha_{ij}^{(pk)\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \frac{\partial \chi^{(k)\{s\}}}{\partial y_{k-(-1)^k \delta_{ij}}}; \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де у випадку стисливих тіл

$$\begin{aligned} \alpha_{jj}^{(22)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}); \quad \alpha_{jj}^{(12)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \\ \alpha_{mj}^{(21)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}); \quad \alpha_{mj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \\ \alpha_{jj}^{(21)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{(22)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}; \\ \alpha_{jj}^{(11)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}); \\ \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}); \\ \beta_{11}^{(1)\{s\}} &= \beta_{21}^{(2)\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}; \quad \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}; \quad \beta_{22}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \\ \beta_{11}^{(2)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2; \quad \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2; \quad m, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

а у випадку нестисливих тіл

$$\begin{aligned} \alpha_{22}^{(12)\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} (\tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \quad \alpha_{11}^{(12)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \alpha_{22}^{(12)\{s\}}; \\ \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} &= -\tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{22}^{(22)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}; \\ \alpha_{11}^{(22)\{s\}} &= \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} (2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}); \\ \alpha_{22}^{(11)\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-2} (\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) + \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} (2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}); \\ \alpha_{11}^{(11)\{s\}} &= -(\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}); \quad \alpha_{11}^{(21)\{s\}} = \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}^{(21)\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \alpha_{11}^{(21)\{s\}}; & \alpha_{mj}^{(22)\{s\}} &= \tilde{z}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; & \alpha_{mj}^{(11)\{s\}} &= \tilde{z}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \\
\alpha_{mj}^{(21)\{s\}} &= -\tilde{z}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; & m, j &= 1, 2; & \beta_{11}^{(1)\{s\}} &= \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \\
\beta_{21}^{(2)\{s\}} &= \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; & \beta_{11}^{(2)\{s\}} &= \beta_{22}^{(1)\{s\}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

3.2.2. Граничні умови для двовимірних задач

Граничні умови для двовимірних задач запишемо у вигляді:

на поверхні першої смуги при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \delta_{\theta N} P_1 \delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2 \delta(y_1), \tag{3.37}$$

на межах розділу між смугами при $y_2 = -h_s$

у випадку для пружної основи [3, 14, 29, 33, 50, 51]

$$\begin{aligned}
u_2^{\{s\}} &= u_2^{\{s+1\}}; & \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} &= \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; & \tilde{Q}_{21}^{\{s\}} &= \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\
(1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); & s &= \overline{1, N},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

у випадку жорсткої основи [25, 31, 33, 52, 53]

$$\begin{aligned}
u_2^{\{s\}} &= u_2^{\{s+1\}}; & \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} &= \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; & \tilde{Q}_{21}^{\{s\}}|_{y_2=-h_s} &= \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\
(1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} &= \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); & s &= \overline{1, N-1}; \\
u_2^{\{N\}} &= 0; & (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{N\}} &= \theta_1^{\{N\}} u_1^{\{N\}}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Вивчалоя два варіанти контакту між елементами багатошарового середовища і основи: жорсткий та нежорсткий. Для жорсткого контакту $\theta_1^{\{s\}} = 1$, а для нежорсткого контакту $\theta_1^{\{s\}} = 0$. Параметр θ в умовах (3.37) визначається

$$\text{по формулі } \theta = \sum_{s=1}^N \theta_1^{\{s\}}.$$

При викладених вище умовах маємо плоску усталену задачу в площині $y_1 O y_2$, що полягає в спільному розв'язуванні рівнянь руху (3.30) при відповідних граничних умовах на поверхні першої смуги (3.37), умов контакту (3.38) або (3.39) і умов затухання на нескінченності.

Таким чином, при використанні загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії задачі, що розглядаються, зводяться до краєвих задач для функцій $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$).

3.3. Про фундаментальні розв'язки для точкового навантаження

У наведених вище постановках розглядається зосереджене точкове навантаження.

Фундаментальний розв'язок (функція Гріна) для зосередженого точкового навантаження є базовим елементом, на основі якого можна побудувати розв'язки для будь-якого реального навантаження за допомогою процедур згортки та інтегрування.

Якщо система є лінійною, то відповідь на складне навантаження дорівнює сумі відповідей на його окремі складові (принцип суперпозиції):

$$u(x) = \int G(x - \xi) p(\xi) d\xi, \quad (3.40)$$

де $G(x, \xi)$ – фундаментальна функція (зміщення від одиничного точкового навантаження), $p(\xi)$ – реальне розподілене навантаження.

Фундаментальні розв'язки для точкового навантаження є базовими розв'язками, за допомогою яких через принцип суперпозиції будуються відповіді для будь-яких реальних розподілених, гармонічних або рухомих навантажень. Реальне навантаження подається у вигляді інтегралу від елементарних δ -навантажень, а повне поле – у вигляді згортки фундаментального розв'язку з функцією навантаження (3.40). Це дозволяє отримати фізично коректні й математично обґрунтовані розв'язки для широкого класу задач хвильової динаміки, включно з задачами рухомих навантажень, ударних джерел і складних розподілів тиску.

Застосування згортки (конволюції) у лінеаризованих задачах є повністю коректним за умови дотримання визначального принципу: згортка коректна лише для лінійних і стаціонарних систем.

У більшості фізичних задач (механіка ґрунтів, хвильова динаміка, шаруваті основи, початкові напруження) вихідні рівняння нелінійні, але вони

лінеаризуються при малих відхиленнях від базового (статичного) стану. Лінеаризація відбувається навколо стаціонарного напруженого стану, отримані рівняння стають лінійними з постійними або кусочно-постійними коефіцієнтами.

У такій постановці застосування згортки є повністю коректним, оскільки після лінеаризації система має лінійний оператор, просторову однорідність у межах кожного шару та можливість коректного визначення відповідної функції Гріна.

Саме так працюють методи інтегральних перетворень (Фур'є, Лапласа), спектральні методи, методи Гріна та представлена в розділі 4 регуляризаційно-спектральна схема.

Таким чином, згорткові представлення в динамічних задачах для шаруватих основ є фізично та математично коректними за умови лінеаризації поблизу початково напруженого стану. Отримані лінійні рівняння з постійними або кусочно-постійними коефіцієнтами забезпечують виконання принципів суперпозиції та інваріантності, необхідних для застосування згортки та функцій Гріна, що робить ці підходи повністю обґрунтованими в класі малих динамічних відхилень.

3.4. Результати та висновки

В даному розділі наведені загальні постановки тривимірних і двовимірних задач про усталений рух шаруватого попередньо напруженого стисливого або нестисливого півпростору, на вільну границю якого діє рухоме навантаження. Ці постановки включають рівняння руху, основні співвідношення пружності та граничні умови. Початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища вважався однорідним. Для тривимірних задач розглянуто загальний і симетричний випадки початкового напруженого стану.

РОЗДІЛ 4

РЕГУЛЯЦІЙНО-СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД ЗІ СТРУКТУРНОЮ РЕГУЛЯРИЗАЦІЄЮ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ ПІД ДІЄЮ РУХОМИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Сучасні задачі динаміки багатошарових пружних середовищ розв'язуються переважно за допомогою трьох груп методів: *чисельних, матричних і інтегральних*. Кожен з них має власні переваги й обмеження, що обумовлюють їхню сферу застосування та ефективність.

Чисельні методи (метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, спектрально-елементний метод) забезпечують універсальність і можливість моделювання складних геометрій, нелінійностей та довільних граничних умов. Вони широко застосовуються у прикладній інженерії, але потребують значних обчислювальних ресурсів і часто нечутливі до хвильової фізики при великих частотах та сильному контрасті параметрів між шарами. Крім того, чисельні розрахунки для необмежених або напівнеобмежених середовищ потребують спеціальних процедур поглинання хвиль, що ускладнює моделювання.

Матричні методи (трансфер-матричний, скатеринг-матричний, метод глобальної матриці) добре зарекомендували себе для моделювання багатошарових структур, оскільки дозволяють аналітично описати узгодження хвильових полів на межах шарів. Їх перевагою є компактність та алгоритмічна простота. Разом із тим традиційні трансфер-матричні схеми схильні до втрати чисельної стійкості при великій товщині шарів або значному контрасті властивостей, а глобальні матриці часто містять експоненційно зростаючі компоненти, що ускладнюють стабілізацію розрахунків.

Інтегральні (спектральні) методи, зокрема метод подвійного інтегрального перетворення Фур'є, є найточнішими з точки зору хвильової фізики. Вони дають можливість отримувати розв'язки в замкненій формі та чітко відокремлювати поверхневі й об'ємні хвилі. Однак їх практичне застосування пов'язане з

труднощами обчислення обернених інтегралів, необхідністю регуляризації та деформації контурів інтегрування (конттури Зоммерфельда), що робить методи чутливими до сингулярностей спектра та перешкоджає їх широкому практичному використанню.

Інтегральний метод Фур'є є одним із найефективніших аналітичних засобів для розв'язання динамічних задач механіки пружних та шаруватих середовищ. Він дозволяє звести просторово-часові рівняння руху до систем алгебраїчних рівнянь у просторі хвильових чисел, що спрощує аналіз і дає можливість отримати узагальнені розв'язки у спектральній формі. Проте при його застосуванні до задач про динамічну поведінку багат шарових основ під дією рухомого навантаження виникає низка специфічних проблем, пов'язаних як із математичними особливостями інтегральних перетворень, так і з фізичною коректністю отриманих результатів [62, 178, 179, 235].

Однією з основних труднощів є осциляційний характер обернених інтегралів. При великих відстанях або високих частотах інтеграл набуває сильно осциляційної поведінки, що призводить до втрати точності при чисельному інтегруванні. Для подолання цієї проблеми застосовують методи деформації контурів інтегрування у комплексній площині або метод найшвидшого спаду, які дозволяють виділити головні внески від основних хвильових компонент.

Другою важливою проблемою є забезпечення фізично коректного (радіаційного) розв'язку. Звичайний інтеграл Фур'є включає як вхідні, так і вихідні хвилі, тому для отримання реалістичного поля необхідно деформувати контур інтегрування за схемою Зоммерфельда. У багат шарових середовищах ця процедура ускладнюється наявністю численних полюсів, що відповідають власним хвилям Релея, Лява та Стоунлі. Неправильний вибір контуру може призвести до появи нефізичних хвиль або розбіжності інтегралу.

Третя група труднощів пов'язана із наявністю особливостей спектральних функцій. Полюси та точки розгалуження вказують на переходи між розповсюджуваними та згасаючими хвилями, тому їхній внесок потрібно враховувати окремо. Нехтування цими компонентами призводить до спотворення хвильової картини, особливо поблизу поверхні контакту.

Крім того, обернені інтеграли Фур'є для багатосарових основ часто мають повільну збіжність. Це спричинено відсутністю швидкого згасання амплітудних функцій при великих хвильових числах. Для покращення збіжності застосовують регуляризаційні множники або розділення інтегралу на хвильову та квазістатичну частину.

При чисельній реалізації інтегрального методу Фур'є за допомогою алгоритмів швидкого перетворення (FFT) виникають додаткові проблеми — ефект накладання спектрів (аліасинг), катастрофічне скорочення при обчисленні різниць комплексних чисел, а також чутливість результатів до вибору кроку дискретизації. Ці фактори особливо суттєві при швидкостях навантаження, близьких до критичних, коли амплітуди коливань різко зростають.

У випадку попередньо напружених шаруватих середовищ виникають додаткові труднощі, пов'язані з появою комплексних хвильових чисел. Це потребує спеціальних процедур відокремлення стабільних і нестабільних компонент поля, що ускладнює як аналітичний, так і чисельний аналіз.

Таким чином, застосування інтегрального методу Фур'є до задач про динамічну поведінку багатосарових основ при дії рухомого навантаження вимагає ретельного врахування математичних і фізичних аспектів. Основними шляхами підвищення ефективності цього методу є вдосконалення контурних методів інтегрування, використання асимптотичних підходів для виділення головних внесків і застосування стабілізованих чисельних схем FFT.

Вказані обмеження зумовлюють потребу в методі, який одночасно зберігав би аналітичну глибину спектральних підходів, стабільність матричних схем та числову ефективність, необхідну для розрахунків багатосарових систем. Саме з цією метою у цій дисертаційній роботі розроблено регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією [54], який усуває ключові недоліки існуючих підходів і забезпечує фізично коректне та чисельно стабільне моделювання хвильових процесів у багатосарових середовищах.

4.1. Теоретичні засади запропонованого регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією підходу

Запропонований метод ґрунтується на застосуванні *інтегрального перетворення Фур'є* за просторовими координатами. Застосування прямих інтегральних перетворень Фур'є дозволяє отримати систему звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Для розв'язування таких рівнянь можна застосувати метод характеристичних рівнянь або метод Ейлера (алгебраїчний метод, символічний метод і т. д.). Трансформовані рівняння руху визначають вибір розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь. Класичне представлення такого розв'язку для плоских задач для окремого шару має вигляд

$$\chi^{F\{s\}} = C_1^{\{s\}} e^{k_1^{\{s\}} k_{\eta_1^{\{s\}}} y_2} + C_2^{\{s\}} e^{-k_1^{\{s\}} k_{\eta_1^{\{s\}}} y_2} + C_3^{\{s\}} e^{k_2^{\{s\}} k_{\eta_2^{\{s\}}} y_2} + C_4^{\{s\}} e^{-k_2^{\{s\}} k_{\eta_2^{\{s\}}} y_2}. \quad (4.1)$$

Пряме застосування такого представлення розв'язку дозволяє отримати розв'язок задачі в просторі зображень Фур'є, але забезпечує всі зазначені вище проблеми при оберненому інтегруванні. Ці проблеми значно зростають, якщо шарувата структура багат шарова.

Представлення розв'язку для такого елемента шаруватої основи як півпростір, як правило, має вигляд

$$\chi^{F\{N\}} = C_1^{\{N\}} e^{k_1^{\{N\}} k_{\eta_1^{\{N\}}} y_2} + C_3^{\{N\}} e^{k_2^{\{N\}} k_{\eta_2^{\{N\}}} y_2}. \quad (4.2)$$

Для півпростору розв'язок (4.2) задовольняє умовам затухання Зоммерфельда. Нефізична (зростаюча) складова відкидається на основі радіаційних умов.

Представлення (4.1) забезпечує визначеність системи алгебраїчних рівнянь, але не відповідає радіаційним умовам і фізиці процесу (хвилі поширюються назовні від джерела, а не «входять» з нескінченності). Як результат - необхідність складного переходу від інтегралів Фур'є до інтегралів Зоммерфельда.

Для смуги виконання умови Зоммерфельда на цьому етапі можна забезпечити, ввівши спеціальні множники, що забезпечують затухання пружних

хвиль на нескінченності. Ці множники представляють собою значення фундаментальних розв'язків на верхній і нижній межі смуги. Розв'язок для смуги буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 \chi^{F\{s\}} &= C_1^{\{s\}} e^{k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + C_2^{\{s\}} e^{-k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + \\
 &+ C_3^{\{s\}} e^{k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + C_4^{\{s\}} e^{-k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} = \\
 &= C_1^{\{s\}} \underline{e^{k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} h_{s-1}}} e^{k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} y_2} + C_2^{\{s\}} \underline{e^{-k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} h_s}} e^{-k_1^{\{s\}} k \eta_1^{\{s\}} y_2} + \\
 &+ C_3^{\{s\}} \underline{e^{k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} h_{s-1}}} e^{k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} y_2} + C_4^{\{s\}} \underline{e^{-k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} h_s}} e^{-k_2^{\{s\}} k \eta_2^{\{s\}} y_2};
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для шару, розташованого між двома межами, залишаються всі складові, при цьому вони забезпечують узгодження хвильового поля з сусідніми шарами.

Після підстановки розв'язків (4.3) в трансформовані граничні умови отримаємо неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $C_j^{\{s\}}$, що забезпечує стабільне зв'язування цих складових.

Метод розв'язку неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь – будь-який (в даному випадку метод Гаусса). Підставивши значення $C_j^{\{s\}}$ у відповідні вирази для компонентів напружено-деформованого стану, отримаємо розв'язок задачі в області зображень Фур'є.

На цьому етапі обернені інтеграли є збіжними, але можуть мати сингулярності. Застосування такого представлення розв'язку не виключає необхідності дослідження існування кратних коренів дисперсійного рівняння. При наявності простих полюсів для обчислення обернених інтегралів може бути використаний алгоритм, що базується на інтегруванні у сенсі головного значення Коші.

Збіжність інтегралів досягається конструктивно – завдяки структурній регуляризації, що передбачає відбір фізично допустимих хвильових складових, які задовольняють радіаційні умови.

Для опису взаємодії шарів введено систему *регуляційних коефіцієнтів* (4.3), які забезпечують енергетичну узгодженість і чисельну стабільність розв'язку.

Зважаючи на метод розв'язку системи алгебраїчних рівнянь можна стверджувати, що такий підхід дозволяє отримати точний розв'язок задачі.

Запропонований підхід поєднує аналітичну точність і фізичну коректність із обчислювальною ефективністю, що робить його придатним для дослідження хвильових процесів у багатошарових конструкціях, геоматеріалах та технічних основах.

4.2. Структурна регуляризація

Ключовою особливістю методу є те, що регуляризація інтегрального представлення не вводиться явно, як у класичних підходах (зсув контуру Зоммерфельда, додавання параметра згасання, штучні поглинаючі множники тощо).

Замість цього збіжність інтеграла забезпечується на рівні конструкції спектрального розв'язку.

Структурна регуляризація полягає у тому, що:

- у спектральній області зберігаються лише ті хвильові складові, які відповідають фізично допустимому переносу енергії;
- нефізичні компоненти (які зростають при віддаленні від джерела) не включаються у спектральний розв'язок;
- завдяки цьому обернений інтеграл за просторовими частотами стає природно збіжним, без будь-яких додаткових аналітичних операцій.

Таким чином, регуляризація є внутрішньою властивістю методу, а не окремою процедурою.

4.3. Регуляційні коефіцієнти та їх роль

Для стабільного узгодження хвильових полів між межами шару вводиться поняття регуляційних коефіцієнтів.

Регуляційні коефіцієнти – це параметри, що визначають зв'язок між значеннями переміщень та напружень на верхній і нижній межах шару:

$$\begin{bmatrix} u(h) \\ \sigma(h) \end{bmatrix} = \mathfrak{R}(h) \begin{bmatrix} u(0) \\ \sigma(0) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Регуляційні коефіцієнти:

- стабілізують алгебраїчну систему рівнянь,
- компенсують експоненційний ріст і спад розв'язків,
- забезпечують коректне передавання хвильової енергії між шарами,
- роблять метод стійким навіть для товстих шарів і матеріалів із великим контрастом параметрів.

У результаті багатоетапне узгодження шарів зводиться до компактних матричних операцій, стійких у широкому діапазоні параметрів.

4.4. Алгоритмічна структура методу

Метод складається з таких етапів:

1. Перехід до спектральної області методом Фур'є.
2. Формування хвильових складових у кожному шарі.
3. Відбір фізично допустимих складових (структурна регуляризація).
4. Побудова регуляційних коефіцієнтів для кожного шару.
5. Формування глобальної спектральної матриці із застосуванням регуляційних коефіцієнтів.
6. Визначення спектральних амплітуд.
7. Відновлення фізичного розв'язку за оберненим перетворенням Фур'є (інтеграл збіжний).

Усі кроки мають чітку фізичну інтерпретацію й не потребують операцій деформації контурів або введення штучних функцій згасання.

4.5. Фізична інтерпретація регуляційно-спектрального методу

Фізичний зміст розробленого регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією полягає в тому, що хвильове поле в багат шаровому пружному середовищі представляється як суперпозиція гармонічних складових різних типів – об'ємних і поверхневих хвиль, які поширюються та взаємодіють на межах шарів.

У процесі побудови спектрального розв'язку автоматично відкидаються нефізичні складові, що відповідають хвилям, які зростають при віддаленні від джерела, а зберігаються лише ті компоненти, які описують передавання енергії від поверхні вглиб середовища згідно з радіаційними умовами.

Введення регуляційних коефіцієнтів дозволяє описати узгодження хвильових полів між окремими шарами без порушення енергетичного балансу системи, що забезпечує фізично коректну передачу та відбиття хвиль.

Фізично метод відображає ієрархію хвильових процесів у шаруватому середовищі:

- у кожному шарі формуються комбінації об'ємних і поверхневих хвиль;
- регуляційні коефіцієнти визначають частку енергії, що передається та відбивається;
- структурна регуляризація гарантує, що хвиля не зростає при віддаленні від джерела;
- перехід до фізичного простору виконується збіжним інтегралом, який представляє сумарний спектр хвильових мод.

Метод є фізично коректним, оскільки суворо відповідає принципам випромінювання та збереження енергії.

Таким чином, метод реалізує послідовну хвильову модель, у якій структурна регуляризація забезпечує згасання енергії на нескінченності, а регуляційні коефіцієнти – стабільне узгодження полів у шаруватій структурі.

4.6. Переваги та відмінності запропонованого методу

Фізична коректність рішення. Метод базується на спектральному представленні поля, у якому від початку враховано радіаційні умови. Це дозволяє автоматично виключити нефізичні (зростаючі) хвильові складові й забезпечити природну збіжність інтегралів без потреби в додатковій регуляризації.

Внутрішня (структурна) регуляризація. На відміну від класичних підходів, де регуляризація виконується штучно (через контур Зоммерфельда або параметри згасання), у запропонованому методі збіжність забезпечується

конструктивно – завдяки правильному формуванню спектра та відбору фізично допустимих складових.

Регуляційний механізм узгодження шарів. Введення регуляційних коефіцієнтів дозволяє описати передачу хвильових полів між межами шарів у компактній матричній формі. Такий підхід стабілізує розрахунки, усуває числові вибухи при великій товщині шарів і підвищує точність для систем із різким контрастом властивостей.

Єдність аналітичної та числової реалізації. Метод зберігає аналітичну прозорість класичних інтегральних рішень і водночас легко реалізується в обчислювальній формі (у вигляді стабілізованої матричної схеми), що робить його придатним для чисельного аналізу широкого класу задач.

Можливість узагальнення. Метод не обмежується конкретною кількістю шарів або типом навантаження. Його можна адаптувати до пружних, в'язкопружних і композитних середовищ, до різних умов збурення — від гармонічних до рухомих динамічних навантажень.

Енергетична узгодженість і стійкість. Побудова хвильових полів через регуляційні коефіцієнти забезпечує енергетичний баланс системи при відбитті й передаванні хвиль. Це дозволяє одержувати стійкі результати навіть у резонансних режимах.

4.7. Місце запропонованого регуляційно-спектрального методу серед існуючих підходів

У сучасній механіці деформівного тіла широко використовуються чисельні, інтегрально-спектральні та матричні методи розв'язання задач динаміки шаруватих середовищ. В таблиці 4.1. проведено порівняння підходів до моделювання динаміки багат шарових середовищ.

Таблиця 4.1. Порівняння підходів до моделювання динаміки багатошарових середовищ

Критерій	Чисельні методи (FEM, FDM, SEM, FEM-PML)	Матричні методи (Transfer Matrix, Global Matrix, Scattering Matrix)	Інтегральні методи (Фур'є, Ганкеля, Лапласа)	Регуляційно-спектральний метод
1	2	3	4	5
Тип моделі	Дискретизована модель області	Аналітичне узгодження шарів	Аналітичне спектральне представлення	Гібрид аналітичного спектрального та стабілізованого матричного підходів
Точність хвильового опису	Обмежена сіткою, погіршується на високих частотах	Висока в межах шару	Дуже висока	Дуже висока (повний хвильовий спектр)
Поведінка при високих частотах	Потребує надгустої сітки	Нестійкість через експоненціальні члени	Труднощі контурної деформації	Стабільне обчислення (структурна регуляризація)
Нескінченні області	Потрібні PML/ABC, іноді нестабільні	Неописувані напряму	Природне моделювання півпростору	Природне моделювання півпростору й шарів
Контрастність параметрів шарів	Погіршення збіжності сітки	Втрата числової стійкості	Осциляційні інтеграли, полюси	Стійкість завдяки регуляційним коефіцієнтам
Згладження сингулярностей	Чисельно важке	Важке або неможливе	Потребує регуляризації	Виконується конструктивно (вбудовано)
Потреба у регуляризації	Можлива	Наявна	Обов'язкова (контур Зоммерфельда)	Відсутня (структурна регуляризація)
Можливість повного аналітичного опису	Немає	Частково	Є	Є
Складність реалізації	Висока	Середня	Дуже висока	Середня

Таблиця 4.1 (продовження). Порівняння підходів до моделювання динаміки багат шарових середовищ

1	2	3	4	5
Обчислювальна вартість	Висока	Низька–середня	Дуже висока	Низька–середня
Узгодження між шарами	Немає спеціальних механізмів	Добре, але нестабільне	Присутнє через інтеграл, але громіздке	Стабільне (регуляційні коефіцієнти)
Поведінка при резонансах	Можливі числові збої	Часто нестійкі	Поява складних сингулярностей	Стабільний опис, контроль полюсів
Мобільні/рухомі навантаження	Важко моделювати без спеціальних схем	Частково	Можливо, але складно	Природним чином описуються у спектрі
Фізична коректність	Залежить від сітки та ABC/PML	Висока у межах шару	Максимальна	Максимальна
Головний недолік	Висока обчислювальність і погана хвильова точність	Побудова нестійкої глобальної матриці	Осциляційні інтеграли, контур Зоммерфельда	Потребує формування регуляційних коефіцієнтів (алгебра складніша)
Головна перевага	Універсальність	Просте узгодження шарів	Повна хвильова інформація	Висока точність, стабільність, природна збіжність

Порівняння показує, що:

- чисельні методи забезпечують універсальність, але потребують значних обчислювальних ресурсів і чутливі до моделювання нескінченних областей;
- матричні методи компактні й аналітично зрозумілі, однак втрачають стійкість при великій товщині шарів або високих частотах;
- інтегральні методи забезпечують найповніший опис хвильової фізики, але складні у практичній реалізації через необхідність регуляризації та контурної деформації;

- регуляційно-спектральний метод успадковує сильні сторони всіх підходів і усуває їх слабкі місця, забезпечуючи структурну регуляризацію, стійке узгодження шарів та природну збіжність спектральних інтегралів.

Таким чином, розроблений метод займає проміжне місце між класичними інтегральними та матричними підходами, реалізуючи їхні переваги в єдиній узгодженій формі:

- від інтегральних методів він успадковує фізичну повноту спектрального опису;

- від матричних – ефективність і стабільність числової реалізації.

Це забезпечує можливість моделювання складних хвильових процесів у багатошарових середовищах без необхідності додаткової регуляризації або деформації контурів інтегрування.

4.8. Область застосування регуляційно-спектрального методу

Запропонований регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією може бути застосований для широкого класу задач динаміки багатошарових пружних, в'язкопружних і композитних середовищ. Метод забезпечує стабільне обчислення хвильових полів у системах із високою контрастністю механічних властивостей, наявністю тонких прошарків, початкових напружень та рухомих джерел навантаження. Завдяки поєднанню спектрального подання із регуляризаційними множниками метод дозволяє отримувати фізично коректні, збіжні й аналітично контрольовані розв'язки навіть у випадках, де традиційні матричні або інтегральні схеми втрачають ефективність.

Метод може використовуватися при аналізі динаміки транспортних, дорожніх і залізничних основ, у задачах взаємодії рухомого навантаження з багатошаровими конструкціями, а також для оцінювання резонансних ефектів і дисперсії поверхневих та об'ємних хвиль. У випадках наявності початкового напруженого стану метод забезпечує коректний облік змін хвильового спектра, включно з модифікацією фазових швидкостей і умов резонансності.

Окреме значення метод має у задачах з різко контрастними властивостями матеріалів, де він гарантує числову стійкість і усуває проблеми, пов'язані з експоненціальним зростанням спектральних складових. Це робить його придатним для моделювання багатошарових композитних елементів, сендвіч-панелей, функціонально-градієнтних матеріалів та геотехнічних структур із тонкими слабкими або армувальними шарами.

Висока точність отриманих спектральних представлень дозволяє використовувати метод як еталонний для перевірки чисельних методів (FEM, FDM, BEM), оптимізації параметрів інженерних конструкцій та інтерпретації експериментальних даних. Крім того, підхід може застосовуватися в геофізичних і сейсмічних задачах для моделювання поширення хвиль у багатошаровій земній корі, аналізу поверхневих хвиль і дослідження підповерхневих структур.

Таким чином, регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією є універсальним і ефективним інструментом для широкого спектра задач хвильової динаміки й механіки шаруватих середовищ та може використовуватися як у наукових дослідженнях, так і практичних інженерних розрахунках.

4.9. Результати та висновки

Існуючі інтегральні методи точні, але важко реалізуються через необхідність регуляризації; матричні методи стабільні, але втрачають точність при великій контрастності шарів.

Запропонований регуляційно-спектральний метод поєднує їхні переваги, реалізуючи збіжність інтегралів і стабільність обчислень у межах єдиної узгодженої схеми.

Завдяки цьому метод придатний для дослідження складних багатошарових систем і рухомих навантажень.

РОЗДІЛ 5

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ПРО УСТАЛЕНИЙ РУХ ШАРУВАТОГО ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ РЕГУЛЯЦІЙНО-СПЕКТРАЛЬНИМ МЕТОДОМ

У розділі відповідно до постановок, наведених в розділі 3, подано розв'язок просторових і плоских задач про дію рухомого навантаження на багат шаровий півпростір із залишковими напруженнями. Для отримання фізично коректних спектральних представлень застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією.

5.1. Просторові задачі для шаруватого півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження

При викладених в розділі 3 умовах маємо тривимірну усталену задачу, що полягає в розв'язуванні систем рівнянь руху (3.13) або (3.22) при відповідних граничних умовах на вільній поверхні першого шару (3.28) і умовах контакту елементів шаруватого середовища (3.26) або (3.27) і умові затухання на нескінченності.

Для розв'язування задачі скористаємося подвійним перетворенням Фур'є за координатами y_1 і y_2 .

Розв'язок задачі отримуємо в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

5.1.1. Розв'язок задач у випадку загального початкового напруженого стану

У випадку загального початкового напруженого стану (3.3) в просторі зображень Фур'є рівняння руху (3.13) можна представити у вигляді

$$\left(B_1^{\{s\}} \frac{d^6}{dy_3^6} - B_2^{\{s\}} \frac{d^4}{dy_3^4} + B_3^{\{s\}} \frac{d^2}{dy_3^2} - B_4^{\{s\}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \tilde{A}_{0,0,3}^{\{s\}}; \quad B_2 = k_1^2 \tilde{A}_{1,0,2}^{\{s\}} + k_2^2 \tilde{A}_{0,1,2}^{\{s\}}; \quad B_3 = k_1^4 \tilde{A}_{2,0,1}^{\{s\}} + k_2^4 \tilde{A}_{0,2,1}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^2 \tilde{A}_{1,1,1}^{\{s\}}; \\ B_4 &= k_1^6 \tilde{A}_{3,0,0}^{\{s\}} + k_2^6 \tilde{A}_{0,3,0}^{\{s\}} + k_1^4 k_2^2 \tilde{A}_{2,1,0}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^4 \tilde{A}_{1,2,0}^{\{s\}}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

де k_1, k_2 - параметри подвійного перетворення Фур'є.

Розв'язок рівнянь (5.1) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi^{\{s\}F(j)} &= \delta_0^{\{s\}(j)} \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_2^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_s)} + \right. \\ &+ \left[1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_3 + h_s) \right] \left[C_3^{\{s\}(j)} e^{\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right] \\ &+ \left[1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} (y_3 + h_s) + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} (y_3 + h_s)^2 \right] \times \\ &\times \left[C_5^{\{s\}(j)} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_6^{\{s\}(j)} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right] \left. \right\}; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тут

$$\delta_0^{\{s\}(j)} = 1 + \delta_{2j} \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \right)^2 - \left(\delta_{2j} + \delta_{3j} \right) \left(1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right); \quad \delta_{\mu_m\mu_j}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & \mu_m^2 = \mu_j^2 \\ 0, & \mu_m^2 \neq \mu_j^2 \end{cases}; \quad (5.4)$$

$$\gamma_j^{\{s\}} = \sigma_j^{\{s\}} \mu_j^{\{s\}},$$

$\mu_j^{\{s\}2}$ ($j = \overline{1,3}$) - корені бікубічного характеристичного рівняння диференціального рівняння (5.1); $\sigma_j^{\{s\}} \equiv \sigma^{\{s\}} = \left| \mu_j^{\{s\}} \right| / \mu_j^{\{s\}}$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} > 0$, $\sigma_j^{\{s\}} = i$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} < 0$ і $\gamma_j^{\{s\}} = \sigma \operatorname{Re} \mu_j^{\{s\}} - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j^{\{s\}}$, якщо μ_j^2 приймає комплексні значення.

Розв'язок (5.3) включає випадки рівних і нерівних коренів бікубічного характеристичного рівняння диференціального рівняння (5.1) (параметр $\delta_{\mu_m\mu_j}^{\{s\}}$) та регуляційні коефіцієнти для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{\gamma_j^{\{s\}}h_{s-1}}$, $e^{-\gamma_j^{\{s\}}h_s}$, $j = \overline{1,3}$).

Введемо постійні інтегрування

$$C_j^{\{s\}} = i^{\delta_{3m}} C_j^{\{s\}(m)}; \quad j = \overline{1,6}; \quad m = \overline{1,3}. \quad (5.5)$$

Трансформанти виразів (3.14) і (3.15) з урахуванням (5.3) і (5.5) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
u_n^{\{s\}F} &= i^{\delta_{3n}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{m-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s\}(n)} (y_3 + h_s)^{m-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right\}; \\
\tilde{Q}_{nm}^{\{s\}F} &= i^{\delta_{nm}+\delta_{3,n+m}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{q-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{q-1} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right\}; \\
n, m &= \overline{1,3}; \quad \tau = \delta_{j_1} + \delta_{j_2} + 2(\delta_{j_3} + \delta_{j_4}) + 3(\delta_{j_5} + \delta_{j_6}),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

де $\alpha_{jm}^{\{s\}(n)}$, $\gamma_{jq}^{\{s\}(nm)}$ – функції параметрів k_1 , k_2 і параметрів, що характеризують навантаження і шаруватий півпростір:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}^{\{s\}(m)} &= \alpha_{13}^{\{s\}(m)} = \alpha_{22}^{\{s\}(m)} = \alpha_{23}^{\{s\}(m)} = \alpha_{33}^{\{s\}(m)} = \alpha_{43}^{\{s\}(m)} = 0; \quad m = \overline{1,3}; \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(1)} &= b_{11}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{21}^{\{s\}(12)} (\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}}) + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} k_1 (k_2 b_{21}^{\{s\}(12)} + (-1)^j \gamma_1^{\{s\}} b_{21}^{\{s\}(13)}); \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(2)} &= -k_1 k_2 b_{21}^{\{s\}(21)} + (\delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) b_{11}^{\{s\}(22)} - \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (b_{11}^{\{s\}(22)} - (-1)^j k_2 \gamma_1^{\{s\}} b_{21}^{\{s\}(23)}); \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(3)} &= (-1)^{j+1} \gamma_1^{\{s\}} \left[k_1 b_{21}^{\{s\}(31)} + k_2 (\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}}) b_{21}^{\{s\}(32)} \right] + \\
&\quad + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (b_{11}^{\{s\}(33)} + (-1)^j k_2 \gamma_1^{\{s\}} b_{21}^{\{s\}(32)}); \quad j = 1, 2 \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(1)} &= b_{12}^{\{s\}(11)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \left[(-1)^j (b_{32}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{62}^{\{s\}(12)}) + b_{12}^{\{s\}(11)} \right] - k_1 k_2 b_{22}^{\{s\}(12)} \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} + \\
&\quad + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} k_1 (k_2 b_{22}^{\{s\}(12)} - b_{42}^{\{s\}(13)}); \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(2)} &= -k_1 k_2 b_{22}^{\{s\}(21)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \left[(-1)^j (b_{32}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_{62}^{\{s\}(21)}) - k_1 k_2 b_{22}^{\{s\}(21)} \right] + \\
&\quad + b_{12}^{\{s\}(22)} \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (b_{12}^{\{s\}(22)} + k_2 b_{42}^{\{s\}(23)}); \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(3)} &= (-1)^{j+1} \left[\gamma_2^{\{s\}} (k_1 b_{22}^{\{s\}(31)} + k_2 \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} b_{22}^{\{s\}(32)}) + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (b_{32}^{\{s\}(33)} - k_2 \gamma_2^{\{s\}} b_{22}^{\{s\}(32)}) \right] + \\
&\quad + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \left[k_1 (b_{42}^{\{s\}(31)} + (-1)^j b_{22}^{\{s\}(31)} \gamma_2^{\{s\}}) + k_2 b_{42}^{\{s\}(32)} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{j2}^{\{s\}(1)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(b_{12}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{22}^{\{s\}(12)} \right) + (-1)^j \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} k_1 \gamma_2^{\{s\}} b_{22}^{\{s\}(13)}; \\
\alpha_{j2}^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(b_{12}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_{22}^{\{s\}(21)} \right) + (-1)^j \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} k_2 \gamma_2^{\{s\}} b_{22}^{\{s\}(23)}; \\
\alpha_{j2}^{\{s\}(3)} &= (-1)^{j+1} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \gamma_2^{\{s\}} \left(k_1 b_{22}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{22}^{\{s\}(32)} \right) + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} b_{12}^{\{s\}(33)}; j = 3, 4; \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(1)} &= b_{13}^{\{s\}(11)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(12)} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[(-1)^j \left(b_{33}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{63}^{\{s\}(12)} \right) + b_{13}^{\{s\}(11)} \right] + \\
&+ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left\{ b_{53}^{\{s\}(11)} + k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(12)} + (-1)^j \left[b_{33}^{\{s\}(11)} + 3k_1 b_{63}^{\{s\}(13)} - k_1 k_2 \left(b_{63}^{\{s\}(12)} - b_7^{\{s\}(12)} \right) \right] \right\}; \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(2)} &= -k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(21)} + b_{13}^{\{s\}(22)} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[(-1)^j b_{33}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 \left(b_{23}^{\{s\}(21)} - b_{63}^{\{s\}(21)} \right) \right] + \\
&+ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[b_{53}^{\{s\}(22)} - b_{13}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_7^{\{s\}(21)} + (-1)^j \left(b_{33}^{\{s\}(22)} + 3b_{63}^{\{s\}(23)} k_2 - k_1 k_2 b_{63}^{\{s\}(21)} \right) \right]; \\
\alpha_{j1}^{\{s\}(3)} &= (-1)^{j+1} \gamma_3^{\{s\}} \left(k_1 b_{23}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{23}^{\{s\}(32)} \right) \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \\
&+ \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[k_1 b_{43}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{43}^{\{s\}(32)} + (-1)^j k_1 \gamma_3^{\{s\}} b_{23}^{\{s\}(31)} \right] + \\
&+ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left\{ - \left(k_1 b_{43}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{43}^{\{s\}(32)} \right) + (-1)^j \left[k_2 \gamma_3^{\{s\}} b_{23}^{\{s\}(32)} - 3 \left(k_1 b_{63}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{63}^{\{s\}(32)} \right) \right] \right\}; \\
\alpha_{j2}^{\{s\}(1)} &= \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left(b_{13}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(12)} \right) - \\
&- \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[2(-1)^j \left(b_{33}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{63}^{\{s\}(12)} \right) + b_{13}^{\{s\}(11)} + 2k_1 b_{43}^{\{s\}(13)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(12)} \right]; \\
\alpha_{j2}^{\{s\}(2)} &= \left(b_{13}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(21)} \right) \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} - \\
&- \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[2(-1)^j \left(b_{33}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_{63}^{\{s\}(21)} \right) + b_{13}^{\{s\}(22)} + 2k_2 b_{43}^{\{s\}(23)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(21)} \right]; \\
\alpha_{j2}^{\{s\}(3)} &= (-1)^{j+1} \left(k_1 b_{23}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{23}^{\{s\}(32)} \right) \gamma_3^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} + \\
&+ \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left\{ 2 \left(k_1 b_{43}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{43}^{\{s\}(32)} \right) + b_{53}^{\{s\}(33)} + (-1)^j \left[\left(k_1 b_{23}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{23}^{\{s\}(32)} \right) \gamma_3^{\{s\}} - 2b_{33}^{\{s\}(33)} \right] \right\}; \\
\alpha_{j3}^{\{s\}(1)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left(b_{13}^{\{s\}(11)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(12)} + (-1)^j k_1 \gamma_3^{\{s\}} b_{23}^{\{s\}(13)} \right); \\
\alpha_{j3}^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left(b_{13}^{\{s\}(22)} - k_1 k_2 b_{23}^{\{s\}(21)} + (-1)^j k_2 \gamma_3^{\{s\}} b_{23}^{\{s\}(23)} \right); \\
\alpha_{j3}^{\{s\}(3)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[(-1)^{j+1} \left(k_1 b_{23}^{\{s\}(31)} + k_2 b_{23}^{\{s\}(32)} \right) \gamma_3^{\{s\}} + b_{13}^{\{s\}(33)} \right]; j = 5, 6; \\
b_{11}^{\{s\}(11)} &= a_1^{\{s\}(11)} \gamma_1^{\{s\}4} - a_2^{\{s\}(11)} \gamma_1^{\{s\}2} + a_3^{\{s\}(11)}; \quad b_{21}^{\{s\}(12)} = a_4^{\{s\}(12)} \gamma_1^{\{s\}2} - a_5^{\{s\}(12)}; \\
b_{32}^{\{s\}(11)} &= 2\gamma_2^{\{s\}} \left(2a_1^{\{s\}(11)} \gamma_2^{\{s\}2} - a_2^{\{s\}(11)} \right); \quad b_{1m}^{\{s\}(jj)} = a_1^{\{s\}(jj)} \gamma_m^{\{s\}4} - a_2^{\{s\}(jj)} \gamma_m^{\{s\}2} + a_3^{\{s\}(jj)}; \\
b_{2m}^{\{s\}(jp)} &= a_4^{\{s\}(jp)} \gamma_m^{\{s\}2} - a_5^{\{s\}(jp)}; \quad b_{3m}^{\{s\}(jj)} = 2\gamma_m^{\{s\}} \left(2a_1^{\{s\}(jj)} \gamma_m^{\{s\}2} - a_2^{\{s\}(jj)} \right); \\
b_{42}^{\{s\}(13)} &= 3a_4^{\{s\}(13)} \gamma_2^{\{s\}2} - a_5^{\{s\}(13)}; \quad b_{53}^{\{s\}(11)} = 2 \left(6a_1^{\{s\}(11)} \gamma_3^{\{s\}2} - a_2^{\{s\}(11)} \right); \\
b_{62}^{\{s\}(12)} &= 2a_4^{\{s\}(12)} \gamma_2^{\{s\}}; \quad b_7^{\{s\}(12)} = 2a_4^{\{s\}(12)}; \quad b_{4m}^{\{s\}(jp)} = 3a_4^{\{s\}(jp)} \gamma_m^{\{s\}2} - a_5^{\{s\}(jp)};
\end{aligned}$$

$$b_{5m}^{\{s\}(jj)} = 2\left(6a_1^{\{s\}(jj)}\gamma_m^{\{s\}2} - a_2^{\{s\}(jj)}\right); \quad b_{6m}^{\{s\}(jp)} = 2a_4^{\{s\}(jp)}\gamma_m^{\{s\}}; \quad b_7^{\{s\}(jp)} = 2a_4^{\{s\}(jp)}; \quad (5.7)$$

$$a_1^{\{s\}(11)} = \tilde{C}_{0,0,2}^{\{s\}(11)}; \quad a_2^{\{s\}(11)} = k_1^2\tilde{C}_{1,0,1}^{\{s\}(11)} + k_2^2\tilde{C}_{0,1,1}^{\{s\}(11)};$$

$$a_3^{\{s\}(11)} = k_1^4\tilde{C}_{2,0,0}^{\{s\}(11)} + k_2^4\tilde{C}_{0,2,0}^{\{s\}(11)} + k_1^2k_2^2\tilde{C}_{1,1,0}^{\{s\}(11)};$$

$$a_4^{\{s\}(12)} = \tilde{C}_{0,0,1}^{\{s\}(12)}; \quad a_5^{\{s\}(12)} = k_1^2\tilde{C}_{1,0,0}^{\{s\}(12)} + k_2^2\tilde{C}_{0,1,0}^{\{s\}(12)};$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jj)} = k_1d_{11}^{\{s\}(jj1)} + k_2\left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)d_{11}^{\{s\}(jj2)} - (-1)^n\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\gamma_1^{\{s\}}d_{11}^{\{s\}(jj3)};$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jj)} = 0; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jj)} = 0; \quad n = 1, 2;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jj)} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\left(k_1d_{12}^{\{s\}(jj1)} + k_2\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}d_{12}^{\{s\}(jj2)}\right) -$$

$$-(-1)^n\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(k_1d_{22}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{22}^{\{s\}(jj2)}\right) + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(d_{12}^{\{s\}(jj3)} + \gamma_2^{\{s\}}d_{22}^{\{s\}(jj3)}\right);$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jj)} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(k_1d_{12}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{12}^{\{s\}(jj2)} - (-1)^n\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\gamma_2^{\{s\}}d_{12}^{\{s\}(jj3)}\right); \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jj)} = 0; \quad n = 3, 4;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jj)} = \left(1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\right)\left(k_1d_{13}^{\{s\}(jj1)} + k_2\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}d_{13}^{\{s\}(jj2)}\right) -$$

$$-(-1)^n\left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left(k_1d_{23}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{23}^{\{s\}(jj2)}\right) +$$

$$+2\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left[k_1d_{33}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{33}^{\{s\}(jj2)} - (-1)^n\left(\gamma_3^{\{s\}}d_{33}^{\{s\}(jj3)} + d_{23}^{\{s\}(jj3)}\right)\right];$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jj)} = \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left\{\left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\left(k_1d_{13}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{13}^{\{s\}(jj2)}\right) -$$

$$-2\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left[(-1)^n\left(k_1d_{23}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{23}^{\{s\}(jj2)}\right) - d_{13}^{\{s\}(jj3)} - \gamma_3^{\{s\}}d_{23}^{\{s\}(jj3)}\right]\right\}$$

$$\gamma_{n3}^{\{s\}(jj)} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left[k_1d_{13}^{\{s\}(jj1)} + k_2d_{13}^{\{s\}(jj2)} - (-1)^n\gamma_3^{\{s\}}d_{13}^{\{s\}(jj3)}\right]; \quad n = 5, 6;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = k_2d_{11}^{\{s\}(jm1)} + k_1\left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)d_{11}^{\{s\}(jm2)} -$$

$$-(-1)^n\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\gamma_1^{\{s\}}k_1k_2d_{41}^{\{s\}(jm3)}; \quad \gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad n = 1, 2;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\left(k_2d_{12}^{\{s\}(jm1)} + k_1\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}d_{12}^{\{s\}(jm2)}\right) -$$

$$-(-1)^n\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(k_1d_{22}^{\{s\}(jm2)} + k_2d_{22}^{\{s\}(jm1)}\right) + k_1k_2\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left(d_{42}^{\{s\}(jm3)} - \gamma_2^{\{s\}}d_{52}^{\{s\}(jm3)}\right);$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\left[k_2d_{12}^{\{s\}(jm1)} + k_1d_{12}^{\{s\}(jm2)} - (-1)^n k_1k_2\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\gamma_2^{\{s\}}d_{42}^{\{s\}(jm3)}\right];$$

$$\gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad n = 3, 4;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = \left(1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\right)\left(k_2d_{13}^{\{s\}(jm1)} + k_1\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}d_{13}^{\{s\}(jm2)}\right) -$$

$$-(-1)^n\left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left(k_2d_{23}^{\{s\}(jm1)} + k_1d_{23}^{\{s\}(jm2)}\right) +$$

$$+\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left[2\left(k_2d_{33}^{\{s\}(jm1)} + k_1d_{33}^{\{s\}(jm2)}\right) + 3(-1)^n k_1k_2d_{53}^{\{s\}(jm3)}\right];$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}\right)\delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}}\left(k_2d_{13}^{\{s\}(jm1)} + k_1d_{13}^{\{s\}(jm2)}\right) -$$

$$-\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[(-1)^n \left(k_2 d_{23}^{\{s\}(jm1)} + k_1 d_{23}^{\{s\}(jm2)} \right) - k_1 k_2 \left(d_{43}^{\{s\}(jm3)} - \gamma_3^{\{s\}} d_{53}^{\{s\}(jm3)} \right) \right];$$

$$\gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[k_2 d_{13}^{\{s\}(jm1)} + k_1 d_{13}^{\{s\}(jm2)} - (-1)^n k_1 k_2 \gamma_3^{\{s\}} d_{43}^{\{s\}(jm3)} \right];$$

$$n = 5, 6; \quad j, m = 1, 2;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = -k_1 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} d_{11}^{\{s\}(jm3)} - (-1)^n \left[\gamma_1^{\{s\}} d_{11}^{\{s\}(jm1)} + \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \gamma_1^{\{s\}} k_1 k_2 d_{41}^{\{s\}(jm2)} \right];$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[d_{12}^{\{s\}(jm1)} + \gamma_2^{\{s\}} d_{22}^{\{s\}(jm1)} + (-1)^n k_1 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{22}^{\{s\}(jm3)} + k_1 k_2 \left(d_{42}^{\{s\}(jm2)} - \gamma_2^{\{s\}} d_{52}^{\{s\}(jm2)} \right) \right] -$$

$$-(-1)^n \gamma_2^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \left(d_{12}^{\{s\}(jm1)} + k_1 k_2 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{42}^{\{s\}(jm2)} \right);$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[(-1)^n \gamma_2^{\{s\}} \left(d_{12}^{\{s\}(jm1)} + k_1 k_2 d_{42}^{\{s\}(jm2)} \right) + k_1 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{12}^{\{s\}(jm3)} \right]; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left\{ \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \left[d_{13}^{\{s\}(jm1)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{23}^{\{s\}(jm1)} + k_1 k_2 \left(d_{43}^{\{s\}(jm2)} - \gamma_3^{\{s\}} d_{53}^{\{s\}(jm2)} \right) \right] - \right.$$

$$\left. -(-1)^n \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[2 \left(k_1 d_{33}^{\{s\}(jm3)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{33}^{\{s\}(jm1)} + d_{23}^{\{s\}(jm1)} \right) - 3 k_1 k_2 d_{53}^{\{s\}(jm2)} \right] \right\} -$$

$$-(-1)^n \gamma_3^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \right) \left(d_{13}^{\{s\}(jm1)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm2)} \right);$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left\{ (-1)^{n+1} \gamma_3^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \left(d_{13}^{\{s\}(jm1)} + k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm2)} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[k_1 k_2 \left(d_{43}^{\{s\}(jm2)} - \gamma_3^{\{s\}} d_{53}^{\{s\}(jm2)} \right) + (-1)^n k_1 d_{23}^{\{s\}(jm3)} + d_{13}^{\{s\}(jm1)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{23}^{\{s\}(jm1)} \right] \right\};$$

$$\gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left[(-1)^n \gamma_3^{\{s\}} \left(d_{13}^{\{s\}(jm1)} + k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm2)} \right) + k_1 d_{13}^{\{s\}(jm3)} \right];$$

$$n = 5, 6; \quad j, m = 1, 3;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = (-1)^{n+1} \left[\left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} - \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \gamma_1^{\{s\}} d_{11}^{\{s\}(jm2)} + k_1 k_2 \gamma_1^{\{s\}} d_{41}^{\{s\}(jm1)} \right] -$$

$$-k_2 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} d_{11}^{\{s\}(jm3)}; \quad \gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0; \quad n = 1, 2;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = (-1)^{n+1} \gamma_2^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \left(k_1 k_2 d_{42}^{\{s\}(jm1)} + \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{12}^{\{s\}(jm2)} \right) +$$

$$+ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[\left(d_{12}^{\{s\}(jm2)} + \gamma_2^{\{s\}} d_{22}^{\{s\}(jm2)} \right) + k_1 k_2 \left(d_{42}^{\{s\}(jm1)} - \gamma_2^{\{s\}} d_{52}^{\{s\}(jm1)} \right) + (-1)^n k_2 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{22}^{\{s\}(jm3)} \right];$$

$$\gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[(-1)^n \gamma_2^{\{s\}} \left(d_{12}^{\{s\}(jm2)} + k_1 k_2 d_{42}^{\{s\}(jm1)} \right) + k_2 \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} d_{12}^{\{s\}(jm3)} \right]; \quad \gamma_{n3}^{\{s\}(jm)} = 0;$$

$$\gamma_{n1}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_2\mu_3}^{\{s\}} \left\{ \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \right) \left[k_1 k_2 \left(d_{43}^{\{s\}(jm1)} - 2 c_4^{\{s\}(jm1)} \gamma_3^{\{s\}2} \right) + \left(d_{13}^{\{s\}(jm2)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{23}^{\{s\}(jm2)} \right) \right] - \right.$$

$$\left. -(-1)^n \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[2 \left(k_2 d_{33}^{\{s\}(jm3)} + d_{23}^{\{s\}(jm2)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{33}^{\{s\}(jm2)} \right) - 3 k_1 k_2 d_{53}^{\{s\}(jm1)} \right] \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^n \gamma_3^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}}\right) \left(k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm1)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} d_{13}^{\{s\}(jm2)}\right); \\
& \gamma_{n2}^{\{s\}(jm)} = \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \left\{ (-1)^{n+1} \gamma_3^{\{s\}} \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}\right) \left(k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm1)} + d_{13}^{\{s\}(jm2)}\right) + \right. \\
& \left. + 2\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \left[d_{13}^{\{s\}(jm2)} + \gamma_3^{\{s\}} d_{23}^{\{s\}(jm2)} + (-1)^n k_2 d_{23}^{\{s\}(jm3)} + k_1 k_2 \left(d_{43}^{\{s\}(jm1)} - \gamma_3^{\{s\}} d_{53}^{\{s\}(jm1)} \right) \right] \right\}; \\
& \gamma_{63}^{\{s\}(jm)} = -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} \left[k_2 d_{13}^{\{s\}(jm3)} + (-1)^n \gamma_3^{\{s\}} \left(d_{13}^{\{s\}(jm2)} + k_1 k_2 d_{43}^{\{s\}(jm1)} \right) \right]; \\
& n = 5, 6; \quad j, m = 2, 3; \\
& d_{1q}^{\{s\}(jmp)} = c_3^{\{s\}(jmp)} - c_2^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}2} + c_1^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}4}; \\
& d_{2q}^{\{s\}(jmp)} = 2\gamma_q^{\{s\}} \left(2c_1^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}2} - c_2^{\{s\}(jmp)} \right); \quad d_{3q}^{\{s\}(jmp)} = 6c_1^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}2} - c_2^{\{s\}(jmp)}; \\
& d_{4q}^{\{s\}(jmp)} = c_5^{\{s\}(jmp)} - c_4^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}2}; \quad d_{5q}^{\{s\}(jmp)} = 2c_4^{\{s\}(jmp)} \gamma_q^{\{s\}}; \\
& c_1^{\{s\}(ijm)} = \tilde{E}_{0,0,2}^{\{s\}(ijm)}; \quad c_2^{\{s\}(ijm)} = k_1^2 \tilde{E}_{1,0,1}^{\{s\}(ijm)} + k_2^2 \tilde{E}_{0,1,1}^{\{s\}(ijm)}; \\
& c_3^{\{s\}(ijm)} = k_1^4 \tilde{E}_{2,0,0}^{\{s\}(ijm)} + k_2^4 \tilde{E}_{0,2,0}^{\{s\}(ijm)} + k_1^2 k_2^2 \tilde{E}_{1,1,0}^{\{s\}(ijm)}; \\
& c_4^{\{s\}(ijm)} = \tilde{E}_{0,0,1}^{\{s\}(ijm)}; \quad c_5^{\{s\}(ijm)} = k_1^2 \tilde{E}_{1,0,0}^{\{s\}(ijm)} + k_2^2 \tilde{E}_{0,1,0}^{\{s\}(ijm)}.
\end{aligned}$$

5.1.1.1. Шарувата плита на пружному півпросторі

Якщо підставимо (5.6) в перетворену систему рівнянь (3.26), (3.28), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для пружної основи [24]

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{1\}} h_1} = i^{-\delta_{3m}} P_m^F; \\
& m = \overline{1,3}; \\
& \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} - \\
& - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} h_s} - \\
& - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} = 0;
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{s\}}) \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} - \\
& - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \right\} = 0; \\
& m = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{N+1\}(3)} \Delta h_{N+1}^{m-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(33)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} - \\
& - \theta_1^{\{N\}} \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{N\}}) \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} - \\
& - \theta_1^{\{N\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{N+1\}(m)} \Delta h_{N+1}^{q-1} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N+1\}} h_N} - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} - \right. \\
& \left. - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} \right\} = 0; \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

В результаті розв'язок задачі про усталений рух багатошарової плити з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження у випадку пружної

основи в просторі зображень Фур'є зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (5.8) відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$.

Для того, щоб перейти в формулах (5.6) до оригіналів необхідно скористатися зворотним перетворенням Фур'є.

5.1.1.2. Шарувата плита на жорсткій основі

Якщо підставимо (5.6) в перетворену систему рівнянь (3.27), (3.28), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для жорсткої основи [28, 34]

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{q-1} \right] C_j^{\{1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{1\}} h_1} = i^{-\delta_{3m}} P_m^F; \\
& \quad m = \overline{1,3}; \\
& \quad \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} - \\
& \quad - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^3 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{m-1} \right] C_j^{\{s+1\}} = 0; \tag{5.9} \\
& \quad \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \\
& \quad - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} = 0; \\
& \quad \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} = 0; \\
& \quad (1 - \theta_1^{\{s\}}) \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} - \\
& \quad - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^3 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{q-1} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \Big\} = 0; \\
& \quad m = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1}; \\
& \quad \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} = 0; \\
& \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \left(\sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} \right) - \\
& \quad - \theta_1^{\{N\}} \left(\sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} \right) = 0; \\
& \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

Таким чином, у випадку жорсткої основи розв'язок задачі про усталений рух багат шарової плити з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження в просторі зображень Фур'є зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (5.9) відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$.

Оригінали напружень і швидкостей переміщень отримаємо, якщо скористаємося зворотнім перетворення Фур'є в формулах (5.6).

Таким чином, задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого півпростору при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, за умови (3.3) зводиться до інтегрування виразів (5.6) з урахуванням значень коренів характеристичних рівнянь диференціальних рівнянь (5.1) і умов контакту між елементами шаруватого середовища.

5.1.2. Розв'язок задач у випадку симетричного початкового напруженого стану

У випадку симетричного початкового напруженого стану в просторі зображень Фур'є рівняння руху (3.22) можна представити у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_1^{\{s\}2} \right) \Psi^{F\{s\}} = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_2^{\{s\}2} \right) \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_3^{\{s\}2} \right) \chi^{F\{s\}} = 0, \quad (5.10)$$

де

$$\begin{aligned}
\mu_1^{\{s\}2} &= \zeta_1^{\{s\}-2} \left(k_1^2 \tilde{A}^{\{s\}} + k_2^2 \right); \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = B_1^{\{s\}} \pm \sqrt{B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}}}; \\
2B_1^{\{s\}} &= \zeta_2^{\{s\}-2} \zeta_3^{\{s\}-2} \left[\left(\zeta_2^{\{s\}2} + \zeta_3^{\{s\}2} \right) (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 \tilde{C}^{\{s\}} \right]; \\
B_2^{\{s\}} &= \zeta_2^{\{s\}-2} \zeta_3^{\{s\}-2} \left[\left(k_1^2 + k_2^2 \right)^2 + k_1^2 k_2^2 \tilde{B}^{\{s\}} + \left(\tilde{B}^{\{s\}} + \tilde{D}^{\{s\}} \right) k_1^4 \right].
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Розв'язок перетворених рівнянь (5.10) з урахуванням затухання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
\Psi^{\{s\}F} &= C_1^{\{s\}} e^{\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1-\delta_s^{N+1}) C_2^{\{s\}} e^{-\gamma_1^{\{s\}}(y_3+h_s)}; \\
\chi^{\{s\}F} &= C_3^{\{s\}} e^{\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1-\delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}} e^{-\gamma_2^{\{s\}}(y_3+h_s)} + \\
&+ \left[1 - \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} + \delta_{\mu_2 \mu_3}^{\{s\}} (y_3 + h_{s-1}) \right] \left[C_5^{\{s\}} e^{\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} + (1-\delta_s^{N+1}) C_6^{\{s\}} e^{-\gamma_3^{\{s\}}(y_3+h_s)} \right].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Тут

$$\delta_{\mu_m \mu_j}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, \mu_m^2 = \mu_j^2; \\ 0, \mu_m^2 \neq \mu_j^2; \end{cases} \quad m, j = 2, 3; \quad m \neq j; \quad \gamma_j^{\{s\}} = \sigma_j^{\{s\}} \mu_j^{\{s\}}, \tag{5.13}$$

$\mu_j^{\{s\}2}$ ($j = \overline{1, 3}$) визначаються по формулам (5.11); $\sigma_j^{\{s\}} \equiv \sigma^{\{s\}} = \left| \mu_j^{\{s\}} \right| / \mu_j^{\{s\}}$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} > 0$, $\sigma_j^{\{s\}} = i$, якщо $\mu_j^{\{s\}2} < 0$ і $\gamma_j^{\{s\}} = \sigma \operatorname{Re} \mu_j^{\{s\}} - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j^{\{s\}}$, якщо μ_j^2 приймає комплексні значення.

Розв'язок (5.12) включає випадки рівних і нерівних коренів (5.11) (параметр $\delta_{\mu_m \mu_j}^{\{s\}}$) та регуляційні коефіцієнти для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{\gamma_j^{\{s\}} h_{s-1}}$, $e^{-\gamma_j^{\{s\}} h_s}$, $j = \overline{1, 3}$).

Трансформанти виразів (3.23) і (3.24) з урахуванням (5.12) можна записати у вигляді

$$\mathbf{u}_n^{\{s\}F} = (-1)^{n+1} i^{(1-\delta_{3n})} \left(\begin{aligned} & \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s\}}(n) (y_3 + h_s)^{(m-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_{s-1})} \\ & + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s\}}(n) (y_3 + h_s)^{(m-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_j^{\{s\}}(y_3+h_s)} \end{aligned} \right);$$

$$\tilde{Q}_{nm}^{\{s\}F} = i^{\theta_{nm}} \left(\begin{array}{l} \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{(q-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{\gamma_{\tau}^{\{s\}}(y_3 + h_{s-1})} + \\ \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s\}(nm)} (y_3 + h_s)^{(q-1)(\delta_{5j} + \delta_{6j})} \right] C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}}(y_3 + h_s)} \end{array} \right). \quad (5.14)$$

$$\theta_{nm} = (\delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{m1} + \delta_{m2})(\delta_{n3} + \delta_{m3}).$$

5.1.2.1. Шарувата плита на пружному півпросторі

Якщо підставимо (5.14) в перетворену систему рівнянь (3.26), (3.28), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для пружної основи [26]:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{1\}} + \\ & + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{1\}} h_1} = i^{-\theta_{3m}} P_m^F; \quad m = 1, 3; \\ & \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} - \\ & - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{(m-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \\ & - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{(m-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_s} = 0; \\ & \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} - \\ & - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} - \\ & - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} = 0; \\ & \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} - \\ & - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} \Delta h_s} \Big\} = 0; \\
(1 - \theta_1^{\{s\}}) & \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right\} = \\
= \theta_1^{\{s\}} & \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} h_s} \right. \\
& + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} - \\
& \left. - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_\tau^{\{s\}} h_s} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \right\}; \\
& m = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} - \\
& - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{N+1\}(3)} \Delta h_{N+1}^{(m-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(33)} C_j^{\{N\}} - \\
& - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(33)} \Delta h_{N+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{N\}(3m)} C_j^{\{N\}} - \\
& - \theta_1^{\{N\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N+1\}} h_N} \right\} = 0; \\
(1 - \theta_1^{\{N\}}) & \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{N+1\}(3m)} \Delta h_{N+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N+1\}} h_N} = \\
= \theta_1^{\{N\}} & \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \alpha_{jq}^{\{N+1\}(m)} \Delta h_{N+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{N+1\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N+1\}} h_N} - \right. \\
& \left. - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_\tau^{\{N\}} h_N} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} \right\}; \quad m = 1, 2.
\end{aligned}$$

5.1.2.2. Шарувата плита на жорсткій основі

Якщо підставимо (5.6) в перетворену систему рівнянь (3.27), (3.28), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_j^{\{s\}}$ для жорсткої основи [27, 30]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{1\}} + \\
& + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{1\}(3m)} h_1^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{1\}} h_1} = i^{-\theta_{3m}} P_m^F; \quad m=1,3; \\
& \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(3)} C_j^{\{s\}} - \\
& - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{(m-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} h_s} - \\
& - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(3)} \Delta h_{s+1}^{(m-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} \Delta h_s} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(33)} C_j^{\{s\}} - \\
& - \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} h_s} - \\
& - \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(33)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} \Delta h_s} = 0; \\
& \sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s\}} h_s} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(3m)} C_j^{\{s\}} - \\
& - \theta_1^{\{s\}} \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} h_s} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} \Delta h_s} \right\} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{s\}}) \left\{ \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{j1}^{\{s+1\}} h_s} + \right.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \gamma_{jq}^{\{s+1\}(3m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \Big\} = \\
& = \theta_1^{\{s\}} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1,3,5} \left[\sum_{q=1}^2 \alpha_{jm}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{5j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} h_s} \\ & + \sum_{j=2,4,6} \left[\sum_{q=1}^2 \alpha_{jq}^{\{s+1\}(m)} \Delta h_{s+1}^{(q-1)\delta_{6j}} \right] C_j^{\{s+1\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \\ & - \sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_s} - \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \end{aligned} \right\};
\end{aligned}$$

$$m = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1};$$

$$\sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{N\}(3)} C_j^{\{N\}} = 0;$$

$$(1 - \theta_1^{\{N\}}) \left(\sum_{j=1,3,5} \gamma_{j1}^{\{s\}(Nm)} C_j^{\{s\}} e^{-\gamma_{\tau}^{\{s\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \gamma_{j1}^{\{s\}(Nm)} C_j^{\{s\}} \right) -$$

$$\theta_1^{\{N\}} \left(\sum_{j=1,3,5} \alpha_{j1}^{\{N\}(m)} C_j^{\{N\}} e^{\gamma_{\tau}^{\{N\}} h_N} + \sum_{j=2,4,6} \alpha_{j1}^{\{s\}(m)} C_j^{\{s\}} \right) = 0;$$

$$m = 1, 2.$$

Таким чином, задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого півпростору при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, за умови (3.4) зводиться до інтегрування виразів (5.6) з урахуванням значень коренів характеристичних рівнянь диференціальних рівнянь (5.11) і умов контакту між елементами шаруватого середовища.

В рамках розглянутих постановок в просторі зображень Фур'є отримані аналітичні розв'язки задач:

- пружний шар на пружному півпросторі [24, 26],
- пружний шар на жорсткій основі [27, 28, 30, 34],
- багат шарова пружна плита на пружному півпросторі [24, 26],
- багат шарова пружна плита на жорсткій основі [30, 34].

5.2. Фундаментальний розв'язок плоских задач в області зображень Фур'є

Поставлені в розділі 3 двовимірні крайові задачі розв'язуються за допомогою перетворення Фур'є по змінній y_1 .

Розв'язок задачі отримуємо в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

Розв'язок перетворених рівнянь (3.30) з урахуванням затухання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \chi^{\{s\}(j)F} = & \left[1 - \delta_{j2}^{\{s\}} (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \right] \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_3^{\{s\}(j)} e^{-k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + \right. \\ & \left. + \left[1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_s) \right] \left(C_2^{\{s\}(j)} e^{k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

де $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j=1,2$; $m=\overline{1,4}$) – постійні інтегрування, k – параметр перетворення Фур'є,

$$\delta_{\eta_1 \eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}} \\ 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}} \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}$$

В представленні (5.17) $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, якщо $\eta_j^{\{s\}2} > 0$, і $k_j = i$, якщо $\eta_j^{\{s\}2} < 0$. У випадку, якщо $\eta_j^{\{s\}}$ приймає комплексні значення, то в представленні розв'язку (5.17) необхідно покласти $k_j = 1$, $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$, $j=1,2$.

Розв'язок (5.17) включає випадки рівних і нерівних коренів біквдратного характеристичного рівняння (3.31) (параметр $\delta_{\eta_1 \eta_2}^{\{s\}}$) та регуляційні коефіцієнти

для стабільного узгодження хвильових полів між шарами (множники $e^{k_j k \eta_j^{s} h_{s-1}}$, $e^{-k_j k \eta_j^{s} h_s}$ $j=1,2$).

Введемо постійні інтегрування

$$\begin{aligned} C_m^{\{s\}(1)} &= C_m^{\{s\}}; \quad m=1,4; \quad C_m^{\{s\}(2)} = i\gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}; \\ C_{m+2}^{\{s\}(2)} &= i\gamma_{3-m}^{\{s\}} C_{m+2}^{\{s\}}; \quad \gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}; \quad m=1,2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Компоненти напружено-деформованого стану (3.34) в області зображень з урахуванням (5.17) і (5.18) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} &= i^{1-\delta_{nj}} k^2 \sum_{m=1}^2 \left[\gamma_{nj}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{k\gamma_m^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})} + (1-\delta_s^{N+1}) \gamma_{nj}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}}(y_2+h_s)} \right]; \\ u_n^{\{s\}F} &= i^{\delta_{1n}} k \sum_{m=1}^2 \left[\alpha_n^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{k\gamma_m^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})} + (1-\delta_s^{N+1}) \alpha_n^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}}(y_2+h_s)} \right]; \end{aligned} \quad (5.19)$$

$n, j=1,2.$

Параметри $\gamma_{mj}^{\{s\}(n)}$, $\alpha_1^{\{s\}(1)}$ в формулах (5.19) є функціями параметрів k , $\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}$, $\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{(j)\{s\}}$, $\alpha_{ij}^{(km)\{s\}}$

$$\begin{aligned} \gamma_{jj}^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{jj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(12)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} \right) - (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(11)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right]; \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(1)} &= -k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(21)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{mj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(22)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right) - (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right]; \end{aligned}$$

$j, m=1,2;$

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\{s\}(1)} &= -k \left(\tau_1^{\{s\}(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_1^{\{s\}(3)} = k \left(\tau_1^{\{s\}(12)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(22)} \right); \\ \alpha_1^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(12)} + \tau_1^{\{s\}(22)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \tau_1^{\{s\}(12)} \right]; \\ \alpha_1^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(11)} - \tau_1^{\{s\}(21)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \tau_1^{\{s\}(11)} \right]; \\ \alpha_2^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(11)} - \tau_2^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_2^{\{s\}(3)} = -k \left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(12)} + \tau_2^{\{s\}(22)} \right); \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(2)} + k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) (\tau_2^{\{s\}(12)} - \tau_2^{\{s\}(22)}) - (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \tau_2^{\{s\}(22)} \right]; \\
\alpha_2^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(1)} - k \left[\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) (\tau_2^{\{s\}(11)} + \tau_2^{\{s\}(21)}) + (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \tau_2^{\{s\}(21)} \right]; \\
\zeta_{jj}^{\{s\}(np)} &= \gamma_p^{\{s\}} \left(\alpha_{jj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{jj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \quad \zeta_{mj}^{\{s\}(np)} = \gamma_p^{\{s\}2\delta_{n2}} \left(\alpha_{mj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{mj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \\
\zeta_{jj}^{\{s\}(p)} &= \alpha_{jj}^{\{s\}(11)} + 2(-1)^p \alpha_{jj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} - 3\alpha_{jj}^{\{s\}(21)} \gamma_p^{\{s\}2}; \\
\zeta_{mj}^{\{s\}(p)} &= -\gamma_p^{\{s\}} \left[\alpha_{mj}^{\{s\}(12)} - 2(-1)^m \alpha_{mj}^{\{s\}(21)} - 3\alpha_{mj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} \right]; \\
\tau_1^{\{s\}(1p)} &= \gamma_p^{\{s\}} \beta_{11}^{\{s\}(1)}; \quad \tau_1^{\{s\}(2p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{11}^{\{s\}(2)} - \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^2 \right); \\
\xi_1^{\{s\}(p)} &= \beta_{11}^{\{s\}(1)} - 2(-1)^p \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \tau_2^{\{s\}(1p)} = \gamma_p^{\{s\}2} \beta_{21}^{\{s\}(2)}; \\
\tau_2^{\{s\}(2p)} &= \beta_{21}^{\{s\}(1)} - \beta_{22}^{\{s\}(1)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \xi_2^{\{s\}(p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{21}^{\{s\}(2)} + 2(-1)^p \beta_{22}^{\{s\}(1)} \right).
\end{aligned}$$

5.2.1. Шарвата смуга на пружному півпросторі

Якщо підставимо (5.17) в перетворену систему рівнянь (3.37), (3.38), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_m^{\{s\}}$ для пружної основи [3, 14, 29, 33]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} + \gamma_{21}^{\{1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{1\}} e^{-k\gamma_m^{\{1\}} h_1} \right) = -ik^{-2} \delta_{\theta N} P_1^F; \\
&\sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} + \gamma_{22}^{\{1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{1\}} e^{-k\gamma_m^{\{1\}} h_1} \right) = k^{-2} P_2^F; \\
&\sum_{m=1}^2 \left(\alpha_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \alpha_2^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
&- \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \alpha_2^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \\
&\sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \gamma_{22}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
&- \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{22}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \\
&\sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
&- \theta_1^{\{s\}} \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \\
&(1 - \theta_1^{\{s\}}) \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) -
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta_1^{\{s\}} \left[\sum_{m=1}^2 \left(\alpha_1^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \alpha_1^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \alpha_1^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) \right] = 0; \\
& \quad s = \overline{1, N-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_2^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_N} + \alpha_2^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right) - \sum_{m=1}^2 \alpha_2^{\{N+1\}(m)} C_m^{\{N+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \gamma_{22}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \sum_{m=1}^2 \gamma_{22}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} = 0; \\
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_N} + \gamma_{21}^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right) - \theta_1^{\{N\}} \sum_{m=1}^2 \gamma_{21}^{\{N+1\}(m)} C_m^{\{N+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{N+1\}} h_N} = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{N\}}) \sum_{m=1}^2 \gamma_{21}^{\{N+1\}(m)} C_m^{\{N+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{N+1\}} h_N} - \theta_1^{\{N\}} \left[\sum_{m=1}^2 \alpha_1^{\{N+1\}(m)} C_m^{\{N+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{N+1\}} h_N} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_1^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_N} + \alpha_1^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right) \right] = 0;
\end{aligned}$$

5.2.2. Шарувата смуга на жорсткій основі

Якщо підставимо (5.17) в перетворену систему рівнянь (3.37), (3.39), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $C_m^{\{s\}}$ для жорсткої основи [31]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} + \gamma_{21}^{\{1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{1\}} e^{-k\gamma_m^{\{1\}} h_1} \right) = -ik^{-2} \delta_{\theta N} P_1^F; \\
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} + \gamma_{22}^{\{1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{1\}} e^{-k\gamma_m^{\{1\}} h_1} \right) = k^{-2} P_2^F; \\
& \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \alpha_2^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
& - \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \alpha_2^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \\
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \gamma_{22}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
& - \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{22}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{22}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) - \\
& - \theta_1^{\{s\}} \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{s\}}) \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \gamma_{21}^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) - \\
& - \theta_1^{\{s\}} \left[\sum_{m=1}^2 \left(\alpha_1^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} h_s} + \alpha_1^{\{s+1\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s+1\}} e^{-k\gamma_m^{\{s+1\}} \Delta h_{s+1}} \right) - \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^2 \left(\alpha_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{-k\gamma_m^{\{s\}} h_s} + \alpha_1^{\{s\}(2+m)} C_{2+m}^{\{s\}} \right) \right] = 0; \\
& s = \overline{1, N-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^2 \left(a_2^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_N} + a_2^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right) = 0; \\
& (1 - \theta_1^{\{N\}}) \sum_{m=1}^2 \left(\gamma_{21}^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_n} + \gamma_{21}^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right) = \\
& = \theta_1^{\{N\}} \sum_{m=1}^2 \left(a_1^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{-k\gamma_m^{\{N\}} h_N} + a_1^{\{N\}(2+m)} C_{2+m}^{\{N\}} \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок задачі про усталений рух багатошарової пружної смуги з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження в області зображень Фур'є зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (5.21) або (5.22) відносно невідомих $C_m^{\{s\}}$.

Для того, щоб перейти в формулах (5.19) до оригіналів, потрібно скористатися зворотним перетворенням Фур'є.

Для розглянутих постановок в просторі зображень Фур'є отримані аналітичні розв'язки задач:

- для пружної смуги, що лежить на пружному півпросторі [14, 29],
- для пружної смуги, що лежить на жорсткій основі [25, 31],
- для багатошарової пружної смуги, що лежить на пружному півпросторі [3, 14, 29, 33],
- для багатошарової пружної смуги, що лежить на жорсткій основі [31].

Розв'язок задач отримано в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом для теорії скінчених і двох варіантів малих початкових деформацій, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

5.3. Результати та висновки

В просторі зображень Фур'є отримано розв'язок просторових і двовимірних задач для багатошарової основи з початковими напруженнями при дії поверхневого рухомого навантаження. Для просторових задач розглянуто загальний і симетричний випадки початкового напруженого стану.

РОЗДІЛ 6

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ПРО РУХОМІ НАВАНТАЖЕННЯ

При розв'язанні просторових і двовимірних задач про усталений рух багат шарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження з використанням методів, що використовують інтегральне перетворення Фур'є, представлення розв'язку залежить від коренів характеристичних рівнянь трансформованих диференціальних рівнянь, що описують рух елементів багат шарового середовища.

У роботах [4, 5, 7, 15, 23, 32, 35–37, 116] в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [61, 64, 65] досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для елементів шаруватого півпростору.

Загальна постановка задач, що досліджується, наведена в розділі 3.

6.1. Дослідження характеристичних рівнянь для просторових динамічних задач

6.1.1. Випадок загального початкового напруженого стану

У випадку загального початкового напруженого стану (3.3) рух багат шарового об'єкта в загальному випадку описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку (3.5). У рухомій системі координат ці рівняння мають вигляд (3.13) В просторі зображень ці рівняння представлені формулами (5.1), а характеристичні рівняння мають вигляд [23, 32]

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (6.1)$$

У випадку стисливих тіл коефіцієнти рівняння (6.1) можна записати у вигляді [23]

$$\begin{aligned}
a_0^{\{s\}} &= c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}; \quad a_1^{\{s\}} = -k_1^2 \left[c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\
&\quad \left. - c_{32}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \varphi \left(c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} \right) \right] - k_2^2 \left[c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + \right. \\
&\quad \left. + c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) - c_{31}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} \right]; \quad a_2^{\{s\}} = k_1^4 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \varphi \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} \right) - d_{13}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_2^4 \left\{ c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - \right. \\
&\quad \left. - c_{21}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - v^2 \sin^2 \varphi \left[c_{32}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_{23}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_1^2 k_2^2 \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) - c_{11}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - c_{22}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - c_{33}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} + 2d_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} + \right. \\
&\quad \left. + v^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) \right]; \quad a_3^{\{s\}} = -k_1^6 \left[c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\
&\quad \left. - v^2 \cos^2 \varphi \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + v^4 \cos^4 \varphi \left(c_{11}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2} \right) \right] - \\
&\quad - k_2^6 \left[v^4 \sin^4 \varphi \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) - v^2 \sin^2 \varphi \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right] - k_1^4 k_2^2 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{13}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - \right. \\
&\quad \left. - v^2 \cos^2 \varphi \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - d_{12}^{\{s\}2} \right] \right\} - \\
&\quad - k_1^2 k_2^4 \left[c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - c_{23}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - v^6 \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi \right],
\end{aligned} \tag{6.2}$$

де

$$\tilde{\varrho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{ijij}^{\{s\}}; \quad \tilde{\varrho}^{\{s\}} d_{ij}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{ijij}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{jiji}^{\{s\}}. \tag{6.3}$$

У випадку нестисливих тіл коефіцієнти рівняння (6.1) можна подати у вигляді [32]

$$\begin{aligned}
b_1 &= q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^2 \left[q_3^2 v^2 \cos^2 \varphi \left(c_{31}^2 + c_{32}^2 \right) - q_3^2 c_{31}^2 c_{12}^2 - c_{32}^2 d_{13} \right] - k_2^2 \left(q_3^2 c_{21}^2 c_{32}^2 + c_{31}^2 d_{23} \right) \right\}; \\
b_2 &= q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^4 \left[q_1^2 c_{12}^2 c_{23}^2 + c_{13}^2 d_{12} - v^2 \cos^2 \varphi \left(q_1^2 c_{23}^2 + q_2^2 c_{13}^2 + d_{12} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + k_1^2 k_2^2 q_3^2 v^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + k_2^4 \left(q_2^2 c_{31}^2 c_{23}^2 + c_{21}^2 d_{23} \right) - v^2 \sin^2 \varphi \left(q_1^2 c_{32}^2 + q_3^2 c_{12}^2 + d_{13} \right) + \right. \\
&\quad \left. + q_1^2 c_{32}^2 c_{23}^2 - v^2 \cos^2 \varphi \left(q_2^2 c_{31}^2 + q_3^2 c_{21}^2 + d_{23} \right) + q_2^2 c_{31}^2 c_{13}^2 + q_3^2 c_{21}^2 c_{12}^2 + d \right\}; \tag{6.4}
\end{aligned}$$

$$b_3 = q_3^{-2} c_{31}^{-2} c_{32}^{-2} \left\{ k_1^6 \left[q_1^2 v^2 \cos^2 \varphi (c_{12}^2 + c_{13}^2) - q_1^2 v^4 \cos^4 \varphi - q_1^2 c_{12}^2 c_{13}^2 \right] + \right. \\ \left. + k_2^6 \left[q_2^2 v^2 \sin^2 \varphi (c_{21}^2 + c_{23}^2) - q_2^2 v^4 \sin^4 \varphi - q_2^2 c_{21}^2 c_{23}^2 \right] + k_1^2 k_2^4 (q_2^2 c_{21}^2 c_{13}^2 + \right. \\ \left. + c_{23}^2 d_{12}) + k_1^4 k_2^2 \left[q_1^2 c_{12}^2 c_{23}^2 + c_{13}^2 d_{12} - (q_1^2 c_{23}^2 + q_2^2 c_{13}^2 + d_{12}) v^2 \cos^2 \varphi \right] \right\},$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{q} c_{ij}^2 &= \tilde{\chi}_{ijji}, & \tilde{q} d_{ij} &= q_i^2 \tilde{\chi}_{jjij} + q_j^2 \tilde{\chi}_{iiii} - 2q_i q_j (\tilde{\chi}_{ijij} + \tilde{\chi}_{ijji}); \\ \tilde{q}^2 d &= 2q_1 q_3 \left[(\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212}) (\tilde{\chi}_{2233} + \tilde{\chi}_{2323}) - \tilde{\chi}_{2222} (\tilde{\chi}_{1313} + \tilde{\chi}_{1133}) \right] + \\ &+ 2q_2 q_3 \left[(\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212}) (\tilde{\chi}_{1313} + \tilde{\chi}_{1133}) - \tilde{\chi}_{1111} (\tilde{\chi}_{2233} + \tilde{\chi}_{2323}) \right] + \\ &+ 2q_1 q_2 \left[(\tilde{\chi}_{2233} + \tilde{\chi}_{2323}) (\tilde{\chi}_{1313} + \tilde{\chi}_{1133}) - \tilde{\chi}_{3333} (\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212}) \right] + \\ &+ q_1^2 \left[\tilde{\chi}_{2222} \tilde{\chi}_{3333} - (\tilde{\chi}_{2233} + \tilde{\chi}_{2323})^2 \right] + q_2^2 \left[\tilde{\chi}_{1111} \tilde{\chi}_{3333} - \right. \\ &\left. - (\tilde{\chi}_{1313} + \tilde{\chi}_{1133})^2 \right] + q_3^2 \left[\tilde{\chi}_{1111} \tilde{\chi}_{2222} - (\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212})^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Значення функцій $\eta^{\{s\}}$ визначають вид рівнянь руху елементів шаруватого півпростору і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Так як рівняння (6.1) є бікубічні алгебраїчні рівняння, то їх розв'язок можна отримати класичним способом [23, 32]. Приведемо рівняння (6.1) заміною

$$\eta^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}2} - \frac{a_1^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}}} \quad (6.6)$$

до вигляду

$$\mu^{\{s\}6} + p^{\{s\}} \mu^{\{s\}2} + q^{\{s\}} = 0, \quad (6.7)$$

де

$$p^{\{s\}} = -\frac{a_1^{\{s\}2}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_2^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}; \quad q^{\{s\}} = \frac{2a_1^{\{s\}3}}{27a_0^{\{s\}3}} - \frac{a_1^{\{s\}} a_2^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_3^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}. \quad (6.8)$$

У випадку, якщо дискримінант $\Delta^{\{s\}} = \frac{q^{\{s\}2}}{4} + \frac{p^{\{s\}3}}{27} = 0$, рівняння (6.7) при

$p^{\{s\}} \neq 0$, $q^{\{s\}} \neq 0$ мають один простий і один двократний корінь

$$\mu_1^{\{s\}2} = \frac{3q^{\{s\}}}{p^{\{s\}}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{3q^{\{s\}}}{2p^{\{s\}}}. \quad (6.9)$$

Якщо $\Delta^{\{s\}} \neq 0$, то рівняння (6.7) мають три різних кореня. Якщо $\Delta^{\{s\}} > 0$, то рівняння (6.7) мають один дійсний корінь і два комплексних

$$\mu_1^{\{s\}2} = u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}}{2} \pm i \frac{(u_0^{\{s\}} - v_0^{\{s\}})\sqrt{3}}{2}. \quad (6.10)$$

Тут

$$u_0^{\{s\}} = \sqrt[3]{-\frac{q^{\{s\}}}{2} + \sqrt{\Delta^{\{s\}}}}; \quad v_0^{\{s\}} = -\frac{p^{\{s\}}}{3u_0^{\{s\}}}. \quad (6.11)$$

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ всі три корені рівнянь (6.7) будуть дійсними і різними

$$\begin{aligned} \mu_1^{\{s\}2} &= 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right| \cos \frac{\varphi^{\{s\}}}{3}; \quad \mu_2^{\{s\}2} = 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right| \cos \frac{\varphi^{\{s\}} + 2\pi}{3}; \\ \mu_3^{\{s\}2} &= 2\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right| \cos \frac{\varphi^{\{s\}} + 4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тут

$$\left|\sqrt[3]{r^{\{s\}}}\right| = \sqrt{\left|-\frac{p^{\{s\}}}{3}\right|}; \quad \cos \varphi^{\{s\}} = -\frac{q^{\{s\}}}{2r^{\{s\}}}. \quad (6.13)$$

Таким чином, при $\Delta^{\{s\}} = 0$ у випадку, коли $p^{\{s\}} \neq 0$ і $q^{\{s\}} \neq 0$ і мають різні знаки, рівняння (6.1) має два дійсних двократних кореня и два чисто уявних. Якщо $p^{\{s\}} \neq 0$ і $q^{\{s\}} \neq 0$ і мають однакові знаки, то рівняння (6.1) має два дійсних кореня і два двократних чисто уявних.

При $\Delta^{\{s\}} > 0$, якщо $\mu_1^{\{s\}2} > 0$, рівняння (6.1) має два дійсних корня і чотири комплексних, якщо $\mu_1^{\{s\}2} < 0$ – шість комплексних. При $\Delta^{\{s\}} < 0$ рівняння (6.1) має шість різних коренів. Дійсні корені будуть відповідати додатнім значенням коренів рівняння (6.7).

6.1.1.1. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для стисливих тіл. Загальний напружений початковий стан

Оскільки вирази (6.2) для коефіцієнтів рівнянь (6.1) – досить громіздкі вирази, аналітичне дослідження коренів характеристичного рівняння видається складним. Чисельні дослідження було проведено для стисливого матеріалу з гармонійним потенціалом

$$\Phi^{\{s\}} = \frac{1}{2} \lambda^{\{s\}} s_1^{\{s\}2} + \mu^{\{s\}} s_2^{\{s\}}, \quad (6.14)$$

де $\lambda^{\{s\}}$, $\mu^{\{s\}}$ – константи Ляме. Величини $s_1^{\{s\}}$ і $s_2^{\{s\}}$ являють собою перший і другий інваріанти тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесені до головних осей

$$s_1^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1) + (\lambda_2^{\{s\}} - 1) + (\lambda_3^{\{s\}} - 1); \quad (6.15)$$

$$s_2^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_2^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_3^{\{s\}} - 1)^2. \quad (6.16)$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанта малих початкових деформацій вирази для визначення складових тензора $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ за умови (3.3) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}} (\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}} (\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_3^{\{s\}} (\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3311}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3322}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} - \lambda^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_3^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; & \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{2323}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}} \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}} \left[(2\mu^{\{s\}} + \lambda^{\{s\}}) (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - 1) + \lambda^{\{s\}} (\lambda_3^{\{s\}} - 2) \right]}{\lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}2} \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}2}}; & \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}} \left[\lambda_1^{\{s\}} + (\lambda_3^{\{s\}} - 1) (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}}) \right] + \lambda^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}} \left[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}}) (\lambda_1^{\{s\}} - 1) \right] - \lambda^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3) (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - \lambda_3^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} \left[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(\lambda_2^{\{s\}} - 1) \right] - \lambda^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3) (\lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}} - \lambda_2^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})};$$

$$\tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} \left[(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}}) \lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}} \right] + \lambda^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}. \quad (6.17)$$

Врахуємо, що $\lambda^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} \nu^{\{s\}}}{1 - 2\nu^{\{s\}}}$, де ν – коефіцієнт Пуассона, і пронормуємо всі величини за величиною $\mu^{\{s\}} / \rho^{\{s\}}$. Чисельні розрахунки проводилися для $\nu = 0,3$. Початкові подовження змінювалися в діапазоні від 0,8 до 1,2. Метою дослідження було оцінювання можливих значень коренів рівняння (6.1) та вплив початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння (6.1) і відповідно на вибір розв'язку досліджуваної задачі.

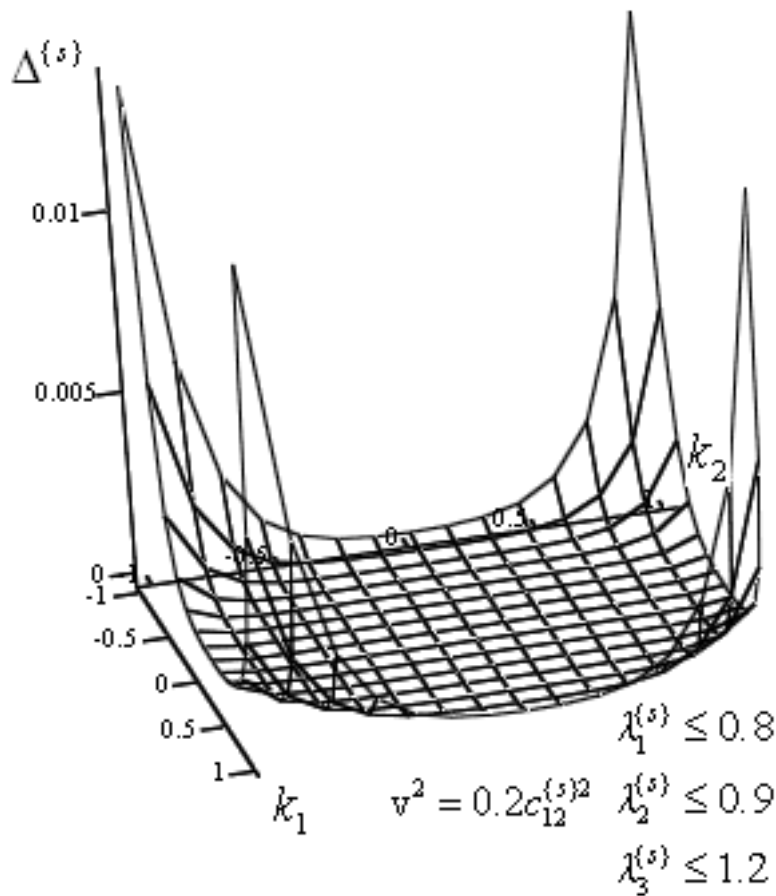


Рис. 6.1. Поверхня функції $\Delta^{\{s\}}$

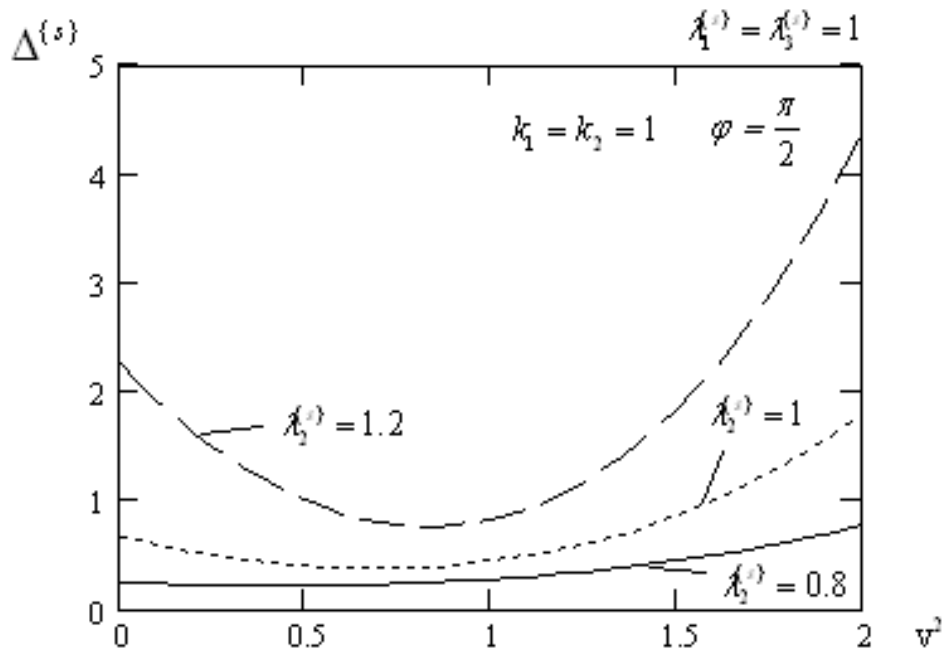


Рис. 6.2. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта $\Delta^{(s)}$ ($\varphi = \pi/2$)

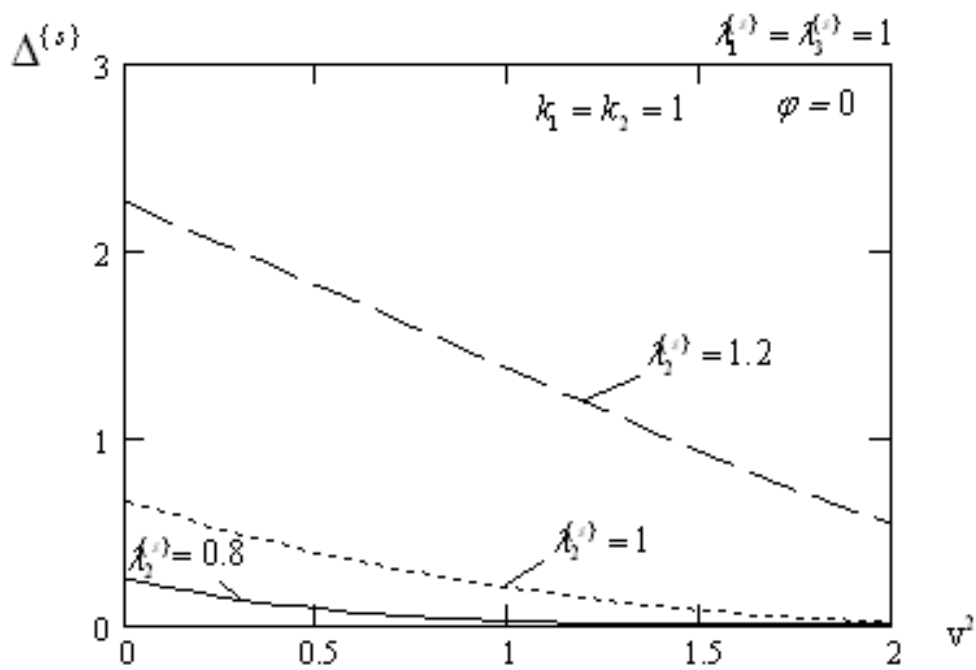


Рис. 6.3. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта $\Delta^{(s)}$ ($\varphi = 0$)

Поверхня, що відповідає функції $\Delta^{\{s\}}$, за фіксованих значень параметрів $\lambda_i^{\{s\}}$ ($i=1,2,3$), v і φ має вигляд, показаний на рис. 6.1. Причому форма поверхні не змінюється в діапазоні $0.8 \leq \lambda_i^{\{s\}} \leq 1.2$, $0 \leq v^2 \leq c_{11}^{\{s\}2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Аналіз чисельних значень $\Delta^{\{s\}}$ дає змогу стверджувати, що дискримінант рівняння (6.1) набуває в зазначеній області досліджуваних параметрів невід'ємних значень ($\Delta^{\{s\}} \geq 0$).

На рис. 6.2 і 6.3 проілюстровано вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта рівняння (6.7). Як видно з малюнків, початкові напруження, швидкість руху навантаження та напрямок його руху суттєво впливають на значення функції $\Delta^{\{s\}}$.

Очевидно, що за певної швидкості навантаження вплив початкових напружень зменшується. Від напрямку руху навантаження залежить розташування області найменшого впливу початкових напружень.

6.1.1.2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для нестисливих тіл. Загальний напружений початковий стан

Чисельні дослідження були проведені для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича

$$\Phi^{\{s\}} = 2\mu^{\{s\}} s_1^{\{s\}}, \quad (6.18)$$

де $\mu^{\{s\}}$ – модуль зсуву, а величина $s_1^{\{s\}}$ – перший інваріант тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесений до головних осей (6.15).

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій вирази для визначення компонентів тензора $\tilde{\chi}^{\{s\}}$ за умови (3.3) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{ij\alpha\beta}^{\{s\}} = & \lambda_i^{\{s\}} \lambda_j^{\{s\}} \lambda_\alpha^{\{s\}} \lambda_\beta^{\{s\}} \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta}^{\{s\}} + \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{ij}) (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij}^{\{s\}} + \lambda_j^{\{s\}-1} \lambda_\alpha^{\{s\}-1} \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\{s\}\beta\beta} \right], \end{aligned} \quad (6.19)$$

де

$$A_{i\beta}^{\{s\}} = -2\delta_{i\beta}\lambda_{\beta}^{\{s\}-4}\left(\mu^{\{s\}}\lambda_{\beta}^{\{s\}} + p^{\{s\}}\right),$$

$$\mu_{ij} = -\left[2\mu\lambda_i\lambda_j + p(\lambda_i + \lambda_j)\right]\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}(\lambda_i + \lambda_j)^{-1}, \quad (6.20)$$

$$S_0^{\{s\}\beta\beta} = \left(2\mu^{\{s\}}\lambda_{\beta}^{\{s\}} + p^{\{s\}}\right)\lambda_{\beta}^{\{s\}-2}, \quad q_j^{\{s\}} = \lambda_j^{\{s\}-1}.$$

Прийmemo, що початкове поверхневе навантаження відсутнє, тобто $S_0^{\{s\}33} = 0$, і врахуємо, що $\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}} = 1$. Тоді з третьої формули системи (6.20) маємо

$$p = -2\mu\lambda_3 = -2\mu\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}. \quad (6.21)$$

Використовуючи формули (6.19)–(6.21), для компонентів тензора $\tilde{\chi}$ отримаємо такі вирази

$$\tilde{\chi}_{1111} = \tilde{\chi}_{2222} = \tilde{\chi}_{3333} = 2\mu\lambda_1^{-2}; \quad \tilde{\chi}_{1122} = \tilde{\chi}_{1133} = \tilde{\chi}_{2211} = \tilde{\chi}_{2233} = \tilde{\chi}_{3311} = \tilde{\chi}_{3322} = 0;$$

$$\tilde{\chi}_{1212} = \tilde{\chi}_{2121} = 2\mu\frac{\lambda_1 + \lambda_2(1 - \lambda_1^3)}{\lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)}; \quad \tilde{\chi}_{1313} = \tilde{\chi}_{3131} = 2\mu\frac{1 + \lambda_1^2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^2(\lambda_1^2\lambda_2 + 1)};$$

$$\tilde{\chi}_{2323} = \tilde{\chi}_{3232} = 2\mu\frac{1 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1^2(\lambda_1\lambda_2^2 + 1)}; \quad \tilde{\chi}_{1221} = \frac{2\mu\lambda_1^2}{\lambda_1 + \lambda_2}; \quad \tilde{\chi}_{2112} = \frac{2\mu\lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2};$$

$$\tilde{\chi}_{1331} = \frac{2\mu\lambda_1^3\lambda_2}{\lambda_1^2\lambda_2 + 1}; \quad \tilde{\chi}_{3113} = \frac{2\mu}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2\lambda_2 + 1)};$$

$$\tilde{\chi}_{2332} = \frac{2\mu\lambda_1\lambda_2^3}{\lambda_2^2\lambda_1 + 1}; \quad \tilde{\chi}_{3223} = \frac{2\mu}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2^2\lambda_1 + 1)}. \quad (6.22)$$

Пронормуємо всі параметри за величиною $c_0^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}} / \rho^{\{s\}}$. Чисельні розрахунки проводилися для $\varphi = 0$ і $v = 0,1c_0^{\{s\}}$. Початкові видовження змінювалися в діапазоні від 0,8 до 1,2. Метою дослідження була оцінка можливих значень коренів характеристичного рівняння (6.1) та впливу початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на ці значення.

На рис. 6.4–6.6 наведені графіки функцій $p^{\{s\}}$, $q^{\{s\}}$ та $\Delta^{\{s\}}$ для фіксованих значень параметрів $\lambda_i^{\{s\}}$ ($i = \overline{1,3}$), v та φ .

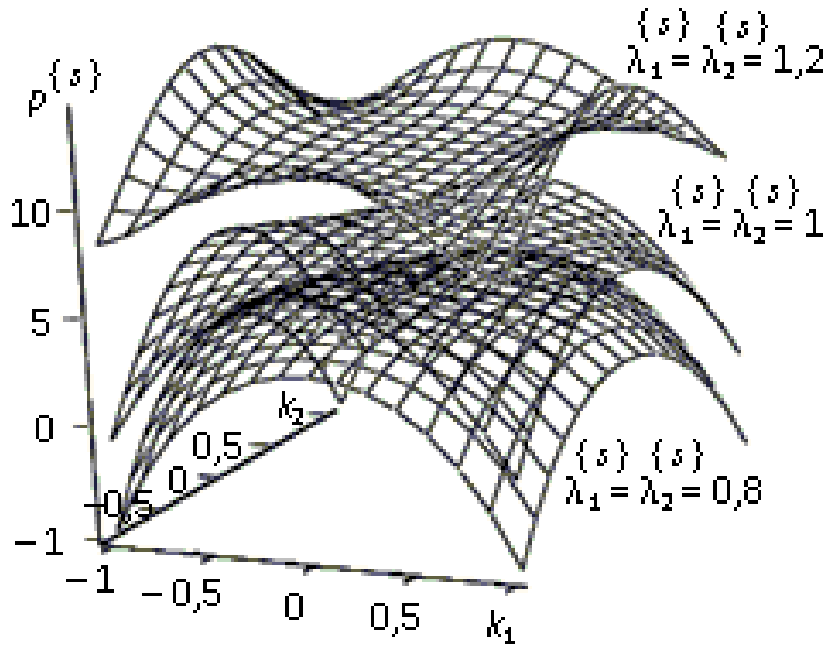


Рис. 6.4. Графік функцій $p^{\{s\}}$ ($\varphi = 0, v = 0,1c_0^{\{s\}}$)

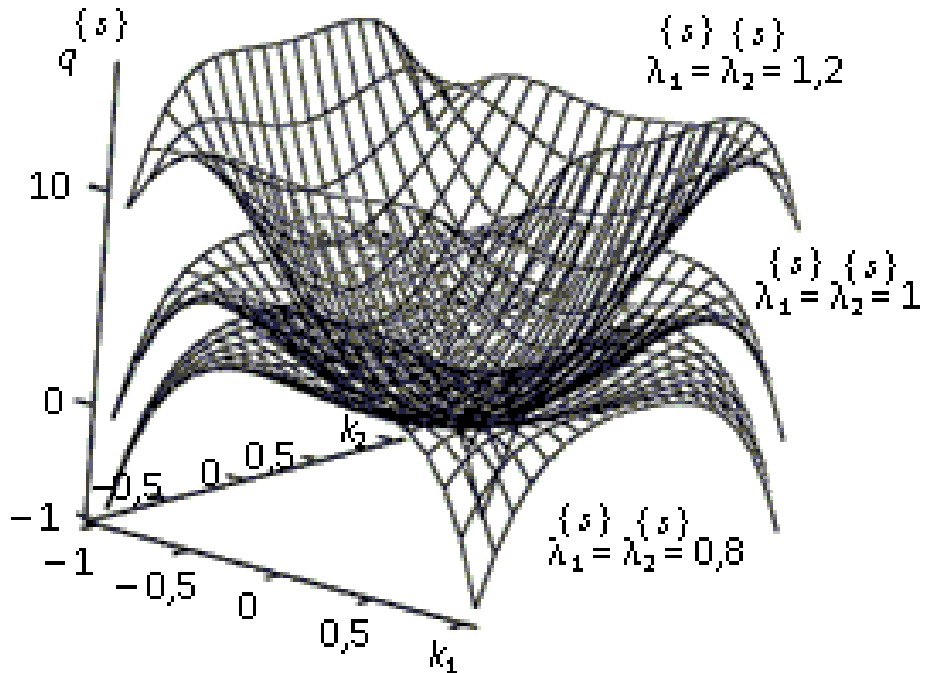


Рис. 6.5. Графік функцій $q^{\{s\}}$ ($\varphi = 0, v = 0,1c_0^{\{s\}}$)

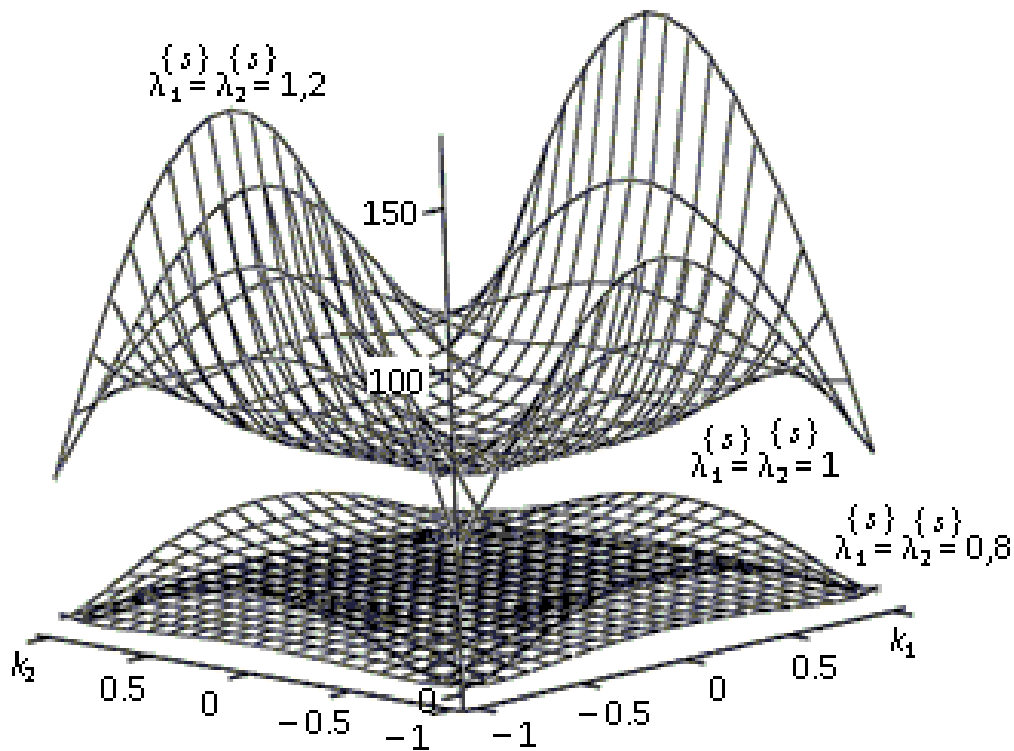


Рис. 6.6. Графік функцій $\Delta^{\{s\}}$ ($\varphi = 0, v = 0,1c_0^{\{s\}}$)

Аналіз числових значень функцій $p^{\{s\}}$, $q^{\{s\}}$ та $\Delta^{\{s\}}$ дозволяє стверджувати, що в області, яка досліджується, ці функції можуть набувати як від'ємних, так і додатних значень, тобто корені рівнянь (6.7) і відповідно (6.1) можуть бути як дійсними, так і комплексними.

На рис. 6.7 проілюстровано вплив швидкості руху навантаження на значення дискримінанта рівняння (6.7). Як видно з рис. 6.6, початкові напруження, швидкість руху навантаження суттєво впливають на значення функції $\Delta^{\{s\}}$. Очевидно, що за певної швидкості руху навантаження вплив початкових напружень зменшується.

Таким чином, аналіз числових значень функцій $\eta^{\{s\}2}$ дозволяє стверджувати, що в області, що досліджується, ці функції можуть приймати як від'ємні, так і додатні значення, тобто корені рівнянь (6.1) можуть бути як дійсними, так і комплексними.

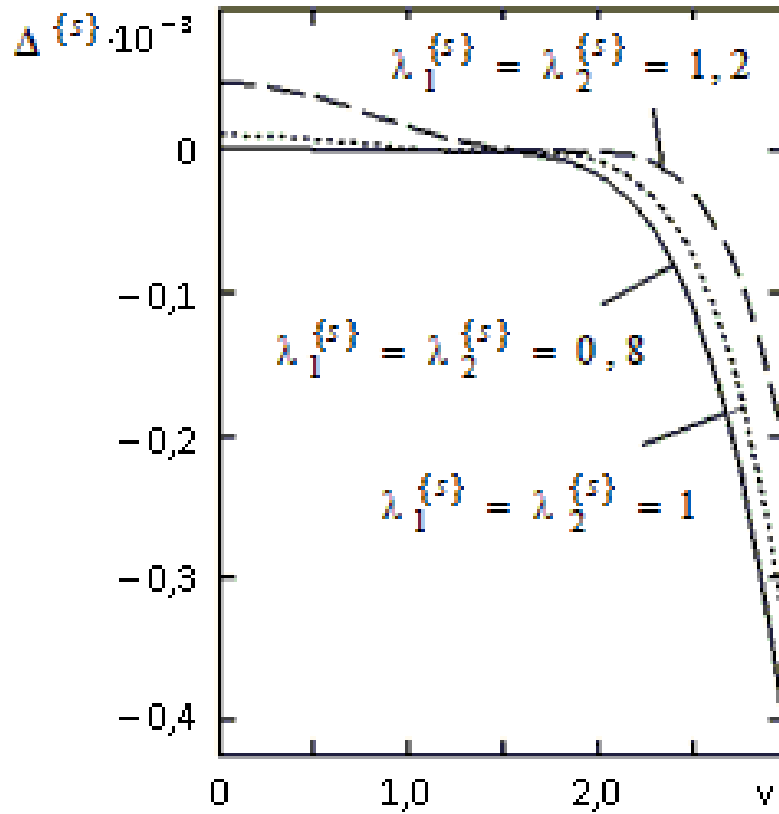


Рис. 6.7. Залежність дискримінанта характеристичного рівняння $\Delta \{s\}$ від швидкості руху навантаження

В загальному випадку для стисливих і нестисливих матеріалів існують дозвукові швидкості руху навантаження, при яких можливе існування дійсних кратних коренів характеристичних рівнянь.

Початкові (залишкові) деформації суттєво впливають на значення коренів характеристичних рівнянь особливо при дозвукових швидкостях руху навантаження.

При відповідних значеннях швидкостей навантаження вплив початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь може значно зменшуватись або збільшуватись.

Від напрямку руху навантаження залежить розташування області найменшого впливу початкових напружень.

6.1.2. Випадок симетричного початкового напруженого стану

Розглянемо початковий напружений стан у вигляді (3.4) [15, 35]. При допущеннях, викладених у розділі 3, рівняння усталеного руху елемента шаруватого середовища в рухомій системі координат (3.11) після подвійного перетворення Фур'є можна представити у вигляді (5.10), де

$$\mu_1^{\{s\}2} = c_{31}^{\{s\}-2} \left[c_{12}^{\{s\}2} (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 v^2 \cos^2 \varphi \right]; \quad (6.23)$$

$$\mu_{2,3}^{\{s\}2} = B_1^{\{s\}} \pm \sqrt{B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}}}. \quad (6.24)$$

Для стисливого матеріалу [35]

$$\begin{aligned} 2B_1^{\{s\}} &= c_{31}^{\{s\}-2} c_{33}^{\{s\}-2} \left[\left(c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} - d^{\{s\}} \right) (k_1^2 + k_2^2) - \right. \\ &\left. - k_1^2 v^2 \left(c_{33}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} \right) \cos^2 \varphi \right]; \quad B_2^{\{s\}} = c_{31}^{\{s\}-2} c_{33}^{\{s\}-2} \left[c_{11}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} (k_1^2 + k_2^2)^2 + \right. \\ &\left. + k_1^2 (k_1^2 + k_2^2) \left(c_{11}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2} \right) v^2 \cos^2 \varphi + k_1^4 v^4 \cos^4 \varphi \right]; \\ &\tilde{\varrho}^{\{s\}} d^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}}; \quad \tilde{\varrho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{ijij}^{\{s\}}; \quad i, j = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (6.25)$$

а для нестисливого матеріалу [15]

$$\begin{aligned} 4B_1^{\{s\}} &= \lambda_0^{\{s\}-2} c_{31}^{\{s\}-2} \left[d^{\{s\}} (k_1^2 + k_2^2) - 2k_1^2 \lambda_0^{\{s\}2} v^2 \cos^2 \varphi \right]; \\ B_2^{\{s\}} &= \lambda_0^{\{s\}-2} c_{31}^{\{s\}-2} (k_1^2 + k_2^2) \left[c_{13}^{\{s\}2} (k_1^2 + k_2^2) + k_1^2 v^2 \cos^2 \varphi \right]; \\ \tilde{\varrho}^{\{s\}} d^{\{s\}} &= \tilde{\chi}_{3333}^{\{s\}} + \lambda_0^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - 2\lambda_0^{\{s\}} (\tilde{\chi}_{1133}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1313}^{\{s\}}); \\ \tilde{\varrho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} &= \tilde{\chi}_{ijji}^{\{s\}}; \quad \lambda_0^{\{s\}2} = \lambda_1^{\{s\}-2} q_1^{\{s\}-2} \lambda_3^{\{s\}2} q_3^{\{s\}2}; \end{aligned} \quad (6.26)$$

$q_i^{\{s\}}$ ($i = \overline{1,3}$) – параметри, що характеризують нестисливий матеріал елемента шаруватого середовища, що розглядається.

Із (6.23) слідує, що $\mu_1^{\{s\}}$ буде приймати дійсні значення у випадку, якщо

$$k_1^2 \left(c_{12}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \varphi \right) + c_{12}^{\{s\}2} k_2^2 \geq 0. \quad (6.27)$$

В іншому випадку значення $\mu_1^{\{s\}}$ будуть чисто уявними.

Дослідження на екстремум функції в лівій частині нерівності (6.27) показують, що нерівність (6.27) виконуються, принаймні, за умови

$$v \leq c_{12}^{\{s\}} / \cos \varphi, \quad (6.28)$$

тобто, принаймні, при дозвукових швидкостях руху поверхневого навантаження.

При трансзвукових и надзвукових швидкостях руху навантаження (у випадку стисливого матеріалу) і надзвукових швидкостях (у випадку нестисливого матеріалу) знак $\mu_1^{\{s\}2}$ залежить від траєкторії руху навантаження, властивостей матеріалу елемента шаруватого середовища, початкового напруженого стану і параметрів k_1, k_2 .

Проаналізуємо вирази (6.24). Перед усім слід звернути увагу на то, що $B_2^{\{s\}} \geq 0$ при будь-яких значеннях параметрів. З урахуванням сказаного можливі такі варіанти:

- при $B_2^{\{s\}} > B_1^{\{s\}2}$ корені характеристичних рівнянь $\mu_2^{\{s\}}$ і $\mu_3^{\{s\}}$ будуть комплексними;
- при $0 \leq B_2^{\{s\}} \leq B_1^{\{s\}2}$ і $B_1^{\{s\}} < 0$ корені $\mu_2^{\{s\}}$ і $\mu_3^{\{s\}}$ будуть чисто уявними;
- при $0 \leq B_2^{\{s\}} \leq B_1^{\{s\}2}$ і $B_1^{\{s\}} \geq 0$ корені $\mu_2^{\{s\}}$ і $\mu_3^{\{s\}}$ будуть дійсними.

В загальному випадку значення $\mu_2^{\{s\}}$ і $\mu_3^{\{s\}}$ будуть визначатися траєкторією руху навантаження, властивостями матеріалу елемента шаруватого середовища, початковим напруженим станом і значеннями параметрів k_1, k_2 .

Умова

$$B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}} = 0 \quad (6.29)$$

є необхідною умовою існування кратних коренів характеристичного рівняння рівняння руху (5.10). Рівняння (6.29) являє собою біквдратне алгебраїчне рівняння відносно швидкості навантаження і має дійсні корені у випадку, якщо виконується умова

$$(c_{31}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2})(c_{33}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2}) - d^{\{s\}} \geq 0 \quad (6.30)$$

у випадку стисливих тіл, і

$$d + 2(c_{31}^2 + \lambda_0^2 c_{13}^2) \geq 0. \quad (6.31)$$

у випадку нестисливих тіл.

6.1.2.1. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для стисливих тіл. Симетричний напружений початковий стан

Чисельні дослідження проведемо для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонійного типу (6.14).

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанта теорії малих початкових деформацій вирази для визначення параметрів $c_{ij}^{\{s\}2}$ і $d^{\{s\}}$ з урахуванням (3.4) мають вигляд

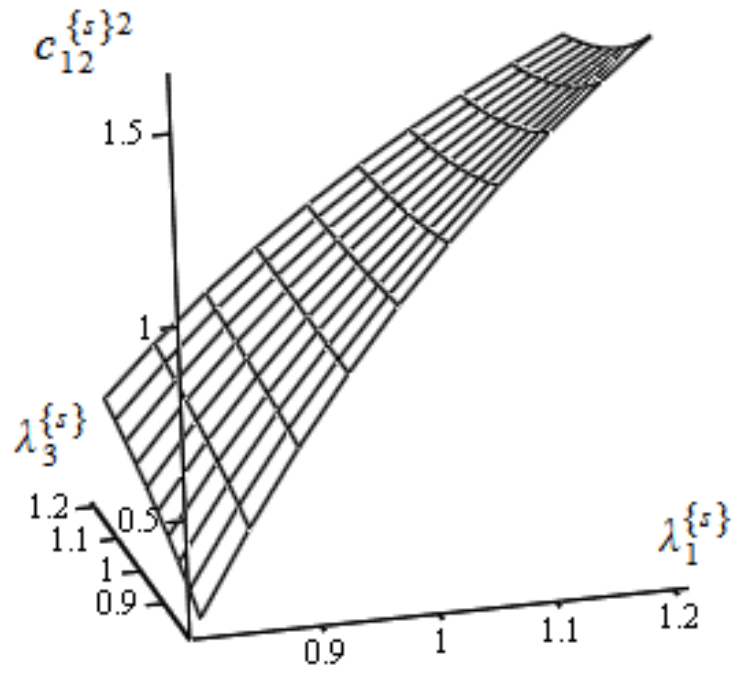
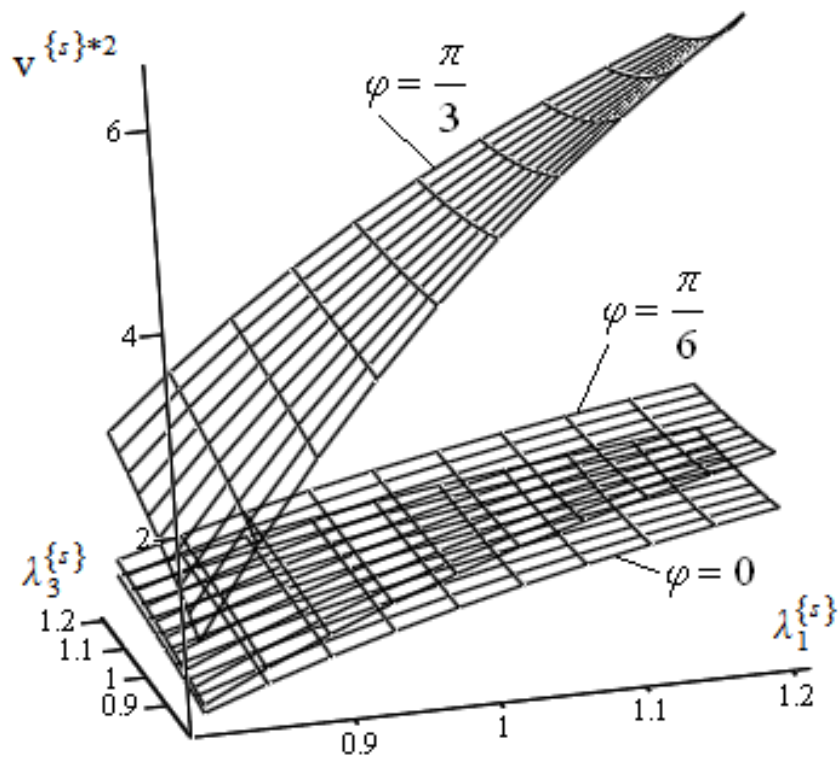
$$\begin{aligned}
 c_{11}^{\{s\}2} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{2(1-\nu^{\{s\}})}{\lambda_3^{\{s\}}(1-2\nu^{\{s\}})}; & c_{12}^{\{s\}2} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{(1-\nu^{\{s\}})(2\lambda_1^{\{s\}}-1) + \nu^{\{s\}}(\lambda_3^{\{s\}}-2)}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(1-2\nu^{\{s\}})}; \\
 c_{13}^{\{s\}2} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{2\lambda_1^{\{s\}2} - \nu^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}2} - (2\lambda_1^{\{s\}} - \lambda_3^{\{s\}})(1 + \nu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}2}\lambda_3^{\{s\}}(1-2\nu^{\{s\}})}; \\
 c_{31}^{\{s\}2} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{(2\lambda_3^{\{s\}}-1)(1-2\nu^{\{s\}}) + \nu^{\{s\}}(2\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}2}(1-2\nu^{\{s\}})}; \\
 c_{33}^{\{s\}2} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{2\lambda_3^{\{s\}}(1-\nu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}2}(1-2\nu^{\{s\}})}; & d^{\{s\}} &= \frac{\mu^{\{s\}}}{\tilde{\varrho}^{\{s\}}} \frac{1-\nu^{\{s\}}(\lambda_3^{\{s\}}-1)}{\lambda_1^{\{s\}2}(1-2\nu^{\{s\}})}.
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Тут $\mu^{\{s\}}$ – модуль зсуву, $\nu^{\{s\}}$ – коефіцієнт Пуассона. Величини у формулах (6.23) пронормуємо за величиною $c_0^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}} / \tilde{\varrho}^{\{s\}}$. Розрахунки проведемо для значення $\nu^{\{s\}} = 0.3$.

Як видно з рис. 6.8 значення $c_{12}^{\{s\}2}$ під час початкового розтягування вздовж відповідних осей збільшується, а під час стиснення зменшується.

Таким чином, під час початкового розтягування значення швидкості руху поверхневого навантаження $v^{\{s\}*} = c_{12}^{\{s\}2} / \cos\varphi$, за якої функція $\mu_1^{\{s\}2}$ змінює знак, також збільшуватиметься, а під час стиснення – зменшуватиметься.

На рис. 6.9 показаний вплив початкових деформацій та траєкторії руху поверхневого навантаження на значення параметра $v^{\{s\}*2}$.

Рис. 6.8. Функція $c_{12}^{\{s\}2}$ Рис. 6.9. Функція $v^{\{s\}*2}$

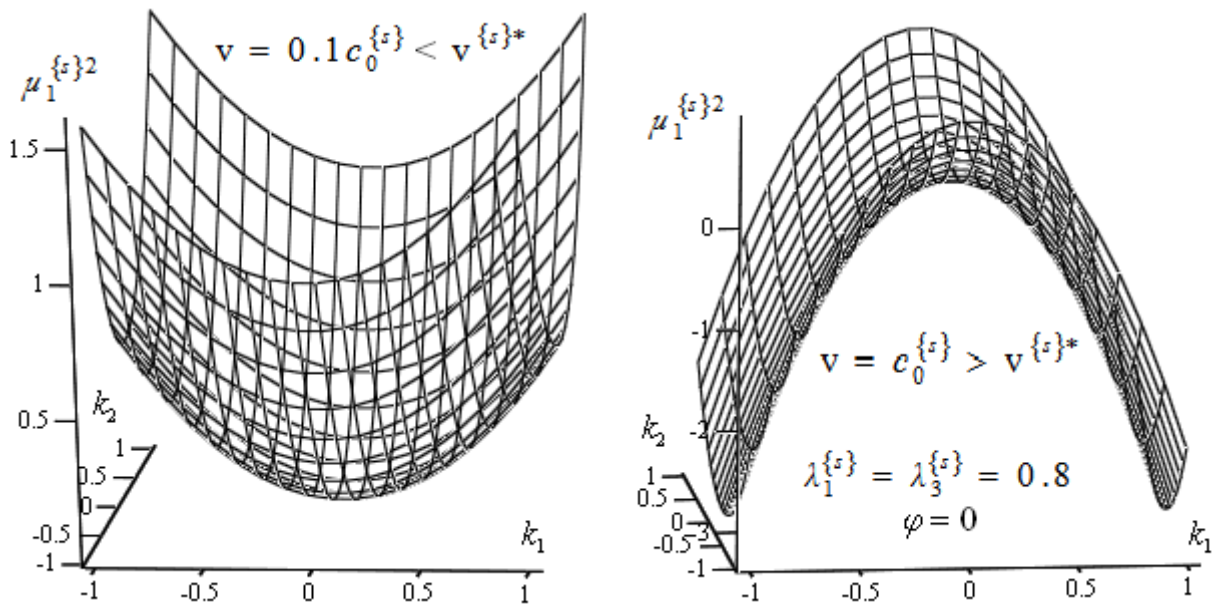


Рис. 6.10. Поверхня $\mu_1^{\{s\}2}(k_1, k_2)$ за різних швидкостей руху навантаження

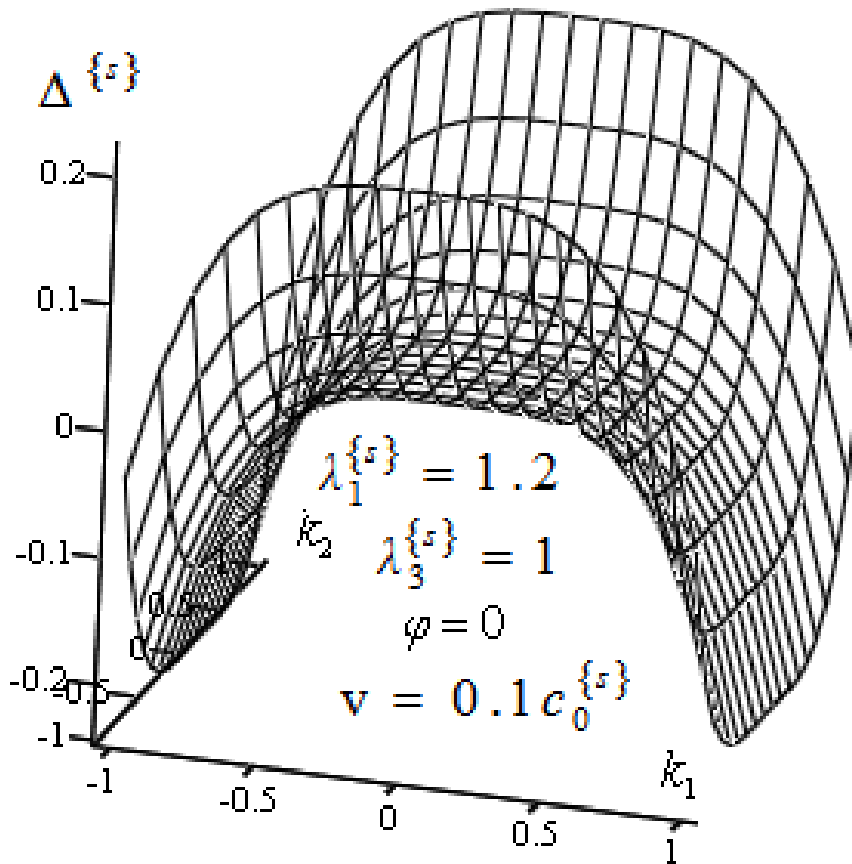


Рис. 6.11. Функція $\Delta^{\{s\}}(k_1, k_2)$

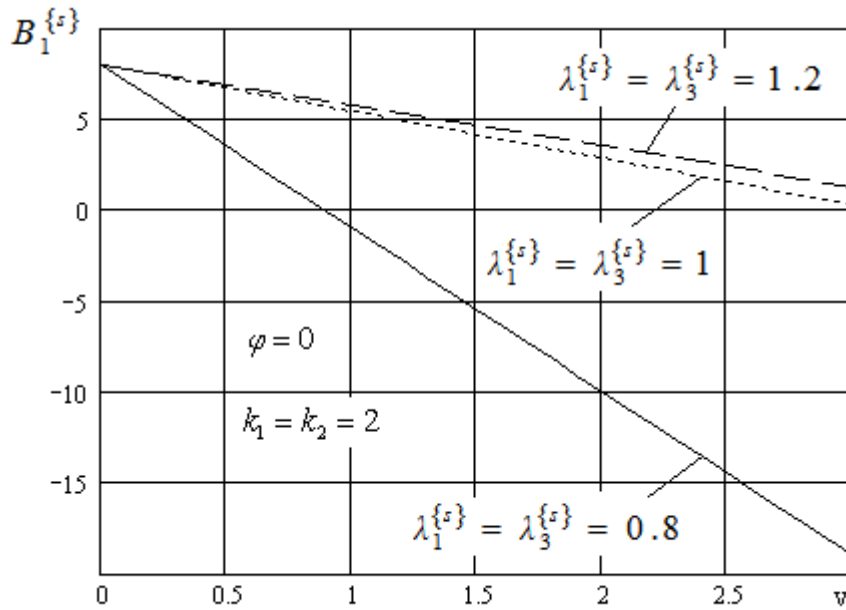


Рис. 6.12. Залежність функції $B_1^{\{s\}}(k_1, k_2)$ від початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження

На рис. 6.9 показано вплив початкових деформацій і траєкторії руху поверхневого навантаження на значення параметра $v^{\{s\}*2}$.

На рис. 6.10 для конкретних значень основних параметрів наведено функцію $\mu_1^{\{s\}2}(k_1, k_2)$.

Функція $\Delta^{\{s\}} = B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}}$ у досліджуваному діапазоні початкових деформацій і швидкостей руху навантаження функція може набувати як позитивних, так і негативних значень (рис. 6.11).

Інтерес становить також значення функції $B_1^{\{s\}}(k_1, k_2)$. Для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонійного типу при дозвукових швидкостях руху навантаження при $0.8 \leq \lambda_1^{\{s\}} \leq 1.2$ і $0.8 \leq \lambda_3^{\{s\}} \leq 1.2$ $B_1^{\{s\}}(k_1, k_2) \geq 0$. Причому, за початкового розтягування швидкість v , за якої функція $B_1^{\{s\}}(k_1, k_2)$ змінює знак, значно більша, ніж за початкового стиснення (рис. 6.12).

6.1.2.2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь для нестисливих тіл. Симетричний напружений початковий стан

Чисельні дослідження проведемо для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (6.18).

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій вирази для визначення параметрів $c_{ij}^{\{s\}2}$, $d^{\{s\}}$ і $\lambda_0^{\{s\}}$ з урахуванням (3.4) мають вигляд

$$c_{12}^{\{s\}2} = c_{21}^{\{s\}2} = \lambda_1^{\{s\}} \frac{\mu^{\{s\}}}{\rho^{\{s\}}}; \quad c_{13}^{\{s\}2} = \frac{2\lambda_1^{\{s\}4} \mu^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}3} + 1 \rho^{\{s\}}}; \quad c_{31}^{\{s\}2} = \frac{2}{\lambda_1^{\{s\}2} (\lambda_1^{\{s\}3} + 1)} \frac{\mu^{\{s\}}}{\rho^{\{s\}}}; \quad (6.33)$$

$$\lambda_0^{\{s\}} = 1; \quad d^{\{s\}} = \frac{4\lambda_1^{\{s\}} \mu^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}3} + 1 \rho^{\{s\}}}.$$

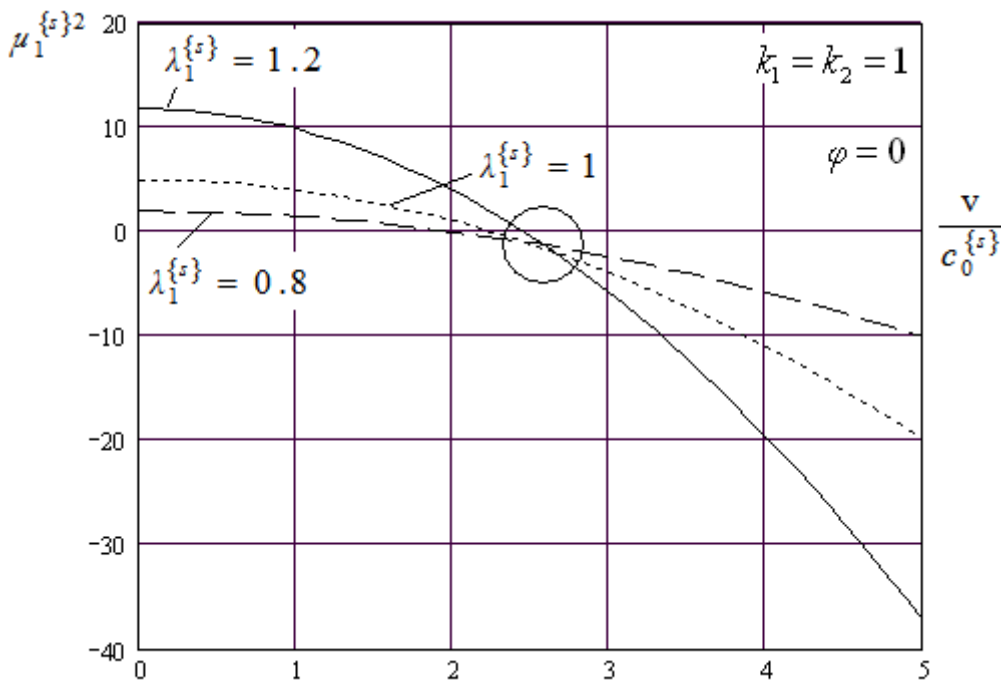


Рис. 6.13. Функція $\mu_1^{\{s\}2}$.

З урахуванням (6.33) можна стверджувати, що для нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича нерівність (6.31) виконується строго. Таким чином, значення $v_{1,2}^{\{s\}*2}$ будуть дійсними, причому, оскільки $4\lambda_0^{\{s\}} c_{31}^{\{s\}} c_{13}^{\{s\}} - d^{\{s\}} > 0$, то $v_1^{\{s\}*2} < 0$, а $v_2^{\{s\}*2} > 0$. Відповідно корені

характеристичного рівняння $\mu_{2,3}^{\{s\}2}$, що визначаються за формулою (6.24), за умови $0 < v < v_2^*$ будуть комплексними, а за умови $v \geq v_2^*$ дійсними.

Величини у формулах (6.33) пронормуємо за величиною $c_0^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}} / \rho^{\{s\}}$.

Як видно з першої формули, значення $c_{12}^{\{s\}2}$ прямо пропорційне початковому подовженню і під час початкового розтягування вздовж відповідних осей збільшується, а під час стиснення зменшується.

Таким чином, під час початкового розтягування значення швидкості руху поверхневого навантаження $v^{\{s\}*} = c_{12}^{\{s\}} / \cos \varphi$, за якої функція $\mu_1^{\{s\}2}$ змінює знак, також збільшуватиметься, а під час стиснення - зменшуватиметься. Також очевидно, що за дозвукових швидкостей руху навантаження $\mu_1^{\{s\}2} > 0$.

На рис. 6.13 показано вплив початкових деформацій і швидкості руху навантаження на значення функції $\mu_1^{\{s\}2}$. Аналіз отриманих результатів показує, що за заданих параметрів k_1, k_2 існують швидкості руху навантаження, за яких початкові напруження несуттєво впливають на значення функції $\mu_1^{\{s\}2}$.

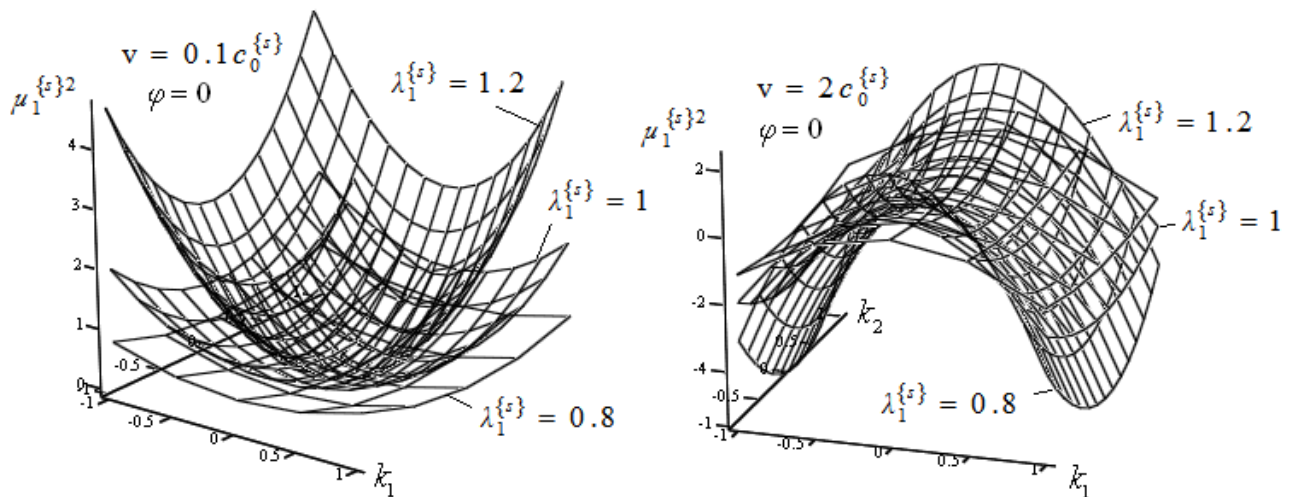


Рис. 6.14. Поверхня $\mu_1^{\{s\}2}(k_1, k_2)$ за різних швидкостей руху навантаження

На рис. 6.14 для конкретних значень основних параметрів наведено функцію $\mu_1^{\{s\}2}(k_1, k_2)$.

Дослідимо дискримінант характеристичного рівняння другого рівняння (5.10) $\Delta^{\{s\}} = B_1^{\{s\}2} - B_2^{\{s\}}$. Вигляд функції $\Delta^{\{s\}}(v)$ за різних значень початкових напружень наведено на рис. 6.15.

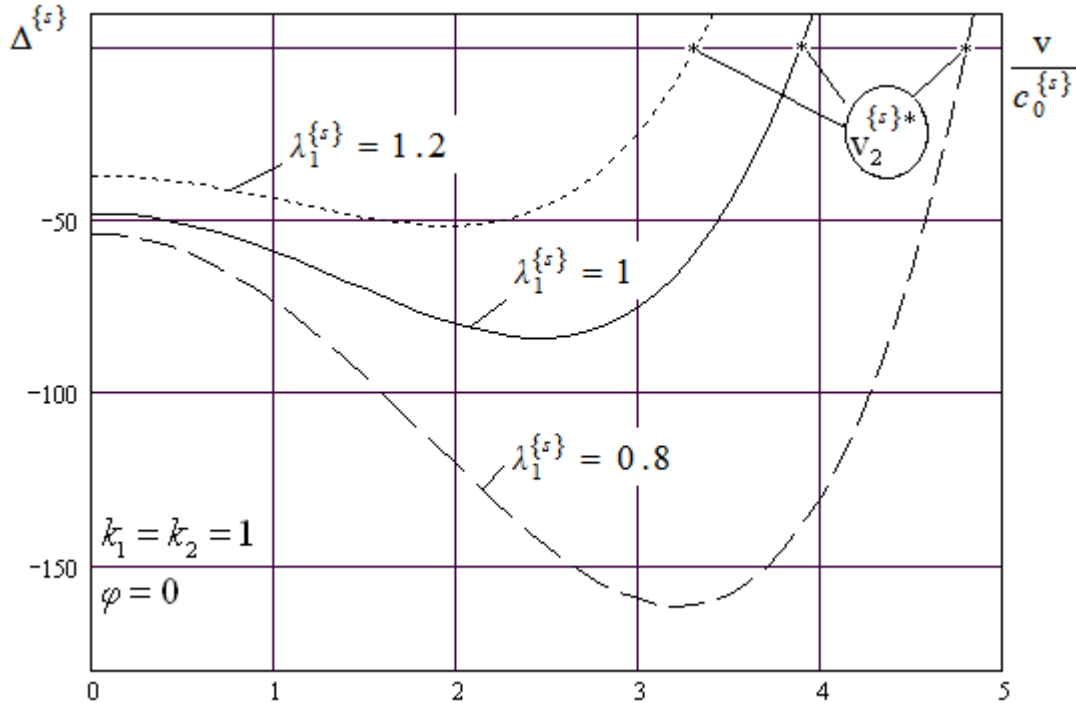


Рис. 6.15. Функція $\Delta^{\{s\}}(v)$

Точки $v_2^{\{s\}*}$ на відповідних графіках відповідають значенням швидкостей руху навантаження, за яких дискримінант змінює знак і корені характеристичного рівняння $\mu_{2,3}^{\{s\}2}$ набувають дійсних значень. Аналіз чисельних результатів показує, що в діапазоні дозвукових швидкостей значення $\mu_{2,3}^{\{s\}2}$ будуть комплексними.

6.2. Дослідження характеристичних коренів рівнянь для двовимірних динамічних задач

Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}(v)$ і $\eta_2^{\{s\}2}(v)$ визначають вид рівнянь руху (3.30) і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються [4, 5, 7, 36, 37, 116].

Представимо розв'язок рівняння (3.31) у вигляді

$$\eta_i^{\{s\}2}(\nu) = A^{\{s\}} \pm \sqrt{D^{\{s\}}}; \quad D^{\{s\}} = A^{\{s\}2} - A_1^{\{s\}}. \quad (6.34)$$

В таблиці 1 представлені варіанти можливих значень коренів $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ рівняння (3.31) у залежності від значень дійсних функцій $A^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}}$ і $D^{\{s\}}$. Символ «с» відповідає комплексному значенню функцій $\eta_1^{\{s\}2}(\nu)$ і $\eta_2^{\{s\}2}(\nu)$. Виділені кольором чарунки відповідають кратним кореням характеристичного рівняння (3.31). Значення $\eta_i^{\{s\}2}$ – дійсні, якщо $D^{\{s\}} \geq 0$, і $\eta_i^{\{s\}2}$ – комплексні, якщо $D^{\{s\}} < 0$.

Відмітимо, що якщо $D^{\{s\}} = 0$, то корені рівняння (3.31) будуть рівними ($\eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}}$). Крім того, як видно із таблиці 6.1, рівняння (3.31) може мати двократні корені рівні нулю і у випадку, коли $A_1^{\{s\}} = 0$.

Таблиця 6.1. Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ у залежності від значень функцій

$$A^{\{s\}}, A_1^{\{s\}}, D^{\{s\}}$$

$A^{\{s\}}$	$A_1^{\{s\}}$	$D^{\{s\}}$	$\eta_1^{\{s\}2}$	$\eta_2^{\{s\}2}$	$A^{\{s\}}$	$A_1^{\{s\}}$	$D^{\{s\}}$	$\eta_1^{\{s\}2}$	$\eta_2^{\{s\}2}$
+	+	+	+	+	0	-	+	-	+
+	+	-	с	с	-	+	+	-	-
+	+	0	+		-	+	0	-	
+	-	+	-	+	-	+	-	с	с
+	0	+	0	+	-	0	+	-	0
0	+	-	с	с	-	-	+	-	+
0	0	0	0						

6.2.1. Стисливий матеріал

Введемо позначення

$$\tilde{\varrho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{ijj}^{\{s\}}; \quad \tilde{\varrho}^{\{s\}} d^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}; \quad i, j=1,2. \quad (6.35)$$

Використовуючи (6.35), співвідношення (3.22) можна записати у вигляді

$$2Ac_{22}^2 c_{21}^2 = d^2 - c_{22}^2 (c_{11}^2 - v^2) - c_{21}^2 (c_{12}^2 - v^2); \quad A_1 c_{22}^2 c_{21}^2 = (c_{11}^2 - v^2)(c_{12}^2 - v^2). \quad (6.36)$$

Тут через $c_{ii}^{\{s\}}$ і $c_{ij}^{\{s\}}$ ($i \neq j$) позначені швидкості поширення в напрямку осі Oy_i відповідно повздовжніх і поперечних поляризованих хвиль в необмеженому тілі з початковими напруженнями [61, 64, 65].

Рівняння $D^{\{s\}} = 0$ представляє собою біквдратне алгебраїчне рівняння відносно швидкості v . Корені цього рівняння визначаються по формулі

$$v_i^{\{s\}2} = \left(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} \right)^{-2} \left\{ \left(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} \right) \left(c_{22}^{\{s\}2} c_{11}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} \right) - d^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^i \sqrt{4d^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} \left[d^{\{s\}2} - \left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right) \left(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} \right) \right]} \right\}. \quad (6.37)$$

Із (6.37) слідує, що рівняння $D^{\{s\}} = 0$ має дійсні корені у випадку, якщо виконується умова

$$\left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right) \left(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} \right) \leq d^{\{s\}2}. \quad (6.38)$$

Для швидкостей $v_i^{\{s\}}$, що визначаються формулою (6.37), справедлива нерівність

$$v_i^{\{s\}} \leq c_{12}^{\{s\}}. \quad (6.39)$$

Умова $v_1^{\{s\}2} \geq 0$ виконується при

$$d^{\{s\}} \leq c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} - c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}; \quad d^{\{s\}} \geq c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} + c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}. \quad (6.40)$$

Проаналізуємо функцію $A^{\{s\}}$. З першої формули (6.36) маємо, що $A^{\{s\}} \geq 0$ при $v \geq v_{12}^{\{s\}}$ і $A^{\{s\}} < 0$ при $v < v_{12}^{\{s\}}$. Тут

$$v_{12}^{\{s\}2} = \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} \right)^{-1} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} - d^{\{s\}2} \right). \quad (6.41)$$

Не важко довести, що:

$$\begin{aligned} v_{12}^{\{s\}} < 0, \text{ якщо } d^{\{s\}2} > c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2}; \\ 0 \leq v_{12}^{\{s\}} \leq c_{12}^{\{s\}}, \text{ якщо } c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} \geq d^{\{s\}2} \geq c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right); \\ c_{12}^{\{s\}} < v_{12}^{\{s\}} < c_{11}^{\{s\}}, \text{ якщо } d^{\{s\}2} < c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} d_0^{\{s\}2} &= \left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right) \left(c_{22}^{\{s\}2} - c_{21}^{\{s\}2} \right); \quad d_1^{\{s\}2} = c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} \right); \\ d_2^{\{s\}2} &= c_{11}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2}; \\ d_1^{\{s\}*} &= c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} - c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}; \quad d_2^{\{s\}*} = c_{11}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}} + c_{12}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Для введених величин мають місце нерівності

$$d_0^{\{s\}2} < d_1^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}*2}; \quad (6.44)$$

$$d_0^{\{s\}2} \leq d_1^{\{s\}*2} < d_2^{\{s\}2} < d_2^{\{s\}*2}. \quad (6.45)$$

Відношення $d_1^{\{s\}2} = d_1^{\{s\}*}$ виконується, якщо

$$c_{22}^{\{s\}} c_{21}^{\{s\}-1} + c_{21}^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}-1} = 2c_{11}^{\{s\}} c_{12}^{\{s\}-1}. \quad (6.46)$$

Не важко проаналізувати функцію $A_1^{\{s\}}$. З другої формули (6.36) слідує, що $A_1^{\{s\}} > 0$ при $v < c_{12}^{\{s\}}$ і $v > c_{11}^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}} = 0$ при $v = c_{12}^{\{s\}}$ і $v = c_{11}^{\{s\}}$ і $A_1^{\{s\}} < 0$ при $c_{12}^{\{s\}} < v < c_{11}^{\{s\}}$.

З урахуванням умов (6.38), (6.39), (6.42), (6.44) значення функцій $A^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}}$ і $D^{\{s\}}$ можна визначити для всіх значень швидкості руху поверхневого навантаження і вказати умови існування кратних коренів рівняння (3.31). В таблиці 6.2 вказані умови існування кратних коренів для стисливого матеріалу.

Таблиця 6.2. Умови існування кратних коренів для стисливого матеріалу

ν	$d^{\{s\}}$	$\eta_1^{\{s\}2}$	$\eta_2^{\{s\}2}$
$\nu = \nu_1^{\{s\}}$	$d^{\{s\}} \geq d_2^{\{s\}*}$	+	
	$d_0^{\{s\}} > d^{\{s\}} < d_1^{\{s\}*}$	-	
$\nu = \nu_2^{\{s\}}$	$d^{\{s\}} > d_1^{\{s\}}$	+	
	$d_0^{\{s\}} < d^{\{s\}} < d_1^{\{s\}}$	-	
$\nu = c_{12}^{\{s\}}$	$d^{\{s\}} > d_1^{\{s\}}$	0	+
	$d^{\{s\}} = d_1^{\{s\}}$	0	
	$d^{\{s\}} < d_1^{\{s\}}$	-	0
$\nu = c_{11}^{\{s\}}$		0	+

Гармонічний потенціал. Розглянемо випадок стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу (6.14). Компоненти тензора $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ при цьому можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} &= 2\mu^{\{s\}} \frac{\lambda_1^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}} \frac{1-\nu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} &= 2\mu^{\{s\}} \frac{\lambda_2^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}} \frac{1-\nu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} \nu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}} \frac{1-\nu^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}}}; & (6.47) \\ \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}} \frac{\lambda_1^{\{s\}} \left[(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}}) (1-\nu^{\{s\}}) - 1 \right]}{\lambda_2^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} \left[(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(1 - \nu^{\{s\}}) - 1 \right]}{1 - 2\nu^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})},$$

де $\lambda_i^{\{s\}}$ ($i=1,2$) – видовження ($\lambda_i^{\{s\}} = const$) вздовж осей системи координат, $\mu^{\{s\}}$ – модуль зсуву, $\nu^{\{s\}}$ – коефіцієнт Пуасона

Підставивши значення (6.47) в вирази (3.32) і (6.43), для випадку матеріалу з гармонічним потенціалом отримаємо, що

$$\begin{aligned} d^{\{s\}2} &= d_0^{\{s\}2}; \\ 2A^{\{s\}} c_{22}^{\{s\}2} c_{21}^{\{s\}2} &= -\left(c_{11}^{\{s\}2} - \nu^2\right) c_{21}^{\{s\}2} - \left(c_{12}^{\{s\}2} - \nu^2\right) c_{22}^{\{s\}2} < 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$

З урахуванням (6.48) із формул (6.34) маємо

$$\eta_1^{\{s\}2} = -\left(c_{11}^{\{s\}2} - \nu^2\right) c_{22}^{\{s\}2}; \quad \eta_2^{\{s\}2} = -\left(c_{12}^{\{s\}2} - \nu^2\right) c_{21}^{\{s\}2}. \quad (6.49)$$

Із (6.49) слідує, що при дозвуковій швидкості руху поверхневого навантаження ($\nu < c_{12}^{\{s\}}$) для потенціалу гармонічного типу характеристичне рівняння (3.31) має чотири різних комплексних кореня ($\eta_1^{\{s\}2} < 0$, $\eta_2^{\{s\}2} < 0$), при трансзвуковій швидкості ($c_{12}^{\{s\}} < \nu < c_{11}^{\{s\}}$) – два дійсних і два комплексних кореня ($\eta_1^{\{s\}2} < 0$, $\eta_2^{\{s\}2} > 0$) і при надзвуковій швидкості навантаження – чотири різних дійсних кореня ($\eta_1^{\{s\}2} > 0$, $\eta_2^{\{s\}2} > 0$). Рівняння (3.31) має рівний нулю двократний корінь при $\nu = c_{12}^{\{s\}}$ і $\nu = c_{11}^{\{s\}}$.

На рис. 6.16 показана залежність функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ від початкових деформацій і швидкості руху навантаження. Розглянутий випадок, коли $S_0^{22\{s\}} = 0$ і відповідно $\lambda_2^{\{s\}} = (1 - \nu^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}}) / (1 - \nu^{\{s\}})$. На рис. 6.16 лінії з індексом j ($j = \overline{1,5}$) відповідають значенню $\lambda_1^{\{s\}} = 0.8 + 0.1(j-1)$. Швидкість руху поверхневого

навантаження пронормована по величині $c_s^{\{s\}} = \sqrt{\frac{\mu^{\{s\}}}{\rho^{\{s\}}}}$. $c_s^{\{s\}} = c_{12}^{\{s\}}$ при $\lambda_1^{\{s\}} = 1$.

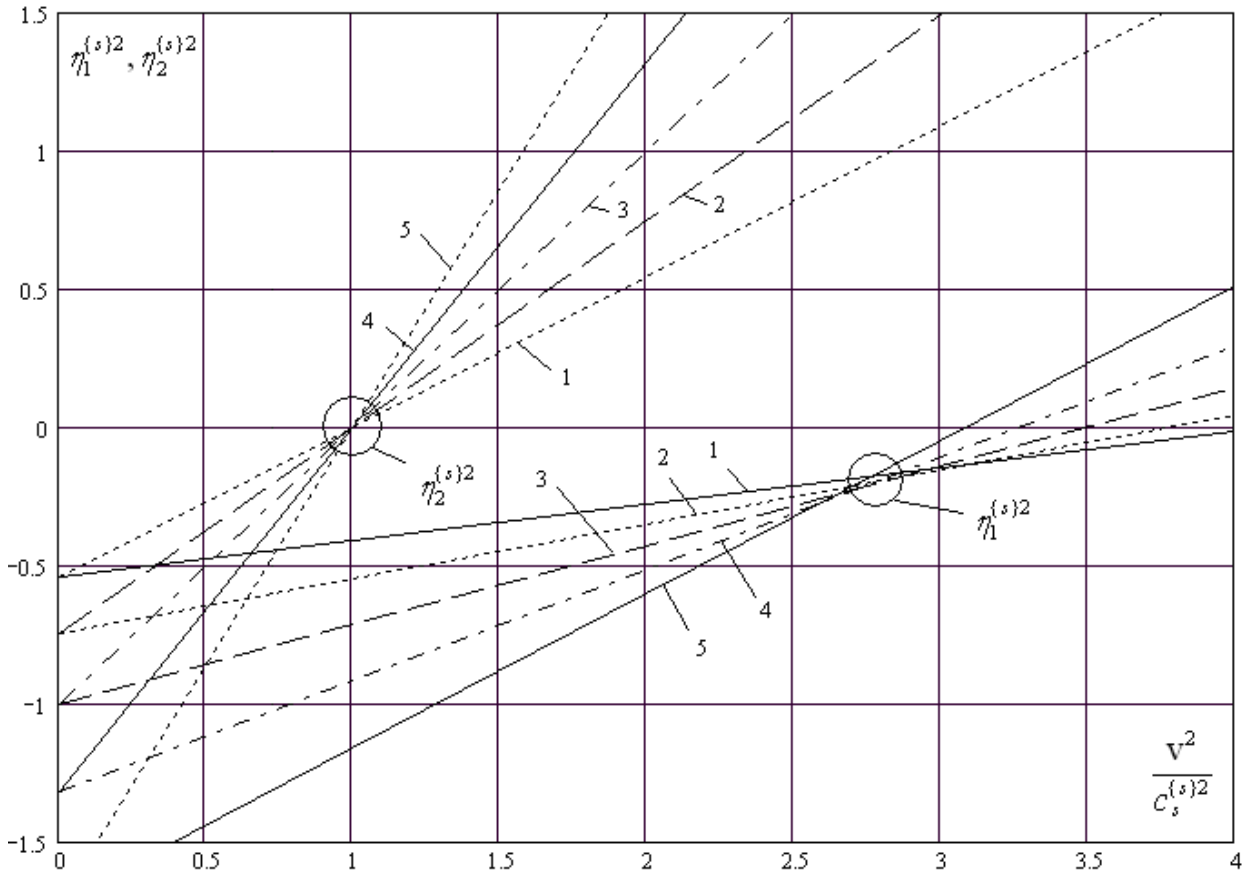


Рис. 6.16. Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ (гармонічний потенціал)

6.2.2. Нестисливий матеріал.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \tilde{q}d^{\{s\}} &= \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} (\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}); \\ \tilde{q}c_i^{\{s\}2} &= \tilde{\chi}_{ijji}^{\{s\}}; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Використавши (6.50), співвідношення (3.33) можна записати у вигляді

$$2A^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} v^2 - d^{\{s\}}; \quad A_1^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} (c_1^{\{s\}2} - v^2). \quad (6.51)$$

В формулах (6.50) і (6.51) через $c_i^{\{s\}}$ позначені швидкості поширення поперечних хвиль в напрямку осей Oy_i в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями [61, 64, 65].

Рівняння $D^{\{s\}} = 0$ – бікватратне алгебраїчне рівняння відносно швидкості v . Корені цього рівняння визначаються по формулі

$$v_i^{\{s\}2} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} \left[d^{\{s\}} - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} + (-1)^i 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}} \sqrt{\tilde{q}_{11}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2} - d^{\{s\}}} \right]. \quad (6.52)$$

Із (6.52) слідує, що рівняння $D^{\{s\}} = 0$ має дійсні корені у випадку, коли виконується умова

$$d^{\{s\}} \leq \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2}. \quad (6.53)$$

Для швидкостей $v_i^{\{s\}}$, що визначаються формулою (6.52), справедлива нерівність

$$v_i^{\{s\}} \leq c_1^{\{s\}}. \quad (6.54)$$

Умова $v_i^{\{s\}2} \geq 0$ виконується при

$$d^{\{s\}} \leq -2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} c_2^{\{s\}}; \quad d^{\{s\}} \geq 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} c_2^{\{s\}}. \quad (6.55)$$

Дослідимо функцію $A^{\{s\}}$. Із першої формули (6.51) слідує, що $A^{\{s\}} \geq 0$ при $v \geq v_{12}^{\{s\}}$ і $A^{\{s\}} < 0$ при $v < v_{12}^{\{s\}}$. Тут

$$v_{12}^2 = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} d^{\{s\}}. \quad (6.56)$$

Не важко довести, що: $v_{12}^{\{s\}} < 0$, якщо $d^{\{s\}} < 0$; $0 \leq v_{12}^{\{s\}} \leq c_1^{\{s\}}$, якщо $0 \leq d^{\{s\}} \leq \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2}$ і $c_1^{\{s\}} < v_{12}^{\{s\}}$, якщо $d^{\{s\}} > \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2}$.

Із другої формули (6.51) слідує, що $A_1^{\{s\}} > 0$ при $v < c_1^{\{s\}}$, $A_1^{\{s\}} = 0$ при $v = c_1^{\{s\}}$ і $A_1^{\{s\}} < 0$ при $v > c_1^{\{s\}}$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} d_0^{\{s\}} &= \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} c_2^{\{s\}2} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2}; & d_1^{\{s\}*} &= -2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} c_2^{\{s\}}; \\ d_2^{\{s\}*} &= 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} c_2^{\{s\}}; & d_1^{\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} c_1^{\{s\}2}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Для величин $d_0^{\{s\}}, d_1^{\{s\}*}, d_2^{\{s\}*}, d_1^{\{s\}}, d_2^{\{s\}}$ виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} \text{якщо } \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} < \tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}} \text{ і } \tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}} < \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} < 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}}, \text{ то } d_1^{\{s\}*} < d_1^{\{s\}} < d_2^{\{s\}*} < d_0^{\{s\}}; \\ \text{якщо } \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}}, \text{ то } d_1^{\{s\}*} < d_1^{\{s\}} < d_2^{\{s\}*} = d_0^{\{s\}}; \\ \text{якщо } \tilde{q}_{22}^{\{s\}} c_1^{\{s\}} = 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} c_2^{\{s\}}, \text{ то } d_1^{\{s\}*} < d_1^{\{s\}} = d_2^{\{s\}*} < d_0^{\{s\}}; \end{aligned} \quad (6.58)$$

якщо $\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} > 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}$, то $d_1^{s*} < d_2^{s*} < d_1^{s} < d_0^{s}$.

З урахуванням формул (6.52)–(6.58) значення функцій A^{s} , A_1^{s} , D^{s} , η_1^{s2} і η_2^{s2} можна визначити для всіх значень швидкості руху поверхневого навантаження і вказати умови існування кратних коренів рівняння (3.31). В таблиці 6.3 показані умови існування кратних коренів для нестисливого матеріалу.

Таблиця 6.3. Умови існування кратних коренів для нестисливого матеріалу

v	d^{s}	η_1^{s2}	η_2^{s2}
$v = v_1^{s}$	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} \geq 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_2^{s*} \leq d^{s} \leq d_0^{s}$	–	
$v = v_2^{s}$	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} < 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_1^{s} < d^{s} \leq d_2^{s*}$	–	
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} > 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d^{s} = d_0^{s}; d_2^{s*} < d^{s} < d_1^{s}$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} = 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_2^{s*} \leq d^{s} \leq d_0^{s}$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} \geq 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d^{s} = d_1^{s}$	0	
	$d_1^{s*} < d^{s} \leq 0$	+	
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} \leq 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; 0 < d^{s} < d_1^{s}$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} > 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; 0 < d^{s} \leq d_2^{s*}; d_1^{s} < d^{s} < d_0^{s}$		
$v = c_1^{s}$	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} < 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_1^{s} < d^{s} \leq d_0^{s*}$	–	0
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} = 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_2^{s*} \leq d^{s} \leq d_0^{s}$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} > 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d_2^{s*} < d^{s} < d_1^{s}; d^{s} = d_0^{s}$		
	$d^{s} > d_0^{s}$		
	$d^{s} = d_1^{s}$	0	
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} = 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; d^{s} = d_2^{s*}$	0	
	$d^{s} \leq 0$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} \leq 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; 0 < d^{s} < d_1^{s}$		
	$\tilde{q}_{22}^{s} c_1^{s} > 2\tilde{q}_{11}^{s} c_2^{s}; 0 < d^{s} \leq d_2^{s*}; d_1^{s} < d^{s} < d_0^{s}$	0	+

Потенціал Бартенєва-Хазановича. Розглянемо випадок нестисливого матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (6.18). Компоненти тензора $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ при цьому можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} = \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} &= -p^{\{s\}o}; \quad \tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} = \tilde{\kappa}_{2211}^{\{s\}} = 0; \\ \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}} = \tilde{\kappa}_{2121}^{\{s\}} &= -\frac{2\mu^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}2} + 1} - p^{\{s\}o}; \quad \tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}3}}{\lambda_1^{\{s\}2} + 1}; \\ \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}2} + 1)}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Підставивши значення (6.57) в вирази (3.33) і (6.55), для випадку нестисливого матеріалу з пружним потенціалом Бартенєва-Хазановича отримаємо, що

$$d^{\{s\}} = d_2^{\{s\}*}. \quad (6.60)$$

Результати оцінки функції $\eta_i^{\{s\}2}$ для матеріалу з пружним потенціалом Бартенєва-Хазановича наведені в таблиці 6.4.

Із таблиці 6.4 слідує, що при дозвуковій швидкості руху поверхневого навантаження ($v < c_1^{\{s\}}$) для потенціалу типу Бартенєва-Хазановича характеристичне рівняння (3.31) може мати кратні корені при $v = v_2^{\{s\}}$ і $\lambda_1^{\{s\}} > 1$. Також завжди будуть існувати кратні корені при $v = c_1^{\{s\}}$.

На рис. 6.17 показана залежність функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ від початкових деформацій і швидкості руху навантаження. Розглянутий випадок, коли $S_0^{22\{s\}} = 0$ і $\lambda_2^{\{s\}} = 1/\lambda_1^{\{s\}}$. На рис. 6.17 лінії з індексом j ($j = \overline{1,5}$) відповідають значенню $\lambda_1^{\{s\}} = 0.8 + 0.1(j-1)$. Швидкість руху поверхневого навантаження пронормована по величині $c_s^{\{s\}}$. $c_s^{\{s\}} = c_1^{\{s\}}$ при $\lambda_1^{\{s\}} = 1$.

Таблиця 6.4. Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ для потенціалу Бартенєва-Хазановича

v	$\lambda_1^{\{s\}}$	$\eta_1^{\{s\}2}$	$\eta_2^{\{s\}2}$
$0 < v < c_1^{\{s\}}$	$\lambda_1^{\{s\}} \leq 1; c_1^{\{s\}} \leq c_2^{\{s\}}$	–	–
$0 < v < v_2^{\{s\}}$	$\lambda_1^{\{s\}} > 1; c_1^{\{s\}} > c_2^{\{s\}}$	с	с
$v = v_2^{\{s\}}$	$1 < \lambda_1^{\{s\}} > \sqrt{2}; c_2^{\{s\}} < c_1^{\{s\}} < 2c_2^{\{s\}}$	–	
	$\lambda_1^{\{s\}} = \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} = 2c_2^{\{s\}}$	0	
	$\lambda_1^{\{s\}} > \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} > 2c_2^{\{s\}}$	+	
$v_2^{\{s\}} < v < c_1^{\{s\}}$	$1 < \lambda_1^{\{s\}} > \sqrt{2}; c_2^{\{s\}} < c_1^{\{s\}} < 2c_2^{\{s\}}$	–	–
	$\lambda_1^{\{s\}} = \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} = 2c_2^{\{s\}}$	с	с
	$\lambda_1^{\{s\}} > \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} > 2c_2^{\{s\}}$	+	+
$v = c_1^{\{s\}}$	$\lambda_1^{\{s\}} < \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} < 2c_2^{\{s\}}$	–	0
	$\lambda_1^{\{s\}} = \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} = 2c_2^{\{s\}}$	0	
	$\lambda_1^{\{s\}} > \sqrt{2}; c_1^{\{s\}} > 2c_2^{\{s\}}$	0	+
$v > c_1^{\{s\}}$		–	+

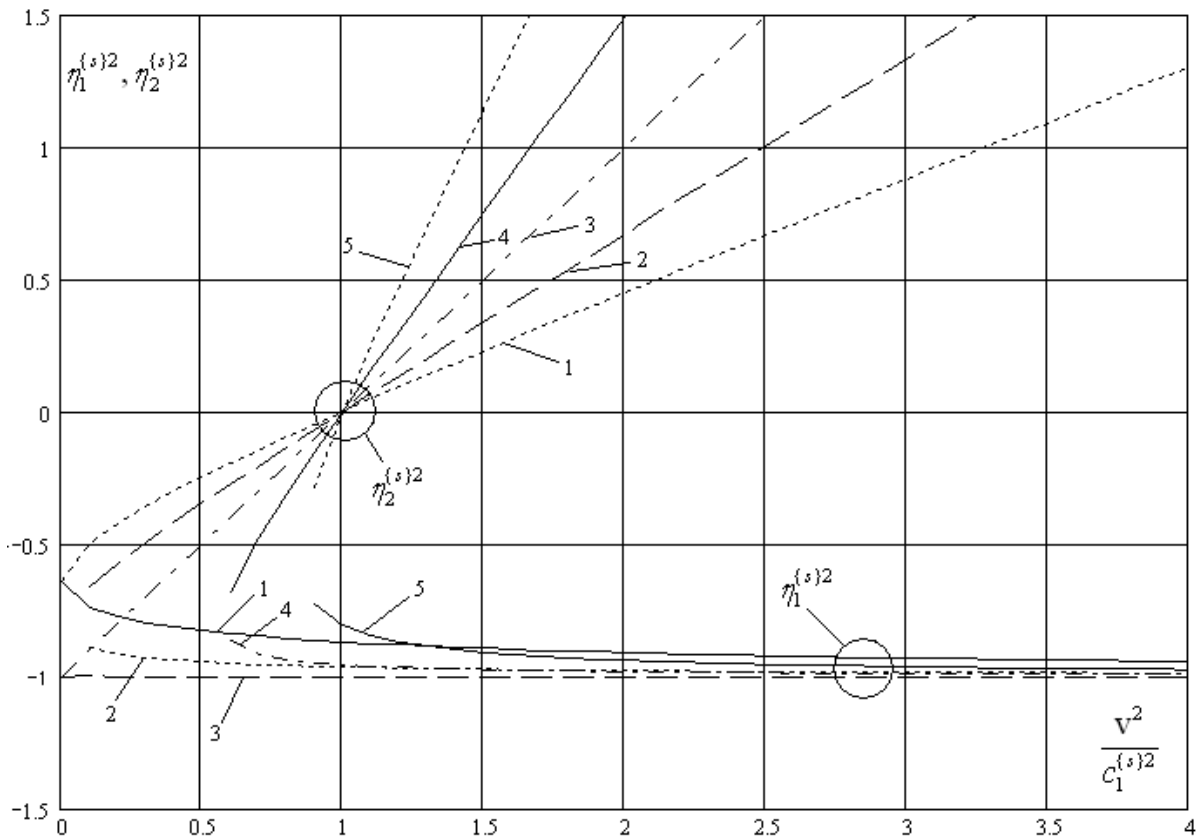


Рис. 6.17. Значення функцій $\eta_1^{\{s\}2}$ і $\eta_2^{\{s\}2}$ (потенціал типу Бартенєва-Хазановича)

Аналіз отриманих результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (залишкових) деформацій і швидкості руху поверхнево навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь особливо для дозвукових швидкостей руху навантаження.

Також можна зазначити, що при відповідних значеннях швидкостей навантаження вплив початкових напружень на значення коренів характеристичних рівнянь може зменшуватись або збільшуватись.

5.3. Результати та висновки

У межах загальних постановок задач, викладених у розділі 3, вивчено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для стисливих і нестисливих елементів шаруватого середовища.

У разі загального початкового напруженого стану рух елемента багатошарового середовища описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних шостого порядку. Характеристичні рівняння являють собою бікубічні алгебраїчні рівняння.

За симетричного початкового напруженого стану рівняння руху елемента шаруватого середовища розпадається на два диференціальні рівняння другого і четвертого порядку. Характеристичні рівняння являють собою квадратне і бікватратне алгебраїчні рівняння.

Для двовимірних задач рівняння руху елемента шаруватого середовища є диференціальним рівнянням четвертого порядку. Характеристичні рівняння є бікватратними алгебраїчними рівняннями.

Досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь для стисливих і нестисливих елементів шаруватого середовища для загального і симетричного початкових напружених станів. Проведено оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказано необхідні та достатні умови існування кратних коренів характеристичних рівнянь.

Аналіз отриманих результатів свідчить про істотний вплив початкових (залишкових) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь.

Чисельні дослідження виконані в рамках теорії скінчених початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом і для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенева-Хазановича.

РОЗДІЛ 7

НАБЛИЖЕНІ ДВОВИМІРНІ МОДЕЛІ ДВОШАРОВОГО ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО ПОВЕРХНЕВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Дослідження наближених моделей шаруватого півпростору є одним із важливих напрямів у сучасній механіці деформівного тіла, динаміці ґрунтів і транспортній інженерії. Незважаючи на розвиток високоточних чисельних методів (скінченних елементів, граничних елементів, спектральних методів тощо), потреба в аналітичних і напіваналітичних моделях залишається актуальною.

Наближені моделі шаруватого півпростору виступають важливим інструментом у сучасних дослідженнях динамічних задач механіки. Вони поєднують аналітичну прозорість, обчислювальну ефективність та фізичну наочність, забезпечуючи основу для розвитку більш складних тривимірних і чисельних моделей, а також для практичних розрахунків у геотехнічних і транспортних системах.

Наближені моделі є єдиним практичним способом отримати швидкі та інженерно-корисні результати.

В цьому розділі наведені результати досліджень двох наближених моделей шаруватого півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження: пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару [8, 39–49, 55–58, 117, 122, 123, 160, 162] і пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі [2, 6, 9–13, 16, 38, 41, 47, 67, 68, 115, 118–121, 161].

7.1. Загальна постановка задач для двошарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження

Запишемо постановку задач в загальному вигляді для стисливого і нестисливого матеріалу.

Розглядається двошаровий попередньо напружений стисливий або нестисливий півпростір.

Матеріал півпростору – ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним (3.1).

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2, x_3) , що вводяться в природному стані, співвідношеннями (3.2).

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. До вільної границі шару прикладено лінійне навантаження P , що рухається з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 .

Визначимо координати рухомої системи відповідно до формул (6.1). Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням. Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [61, 64, 65] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

7.1.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1 . Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq 0$, а півпростір – область $\xi_2 + h \leq 0$.

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$: жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = P_1(y_1) + h\varrho_1\ddot{u}_1; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\varrho_1\ddot{u}_2. \quad (7.1)$$

і нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\varrho_1\ddot{u}_2. \quad (7.2)$$

Тут $P_1(y_1)$, $P_2(y_1)$ – відповідно дотичні та нормальні напруження на вільній поверхні шаруватого півпростору.

У вказаних вище умовах маємо плоску усталену задачу, що полягає у розв'язку рівнянь руху (3.30) з позначеннями (3.31), (3.32) або (3.33) відповідно при граничних умовах (7.1) або (7.2) і умови згасання на нескінченності.

7.1.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі

Розглянемо пружний шаруватий півпростір, що складається з пружного шару товщиною $2h$ і пружного стисливого або нестисливого попередньо напруженого ізотропного півпростору з довільною формою пружного потенціалу. До вільної поверхні шаруватого півпростору прикладене навантаження, що рухається з постійною швидкістю.

У випадку ортотропного тіла вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрямки збігаються з напрямками осей обраної системи координат. Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат ξ_i , які вводяться в початковому деформованому стані співвідношеннями $\xi_i = \lambda_i x_i$. Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq h$, а напівпростір – область $\xi_2 + h \leq 0$.

Припустимо, що динамічну поведінку шару можна описати за допомогою системи рівнянь теорії пластин, записаних з урахуванням зсуву та інерції обертання.

Для пластини, на яку діють нормальні та тангенціальні поверхневі навантаження, рівняння усталеного руху в координатах рухомої системи координат (3.29) мають вигляд [67, 68]

$$\theta_1 \frac{d^2 u}{dy_1^2} - \tau = P_1;$$

$$\theta_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q = P_2; \quad (7.3)$$

$$\theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau = 0,$$

де

$$\theta_1 = 2h \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \varrho_1 v^2 \right); \quad \theta_2 = \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \delta_0 \varrho_1 v^2 \right); \quad \theta_3 = 2h (\kappa G_1 - \varrho_1 v^2).$$

У рівняннях (7.3) G_1 , ν_1 і ϱ_1 суть відповідно модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу пластини, u і w є переміщеннями серединної площини пластини $\xi_2 = 0$, а δ_0 – розрізнявальною константою, що набуває значень 1 і 0 залежно від того, враховують або нехтують інерцією обертання під час виведення системи рівнянь (7.3). Кут повороту поперечного перерізу позначено через φ , а κ – зсувний коефіцієнт Тимошенка. P_1 і P_2 – відповідно дотичні та нормальні напруження на вільній поверхні пластини.

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$:

жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = \tau; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w; \quad u_1 = u + h\varphi; \quad (7.4)$$

і нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tau = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w. \quad (7.5)$$

За викладених вище умов маємо плоску усталену задачу в площині $y_1 O y_2$, яка полягає у спільному розв'язанні рівнянь руху півпростору (3.30) при позначеннях (3.31), (3.32) або (3.33) відповідно та рівнянь руху шару (7.3) за відповідних граничних умов на поверхні контакту шару й півпростору ((7.4) або (7.5)) та умови загасання на нескінченності.

7.2. Застосування інтегрального методу Фур'є до наближених моделей двошарового пружного середовища з початковими напруженнями

7.2.1. Постановка задач для шаруватого півпростору під дією рухомого навантаження в рамках загальних розв'язків рівнянь руху

Представлення загальних розв'язків рівнянь руху в рухомій системі координат (3.29) мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)}; \\ u_2 &= -\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

де у випадку стисливих тіл

$$\tilde{\beta}_{i1}^{(i)} = \tilde{\omega}_{2ji1} + \tilde{\omega}_{1ji2}; \quad \tilde{\beta}_{i1}^{(j)} = \tilde{\omega}_{1ji1} - \tilde{\rho}v^2; \quad \tilde{\beta}_{i2}^{(j)} = \tilde{\omega}_{2jj2}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j,$$

у випадку нестисливих тіл

$$\tilde{\beta}_{12}^{(2)} = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{21}^{(2)} = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{11}^{(2)} = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} = 0.$$

При вищезазначених припущеннях з урахуванням (7.6) рівняння усталеного руху півпростору можна записати у вигляді (3.30).

Розглянемо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (3.31).

Нерівні корені. В представленні загального розв'язку (7.6) приймемо

$$\chi = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \chi^{(1)}; \quad \chi^{(2)} = 0, \quad (7.7)$$

тоді вирази (7.6) з урахуванням (7.7) приймають вигляд

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_2}; \quad u_2 = \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi, \quad (7.8)$$

де

$$\beta_1 = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} / \tilde{\beta}_{11}^{(1)}; \quad \beta_2 = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} / \tilde{\beta}_{11}^{(1)}.$$

Функція $\chi(y_1, y_2)$ визначається з рівняння

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi = 0. \quad (7.9)$$

У випадку нерівних коренів можна використовувати і інше представлення розв'язку. Введемо позначення

$$\Phi = -\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \quad \Psi = \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}; \quad \chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}. \quad (7.10)$$

Після підстановки (7.10) в (7.9) і (7.8) отримаємо

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Phi = 0; \quad \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi = 0; \quad (7.11)$$

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}; \quad u_2 = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \quad (7.12)$$

де

$$\alpha_1 = \beta_1 \eta_1^{-2} - \beta_2; \quad \alpha_2 = \beta_1 - \eta_2^2 \beta_2. \quad (7.13)$$

У випадку відсутності початкових напружень рівняння (7.11) збігаються з хвильовими рівняннями класичної теорії пружності, а вирази для переміщень (7.12) є узагальненням на випадок тіл з початковими напруженнями представлення розв'язків у вигляді Ламе. Функції Φ і Ψ є, відповідно, повздовжніми і поперечними потенціалами для тіл з початковими напруженнями.

В задачах, що розглядаються, переміщення визначаються з точністю до довільної константи, тому будемо в подальшому оперувати не з переміщеннями, а з швидкостями переміщень. Напруження і швидкості переміщень в півпросторі через функцію χ в координатах (y_1, y_2) запишемо у вигляді

$$\tilde{Q}_{ij} = \left(\alpha_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_j};$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{mj} &= \left(\alpha_{mj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{mj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1^2 \partial y_2}; \quad \dot{u}_2 = -v \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Вирази для напружень і швидкостей переміщень у півпросторі через потенціали Φ і Ψ мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= (\eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)} - \alpha_{jj}^{(1)}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + (\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= (\eta_1^{-2} \alpha_{mj}^{(1)} - \alpha_{mj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + (\alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2}; \\ & \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= -v \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right); \quad \dot{u}_2 = -v \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} \right).\end{aligned}\quad (7.15)$$

Тут введені наступні позначення:

для стисливих тіл

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{jj22} \beta_1 - \tilde{\omega}_{jj11}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} = \tilde{\omega}_{jj22} \beta_2; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{mj21} \beta_1; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} = \tilde{\omega}_{mj21} \beta_2 - \tilde{\omega}_{mj12}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.\end{aligned}$$

для нестисливих тіл

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} &= \tilde{\kappa}_{jj22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} - \tilde{\kappa}_{jj11} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1} \left[\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} &= \tilde{\kappa}_{2112} \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} = \tilde{\kappa}_{mj21} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} = -\tilde{\kappa}_{mj12}; \quad j, m = 1, 2.\end{aligned}$$

Таким чином, задача про усталений рух шаруватого півпростору під дією рухомого навантаження у випадку нерівних коренів зводиться до знаходження функції χ або функцій Φ , Ψ із граничних умов (7.1), (7.2) (зосереджені маси) або (7.4), (7.5) (пластина).

Рівні корені. Розглянемо випадок, коли $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Скористаємося загальним представленням розв'язку (7.6). Напруження і швидкості переміщень в шаруватому півпросторі у випадку рівних коренів через функції $\chi^{(j)}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1}; \\ & m, j = 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \left[\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi^{(1)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d \chi^{(2)}}{d y_1} \right]; \\ \dot{u}_2 &= v \left[\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d \chi^{(1)}}{d y_1} \right].\end{aligned}\quad (7.16)$$

В формулах (7.16) використовуються наступні позначення:
для стисливих тіл

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{jj22} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} v^2) - \tilde{\omega}_{jj11} (\tilde{\omega}_{2211} + \tilde{\omega}_{1212}); \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{jj22} \tilde{\omega}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{\omega}_{jj11} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} v^2); \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{jj11} \tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{jj22} (\tilde{\omega}_{2121} + \tilde{\omega}_{1122}); \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} = \tilde{\omega}_{mj21} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{mj21} \tilde{\omega}_{2112} - \tilde{\omega}_{mj12} (\tilde{\omega}_{2211} + \tilde{\omega}_{1212}); \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{\omega}_{mj12} \tilde{\omega}_{2222}; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{mj12} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} v^2) - \tilde{\omega}_{mj21} (\tilde{\omega}_{2121} + \tilde{\omega}_{1122}); \quad m, j = 1, 2.\end{aligned}$$

для нестисливих тіл

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= \left(\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} - \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11} \right) + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \left[\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11} - \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} \left[\tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} = -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12};\end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} = -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}, \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.$$

Таким чином, задача про усталений рух двошарового півпростору під дією навантаження, що рухається з постійною швидкістю, у випадку рівних коренів рівнянь (3.31) зводиться до визначення функцій $\chi^{(j)}$ з рівнянь (7.1), (7.2) (зосереджені маси) або (7.4), (7.5) (пластина). Компоненти напружено-деформованого стану стисливого півпростору визначаються за формулами (7.16).

7.2.2. Розв'язок задач в області зображень Фур'є

Розв'язок задачі знайдемо з допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1 \quad (7.17)$$

і відповідної формули оберненого перетворення

$$f(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} f^F(k) e^{iky_1} dk; \quad \gamma > 0. \quad (7.18)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівнянь (7.9) і (7.11), отримаємо

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^F = 0; \quad (7.19)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \Psi^F = 0. \quad (7.20)$$

Визначимо розв'язок задач для випадків нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння та різних умов контакту поверхневого шару і півпростору. Розв'язок запишемо в загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

7.2.2.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару

Нерівні корені. Розв'язок трансформованих рівнянь (7.19) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^F = \sum_{m=1}^2 C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (7.21)$$

де C_m , $m=1, 2$ – константи інтегрування.

Тут $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, якщо $\eta_j^2 > 0$ і $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. У випадку, якщо η_j мають комплексні значення, то в представленні розв'язку (7.21) необхідно покласти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$; $j=1, 2$.

Розв'язок рівнянь (7.20) для потенціалів Φ^F і Ψ^F будемо шукати у вигляді

$$\Phi^F = C_{01} e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)}; \quad \Psi^F = C_{02} e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)}, \quad (7.22)$$

де C_{01} , C_{02} – константи інтегрування.

Зауважимо, що для скінченності значень функцій χ^F , Φ^F і Ψ^F необхідно, щоб $\operatorname{Re} \eta_j > 0$.

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням представлення розв'язків (7.21) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj}^F &= -k^3 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_{jj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^3 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p=1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = -k^2 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= -k^3 \nu \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = ik^3 \nu \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} &= \eta_1 (\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_1^2); \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \eta_2 (\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_2^2); \\ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_2^2; \quad j, m=1, 2; \quad j \neq m; \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}_1^{(1)} = \eta_1; \quad \tilde{\gamma}_1^{(2)} = \eta_2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(2)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_2^2. \quad (7.24)$$

Використовуючи представлення розв'язків (7.22), в просторі зображень Фур'є параметри, що характеризують напружено-деформований стан півпростору, можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj}^F &= k^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_{jj}^{(m)} C_{0m} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 (-i)^{m-1} C_{0m} \gamma_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p = 1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= ik \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_{0m} \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = k \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_{0m} \gamma_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= vk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_{0m} \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = -ivk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_2^{(m)} C_{0m} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \end{aligned} \quad (7.25)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{jj}^{(1)} &= \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)}; \quad \gamma_{jj}^{(2)} = k_2 \eta_2 (\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)}); \\ \gamma_{mj}^{(1)} &= k_1 \eta_1 (\alpha_{mj}^{(2)} \eta_1^{-2} - \alpha_{mj}^{(1)}); \quad \gamma_{mj}^{(2)} = \alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \gamma_1^{(1)} &= 1; \quad \gamma_1^{(2)} = k_2 \eta_2; \quad \gamma_2^{(1)} = \alpha_1 k_1 \eta_1; \quad \gamma_2^{(2)} = \alpha_2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Підставляючи вирази (7.23) в трансформовані граничні умови (7.1) і (7.2), маємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m , $m = 1, 2$ (представлення розв'язку через функцію χ)

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)}) C_1 + (\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)}) C_2 &= ik^{-3} P \sin \alpha; \\ (k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + (k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= -k^{-3} P \cos \alpha \end{aligned} \quad (7.27)$$

у випадку жорсткого контакту і

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} C_1 + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} C_2 &= 0; \\ (k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_1 + (k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_2 &= -k^{-3} P \cos \alpha \end{aligned} \quad (7.28)$$

у випадку нежорсткого контакту.

Аналогічні системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_{0m} , $m = 1, 2$ отримаємо, використовуючи граничні умови (7.1) і (7.2) та вирази (7.25) (представлення розв'язку через функції Φ і Ψ)

$$\begin{aligned}
(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)}) C_{01} + i(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)}) C_{02} &= -i k^{-2} P \sin \alpha; \\
(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_{01} + i(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_{02} &= k^{-2} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{7.29}$$

у випадку жорсткого контакту і

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} C_{01} + i \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} C_{02} &= 0; \\
(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)}) C_{01} + i(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)}) C_{02} &= k^{-2} P \cos \alpha
\end{aligned} \tag{7.30}$$

у випадку нежорсткого контакту.

Таким чином, задача про усталений рух шаруватого півпростору під дією поверхневого рухомого навантаження в просторі зображень Фур'є у випадку нерівних коренів у залежності від умов контакту між шаром і півпростором та вибраного представлення розв'язку задачі зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (7.27) – (7.30).

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (7.27) і (7.28) можна записати як

$$C_m = k^{-3} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2, \tag{7.31}$$

де у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned}
\Delta &= \rho_1^2 h^2 k^2 \tilde{v}^4 (k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)}) + \\
&+ \rho_1 h k v^2 \left[k_2 k_1 (\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_1^{(2)} - \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)}) + (\tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}) \right] + (k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}); \\
U_m &= (-1)^m P \left[i(k_j \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)}) \sin \alpha + (\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 k_j \tilde{\gamma}_1^{(j)}) \cos \alpha \right]; \\
j, m &= 1, 2; \quad j \neq m,
\end{aligned} \tag{7.32}$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned}
\Delta &= \rho_1 h k \tilde{v}^2 (\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}) + k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}; \\
U_m &= (-1)^{m+1} P \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos \alpha; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Оригінали напружень і швидкостей переміщень отримаємо, скориставшись формулами (7.23), (7.32) або (7.33) (у залежності від умов контакту) і оберненим перетворенням Фур'є (7.18)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{jj} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\
\tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\
& m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\
\dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\
\dot{u}_2 &= \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \tilde{\Delta}^{-1} \left(\tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_2^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk. \tag{7.34}
\end{aligned}$$

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (7.29) і (7.30) має вигляд

$$C_{0m} = k^{-2} \Delta_0^{-1} U_{0m}; \quad m = 1, 2. \tag{7.35}$$

Тут у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 (\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)}) + \rho_1 h k v^2 \left[(\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}) + (\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)}) \right] + \\
& \quad + (\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)}); \\
U_{0m} &= -i^{m-1} P \left[i(\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)}) \sin \alpha + (\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)}) \cos \alpha \right]; \\
& \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m, \tag{7.36}
\end{aligned}$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \rho_1 h k v^2 (\tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}) + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)}; \\
U_{0m} &= i^{m-1} P \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos \alpha; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \tag{7.37}
\end{aligned}$$

В цьому випадку розв'язок задачі через параметри, що характеризують напружено-деформований стан, можна записати, використовуючи формули (7.18), (7.25), (7.36) або (7.37):

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{jj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta_0^{-1} (\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_{01} e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_{02} e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)}) e^{iky_1} dk; \\
\tilde{Q}_{mj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta_0^{-1} (i \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_{01} e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} - \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_{02} e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)}) e^{iky_1} dk;
\end{aligned}$$

$$\dot{u}_m = (-i)^{m-1} \frac{V}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta_0^{-1} (\tilde{\gamma}_m^{(1)} U_{01} e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_m^{(2)} U_{02} e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)}) e^{ik y_1} dk;$$

$$j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \quad (7.38)$$

Рівні корені. Розв'язок трансформованих рівнянь (7.19) у випадку рівних коренів рівнянь (3.31) ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) з урахуванням згасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^{(j)F} = [C_1^{(j)} + |k|\eta(y_2+h)C_2^{(j)}] e^{|k|\eta(y_2+h)}; \quad j = 1, 2, \quad (7.39)$$

де $C_1^{(j)}$, $C_2^{(j)}$ – константи інтегрування.

Введемо постійні інтегрування

$$iC_m^{(2)} = C_m; \quad C_m^{(1)} = C_m; \quad m = \overline{1, 4}. \quad (7.40)$$

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень (7.16) з урахуванням (7.39) і (7.40) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mj}^F &= -i^{1-\delta_{mj}} k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2+h)C_2] + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} C_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)}; \\ u_j^F &= -i^{\delta_{1j}} k^2 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2+h)C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)}; \\ \dot{u}_j^F &= i^{2-\delta_{2j}} \nu k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k|\eta(y_2+h)C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)}; \end{aligned}$$

$$j, m = 1, 2, \quad (7.41)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} &= \tilde{z}_{jj}^{(2)} + \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} - \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \sigma\eta(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)}) - \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)}; \\ \tilde{\gamma}_{jj}^{(4)} &= \sigma\eta(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)}) + \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} + \sigma\eta\tilde{z}_{jj}^{(2)}; \\ \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} &= -\sigma\eta(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)}) - \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)}; \quad \gamma_{mj}^{(4)} = -\sigma\eta(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)}) + \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)}; \\ \tilde{z}_{mj}^{(p)} &= \tilde{\alpha}_{mj}^{(1p)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)}\eta^2; \quad \tilde{\zeta}_{mj}^{(p)} = 2\tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)}\eta^2; \quad j, m, p = 1, 2; \\ \gamma_1^{(1)} &= -\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)}; \quad \gamma_1^{(2)} = \tau_1^{(2)} + \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_1^{(3)} = -\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)}; \\ \gamma_1^{(4)} &= \tau_1^{(2)} - \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_2^{(1)} = \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(2)} = \tau_2^{(2)} - \tau_2^{(3)}; \\ \gamma_2^{(3)} &= \tau_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(4)} = \tau_2^{(2)} + \tau_2^{(3)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_m^{(1)} &= \tilde{\beta}_{m1}^{(1)} - \tilde{\beta}_{m2}^{(1)}\eta^2; & \tau_m^{(2)} &= \sigma\eta\tilde{\beta}_{m1}^{(m)}; & \tau_m^{(3)} &= 2\tilde{\beta}_{m2}^{(j)}\eta^2; \\ m, j &= 1, 2; & m &\neq j.\end{aligned}\quad (7.42)$$

Підставляючи вирази (7.41) в трансформовані граничні умови (7.1) або (7.2), отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m , $m = 1, 2$,

у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned}(\sigma\eta\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)})C_1 + (\sigma\eta\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)})C_2 &= i k^{-3} P \sin \alpha; \\ (\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)})C_1 - (\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)})C_2 &= k^{-3} P \cos \alpha,\end{aligned}\quad (7.43)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{21}^{(1)}C_1 + \tilde{\gamma}_{21}^{(2)}C_2 &= 0; \\ (\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)})C_1 - (\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)})C_2 &= k^{-3} P \cos \alpha.\end{aligned}\quad (7.44)$$

Таким чином, задача про усталений рух півпростору під дією поверхневого рухомого навантаження в просторі зображень Фур'є у випадку рівних коренів зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (7.43) або (7.44) у залежності від умов контакту захисного шару і півпростору.

Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (7.43) і (7.44) можна представити у вигляді (7.31), де у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned}\Delta &= \sigma\eta\left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)}\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)}\tilde{\gamma}_{22}^{(2)}\right) - \rho_1 h k v^2 \left[\eta^2\left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)}\tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)}\tilde{\gamma}_{21}^{(2)}\right) - \left(\tilde{\gamma}_1^{(2)}\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)}\tilde{\gamma}_{22}^{(2)}\right)\right] - \\ &\quad - \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 \sigma\eta\left(\tilde{\gamma}_1^{(2)}\tilde{\gamma}_2^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)}\tilde{\gamma}_2^{(2)}\right); \\ U_m &= P \left[i \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} - \rho_1 h k \sigma \eta v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + (-1)^m \left(\sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ j, m &= 1, 2; \quad j \neq m,\end{aligned}\quad (7.45)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\Delta = \rho_1 h k v^2 \eta^2 \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) - \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right);$$

$$U_m = (-1)^j P\sigma\eta\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} \cos\alpha; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \quad (7.46)$$

Відповідно оригінали напружень і швидкостей переміщень, використовуючи формули (7.41), (7.45) або (7.46) і (7.18), можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} |k|\eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i\eta}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma\Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} \eta |k|(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ & \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \dot{u}_1 &= -\frac{V}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_1^{(2)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} |k|\eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{iV}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma\eta\Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} |k|\eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Таким чином, напружено-деформований стан попередньо напруженого стисливого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару визначається із виразів (7.34), (7.38) і (7.47) у залежності від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що досліджується.

7.2.2.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі

Знайдемо розв'язок задачі для випадків нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння та для різних умов сполучення шару та півпростору. Розв'язок наведемо у загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової та надзвукової).

Нерівні корені. Граничні умови (7.4) для жорсткого контакту у просторі зображень Фур'є мають вигляд

$$\begin{aligned} ik^3\theta_1 \frac{d\chi^F}{dy_2} - 2ik\chi \left(\beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\beta_1 \right) \chi^F + (k^2\theta_4 + 2\chi)\varphi^F &= P_1^F; \\ k^2\theta_3 \left(k^2\beta_1 - \beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F + \left(k^2\alpha_{22}^{(1)} - \alpha_{22}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d\chi^F}{dy_2} - 2ik\chi h\varphi^F &= P_2^F; \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$2ik\kappa \left(-k^2\beta_1 + \beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F + ik \left(k^2\alpha_{21}^{(1)} - \alpha_{21}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F = 0.$$

У разі нежорсткого контакту перетворені рівняння (7.5) можна подати так

$$\begin{aligned} -ik^3\alpha_{21}^{(1)}\chi^F + ik\alpha_{21}^{(2)}\frac{d^2\chi^F}{dy_2^2} &= 0; \\ k^2\theta_3 \left(k^2\beta_1 - \beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F + \left(k^2\alpha_{22}^{(1)} - \alpha_{22}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d\chi^F}{dy_2} - 2ik\kappa h\varphi^F &= P_2^F; \quad (7.49) \\ 2ik\kappa \left(-k^2\beta_1 + \beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F &= 0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна записати у просторі зображень рівняння руху та граничні умови, представлені через потенціали Φ та Ψ .

При жорсткому контакті між шаром і півпростором отримаємо

$$\begin{aligned} -ik \left(k^2\theta_1 + 2\kappa\alpha_1 \frac{d}{dy_2} \right) \Phi^F + k^2 \left(\theta_1 \frac{d}{dy_2} + 2\kappa\alpha_2 \right) \Psi^F + (k^2\theta_4 + 2\kappa)\varphi^F &= P_1^F; \\ -k^2 \left(\alpha_1\theta_3 \frac{d}{dy_2} + \alpha_{22}^{(1)} - \eta_1^2\alpha_{22}^{(2)} \right) \Phi^F - \\ -ik \left[\alpha_2\theta_3 k^2 + (\alpha_{22}^{(1)} - \eta_2^2\alpha_{22}^{(2)}) \frac{d}{dy_2} \right] \Psi^F - 2ik\kappa h\varphi^F &= P_2^F; \quad (7.50) \\ ik(2\kappa\alpha_1 - \eta_1^{-2}\alpha_{21}^{(1)} + \alpha_{21}^{(2)}) \frac{d\Phi^F}{dy_2} - k^2(2\kappa\alpha_2 - \alpha_{21}^{(1)} + \eta_2^2\alpha_{21}^{(2)})\Psi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F &= 0, \end{aligned}$$

а у разі нежорсткого контакту перетворені граничні умови запишуться

$$\begin{aligned} ik(\eta_1^{-2}\alpha_{21}^{(1)} - \alpha_{21}^{(2)}) \frac{d\Phi^F}{dy_2} - k^2(\alpha_{21}^{(1)} - \eta_2^2\alpha_{21}^{(2)})\Psi^F &= 0; \\ -k^2 \left(\alpha_1\theta_3 \frac{d}{dy_2} + \alpha_{22}^{(1)} - \eta_1^2\alpha_{22}^{(2)} \right) \Phi^F - \\ -ik \left[\alpha_2\theta_3 k^2 + (\alpha_{22}^{(1)} - \eta_2^2\alpha_{22}^{(2)}) \frac{d}{dy_2} \right] \Psi^F - 2ik\kappa h\varphi^F &= P_2^F; \quad (7.51) \end{aligned}$$

$$2ik\kappa\alpha_1 \frac{d\Phi^F}{dy_2} - 2k^2\kappa\alpha_2 \Psi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F = 0.$$

Розв'язок перетвореного рівняння (7.9) з урахуванням згасання на нескінченності шукатимемо у вигляді (7.21).

Розв'язок для потенціалів Φ^F і Ψ^F будемо шукатимемо у вигляді (7.22).

Зазначимо також, що функція φ^F входить до систем рівнянь (7.48), (7.49), (7.50) та (7.51) лінійно. Підставляючи (7.21) в (7.48) або (7.49) залежно від умови контакту, отримуємо системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих C_1 , C_2 і φ^F . Розв'язок даних систем можна записати в такий спосіб

$$C_1 = \frac{iP_1^F U_1^{(2)} + P_2^F U_2^{(2)}}{k^3 \Delta(k)} e^{k_1 k \eta_1 h}; \quad C_2 = -\frac{iP_1^F U_1^{(1)} + P_2^F U_2^{(1)}}{k^3 \Delta(k)} e^{k_2 k \eta_2 h};$$

$$\varphi^F = \frac{P_1^F U_1 + iP_2^F U_2}{\Delta(k)}; \quad (7.52)$$

де у випадку жорсткого контакту

$$\begin{aligned} \Delta(k) = & -k^4 \theta_1 \theta_2 \theta_3 (k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)}) + k^3 [\theta_3 \theta_4 (\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)}) - \\ & - k_1 k_2 \theta_1 \theta_2 (\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)})] + k^2 [2\kappa h \theta_1 (k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} + \\ & + k_2 \gamma_2^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - k_1 \gamma_2^{(2)} \gamma_{22}^{(1)}) - 2\kappa \theta_1 (\theta_3 - 2\kappa h) (k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)}) + \\ & + \theta_4 (k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)})] + 2k\kappa [(\theta_3 - 2\kappa h) (\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)}) - \\ & - k_1 k_2 \theta_1 (\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)})] + 2\kappa (k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)}); \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$U_1^{(j)} = k^3 \theta_2 \theta_3 \gamma_2^{(j)} + k_j k^2 \theta_2 \gamma_{22}^{(j)} + 2k\kappa [\gamma_2^{(j)} (\theta_3 - 2\kappa h) + h \gamma_{21}^{(j)}] + 2k_j \kappa \gamma_{22}^{(j)};$$

$$U_2^{(j)} = k_j k^3 \theta_1 \theta_2 \gamma_1^{(j)} + k^2 (\theta_4 \gamma_{21}^{(j)} - 2\kappa h \theta_1 \gamma_2^{(j)}) + 2k_j k \kappa \theta_1 \gamma_1^{(j)} + 2\kappa \gamma_{21}^{(j)}; \quad j = 1, 2;$$

$$U_1 = k \theta_3 (\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)}) + k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - 2\kappa (k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_2^{(1)});$$

$$\begin{aligned} U_2 = & -k \theta_1 [k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - 2\kappa (k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)})] - \\ & - 2\kappa (\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)}); \end{aligned} \quad (7.54)$$

а у випадку нежорсткого контакту

$$\begin{aligned} \Delta(k) = & k^3 \theta_2 \theta_3 (\gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}) + k^2 \theta_2 (k_2 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - k_1 \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)}) + \\ & + 2k\kappa (\theta_3 - 2\kappa h) (\gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}) + 2\kappa (k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}); \end{aligned} \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} P_1^F \equiv 0; \quad U_1^{(j)} = 0; \quad U_2^{(j)} = -\gamma_{21}^{(j)} (k^2 \theta_2 + 2\kappa); \quad j = 1, 2; \\ U_1 = 0; \quad U_2 = -2\kappa (\gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Тут введені наступні позначення

$$\begin{aligned} \gamma_{in}^{(j)} = \alpha_{in}^{(1)} - k_j^2 \eta_j^2 \alpha_{in}^{(2)}; \quad \gamma_{ii}^{(j)} = \eta_j (\alpha_{ii}^{(1)} - k_j^2 \eta_j^2 \alpha_{ii}^{(2)}); \\ \gamma_1^{(j)} = \eta_j; \quad \gamma_2^{(j)} = \beta_1 - k_j^2 \eta_j^2 \beta_2; \quad i, j, n = 1, 2; \quad i \neq n. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Аналогічно, використовуючи представлення розв'язку (7.22) та трансформовані граничні умови (7.50) або (7.51), можна визначити постійні інтегрування C_{01} , C_{02} і функцію φ^F . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} C_{01} = \frac{iP_1^F U_{10}^{(2)} + P_2^F U_{20}^{(2)}}{k^2 \Delta_0(k)} e^{k_1 k \eta_1 h}; \quad C_{02} = -\frac{iP_1^F U_{10}^{(1)} + P_2^F U_{20}^{(1)}}{k^2 \Delta_0(k)} e^{k_2 k \eta_2 h}; \\ \varphi^F = \frac{P_1^F U_{10} + iP_2^F U_{20}}{\Delta_0(k)}; \end{aligned} \quad (7.58)$$

де

$$\Delta_0(k) = -\frac{\Delta(k)}{k_1 \eta_1}; \quad U_{j0}^{(2)} = U_j^{(2)}; \quad U_{j0}^{(1)} = -\frac{iU_j^{(1)}}{k_1 \eta_1}; \quad U_{j0} = -\frac{U_j}{k_1 \eta_1}; \quad j = 1, 2. \quad (7.59)$$

Згинальний момент у пластині в рухомій системі координат визначається за формулою

$$M = \frac{4 G_1 h^3}{3(1 - \nu_1)} \frac{d\varphi}{dy_1}. \quad (7.60)$$

Застосуємо перетворення Фур'є до формул (7.14) та (7.60)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii}^F = -k^2 \alpha_{ii}^{(1)} \frac{d\chi^F}{dy_2} + \alpha_{ii}^{(2)} \frac{d^3 \chi^F}{dy_2^3}; \quad \tilde{Q}_{ij}^F = -ik^3 \alpha_{ij}^{(1)} \chi^F + ik \alpha_{ij}^{(2)} \frac{d^2 \chi^F}{dy_2^2}; \\ \dot{u}_1^F = -\nu k^2 \frac{d\chi^F}{dy_2}; \quad \dot{u}_2^F = ik\nu \left(k^2 \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \beta_2 \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F; \end{aligned}$$

$$M^F = \frac{4 ikG_1 h^3}{3(1-\nu_1)} \varphi^F; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (7.61)$$

З урахуванням (7.21), (7.52) вирази (7.61) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj}^F &= \frac{1}{\Delta(k)} (iP_1^F \Gamma_{jj}^{(1)} + P_2^F \Gamma_{jj}^{(2)}); & \tilde{Q}_{nj}^F &= \frac{1}{\Delta(k)} (-P_1^F \Gamma_{nj}^{(1)} + iP_2^F \Gamma_{nj}^{(2)}); \\ \dot{u}_1^F &= \frac{1}{\Delta(k)} (iP_1^F \Gamma_1^{(1)} + P_2^F \Gamma_1^{(2)}); & \dot{u}_2^F &= \frac{1}{\Delta(k)} (-P_1^F \Gamma_2^{(1)} + iP_2^F \Gamma_2^{(2)}); \\ M^F &= \frac{1}{\Delta(k)} (iP_1^F \Gamma_\varphi^{(1)} - P_2^F \Gamma_\varphi^{(2)}); & n, j &= 1, 2; \quad n \neq j; \end{aligned} \quad (7.62)$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_{jj}^{(t)} &= k_2 \gamma_{jj}^{(2)} U_t^{(1)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} - k_1 \gamma_{jj}^{(1)} U_t^{(2)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)}; \\ \Gamma_{ij}^{(t)} &= \gamma_{ij}^{(2)} U_t^{(1)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} - \gamma_{ij}^{(1)} U_t^{(2)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)}; \\ \Gamma_1^{(t)} &= v \left(k_2 \gamma_1^{(2)} U_t^{(1)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} - k_1 \gamma_1^{(1)} U_t^{(2)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)} \right); \\ \Gamma_2^{(t)} &= v \left(\gamma_2^{(2)} U_t^{(1)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} - \gamma_2^{(1)} U_t^{(2)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)} \right); \\ \Gamma_\varphi^t &= \frac{4 k G_1 h^3 U_t}{3(1-\nu_1)}; \quad i, j, t = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Аналогічно можна записати в просторі зображень Фур'є вирази для напружень і швидкостей переміщень у півпросторі та згинального моменту в пластині, використовуючи формули (7.15), (7.60), (7.17), (7.22) та (7.58).

Рівні корені. Розглянемо випадок, коли $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Граничні умови (7.4) для жорсткого контакту та (7.5) для нежорсткого контакту в цьому випадку у просторі зображень Фур'є матимуть вигляд

жорсткий контакт

$$\begin{aligned} -k^2 \left[\theta_1 \left(-k^2 \beta_{11}^{(2)} + \beta_{12}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) + 2\kappa \beta_{21}^{(2)} \right] \chi^{(2)F} - ik \left[-k^2 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{d}{dy_2} + \right. \\ \left. + 2\kappa \left(-k^2 \beta_{21}^{(1)} + \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \right] \chi^{(1)F} - (k^2 \theta_4 + 2\kappa) \varphi^F = P_1^F; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-k^2\theta_3 \left(-k^2\beta_{21}^{(1)} + \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) + \left(k^2\alpha_{22}^{(11)} - \alpha_{22}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d}{dy_2} \right] \chi^{(1)F} - \\
& -ik \left(-k^2\theta_3\beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} - k^2\alpha_{22}^{(12)} + \alpha_{22}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(2)F} - 2ik\kappa h\varphi^F = P_2^F; \quad (7.64) \\
& ik \left[-(2\kappa\beta_{21}^{(1)} - \alpha_{21}^{(11)})k^2 + (2\kappa\beta_{22}^{(1)} - \alpha_{21}^{(21)}) \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \chi^{(1)F} - \left[-k^2(2\kappa\beta_{21}^{(2)} + \alpha_{21}^{(12)}) + \right. \\
& \left. + \alpha_{21}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \frac{d}{dy_2} \chi^{(2)F} - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F = 0;
\end{aligned}$$

нежорсткий контакт

$$\begin{aligned}
& \left(-k^2\alpha_{21}^{(12)} + \alpha_{21}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d}{dy_2} \chi^{(2)F} + ik \left(-k^2\alpha_{21}^{(11)} + \alpha_{21}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(1)F} = 0; \\
& \left[-k^2\theta_3 \left(-k^2\beta_{21}^{(1)} + \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) + \left(k^2\alpha_{22}^{(11)} - \alpha_{22}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d}{dy_2} \right] \chi^{(1)F} - \\
& -ik \left(-k^2\theta_3\beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} - k^2\alpha_{22}^{(12)} + \alpha_{22}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(2)F} - 2ik\kappa h\varphi^F = P_2^F; \quad (7.65) \\
& 2k^2\kappa\beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} \chi^{(2)F} + 2ik\kappa \left(-k^2\beta_{21}^{(1)} + \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(1)F} - (k^2\theta_2 + 2\kappa)\varphi^F = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (3.30) будемо шукати у вигляді (7.39). Введемо нові постійні інтегрування

$$C_1^{(1)} = \eta C_1; \quad C_2^{(1)} = \eta C_2; \quad C_1^{(2)} = \sigma i C_1; \quad C_2^{(2)} = \sigma i C_2. \quad (7.66)$$

Постійні інтегрування C_1 , C_2 та функція φ^F визначаються так само, як це робилося у разі нерівних коренів рівняння (3.31). В результаті отримаємо вирази аналогічні (7.52). Складові формул (7.52) визначаються згідно (7.53) та (7.54) або (7.55) та (7.56) залежно від умов контакту між шаром та основою. При цьому потрібно використовувати позначення

$$\gamma_{ii}^{(1)} = -\alpha_{ii}^{(12)} + \eta^2(\alpha_{ii}^{(22)} + \alpha_{ii}^{(11)} - \eta^2\alpha_{ii}^{(21)}); \quad \gamma_{ii}^{(2)} = \eta^2(2\alpha_{ii}^{(22)} + \alpha_{ii}^{(11)} - 3\eta^2\alpha_{ii}^{(21)});$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(1)} &= \eta \left[\alpha_{ij}^{(12)} + \alpha_{ij}^{(11)} - \eta^2 (\alpha_{ij}^{(22)} + \alpha_{ij}^{(21)}) \right]; & \gamma_{ij}^{(2)} &= \eta \left[\alpha_{ij}^{(12)} - \eta^2 (3\alpha_{ij}^{(22)} + 2\alpha_{ij}^{(21)}) \right]; \\ \gamma_2^{(1)} &= \eta (-\beta_{21}^{(2)} + \beta_{21}^{(1)} - \eta^2 \beta_{22}^{(1)}); & \gamma_2^{(2)} &= -\eta (2\eta^2 \beta_{22}^{(1)} + \beta_{21}^{(2)}); & i, j &= 1, 2; & i \neq j; \\ \gamma_1^{(1)} &= \beta_{11}^{(2)} + \eta^2 (\beta_{11}^{(1)} - \beta_{12}^{(2)}); & \gamma_1^{(2)} &= \eta^2 (\beta_{11}^{(1)} - \beta_{12}^{(2)}). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Перетворені напруження і швидкості переміщень у півпросторі і згинальний момент у пластині, використовуючи формули (7.60), (7.16), (7.17) і (7.52), можна подати у вигляді (7.62), де функції Γ_{ij}^t , Γ_i^t і Γ_φ^t визначаються за формулами (7.63) з урахуванням позначень (7.67).

Таким чином, розв'язок задачі про рух двошарового пружного півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження в області зображень Фур'є має вигляд (7.21) або (7.22) у разі нерівних коренів і (7.39) у разі рівних коренів. Складові формул (7.21), (7.22) і (7.39) при жорсткому контакті визначаються із співвідношень (7.52) - (7.54), а при нежорсткому контакті - із співвідношень (7.52), (7.55) та (7.56). У виразах (7.53) - (7.67) при $\eta_1 \neq \eta_2$ потрібно слідувати позначенням (7.57), а при $\eta_1 = \eta_2$ - позначенням (7.67).

Трансформанти характеристик напружено-деформованого стану визначаються згідно (7.62) з урахуванням значень коренів характеристичного рівняння ((7.57) або (7.67)) та умов контакту ((7.53), (7.54) або (7.55), (7.56)). З (7.62) випливає, що значення величин, що характеризують напружено-деформований стан двошарового пружного півпростору необмежено зростають, при $\Delta(k) \rightarrow 0$.

Вираз для $\Delta(k) = 0$ є поліном четвертого ступеня щодо k при жорсткому контакті (7.53) і поліном третього ступеня при нежорсткому контакті (7.55). За умови існування дійсних позитивних кратних коренів рівняння $\Delta(k) = 0$ можливий резонанс [67, 68]. Швидкість руху навантаження, що відповідає цьому випадку, називається критичною.

Щоб перейти у формулах (7.62) до оригіналів слід скористатися зворотним перетворенням Фур'є (7.18).

7.3. Комплексні потенціали в динамічних задачах для шаруватих основ з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження

Для плоских динамічних задач для пружних тіл з початковими напруженнями, у випадку, коли початкові динамічні задачі допускають перетворення в стаціонарні задачі в рухомій системі координат, яка рухається прямолінійно з постійною швидкістю, розв'язок задач може бути побудований за допомогою комплексних потенціалів [61, 64]. Формули для напружень і переміщень, записані через комплексні потенціали, мають однакову структуру як для статичних, так і для динамічних задач. При відсутності початкових напружень комплексні потенціали переходять у відомі комплексні представлення розв'язків динамічних задач лінійної пружності, запропонованих Л.А. Галінім [21]. Без початкових напружень при статичному навантаженні комплексні потенціали у випадку рівних коренів визначального рівняння переходять в комплексні потенціали Колосова-Мушхелішвілі [79] для ізотропного тіла і, при нерівних коренях, в комплексні потенціали С. Г. Лехніцкого [77] для ортотропного тіла. При врахуванні початкових напружень при статичному навантаженні комплексні потенціали переходять в комплексні потенціали статичних лінеаризованих плоских задач [61, 64].

7.3.1. Комплексні представлення для стисливих і нестисливих тіл

Розглянемо відповідні комплексні представлення для стисливих і нестисливих тіл. Скористаємося при цьому роботами [61, 64].

Рівняння усталеного руху для стисливих і нестисливих тіл можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\eta}_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\eta}_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j=1,2, \quad (7.68)$$

де величини η_1 і η_2 – корені рівняння (3.31)

Введемо наступні комплексні змінні

$$z_j = y_1 + \eta_j(y_2 + h); \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\eta}_j(y_2 + h); \quad j=1,2. \quad (7.69)$$

Враховуючи (7.69), рівняння руху для півпростору (7.68) в рухомій системі координат через функції $\chi^{(j)}$ можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^4 \chi^{(j)}}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0; \quad j=1,2. \quad (7.70)$$

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (3.31).

Рівні корені. Нехай виконується умова

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta. \quad (7.71)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.70) представимо у вигляді

$$\chi^{(j)} = \text{Re} \left[F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1) \right]. \quad (7.72)$$

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)}(z_1) = \eta_1 \varphi_j(z_1); \quad F_j^{(2)}(z_1) = \varphi_j(z_1); \quad j=1,2. \quad (7.73)$$

Підставимо (7.72) у вирази для переміщень і співвідношення пружності [61, 64] з урахуванням (3.29) і (7.73) і отримаємо представлення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\varphi_j(z_1)$ ($j=1,2$)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{kj} &= \text{Re} \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1''(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2''(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2'(z_1) \right\}; \\ u_k &= \text{Re} \left\{ \gamma_k^{(1)} [\varphi_1'(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2'(z_1)] + \gamma_k^{(2)} \varphi_2(z_1) \right\}; \end{aligned} \quad (7.74)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}^{(1)} &= \alpha_{ii}^{(12)} + \eta_1^2 (\alpha_{ii}^{(11)} + \alpha_{ii}^{(22)} + \eta_1^2 \alpha_{ii}^{(21)}); \quad \gamma_{ii}^{(2)} = 3\alpha_{ii}^{(12)} + \eta_1^2 (\alpha_{ii}^{(11)} - \alpha_{ii}^{(22)} - 3\eta_1^2 \alpha_{ii}^{(21)}); \\ \gamma_{ij}^{(1)} &= \eta_1 [\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} + \eta_1^2 (\alpha_{ij}^{(21)} + \alpha_{ij}^{(22)})]; \quad \gamma_{ij}^{(2)} = \eta_1 [3\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} - \eta_1^2 (\alpha_{ij}^{(21)} + 3\alpha_{ij}^{(22)})]; \\ \gamma_1^{(1)} &= \beta_{11}^{(2)} + \eta_1^2 (\beta_{12}^{(2)} - \beta_{11}^{(1)}); \quad \gamma_1^{(2)} = 2(\beta_{11}^{(2)} - \eta_1^2 \beta_{12}^{(2)}); \\ \gamma_2^{(1)} &= \eta_1 (\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)} + \eta_1^2 \beta_{22}^{(1)}); \quad \gamma_2^{(2)} = 2\eta_1 (\beta_{21}^{(1)} - \eta_1^2 \beta_{22}^{(1)}); \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Параметри $\alpha_{ij}^{(kn)}$ і $\beta_{ij}^{(k)}$ в позначеннях (7.75) у випадку стисливих тіл визначаються по формулам

$$\begin{aligned}
\beta_{j1}^{(i)} &= \tilde{\omega}_{1ii1} - \tilde{\rho}V^2; & \beta_{j2}^{(i)} &= \tilde{\omega}_{2ii2}; & \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{21}^{(2)} = \tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212}; \\
\alpha_{ii}^{(kn)} &= \tilde{\omega}_{iikk}\beta_{kk}^{(n)}; & \alpha_{ij}^{(kn)} &= \tilde{\omega}_{ijknl}\beta_{kk}^{(n)} - \tilde{\omega}_{ijnkl}\beta_{nk}^{(n)}; & \alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\omega}_{ijnk}\beta_{nk}^{(k)}; \\
\alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\omega}_{iinn}\beta_{nk}^{(k)} - \tilde{\omega}_{iikk}\beta_{k1}^{(k)}; & & & & i, j, k, n = 1, 2; \quad k \neq n,
\end{aligned} \tag{7.76}$$

а у випадку нестисливих тіл – по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_{ii}^{(kn)} &= \tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{nn}^{-2}(\tilde{\chi}_{knkn} - \delta_{n2}\tilde{\rho}V^2); \\
\alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\chi}_{iinn}\tilde{q}_{nn}^{-1} - \tilde{\chi}_{iikk}\tilde{q}_{kk}^{-1} + \tilde{q}_{ii}\tilde{q}_{kk}^{-2}[\tilde{\chi}_{kkkk} - \tilde{\rho}V^2 - \tilde{q}_{kk}\tilde{q}_{nn}^{-1}(\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212})]; \\
\alpha_{ij}^{(kn)} &= -\tilde{\chi}_{ijnk}\tilde{q}_{nn}^{-1}; & \alpha_{ij}^{(kk)} &= \tilde{\chi}_{ijnk}\tilde{q}_{nn}^{-1}; & & i, j, n, k = 1, 2; \quad i \neq j; \quad n \neq k; \\
\beta_{12}^{(2)} &= \beta_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; & \beta_{21}^{(2)} &= \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; & \beta_{11}^{(2)} &= \beta_{22}^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{7.77}$$

Нерівні корені. Розглянемо випадок нерівних коренів

$$\eta_1 \neq \eta_2. \tag{7.78}$$

Розв'язок рівнянь (7.70) представимо у вигляді

$$\chi = 2 \operatorname{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)], \tag{7.79}$$

де $F_j(z_j)$ – довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j .

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j''(z_j) = \Phi_j(z_j). \tag{7.80}$$

Підставляючи (7.79) у вирази для переміщень, а потім у співвідношення пружності, враховуючи (6.1) і (7.80), отримаємо представлення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ комплексних змінних z_j (7.69)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{ij} &= 2 \operatorname{Re}[\gamma_{ij}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \gamma_{ij}^{(2)}\Phi_2'(z_2)]; \\
u_k &= 2 \operatorname{Re}[\gamma_k^{(1)}\Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)}\Phi_2(z_2)]; & & i, j, k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{7.81}$$

В (7.81) введені наступні позначення для коефіцієнтів, які входять в вирази для напружень і переміщень

$$\begin{aligned} \gamma_{jj}^{(k)} &= \eta_k (\alpha_{jj}^{(1)} + \eta_k^2 \alpha_{jj}^{(2)}); \quad \gamma_{ij}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(1)} + \eta_k^2 \alpha_{ij}^{(2)}; \\ \gamma_1^{(j)} &= -\eta_j; \quad \gamma_2^{(j)} = \beta_1 + \eta_j^2 \beta_2; \quad i, j, k = 1, 2; \quad i \neq j; \end{aligned} \quad (7.82)$$

де параметри β_j і $\alpha_{ij}^{(k)}$ у випадку стисливих тіл визначаються по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\varrho}v^2)(\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^{-1}; \quad \beta_2 = \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^{-1}; \\ \alpha_{ii}^{(1)} &= \beta_1 \tilde{\omega}_{ii22} - \tilde{\omega}_{ii11}; \quad \alpha_{ii}^{(2)} = \beta_2 \tilde{\omega}_{ii22}; \quad \alpha_{ij}^{(1)} = \beta_1 \tilde{\omega}_{ij21}; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= \beta_2 \tilde{\omega}_{ij21} - \tilde{\omega}_{ij12}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (7.83)$$

а у випадку нестисливих тіл по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(1)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} [\tilde{\chi}_{1111} - \tilde{\varrho}v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212})] - \tilde{\chi}_{ii11} + \tilde{\chi}_{ii22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \\ \alpha_{ii}^{(2)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\chi}_{2112}; \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\chi}_{ij21}; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= -\tilde{\chi}_{ij12}; \quad i \neq j; \quad \beta_1 = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (7.84)$$

7.3.2. Постановка задач для двошарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження в комплексних потенціалах.

7.3.2.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Рівні корені. Використовуючи (7.74 з урахуванням (7.69), граничні умови при $y_2 = -h$ для жорсткого контакту (7.1) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1'(y_1) + (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_1(y_1); \\ \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_2(y_1); \end{aligned} \quad (7.85)$$

а для нежорсткого контакту (7.2) – у вигляді

$$\operatorname{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1)\right] = 0; \quad (7.86)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = P_2(y_1).$$

В системах рівнянь (7.85) і (7.86) введені нові аналітичні функції

$$\Phi_1(y_1) = \varphi_1''(y_1) + y_1 \varphi_2''(y_1); \quad \Phi_2(y_1) = \varphi_2'(y_1). \quad (7.87)$$

Коефіцієнти $\gamma_i^{(j)}$ і $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2$) в системах рівнянь (7.85) і (7.86) для стисливого півпростору визначаються із співвідношень (7.75) при позначення (6.7) і (7.76). Для нестисливого півпростору необхідно скористатися позначеннями (6.8) і (7.77).

Таким чином, задача про усталений рух попередньо напруженого півпростору, захищеного пружним шаром, у випадку рівних коренів рівняння (6.6) зводиться до знаходження функцій φ_j ($j = 1, 2$) із систем рівнянь (7.85), (7.87) або (7.86), (7.87) в залежності від умов контакту між елементами шаруватого середовища.

Нерівні корені. Використовуючи комплексні потенціали, запишемо граничні умови для даної задачі при $y_2 = -h$. Будемо розглядати жорсткий та нежорсткий контакти між захисним шаром і півпростором. Із (7.1), (7.2) і (7.81) при $y_2 = -h$ маємо:

жорсткий контакт

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1) + \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_1^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} &= P_1(y_1); \\ 2\operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} &= P_2(y_1); \end{aligned} \quad (7.88)$$

нежорсткий контакт

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(y_1)\right] &= 0; \\ 2\operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(y_1) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} &= P_2(y_1). \end{aligned} \quad (7.89)$$

В системах рівнянь (7.88) і (7.89) параметри $\gamma_i^{(j)}$, $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2$) визначаються із співвідношень (7.82) з урахуванням (3.32) і (7.83) для стисливого півпростору і зі співвідношень (7.82) при позначеннях (3.33) і (7.84) для нестисливого півпростору.

Таким чином, розв'язок поставленої задачі у випадку нерівних коренів рівняння (3.31) можна отримати, розв'язуючи відносно функцій Φ_j ($j = 1, 2$) системи рівнянь (7.88) і (7.89) при жорсткому і нежорсткому контакті між захисним шаром і півпростором відповідно.

7.3.2.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.

Запишемо умови контакту між пластиною та півпростором. Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (3.31).

Рівні корені. Нехай виконується умова (7.71). У цьому разі комплексне представлення має вигляд (7.74), де комплексні змінні z_j ($j = 1, 2$) визначаються за формулами (7.69). Використовуючи (7.74) з урахуванням (7.69), граничні умови при $y_2 = -h$ за жорсткого контакту можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)] + \gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= \tau(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)] + \gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= q(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_2^{(1)}[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)] + \gamma_2^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= w(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_1^{(1)}[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)] + \gamma_1^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= u(y_1) + h\varphi(y_1), \end{aligned} \quad (7.90)$$

а при нежорсткому контакті

$$\begin{aligned} \tau(y_1) &= 0; \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)] + \gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= 0; \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)] + \gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= q(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_2^{(1)}[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)] + \gamma_2^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= w(y_1). \end{aligned} \quad (7.91)$$

Із рівнянь (7.90) у разі жорсткого контакту та (7.91) у разі нежорсткого контакту вилучимо функції $u(y_1)$, $w(y_1)$, $q(y_1)$ і $\tau(y_1)$. Після нескладних перетворень отримаємо два рівняння для визначення аналітичних функцій φ_j ($j=1,2$) і вираз для функції кута повороту перерізу пластини φ через аналітичні функції φ_j :

жорсткий контакт

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left\{-\theta_1\theta_2\gamma_1^{(1)}\left[\varphi_1^{IV}(y_1)+y_1\varphi_2^{IV}(y_1)\right]-\theta_1\theta_2\left[3\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right]\varphi_2'''(y_1)+\right. \\ & +\left[\theta_4\gamma_{21}^{(1)}+\theta_1(\theta_3-2\kappa h)\gamma_2^{(1)}\right]\left[\varphi_1'''(y_1)+y_1\varphi_2'''(y_1)\right]+\left[\theta_4\left(\gamma_{21}^{(1)}+\gamma_{21}^{(2)}\right)+\right. \\ & +\theta_1(\theta_3-2\kappa h)\left(2\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\left.\right]\varphi_2''(y_1)-\theta_1\gamma_{22}^{(1)}\left[\varphi_1''(y_1)+y_1\varphi_2''(y_1)\right]- \\ & \left.-\theta_1\gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\}=\theta_1P_2(y_1)-\theta_2P_1'(y_1); \\ & \operatorname{Re}\left\{-\theta_1\theta_2\gamma_2^{(1)}\left[\varphi_1^{IV}(y_1)+y_1\varphi_2^{IV}(y_1)\right]-\theta_1\theta_3\left(3\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\varphi_2'''(y_1)+\theta_1\left(2\kappa\gamma_1^{(1)}+\gamma_{22}^{(1)}\right)\times\right. \\ & \times\left[\varphi_1'''(y_1)+y_1\varphi_2'''(y_1)\right]+\theta_1\left[2\kappa\left(2\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right)+\gamma_{22}^{(1)}+\gamma_{22}^{(2)}\right]\varphi_2''(y_1)- \\ & \left.-2\kappa\gamma_{21}^{(1)}\left[\varphi_1''(y_1)+y_1\varphi_2''(y_1)\right]-2\kappa\gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\}=2\kappa P_1(y_1)-\theta_1P_2'(y_1); \\ & \varphi(y_1)=(2\kappa h\theta_1)^{-1}\left\{-\theta_2P_1(y_1)+\right. \\ & +\operatorname{Re}\left\{\theta_1\theta_2\gamma_1^{(1)}\left[\varphi_1'''(y_1)+y_1\varphi_2'''(y_1)\right]+\theta_1\theta_2\left(2\gamma_1^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\right)\varphi_2''(y_1)+\right. \\ & \left.+\left(2\kappa h\theta_1\gamma_2^{(1)}-\theta_4\gamma_{21}^{(1)}\right)\left[\varphi_1''(y_1)+y_1\varphi_2''(y_1)\right]+\left[2\kappa h\theta_1\left(\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)-\theta_4\gamma_{21}^{(2)}\right]\varphi_2'(y_1)\right\}\}. \quad (7.92) \end{aligned}$$

нежорсткий контакт

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)}\left[\varphi_1''(y_1)+y_1\varphi_2''(y_1)\right]+\gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\}=0; \\ & \operatorname{Re}\left\{\theta_2\theta_3\gamma_2^{(1)}\left[\varphi_1^V(y_1)+y_1\varphi_2^V(y_1)\right]+\theta_2\theta_3\left(4\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\varphi_2^{IV}(y_1)-\right. \\ & -\theta_2\gamma_{22}^{(1)}\left[\varphi_1^{IV}(y_1)+y_1\varphi_2^{IV}(y_1)\right]-\theta_2\left(2\gamma_{22}^{(1)}+\gamma_{22}^{(2)}\right)\varphi_2'''(y_1)-2\kappa(\theta_3-2\kappa h)\gamma_2^{(1)}\times \\ & \times\left[\varphi_1'''(y_1)+y_1\varphi_2'''(y_1)\right]-2\kappa(\theta_3-2\kappa h)\left(2\gamma_2^{(1)}+\gamma_2^{(2)}\right)\varphi_2''(y_1)+ \\ & \left.+2\kappa\gamma_{22}^{(1)}\left[\varphi_1''(y_1)+y_1\varphi_2''(y_1)\right]+2\kappa\gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\}=\theta_2P_2''(y_1)-2\kappa P_2(y_1); \\ & \varphi(y_1)=(4\kappa^2h)^{-1}\left\{-\theta_2P_2'(y_1)+\operatorname{Re}\left\{\theta_2\theta_3\gamma_2^{(1)}\left[\varphi_1^{IV}(y_1)+y_1\varphi_2^{IV}(y_1)\right]+\right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\theta_2\theta_3(3\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\varphi_2'''(y_1) - \theta_2\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1'''(y_1) + y_1\varphi_2'''(y_1)] - \theta_2(\gamma_{22}^{(1)} + \gamma_{22}^{(2)})\varphi_2''(y_1) + \\
& + 4\kappa^2 h\gamma_2^{(1)}[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)] + 4\kappa^2 h(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\varphi_2'(y_1) \Big\}. \quad (7.93)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти $\gamma_i^{(j)}$ і $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) у рівняннях (7.92) і (7.93) для стисливого півпростору визначають по формулам (7.75) при позначеннях (3.32) і (7.76). Для нестисливого півпростору слід користуватися позначеннями (3.33) і (7.77).

Таким чином, задача про усталений рух двошарового півпростору, що складається з пружного півпростору з початковими напруженнями і пластини, що лежить на ньому, при рівних коренях рівняння (3.31) зводиться до знаходження функцій φ_j ($j = 1, 2$) і φ з системи рівнянь (7.92) або (7.93) залежно від контакту між пластиною та основою.

Нерівні корені. У цьому випадку комплексне представлення має вигляд (7.81) з урахуванням (7.82). Використовуючи комплексні потенціали, запишемо граничні умови для цієї задачі при $y_2 = -h$. Будемо розглядати, як і раніше, жорсткий і нежорсткий контакти між шаром і півпростором. З (7.4), (7.5) і (7.81) при $y_2 = -h$ отримуємо:

жорсткий контакт

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re}[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(y_1)] &= \tau(y_1); \\
2 \operatorname{Re}[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(y_1)] &= q(y_1); \\
2 \operatorname{Re}[\gamma_2^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2(y_1)] &= w(y_1); \\
2 \operatorname{Re}[\gamma_1^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_1^{(2)}\Phi_2(y_1)] &= u(y_1) + h\varphi(y_1); \quad (7.94)
\end{aligned}$$

нежорсткий контакт

$$\begin{aligned}
\tau(y_1) &= 0; \\
2 \operatorname{Re}[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(y_1)] &= q(y_1); \\
2 \operatorname{Re}[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(y_1)] &= 0;
\end{aligned}$$

$$2\operatorname{Re}\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2(y_1)\right] = w(y_1). \quad (7.95)$$

Як і у випадку рівних коренів (7.71), після виключення невідомих функцій $u(y_1)$, $w(y_1)$, $q(y_1)$ і $\tau(y_1)$ з рівнянь (7.3) і граничних умов (7.94) або (7.95) одержимо рівняння для визначення аналітичних функцій Φ_i ($i = 1, 2$) і вираз для функції кута повороту перерізу пластини φ через аналітичні функції Φ_i . У разі жорсткого контакту між пластиною і півпростором ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}\left\{-\theta_1\theta_2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'''(y_1) + \gamma_1^{(2)}\Phi_2'''(y_1)\right] + \left[\theta_4\gamma_{21}^{(1)} + \theta_1(\theta_3 - 2\kappa h)\gamma_2^{(1)}\right]\Phi_1''(y_1) + \right. \\ & \left. + \left[\theta_4\gamma_{21}^{(2)} + \theta_1(\theta_3 - 2\kappa h)\gamma_2^{(2)}\right]\Phi_2''(y_1) - \theta_1\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = \theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1); \\ & 2\operatorname{Re}\left\{-\theta_1\theta_3\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'''(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'''(y_1)\right] + \theta_1\left[(2\kappa\gamma_1^{(1)} + \gamma_{22}^{(1)})\Phi_1''(y_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2\kappa\gamma_1^{(2)} + \gamma_{22}^{(2)})\Phi_2''(y_1)\right] - 2\kappa\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = 2\kappa P_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1); \\ & \varphi(y_1) = (2\kappa h\theta_1)^{-1}\left\{-\theta_2 P_1(y_1) + 2\operatorname{Re}\left\{\theta_1\theta_2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1''(y_1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_1^{(2)}\Phi_2''(y_1)\right] + \left(2\kappa h\theta_1\gamma_2^{(1)} - \theta_4\gamma_{21}^{(1)}\right)\Phi_1'(y_1) + \left(2\kappa h\theta_1\gamma_2^{(2)} - \theta_4\gamma_{21}^{(2)}\right)\Phi_2'(y_1)\right\}\right\}. \quad (7.96) \end{aligned}$$

У разі нежорсткого контакту аналогічні рівняння можна представити таким чином

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right] = 0; \\ & 2\operatorname{Re}\left\{\theta_2\theta_3\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1^{IV}(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2^{IV}(y_1)\right] - \theta_2\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'''(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'''(y_1)\right] - 2\kappa(\theta_3 - 2\kappa h) \times \right. \\ & \left. \times \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1''(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2''(y_1)\right] + 2\kappa\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\} = \theta_2 P_2''(y_1) - 2\kappa P_2(y_1); \\ & \varphi(y_1) = (4\kappa^2 h)^{-1}\left\{-\theta_2 P_2'(y_1) + 2\operatorname{Re}\left\{\theta_2\theta_3\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'''(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'''(y_1)\right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \theta_2\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1''(y_1) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2''(y_1)\right] + 4\kappa^2 h\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(y_1)\right]\right\}\right\}. \quad (7.97) \end{aligned}$$

У рівняннях (7.96) і (7.97) параметри $\gamma_i^{(j)}$, $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2$) визначають із виразів (7.82) з урахуванням (3.32) і (7.83) для стисливого півпростору та із виразів (7.82) за позначень (3.33) і (7.84) для нестисливого півпростору.

Отже, розв'язок задачі про усталену реакцію двошарового півпростору з початковими напруженнями на навантаження, що рухається з постійною швидкістю, у разі нерівних коренів рівняння (3.31) можна одержати, розв'язуючи відносно функцій Φ_i ($i=1,2$) і φ системи рівнянь (7.96) і (7.97) у разі жорсткого та нежорсткого контакту між пластиною та півпростором відповідно.

7.3.3. Метод розв'язку задач в комплексних потенціалах.

Отримаємо розв'язок задач 7.3.2.1 та 7.3.2.2 про усталений рух двошарового попередньо напруженого півпростору при дії рухомого навантаження в загальному вигляді для стисливого і нестисливого матеріалів.

Для цього застосуємо метод М.І.Мусхелішвілі [79], оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. Відповідно до [79], для довільної голоморфної в нижній півплощині $y_2 + h < 0$ функції $f(z)$, яка неперервна до границі включно, справедливі наступні співвідношення

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -f(z) + \frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{f}(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -\frac{1}{2}\bar{a}, \quad (7.98)$$

де $z = y_1 + i(y_2 + h)$.

В (7.98) вважаємо, що функцію $f(y_1)$ при великих $|y_1|$ можна представити у вигляді

$$f(y_1) = a + o(|y_1|^{-\varepsilon}) = f(\infty) + o(|y_1|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon = const > 0. \quad (7.99)$$

Враховуючи викладене, перейдемо до дослідження задачі в площині $y_1 O y_2$.

Відносно поведінки комплексних потенціалів $\Phi_j(z_j)$, $\varphi_j(z_1)$ на нескінченності приймемо такі ж обмеження, як і в лінійній теорії пружності [77, 79].

7.3.3.1. Пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (3.31) в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл.

Рівні корені. Розглянемо випадок рівних коренів (7.71). В цьому випадку задача зводиться до визначення аналітичних функцій φ_j із рівнянь (7.85), (7.87) або (7.86), (7.87) у залежності від умов контакту.

Використовуючи рівняння (7.85) і формули (7.98) і (7.99), у випадку жорсткого контакту між захисним шаром і півпростором маємо

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(z) + (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)})\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1 dy_1}{y_1 - z}; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z}, \end{aligned} \quad (7.100)$$

а при нежорсткому контакті рівняння (7.86) із урахуванням (7.98) і (7.99) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) &= 0; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Системи рівнянь (7.100) і (7.101) не важко привести до вигляду

$$L[\Phi_j(z)] = f_j(z); \quad j = 1, 2; \quad (7.102)$$

де диференціальний оператор L і функції f_j ($j = 1, 2$) визначаються у випадку жорсткого контакту по формулах

$$\begin{aligned} L &= \varrho_1^2 h^2 v^4 \left(\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} - \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ &+ \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} + \gamma_{21}^{(1)} (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) - (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \gamma_{22}^{(1)} \right] \frac{d}{dz} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} \right); \\
f_1(z) &= \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(2)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(2)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \right. \\
& \left. + \varrho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\left(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) P(y_1)_1 - \left(\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) P_2(y_1) \right]}{(y_1 - z)^2} dy_1 \right\}; \\
f_2(z) &= -\frac{1}{i\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(1)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \right. \\
& \left. + \varrho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_1^{(1)} P_2(y_1)}{(y_1 - z)^2} dy_1 \right]; \tag{7.103}
\end{aligned}$$

а у випадку нежорсткого контакту по формулам

$$\begin{aligned}
L &= \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} \left(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \right] \frac{d}{dz} + \left(\gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} \right); \\
f_j(z) &= \frac{(-1)^{j+1}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \tag{7.104}
\end{aligned}$$

Так як при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1$, то вирази (7.102) – (7.104) також можна розглядати в площині z_1 .

Таким чином, для жорсткого і нежорсткого контактів задача при рівних коренях рівняння (3.31) звелася до розв'язку звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами виду (7.102) відносно функцій $\Phi_j(z_1)$ ($j = 1, 2$) або, відповідно до принятих позначень (7.87), функцій $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ і $\varphi_2'(z_1)$. Отримавши функції $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ і $\varphi_2'(z_1)$, легко визначити функції $\varphi_j''(z_1)$ ($j = 1, 2$), а потім напруження і швидкості переміщень у півпросторі, використовуючи формули (7.74). Переміщення в даному випадку визначаються з точністю до довільної константи.

Нерівні корені. Нехай виконується умова (7.78). До систем рівнянь (7.88) і (7.89) застосуємо формули (7.98) і (7.99) В результаті при жорсткому контакті

між захисним шаром і півпростором отримаємо наступну систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$)

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) + \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'(z) + \gamma_1^{(2)}\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(y_1) dy_1}{y_1 - z}; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (7.105)$$

При нежорсткому контакті аналогічна система диференціальних рівнянь відносно аналітичних функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$) має вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) &= 0; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \varrho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)}\Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (7.106)$$

В результаті нескладних перетворень системи диференціальних рівнянь (7.105) і (7.106) можна записати у вигляді (7.102), де при жорсткому контакті

$$\begin{aligned} L &= \varrho_1^2 h^2 v^4 \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ &+ \varrho_1 h v^2 \left[\left(\gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) - \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} + \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \frac{d}{dz} + \left(\gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right); \\ f_j(z) &= \frac{(-1)^{j-1}}{2i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\gamma_{22}^{(m)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(m)} P_2(y_1) \right] dy_1}{y_1 - z} + \right. \\ &\left. + \varrho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\gamma_2^{(m)} P_1(y_1) + \gamma_1^{(m)} P_2(y_1) \right] dy_1}{(y_1 - z)^2} \right\}; \\ j, m &= 1, 2; \quad j \neq m; \end{aligned} \quad (7.107)$$

а при нежорсткому контакті

$$L = \varrho_1 h v^2 \left(\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \frac{d}{dz} + \left(\gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right);$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j+1}}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \quad (7.108)$$

Так як при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1 = z_2$, то вирази (7.105)–(7.108) можна розглядати також в площинах z_1 і z_2 .

Таким чином, задача у випадку нерівних коренів зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь виду (7.102) відносно функцій $\Phi_j(z_j)$ ($j=1,2$) в позначеннях (7.107) або (7.108) (у залежності від умов контакту між захисним шаром і основою). Компоненти напружено-деформованого стану півпростору визначаються за допомогою співвідношень (7.81) та виразів для функцій $\Phi'_j(z_j)$ ($j=1,2$).

7.3.3.2. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі.

Рівні корені. Розглянемо випадок рівних коренів (7.71). У цьому випадку задача зводиться до визначення аналітичних функцій φ_j із перших двох рівнянь (7.92) або (7.93) (залежно від умови контакту). Функція φ може бути визначена з третього рівняння системи (7.92) або (7.93).

Використовуючи перші два рівняння (7.92) і формули (7.98) та (7.99), у разі жорсткого контакту між пластиною та напівпростором отримаємо

$$\begin{aligned} & -\theta_1 \theta_2 \gamma_1^{(1)} \left[\varphi_1^{IV}(z) + z \varphi_2^{IV}(z) \right] - \theta_1 \theta_2 \left(3\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) \varphi_2'''(z) + \left[\theta_4 \gamma_{21}^{(1)} + \theta_1 (\theta_3 - 2\kappa h) \gamma_2^{(1)} \right] \times \\ & \times \left[\varphi_1'''(z) + z \varphi_2'''(z) \right] + \left[\theta_4 (\gamma_{21}^{(1)} + \gamma_{21}^{(2)}) + \theta_1 (\theta_3 - 2\kappa h) (2\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \right] \varphi_2''(z) - \\ & - \theta_1 \gamma_{22}^{(1)} \left[\varphi_1''(z) + z \varphi_2''(z) \right] - \theta_1 \gamma_{22}^{(2)} \varphi_2'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1)] dy_1}{y_1 - z}; \\ & -\theta_1 \theta_3 \gamma_2^{(1)} \left[\varphi_1^{IV}(z) + z \varphi_2^{IV}(z) \right] - \theta_1 \theta_3 \left(3\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \varphi_2'''(z) + \theta_1 \left(2\kappa \gamma_1^{(1)} + \gamma_{22}^{(1)} \right) \times \\ & \times \left[\varphi_1'''(z) + z \varphi_2'''(z) \right] + \theta_1 \left[2\kappa (2\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) + \gamma_{22}^{(1)} + \gamma_{22}^{(2)} \right] \varphi_2''(z) - 2\kappa \gamma_{21}^{(1)} \left[\varphi_1''(z) + z \varphi_2''(z) \right] - \\ & - 2\kappa \gamma_{21}^{(2)} \varphi_2'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[2\kappa P_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1)] dy_1}{y_1 - z}; \end{aligned} \quad (7.109)$$

а в разі нежорсткого контакту перші два рівняння (7.93) з урахуванням (7.98) і (7.99) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
& \gamma_{21}^{(1)}[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] + \gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(z) = 0; \\
& \theta_2\theta_3\gamma_2^{(1)}[\varphi_1^V(z) + z\varphi_2^V(z)] + \theta_2\theta_3(4\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\varphi_2^{IV}(z) - \theta_2\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1^{IV}(z) + z\varphi_2^{IV}(z)] - \\
& -\theta_2(2\gamma_{22}^{(1)} + \gamma_{22}^{(2)})\varphi_2'''(z) - 2\kappa(\theta_3 - 2\kappa h)\gamma_2^{(1)}[\varphi_1'''(z) + z\varphi_2'''(z)] - 2\kappa(\theta_3 - 2\kappa h) \times \\
& \times (2\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\varphi_2''(z) + 2\kappa\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] + 2\kappa\gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(z) = \\
& = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\theta_2 P_2''(y_1) - 2\kappa P_2(y_1)] dy_1}{y_1 - z}. \tag{7.110}
\end{aligned}$$

Системи рівнянь (7.109) і ((7.110) нескладно привести до вигляду

$$\begin{aligned}
L[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] &= f_1(z); \\
L[\varphi_2'(z)] &= f_2(z), \tag{7.111}
\end{aligned}$$

де диференціальний оператор L і функції f_j ($j=1,2$) визначаються в разі жорсткого контакту за формулами

$$\begin{aligned}
L &= \theta_1\theta_2\theta_3(\gamma_2^{(1)}\gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)}\gamma_1^{(1)})\frac{d^4}{dz^4} + \\
& + \left\{ \theta_1\theta_2[\gamma_1^{(1)}\gamma_{22}^{(2)} - (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)})\gamma_{22}^{(1)}] + \theta_3\theta_4[\gamma_{21}^{(1)}(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) - \gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}] \right\} \frac{d^3}{dz^3} + \\
& + \left\{ 2\kappa\theta_1 \left\{ h[\gamma_1^{(1)}\gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)}(\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) + \gamma_2^{(1)}\gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)}(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})] + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\theta_3 - 2\kappa h)(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(1)}) \right\} + \right. \\
& \left. + \theta_4(\gamma_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)}\gamma_{21}^{(1)}) \right\} \frac{d^2}{dz^2} + 2\kappa \left\{ (\theta_3 - 2\kappa h)[\gamma_2^{(1)}\gamma_{21}^{(2)} - (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)})\gamma_{21}^{(1)}] + \right. \\
& \left. + \theta_1[\gamma_{22}^{(1)}(\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) - \gamma_1^{(1)}\gamma_{22}^{(2)}] \right\} \frac{d}{dz} + 2\kappa(\gamma_{22}^{(2)}\gamma_{21}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)}); \\
f_1(z) &= -\frac{1}{\theta_1\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y_1 - z)^3} \left\{ \left\{ 2\kappa\gamma_{21}^{(2)}(y_1 - z)^2 - \theta_1[2\kappa(\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) + \gamma_{22}^{(2)}] \right\} (y_1 - z) + \right. \\
& \left. + 2\theta_1\theta_3(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \right\} [\theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1)] + \left\{ \theta_1\gamma_{22}^{(2)}(y_1 - z)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\theta_4 \gamma_{21}^{(2)} + \theta_1 (\theta_3 - 2\kappa h) (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \right] (y_1 - z) - 2\theta_1 \theta_2 (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \left\{ \times \right. \\
& \quad \left. \times [2\kappa_1 P_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1)] \right\} dy_1; \\
f_2(z) &= \frac{1}{\theta_1 \pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y_1 - z)^3} \left\{ [2\kappa \gamma_{21}^{(1)} (y_1 - z)^2 - \right. \\
& - \theta_1 (2\kappa \gamma_1^{(1)} + \gamma_{22}^{(1)}) (y_1 - z) + 2\theta_1 \theta_3 \gamma_2^{(1)}] [\theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1)] + \left. \theta_1 \gamma_{22}^{(1)} (y_1 - z)^2 + \right. \\
& \left. + [\theta_4 \gamma_{21}^{(1)} + \theta_1 (\theta_3 - 2\kappa h) \gamma_2^{(1)}] (y_1 - z) - 2\theta_1 \theta_2 \gamma_1^{(1)} \right\} [2\kappa_1 P_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1)] \left\{ dy_1; \quad (7.112)
\end{aligned}$$

а в разі нежорсткого контакту за формулами

$$\begin{aligned}
L &= \theta_2 \theta_3 [\gamma_{21}^{(1)} (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}] \frac{d^3}{dz^3} + \theta_2 (\gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)}) \frac{d^2}{dz^2} + \\
& + 2\kappa (\theta_3 - 2\kappa h) [\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \gamma_{21}^{(1)}] \frac{d}{dz} + 2\kappa (\gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)}); \\
f_1(z) &= \frac{\gamma_{21}^{(2)}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta_2 P_2''(y_1) - 2\kappa P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1; \\
f_2(z) &= -\frac{\gamma_{21}^{(1)}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta_2 P_2''(y_1) - 2\kappa P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1. \quad (7.113)
\end{aligned}$$

Оскільки при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1$, то вирази (7.111)–(7.113) також можна розглядати в площині z_1 .

Таким чином, для жорсткого і нежорсткого контактів задача за рівних коренів рівняння (3.31) звелася до розв'язування звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами виду (7.111) відносно функцій $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ та $\varphi_2'(z_1)$. Отримавши функції $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ і $\varphi_2'(z_1)$, легко визначити функції $\varphi_j''(z_1)$ ($j=1,2$), а потім напруження і швидкості переміщень у півпросторі. Згинальний момент в пластині можна знайти за формулами (7.60), (7.92) або (7.93) і виразами для функцій $\varphi_j''(z_1)$ ($j=1,2$) і $\varphi_2'(z_1)$.

Більш докладно аналіз отриманих результатів проведемо для випадку нерівних коренів.

Нерівні корені. До перших двох рівнянь у системах рівнянь (7.96) і (7.97) застосуємо формули (7.98) і (7.99), з огляду на те, що напруження на нескінченності згасають. У результаті за жорсткого контакту між пластиною і півпростором отримуємо таку систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$)

$$\begin{aligned}
& -\theta_1\theta_2\left[\gamma_1^{(1)}\Phi_1'''(z)+\gamma_1^{(2)}\Phi_2'''(z)\right]+\left[\theta_4\gamma_{21}^{(1)}+\theta_1(\theta_3-2\kappa h)\gamma_2^{(1)}\right]\Phi_1''(z)+ \\
& \quad +\left[\theta_4\gamma_{21}^{(2)}+\theta_1(\theta_3-2\kappa h)\gamma_2^{(2)}\right]\Phi_2''(z)- \\
& -\theta_1\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(z)\right]=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_1P_2(y_1)-\theta_2P_1'(y_1)}{y_1-z}dy_1; \\
& -\theta_1\theta_3\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1'''(z)+\gamma_2^{(2)}\Phi_2'''(z)\right]+\theta_1\left[(2\kappa\gamma_1^{(1)}+\gamma_{22}^{(1)})\Phi_1''(z)+\right. \\
& \quad \left.+(2\kappa\gamma_1^{(2)}+\gamma_{22}^{(2)})\Phi_2''(z)\right]-2\kappa\left[\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z)\right]= \\
& \quad =-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\kappa P_1(y_1)-\theta_1P_2'(y_1)}{y_1-z}dy_1. \tag{7.114}
\end{aligned}$$

За нежорсткого контакту аналогічна система диференціальних рівнянь відносно аналітичних функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$) має вигляд

$$\begin{aligned}
& \gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z)=0; \\
& \theta_2\theta_3\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1^{IV}(z)+\gamma_2^{(2)}\Phi_1^{IV}(z)\right]-\theta_2\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'''(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'''(z)\right]-2\kappa(\theta_3-2\kappa h)\times \\
& \quad \times\left[\gamma_2^{(1)}\Phi_1''(z)+\gamma_2^{(2)}\Phi_2''(z)\right]+2\kappa\left[\gamma_{22}^{(1)}\Phi_1'(z)+\gamma_{22}^{(2)}\Phi_2'(z)\right]= \\
& \quad =-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_2P_2''(y_1)-2\kappa P_2(y_1)}{y_1-z}dy_1. \tag{7.115}
\end{aligned}$$

У результаті нескладних перетворень систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді

$$L[\Phi_i'(z)]=f_i(z); \quad j=1,2. \tag{7.116}$$

де при жорсткому контакті

$$\begin{aligned}
L &= \theta_1 \theta_2 \theta_3 \left(\gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \right) \frac{d^4}{dz^4} + \\
&+ \left[\theta_1 \theta_2 \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} \right) + \theta_3 \theta_4 \left(\gamma_{21}^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \frac{d^3}{dz^3} + \\
&+ \left\{ 2\kappa \theta_1 \left[h \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) + \gamma_2^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_2^{(2)} \right] + \right. \\
&+ \theta_4 \left(\gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \left. \right\} \frac{d^2}{dz^2} + 2\kappa \left[\left(\theta_3 - 2\kappa h \right) \left(\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) + \right. \\
&+ \theta_1 \left(\gamma_{22}^{(1)} \gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} \right) \left. \right] \frac{d}{dz} + 2\kappa \left(\gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right); \\
f_j(z) &= \frac{(-1)^j}{2\theta_1 \pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y_1 - z)^3} \left\{ \left[2\kappa \gamma_{21}^{(k)} (y_1 - z)^2 - \theta_1 \left(2\kappa \gamma_1^{(k)} + \gamma_{22}^{(k)} \right) (y_1 - z) + 2\theta_1 \theta_3 \gamma_2^{(k)} \right] \times \right. \\
&\times \left[\theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1) \right] + \left\{ \theta_1 \gamma_{22}^{(k)} (y_1 - z)^2 + \left[\theta_4 \gamma_{21}^{(k)} + \theta_1 \left(\theta_3 - 2\kappa h \right) \gamma_2^{(k)} \right] (y_1 - z) - 2\theta_1 \theta_2 \gamma_1^{(k)} \right\} \times \\
&\times \left[2\kappa_1 P_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1) \right] \left. \right\} dy_1; \quad j, k = 1, 2; \quad j \neq k. \quad (7.117)
\end{aligned}$$

а при нежорсткому контакті

$$\begin{aligned}
L &= \theta_2 \theta_3 \left(\gamma_{21}^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) \frac{d^3}{dz^3} + \theta_2 \left(\gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\
&+ 2\kappa \left(\theta_3 - 2\kappa h \right) \left(\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \frac{d}{dz} + 2\kappa \left(\gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right); \\
f_j(z) &= \frac{(-1)^k \gamma_{21}^{(k)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta_2 P_2''(y_1) - 2\kappa P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1; \quad j, k = 1, 2; \quad j \neq k. \quad (7.118)
\end{aligned}$$

Оскільки при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1 = z_2$, то вирази (7.114)–(7.118) можна розглядати також у площинах z_1 і z_2 .

Таким чином, задача про усталену реакцію двошарового пружного півпростору з початковими напруженнями в разі нерівних коренів зводиться до розв'язання двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь (7.116) відносно функцій $\Phi'_j(z_j)$. Компоненти напружено-деформованого стану двошарового півпростору визначають, використовуючи співвідношення (7.60),

(7.81), вирази для функцій $\Phi'_j(z_j)$ і $\varphi(y_1)$ (третє рівняння в системі рівнянь (7.96) або (7.97)).

Критичні швидкості руху навантаження слід визначати з умов існування дійсних позитивних кратних коренів характеристичного рівняння диференціальних рівнянь (7.116).

Порівняльний аналіз формул, отриманих в [67, 68], дозволяє стверджувати, що рівняння $\Delta(k)=0$ має ті ж корені, що і характеристичне рівняння диференціальних рівнянь (7.116).

Отже, застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати, аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є в роботах [67, 68].

6.4. Результати та висновки

У розділі досліджено вплив захисного покриття, початкових напружень, механічних характеристик матеріалів, параметрів руху поверхневого навантаження на напружено-деформований стан пружної основи. за допомогою інтегрального метода Фур'є і метода комплексних потенціалів.

Розглянуто дві наближені моделі шаруватого стисливого або нестисливого півпростору:

1) пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару (верхній шар (захисне покриття) моделюється зосередженими масами);

2) пружна пластина на пружному півпросторі. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю.

Розв'язок задач отриманий із застосуванням інтегрального метода Фур'є і метода комплексних потенціалів.

Аналітичні результати наведені в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

РОЗДІЛ 8

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Динамічний аналіз багатошарових пружних основ з початковими напруженнями в умовах дії рухомих навантажень потребує застосування повних тривимірних моделей, здатних адекватно відтворювати складні хвильові процеси, взаємодію шарів, а також вплив попереднього напруженого стану на параметри пружного поля. Саме побудова такого **просторового, фізично коректного та чисельно стійкого підходу** становить головну мету даної роботи.

Разом з тим, розробка ефективного методу розв'язування цих задач вимагала ретельного аналізу математичної структури відповідних рівнянь руху, їх спектральних властивостей, а також значного обсягу проміжних чисельних експериментів. На початкових етапах дослідження основна увага була зосереджена на **наближених двовимірних моделях** (пластина на пружній основі, модель із зосередженими масами), оскільки вони дозволяли оперативно перевіряти коректність окремих елементів майбутнього методу та тестувати стабільність різних схем інтегрування у просторі параметрів Фур'є. Для таких моделей застосування інтегрального методу Фур'є є достатнім і забезпечує надійний контроль поведінки спектральних функцій.

Побудова ж повного тривимірного розв'язку на основі інтегральних перетворень потребувала розробки спеціальних процедур обмеження нефізичних складових спектру, розв'язання проблеми точок розгалуження та стабілізації обчислень у трансзвуковій області. На цьому етапі було сформовано **регуляційно-спектральний підхід зі структурною регуляризацією**, який дозволяє отримувати збіжні інтеграли Фур'є для просторових моделей та забезпечує фізичну коректність (радіаційну умову) без необхідності використання складних контурів Зоммерфельда.

У цьому розділі наведено результати чисельних досліджень для наближених моделей двошарового півпростору, описаних у розділі 7, а також для ряду точних двовимірних і тривимірних задач, побудованих відповідно до постановок, викладених у розділі 3. Для розв'язку плоских і тривимірних задач в точній постановці використовувався **регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією** (розділ 4).

Просторовий розв'язок виступає базою для кількісної оцінки точності спрощених моделей, а також для демонстрації ефективності запропонованого регуляційно-спектрального методу.

Розроблений метод зробив можливим проведення повноцінних чисельних досліджень тривимірних задач та виконання порівняльного аналізу з розв'язками плоских моделей. Отримані просторові рішення використовуються як еталон для визначення меж коректності двовимірних наближень.

8.1. Значення складових тензорів пружності для стисливих та нестисливих тіл з початковими напруженнями для конкретних пружних потенціалів

Для числового аналізу розглядався нестисливий матеріал з потенціалом Бартенєва-Хазановича та стисливий матеріал з потенціалом гармонічного типу. Розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій.

Для стисливих і нестисливих пружних тіл в координатах початкового деформованого стану (2.7) співвідношення пружності (2.8), (2.16) містять тензори пружності 4-го порядку $\tilde{\omega}$ і $\tilde{\varkappa}$. Компоненти цих тензорів визначаються по формулі (2.15). Запишемо явні вирази складових тензорів модулів пружності для двох типів пружних потенціалів: гармонічного потенціалу (стисливий матеріал) та потенціалу Бартенєва–Хазановича (нестисливий матеріал).

Стисливий матеріал. Розглянемо стисливий матеріал з пружним гармонічним потенціалом [64]

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2, \quad (8.1)$$

де λ , μ – сталі Ламе. Величини s_1 і s_2 – перший і другий інваріанти тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесені до головних осей:

$$\begin{aligned} s_1 &= (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1); \\ s_2 &= (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2. \end{aligned}$$

Вирази для величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} і $S_0^{\beta\beta}$ в формулі (2.15) для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій мають вигляд [64]

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \lambda \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} + \delta_{ij} [2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)] \lambda_i^{-3}; \\ \mu_{ij} &= [2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)] \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}; \\ S_0^{\beta\beta} &= [\lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + 2\mu(\lambda_\beta - 1)] \lambda_\beta^{-1}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Складові тензора $\tilde{\omega}$ відповідно до (2.15) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} &= \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \times \\ &\times [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} + \lambda_j^{-1} \lambda_\alpha^{-1} \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta}]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Підставимо в (8.3) вирази (8.2). Для загального попередньо напруженого стану (3.3) компоненти тензора $\tilde{\omega}$ можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111} &= \frac{\lambda_1^2 (\lambda + 2\mu)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{2222} = \frac{\lambda_2^2 (\lambda + 2\mu)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{3333} = \frac{\lambda_3^2 (\lambda + 2\mu)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}; \\ \tilde{\omega}_{1122} &= \tilde{\omega}_{2211} = \lambda \lambda_3^{-1}; \quad \tilde{\omega}_{1133} = \tilde{\omega}_{3311} = \lambda \lambda_2^{-1}; \quad \tilde{\omega}_{2233} = \tilde{\omega}_{3322} = \lambda \lambda_1^{-1}; \\ \tilde{\omega}_{1212} &= \tilde{\omega}_{2121} = [2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)] \lambda_3^{-1} (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}; \\ \tilde{\omega}_{1313} &= \tilde{\omega}_{3131} = [2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)] \lambda_2^{-2} (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}; \\ \tilde{\omega}_{1221} &= \lambda_1 \lambda_2^{-1} \lambda_3^{-1} (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} [2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)]; \\ \tilde{\omega}_{2112} &= \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3^{-1} (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} [2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)]; \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{2323} &= \tilde{\omega}_{3232} = \lambda_1^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}[2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{1331} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1} \times \\
&\times \{2\mu[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 1)] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\}; \\
\tilde{\omega}_{3113} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \times \\
&\times \{2\mu[\lambda_1 + (\lambda_3 - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)] + \lambda\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)\}; \\
\tilde{\omega}_{2332} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1} \times \\
&\times \{2\mu[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - 1)] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)\}; \\
\tilde{\omega}_{3223} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \{2\mu[(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - \lambda_1] + \lambda\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)\}.
\end{aligned}$$

У випадку симетричного напруженого стану (3.4) компоненти тензора $\tilde{\omega}$ будуть визначатися по формулам

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{1111} &= \tilde{\omega}_{2222} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{3333} = \frac{\lambda_3(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1^2}; \\
\tilde{\omega}_{1122} &= \tilde{\omega}_{2211} = \lambda\lambda_3^{-1}; \quad \tilde{\omega}_{1133} = \tilde{\omega}_{3311} = \tilde{\omega}_{2233} = \tilde{\omega}_{3322} = \lambda\lambda_1^{-1}; \\
\tilde{\omega}_{1212} &= \tilde{\omega}_{2121} = \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}[2\mu - \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{1313} &= \tilde{\omega}_{3131} = \frac{1}{2}\lambda_1^{-3}[2\mu - \lambda(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{1221} &= \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}[2\mu(2\lambda_1 - 1) + \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{2112} &= \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}[2\mu(2\lambda_1 - 1) + \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{2323} &= \tilde{\omega}_{3232} = \frac{1}{2}\lambda_1^{-2}[2\mu - \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)]\lambda_1^{-2}; \\
\tilde{\omega}_{1331} &= \frac{1}{2}\lambda_1^{-2}\lambda_3^{-1} \{2\mu[\lambda_3 + 2\lambda_1(\lambda_1 - 1)] - \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)(2\lambda_1 - \lambda_3)\}; \\
\tilde{\omega}_{3113} &= \frac{1}{2}\lambda_1^{-2}[2\mu(2\lambda_3 - 1) + \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)]; \\
\tilde{\omega}_{2332} &= \frac{1}{2}\lambda_1^{-2}\lambda_3^{-1} \{2\mu[\lambda_3 + 2\lambda_1(\lambda_1 - 1)] - \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)(\lambda_3 - 2\lambda_1)\};
\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\tilde{\omega}_{3223} = \frac{1}{2} \lambda_1^{-2} [2\mu(2\lambda_3 - 1) + \lambda(2\lambda_1 + \lambda_3 - 3)].$$

Якщо початковий напружений стан є плоским

$$\lambda_3 = 1 \quad (8.6)$$

і поверхневе навантаження відсутнє

$$S_0^{22} = 0, \quad (8.7)$$

з урахуванням співвідношення

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (8.8)$$

маємо

$$\lambda_2 = \frac{1-\nu\lambda_1}{1-\nu}. \quad (8.9)$$

Тут ν – коефіцієнт Пуасона.

З урахуванням (8.6) – (8.9) для складових тензора $\tilde{\omega}$ отримаємо наступні вирази

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111} &= \frac{2\mu\lambda_1(1-\nu)^2}{(1-2\nu)(1-\nu\lambda_1)}; & \tilde{\omega}_{2222} &= \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{\lambda_1(1-2\nu)}; \\ \tilde{\omega}_{1122} = \tilde{\omega}_{2211} &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}; & \tilde{\omega}_{1212} = \tilde{\omega}_{2121} = \tilde{\omega}_{2112} &= \frac{2\mu(1-\lambda_1\nu)}{\lambda_1 - 2\lambda_1\nu + 1}; \\ \tilde{\omega}_{1221} &= \frac{2\mu\lambda_1^2(1-\nu)^2}{(1-\nu\lambda_1)(\lambda_1 - 2\lambda_1\nu + 1)}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Нестисливий матеріал. Для нестисливого матеріалу розглянемо пружний потенціал типу Бартенєва-Хазановича [64]

$$\Phi = 2\mu s_1. \quad (8.11)$$

Вирази для величин $A_{i\beta}$, μ_{ij} , $S_0^{\beta\beta}$ і q_j для теорії скінченних (великих) початкових деформацій мають вигляд [64]

$$\begin{aligned} A_{i\beta} &= -2\delta_{i\beta}\lambda_\beta^{-4}(\mu\lambda_\beta + p^o); \\ \mu_{ij} &= -[2\mu\lambda_i\lambda_j + p^o(\lambda_i + \lambda_j)]\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}(\lambda_i + \lambda_j)^{-1}; \\ S_0^{\beta\beta} &= (2\mu\lambda_\beta + p^o)\lambda_\beta^{-2}; \\ q_j &= \lambda_j^{-1}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Складові тензора $\tilde{\mathcal{K}}$ відповідно до (2.15) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{ij\alpha\beta} &= \lambda_i\lambda_j\lambda_\alpha\lambda_\beta \times \\ &\times [\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})\mu_{ij} + \lambda_j^{-1}\lambda_\alpha^{-1}\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}S_0^{\beta\beta}]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Підставимо в (8.13) вирази (8.22). Для загального попередньо напруженого стану (3.3) компоненти тензора $\tilde{\mathcal{K}}$ можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{1111} &= \tilde{\mathcal{K}}_{2222} = \tilde{\mathcal{K}}_{3333} = -p^o; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{1122} &= \tilde{\mathcal{K}}_{2211} = \tilde{\mathcal{K}}_{1133} = \tilde{\mathcal{K}}_{3311} = \tilde{\mathcal{K}}_{2233} = \tilde{\mathcal{K}}_{3322} = 0; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{1221} &= 2\mu\lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{2112} &= 2\mu\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{1212} &= \tilde{\mathcal{K}}_{2121} = -2\mu\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - p^o; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{1331} &= 2\mu\lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{3113} &= 2\mu\lambda_3^2(\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{2332} &= 2\mu\lambda_2^2(\lambda_2 + \lambda_3)^{-1}; \\ \tilde{\mathcal{K}}_{3223} &= 2\mu\lambda_3^2(\lambda_2 + \lambda_3)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

У випадку симетричного напруженого стану (3.4) компоненти тензора $\tilde{\mathcal{K}}$ будуть визначатися по формулам

$$\tilde{\mathcal{K}}_{1111} = \tilde{\mathcal{K}}_{2222} = \tilde{\mathcal{K}}_{3333} = -p^o;$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_{1122} &= \tilde{\kappa}_{2211} = \tilde{\kappa}_{1133} = \tilde{\kappa}_{3311} = \tilde{\kappa}_{2233} = \tilde{\kappa}_{3322} = 0; \\
\tilde{\kappa}_{1221} &= \tilde{\kappa}_{2112} = \mu\lambda_1; \quad \tilde{\kappa}_{1212} = \tilde{\kappa}_{2121} = -\mu\lambda_1 - p^o; \\
\tilde{\kappa}_{1331} &= \tilde{\kappa}_{2332} = 2\mu\lambda_1^2(\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}; \\
\tilde{\kappa}_{3113} &= \tilde{\kappa}_{3223} = 2\mu\lambda_3^2(\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Вважаємо, що початковий деформований стан є плоским

$$\lambda_3 = 1; \quad \lambda_1 = \lambda_2^{-1}; \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{8.16}$$

і поверхневе навантаження відсутнє (8.7). Тоді з третьої формули (8.12) отримаємо

$$p^o = -2\mu\lambda_1^{-1}. \tag{8.17}$$

Використовуючи (8.14), (8.16) і (8.17), для складових тензора $\tilde{\kappa}$ отримаємо наступні формули

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_{1111} &= \tilde{\kappa}_{2222} = 2\mu\lambda_1^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{2112} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \\
\tilde{\kappa}_{1221} &= 2\mu\lambda_1^3(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1212} = \tilde{\kappa}_{2121} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1122} = \tilde{\kappa}_{2211} = 0.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

8.2. Наближені двовимірні моделі двошарового пружного півпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження

У випадку пружної основи всі вище розглянуті в розділі 7 наближені двовимірні моделі двошарового півпростору – «зосереджені маси на півпросторі» та «пластина на півпросторі» – дають однакові **якісні хвильові ефекти** при дії рухомого навантаження. Відмінності між ними мають переважно **кількісний характер** і не впливають на фізичну інтерпретацію результатів. Тому доцільно виділити окремий підрозділ для опису основних хвильових ефектів на прикладі найпростішої з них моделі – моделі «зосереджені маси на півпросторі», яка дозволяє дослідити хвильову природу процесу без дублювання якісно схожих результатів.

Проведений аналіз також показав, що для нестисливого півпростору вплив початкових напружень на розподіл швидкостей переміщень і напружень

проявляється значно виразніше, ніж у випадку стисливого півпростору. Для стисливого середовища відповідні залежності мають той самий характер, а відмінності зводяться до незначних кількісних поправок. У зв'язку з цим, з метою наочного демонстрування впливу початкових напружень та уникнення дублювання однотипних графічних результатів, у роботі наведено переважно графіки для нестисливого півпростору, тоді як випадок стисливого півпростору розглядається узагальнено.

Результати чисельних експериментів для моделі «зосереджені маси на півпросторі» у достатньо повному об'ємі відображені в роботах [8, 39–49, 55–58, 117, 122, 123, 160, 162].

Для моделі «пружна пластина на півпросторі» аналогічні результати наведені в роботах [2, 6, 9–13, 16, 38, 41, 47, 67, 68, 115, 118–121, 161].

Для розв'язку задач використовувався інтегральний метод Фур'є.

В нижче наведених результатах досліджень основна увага приділялася напружено-деформованому стану основи шаруватої конструкції.

Методика обчислення обернених інтегралів приведена в роботах [240]. Вважалося, що початковий деформований стан плоский ($\lambda_3 = 1$) і поверхневе навантаження відсутнє ($S_0^{22} = 0$).

8.2.1. Вплив початкових напружень на характеристики НДС в нестисливому півпросторі

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (8.11). Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє. Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження. Розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів: $\rho/\rho_1 = 0,5$; $\alpha = \pi/2$.

Для компонентів тензора $\tilde{\varepsilon}$ мають місце вирази (8.18). Для розрахунку складових напружень і швидкостей переміщень у півпросторі скористаємося формулами (7.34).

Визначимо, як основні характеристики напружено-деформованого стану залежать від початкових напружень при різних швидкостях навантаження (дозвукових і надзвукових).

Досліджувались швидкості навантаження в діапазонах $v < c_1$ і $v > c_1$. Тут c_1 – швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями ($\rho c_1^2 = \tilde{\kappa}_{1221}$) [72].

У випадку, коли $v < c_1$ розглядалися тільки докритичні швидкості навантаження [67, 68].

На рис. 8.1–8.5 показаний розподіл деяких складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$. Тут $c_0^2 = \mu/\rho$. Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 8.1–8.5 відповідають значенням $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1,1$ і $\lambda_1 = 1,2$.

Для таких швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

На рис. 8.6–8.8 показана залежність напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при різних початкових напруженнях і швидкостях руху навантаження при $y_2 = -2h/\lambda_2$. Криві 1, 2, 3 і 4 на рис. 8.6–8.8 відповідають значенням $v^2 = 0,1c_0^2$, $v^2 = 0,2c_0^2$, $v^2 = 0,3c_0^2$ і $v^2 = 0,4c_0^2$.

Аналіз отриманих числових результатів для докритичних швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки. При заданих λ_1 темп зростання значень величин, що досліджується, при стискуванні більше, ніж при розтягуванні.

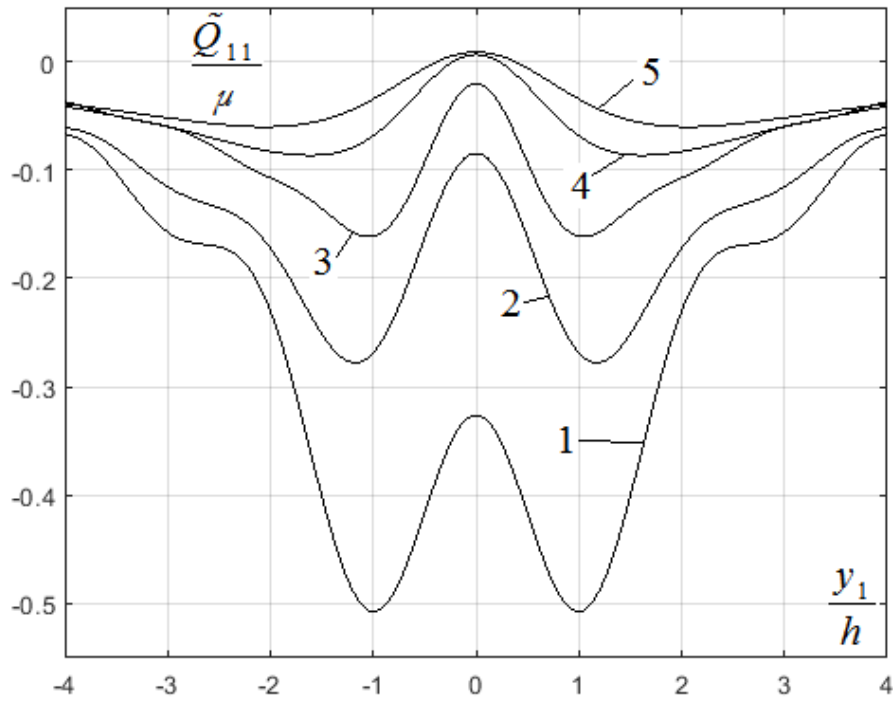


Рис. 8.1. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{11} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$

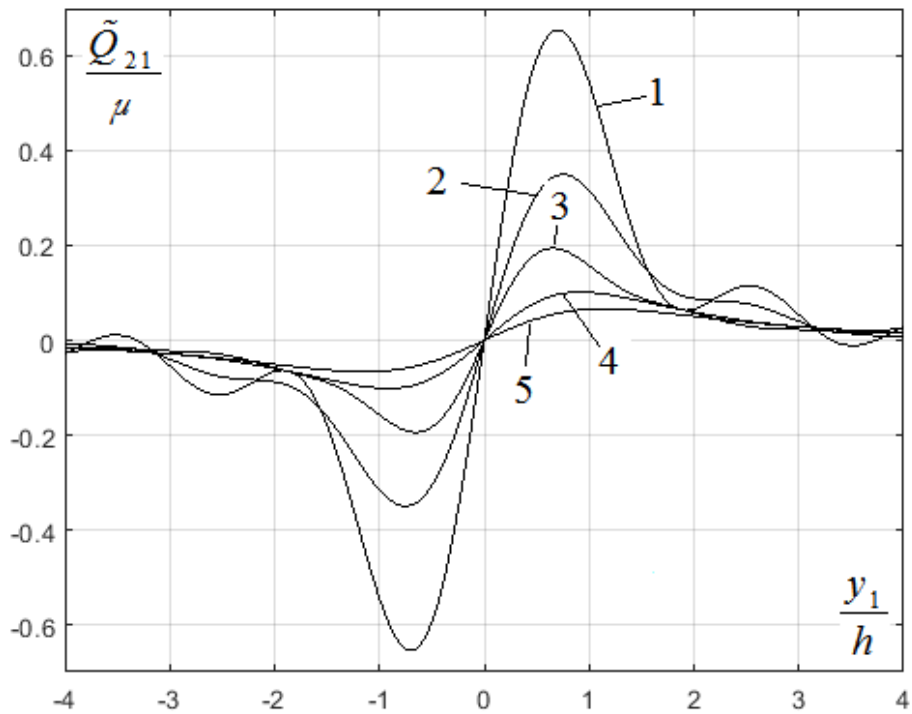


Рис. 8.2. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{21} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$

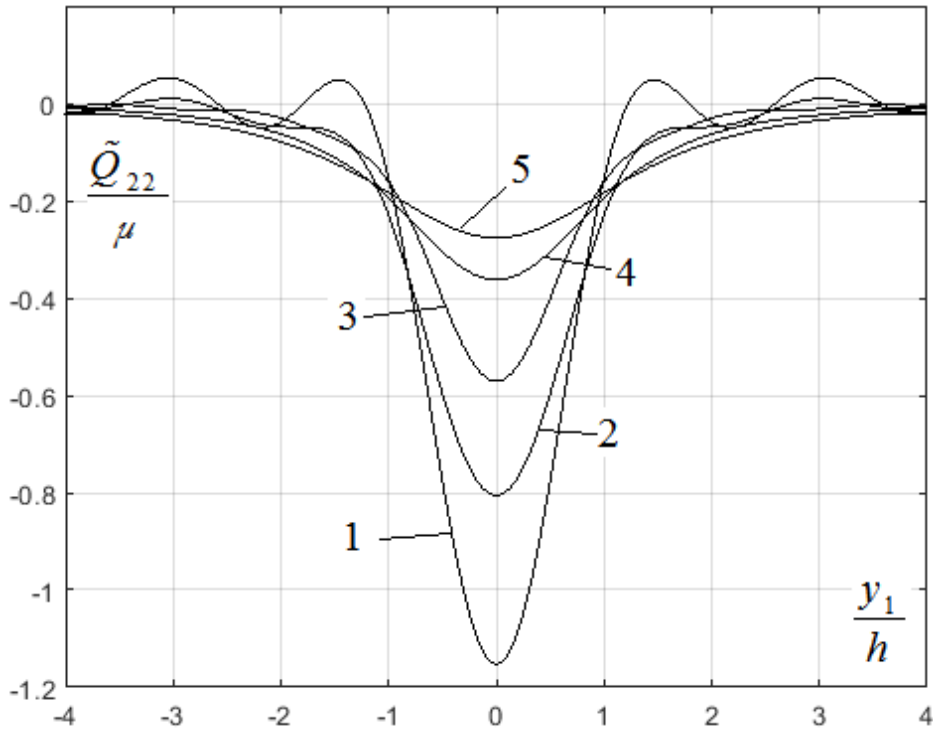


Рис. 8.3. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $\nu^2 = 0,1c_0^2$

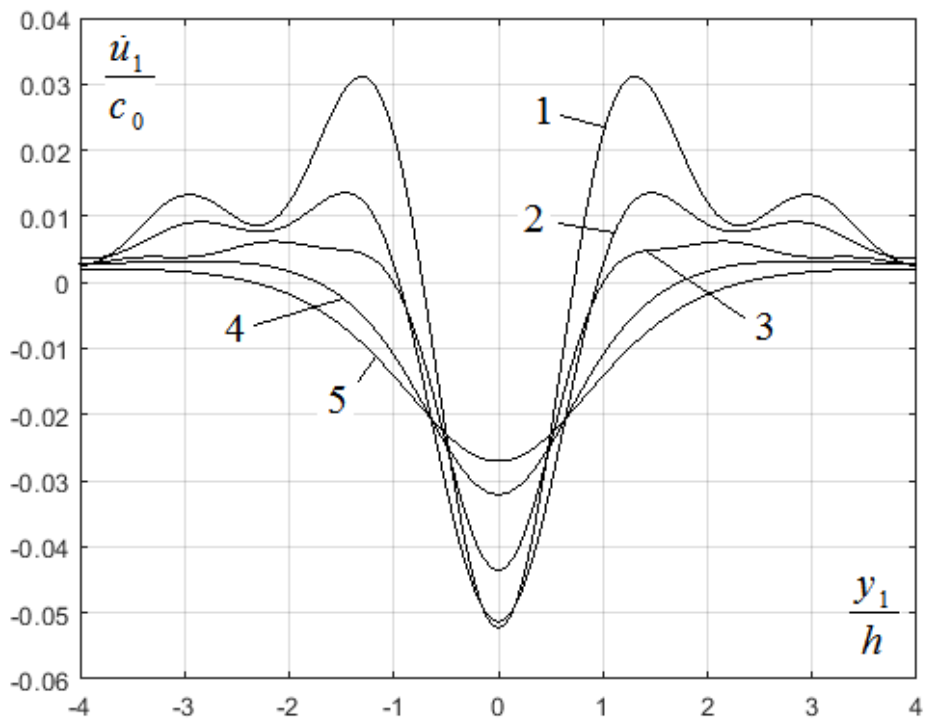


Рис. 8.4. Швидкість переміщення \dot{u}_1 в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $\nu^2 = 0,1c_0^2$

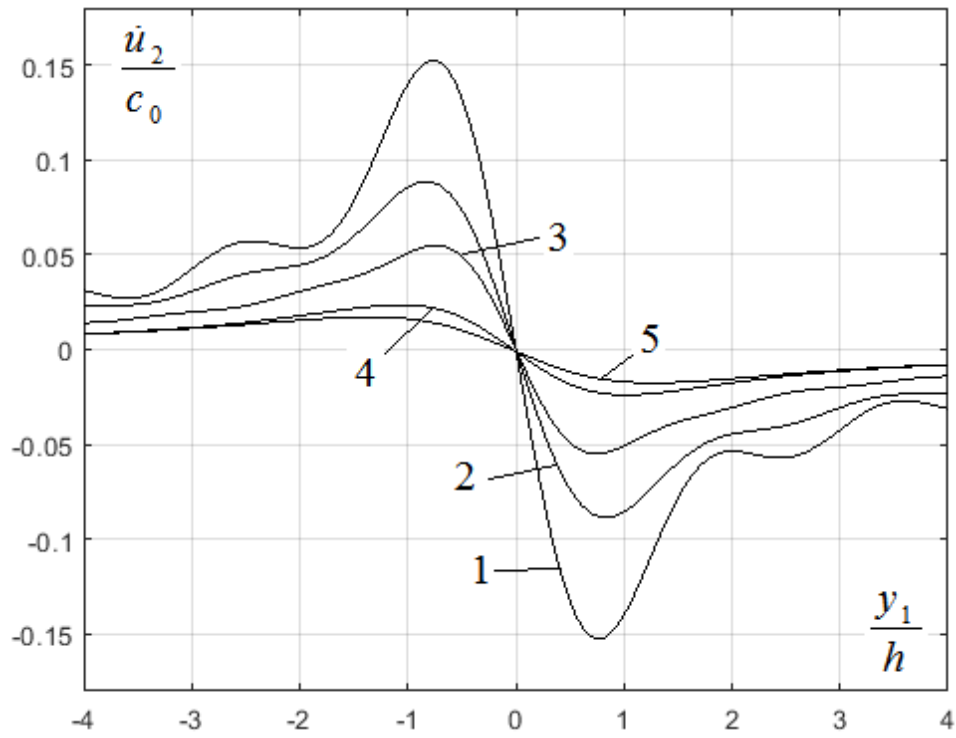


Рис. 8.5. Швидкість переміщення \dot{u}_2 в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для

$$v^2 = 0,1c_0^2$$

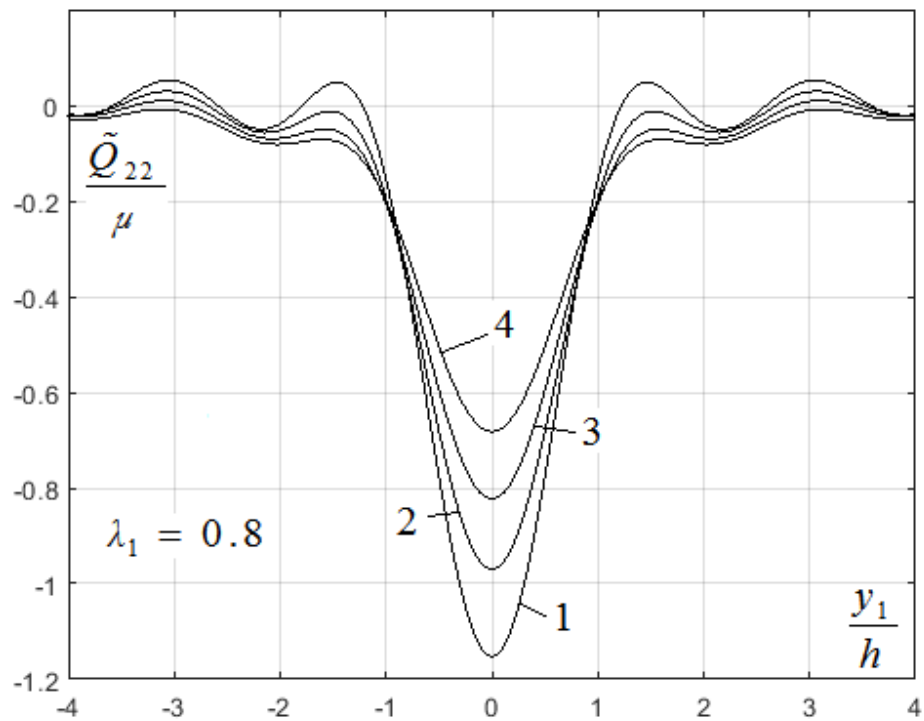


Рис.8.6. Залежність напруження \tilde{Q}_{22} від швидкості руху навантаження при

$$\lambda_1 = 0.8 \text{ і } y_2 = -2h/\lambda_2$$

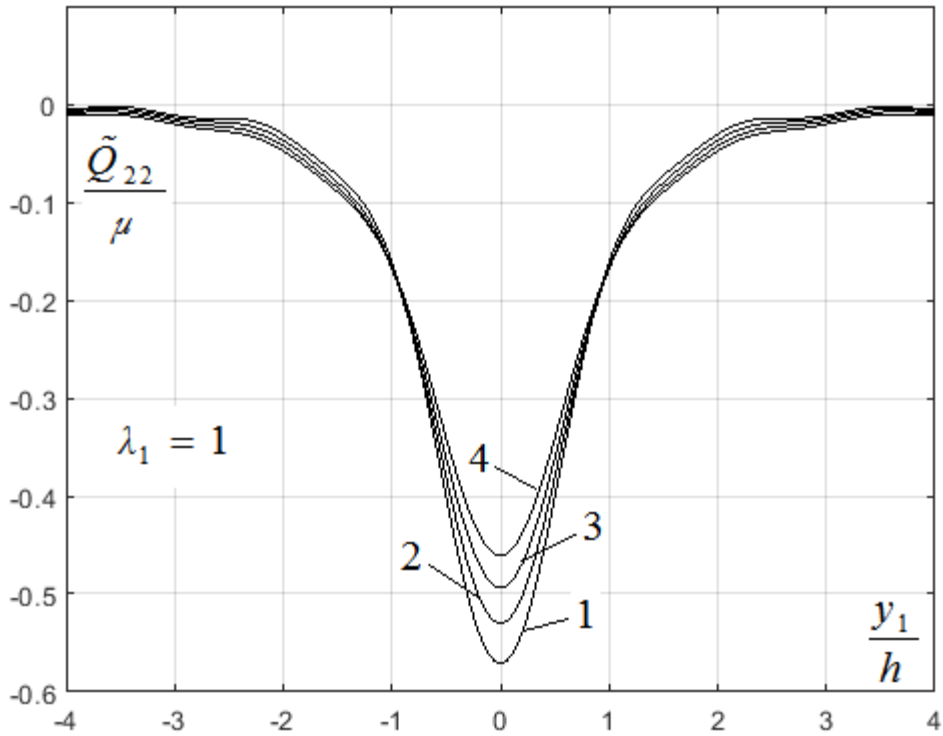


Рис. 8.7. Залежність напруження \tilde{Q}_{22} від швидкості руху навантаження при $\lambda_1 = 1$ і $y_2 = -2h/\lambda_2$

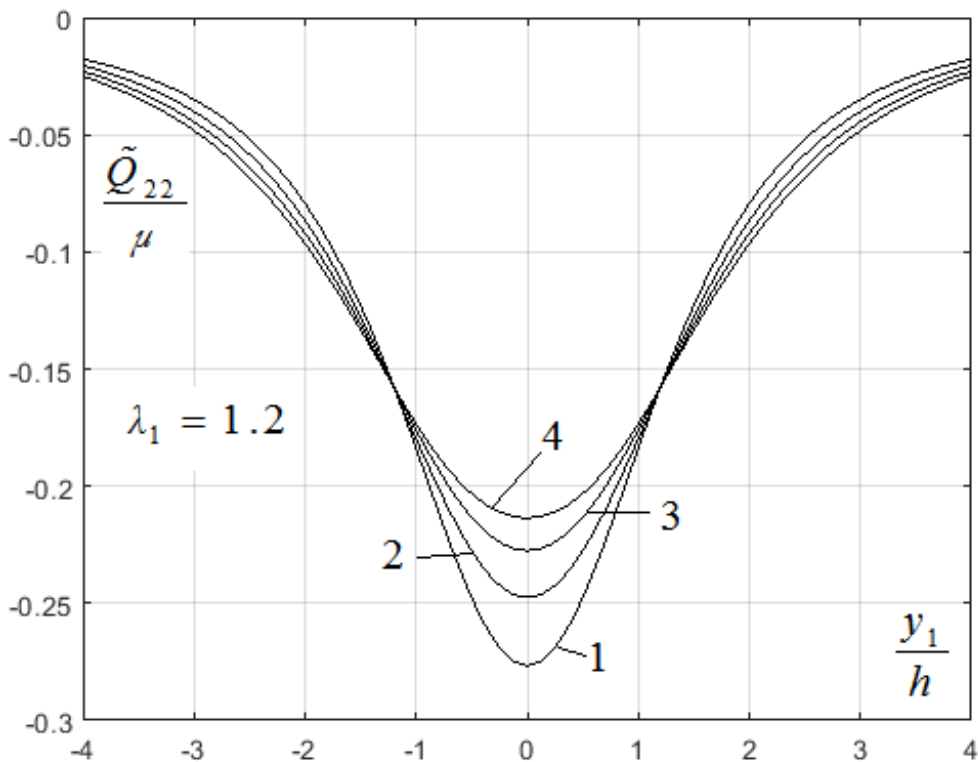


Рис. 8.8. Залежність напруження \tilde{Q}_{22} від швидкості руху навантаження при $\lambda_1 = 1.2$ і $y_2 = -2h/\lambda_2$

Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стискуванні, ніж при розтягуванні. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки. Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень значно посилюється. Особливо це має місце для матеріалу, що попередньо стиснений.

Розглянемо випадок, коли $v > c_1$. Зміна складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі у залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 8.9–8.13. Розрахунки в цьому випадку проводилися при $y_2 = -2h/\lambda_2$. Швидкість навантаження становила $v^2 = 2c_0^2$. Умовні позначення на рис. 8.9–8.13 такі ж, як і на рис. 8.1–8.5.

Для надзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотна, але не зникає повністю через наявність поверхневого шару.

З рис. 8.9–8.13 випливає, що значення напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при $v > c_1$ суттєво залежать від початкових напружень в півпросторі. Конкретний тип таких залежностей визначається положенням точки шаруватого середовища щодо точки прикладання навантаження. Так само, як і у випадку, коли $v < c_1$, існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень незалежать від початкових деформацій.

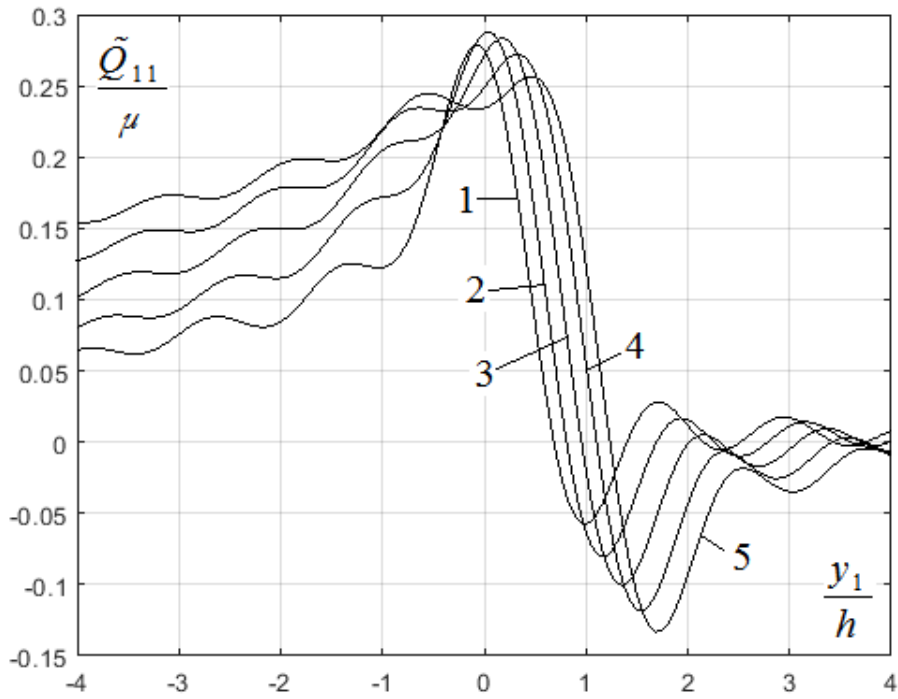


Рис. 8.9. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{11} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 2c_0^2$

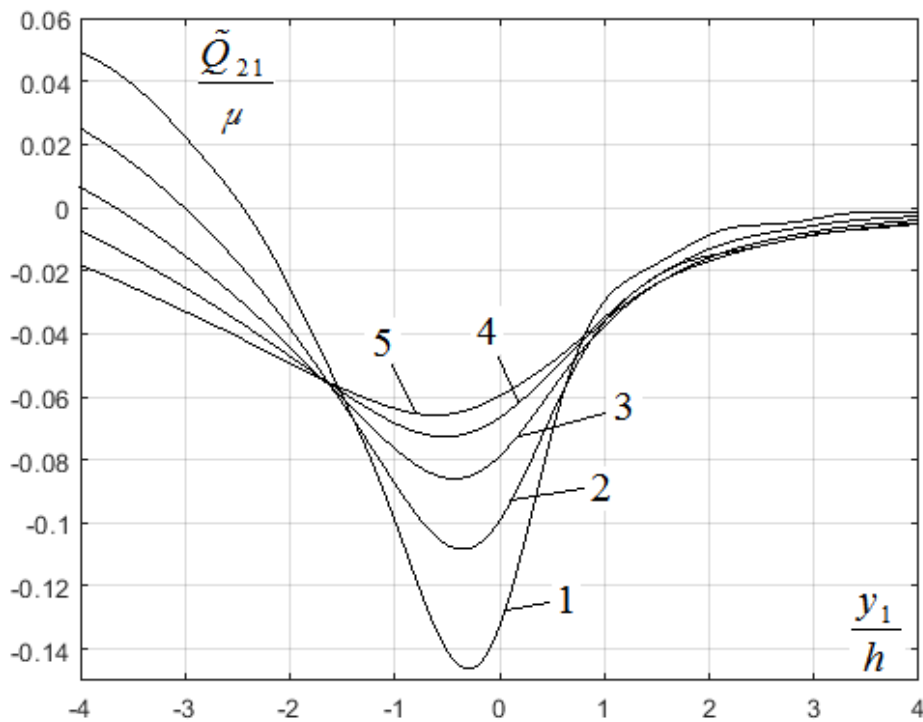


Рис. 8.10. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{21} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 2c_0^2$

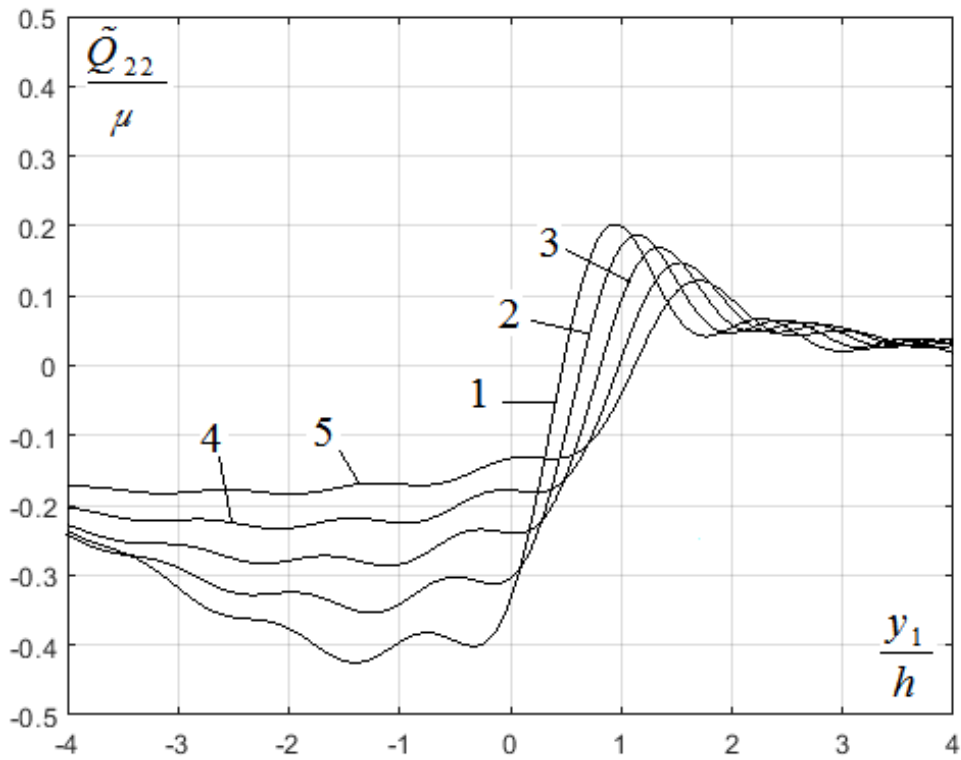


Рис. 8.11. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для

$$v^2 = 2c_0^2$$

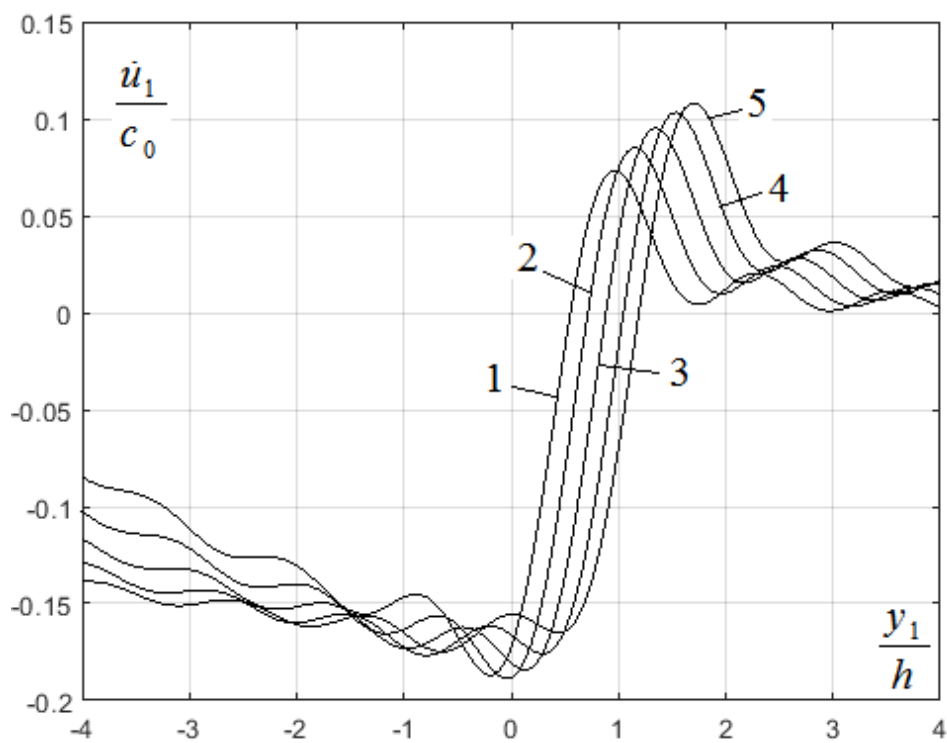


Рис. 8.12. Швидкість переміщення \dot{u}_1 в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для

$$v^2 = 2c_0^2$$

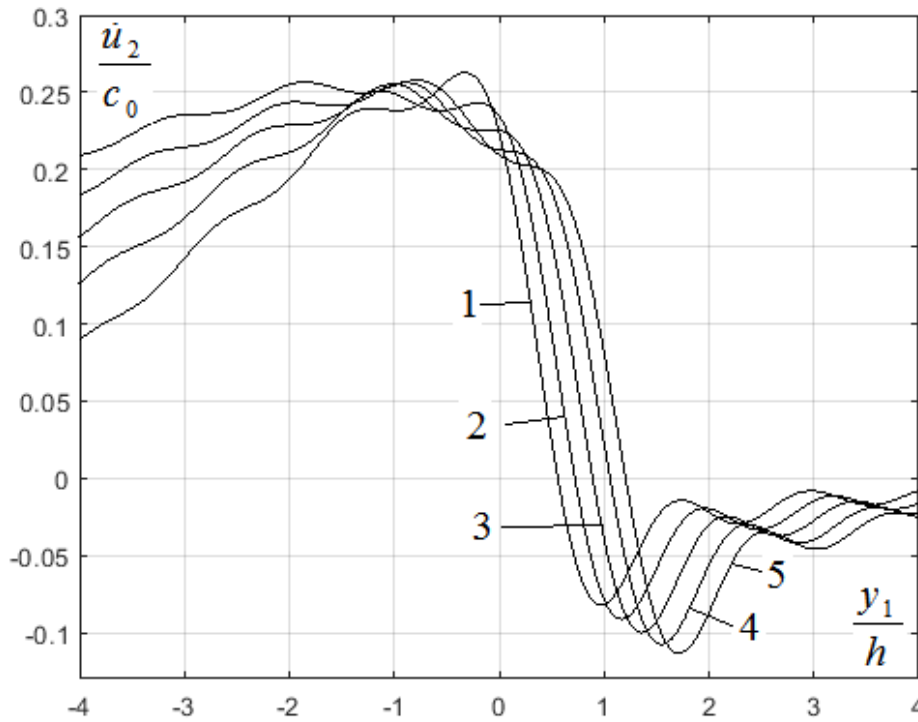


Рис. 8.13. Швидкість переміщення \dot{u}_2 в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для

$$v^2 = 2c_0^2$$

8.2.2. Вплив початкових напружень на характеристики НДС при різних швидкостях навантаження і умовах контакту захисного шару і півпростору. Стисливий матеріал

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом гармонічного типу (8.1). Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє.

Вирази для складових тензора $\tilde{\omega}$ для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій мають вигляд (8.10).

Для представлених нижче графіків $P = \mu$; $\nu = 0,3$; $\alpha = \pi/2$.

Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження і умовах контакту захисного шару і півпростору.

Для півпростору із стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом обчислення проводилися при дозвукових $v < c_{12}$, трансзвукових $c_{12} < v < c_{11}$ і

надзвукових $v > c_{11}$ швидкостях руху навантаження. Тут через c_{11} і c_{12} позначено швидкості поширення в напрямку осі Oy_1 відповідно повздовжніх і поперечних поляризованих хвиль в необмеженому тілі з початковими напруженнями ($\tilde{\rho}c_{ij}^2 = \tilde{\omega}_{ijj}$; $i, j=1, 2$) [72].

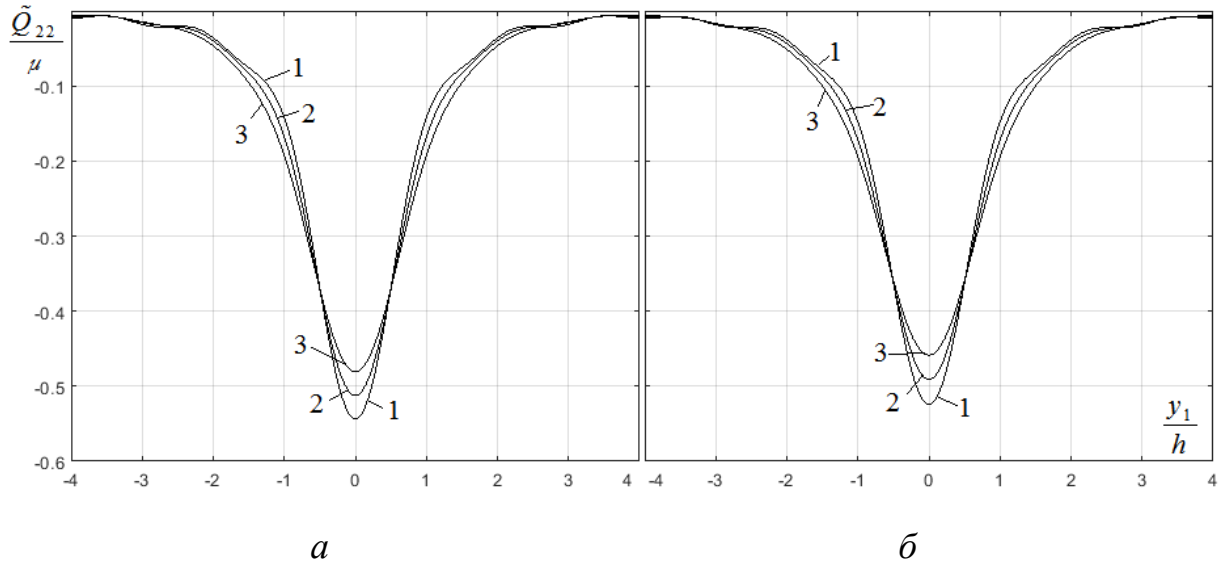


Рис. 8.14. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$, $\rho/\rho_1 = 0,5$, $v^2 = 0,2c_s^2$, *a* – нежорсткий контакт, *б* – жорсткий контакт

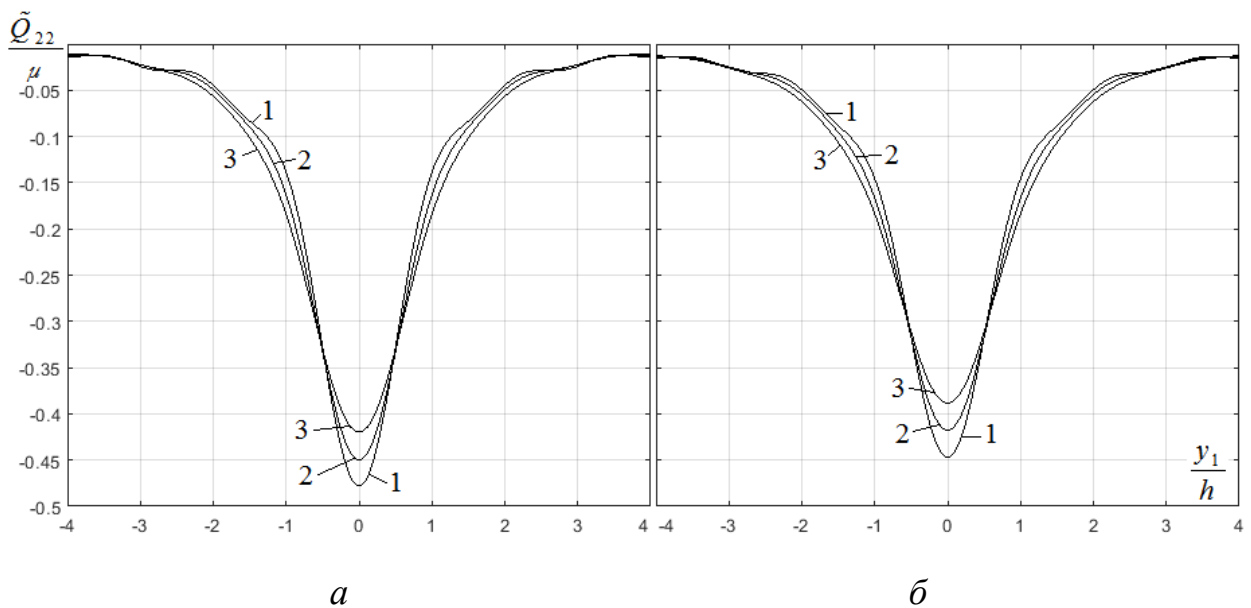


Рис. 8.15. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$, $\rho/\rho_1 = 0,5$, $v^2 = 0,4c_s^2$, *a* – нежорсткий контакт, *б* – жорсткий контакт

На рис. 8.14–8.19 показано розподіл узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для різних умов контакту захисного шару та півпростору (a – нежорсткий контакт; b – жорсткий контакт) і різних швидкостей руху поверхневого навантаження.

На приведених графіках аналізуються точки півпростору, які збігаються в природному стані. Криві 1, 2 і 3 на рис. 8.14–8.18 відповідають значенням початкового видовження $\lambda_1 = 0,9$; $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_1 = 1,1$.

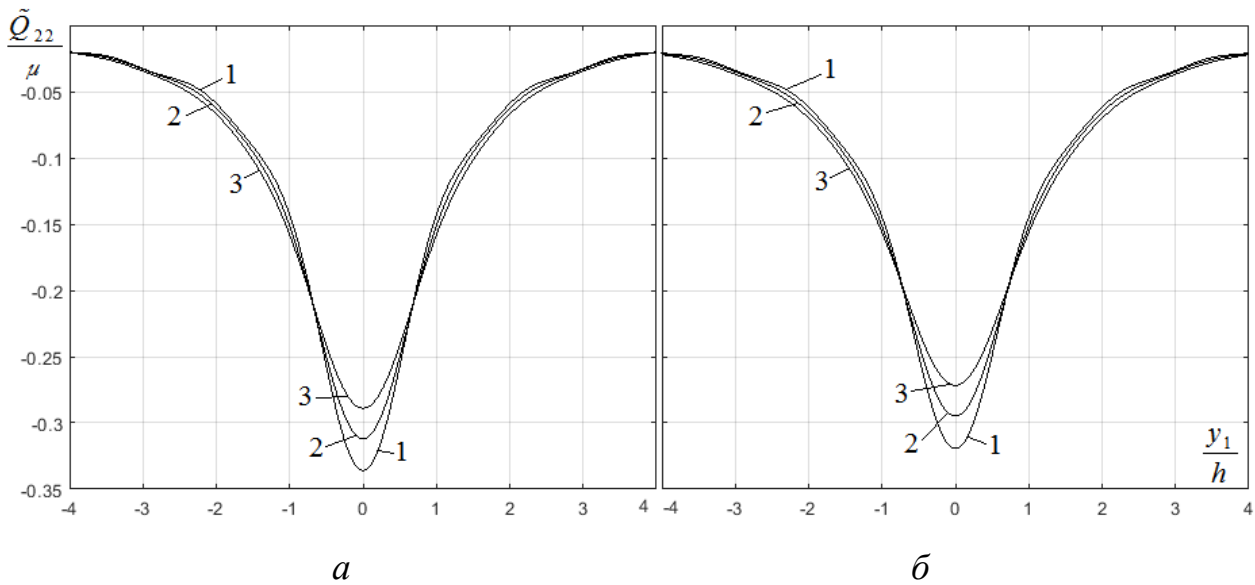


Рис. 8.16. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$, $\rho/\rho_1 = 0,25$, $v^2 = 0,2c_s^2$,
 a – нежорсткий контакт, b – жорсткий контакт

У випадку, коли $v < c_{12}$, були досліджені тільки докритичні швидкості навантаження [67, 68] (рис. 8.14–8.16). Епюри на рис. 8.14 відповідають значенням $\rho/\rho_1 = 0,5$; $v^2 = 0,2c_s^2$; на рис. 8.15 – значенням $\rho/\rho_1 = 0,5$; $v^2 = 0,4c_s^2$; на рис. 8.16 – $\rho/\rho_1 = 0,25$; $v^2 = 0,2c_s^2$. Тут $c_s^2 = \mu/\rho$.

Для таких дозвукових швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

Аналіз отриманих числових результатів для дозвукових швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки.

Найбільше початкові напруження впливають на напружено-деформований стан основи в зоні прикладення поверхневого навантаження.

Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

При заданих λ_1 значення величин, що характеризують напружено-деформований стан основи, при стиску більше, ніж при розтязі.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження напруження і швидкості переміщення зменшуються (рис. 8.14 і рис. 8.15).

Напруження і швидкості переміщення також зменшуються у випадку більш жорсткого поверхневого шару (рис. 8.14 і рис. 8.16).

Зі збільшенням швидкості руху навантаження в дозвуковій області характер впливу початкових напружень майже не змінюється.

Значення величин, що характеризують напружено-деформований стан півпростору при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті.

При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менший, ніж при нежорсткому контакті.

На рис. 8.17 показано зміну узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} у випадку, коли $c_{12} < v < c_{11}$. Швидкість навантаження становить $v^2 = 2c_0^2$. Для трансзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотна.

Аналіз отриманих результатів показує, що наявність початкових напружень впливає на розподіл напружень і швидкостей переміщень в півпросторі. Цей вплив різний у залежності від положення даної точки півпростору відносно точки прикладання навантаження.

Значення напружень та швидкостей переміщень, як і у випадку $v < c_{12}$, при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті, але при жорсткому контакті існує значна залежність цих параметрів від початкових напружень.

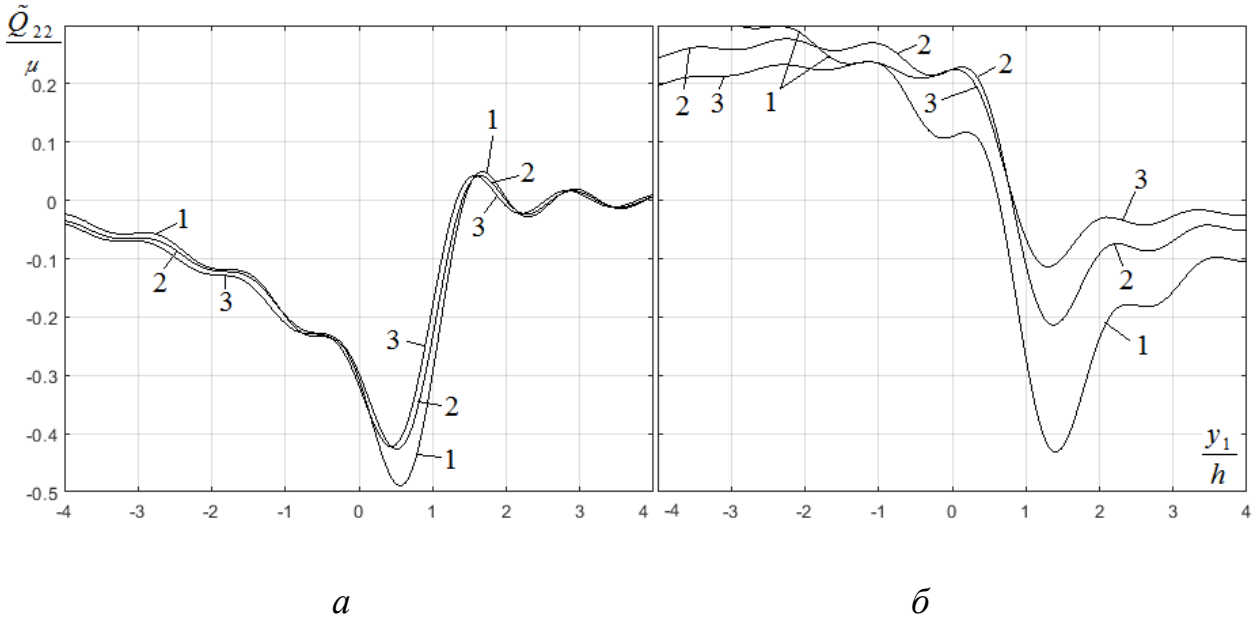


Рис. 8.17. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$, $v^2 = 2c_0^2$,

a – нежорсткий контакт, *б* – жорсткий контакт

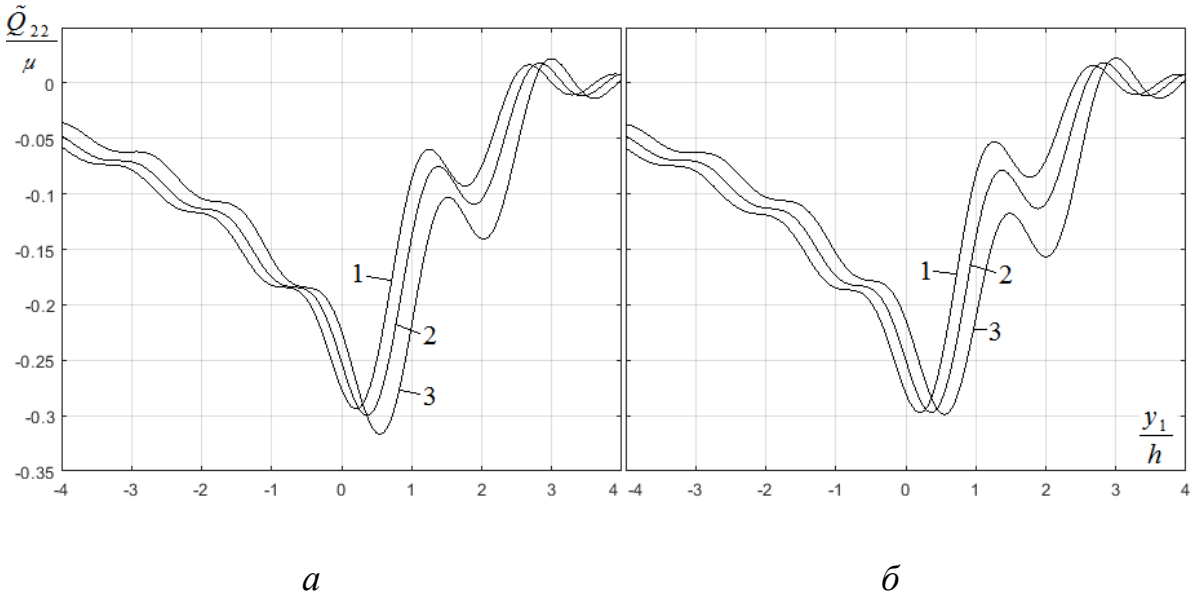


Рис. 8.18. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -2h/\lambda_2$, $v^2 = 6c_s^2$,

a – нежорсткий контакт, *б* – жорсткий контакт

Так само, як і у випадку, коли $v < c_{12}$, існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

На рис. 8.18 показано результати для складової напруження \tilde{Q}_{22} для швидкості навантаження $v^2 = 6c_s^2$ (надзвукова швидкість $v > c_{11}$). Видно, що зі збільшенням швидкості симетрія все більше порушується, а пряма хвиля згасає набагато швидше. При цьому вона не зникає повністю. Це пов'язано, ймовірно, з шаруватістю середовища. Слід зазначити, що якісно подібна картина спостерігалася і в роботах [67, 68].

Залежність параметрів напружено-деформованого стану від початкових напружень і умов контакту має такий же якісний характер, як і у випадку, коли $c_{12} < v < c_{11}$.

8.2.3. Аналіз характерних динамічних ефектів

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи, визначаються координатами точки, що досліджується, початковими напруженнями, швидкістю навантаження, механічними параметрами шаруватого середовища та умовами контакту елементів шаруватого середовища. Основні закономірності, що були встановлені в процесі досліджень представлені нижче:

1. Локальність впливу початкових напружень. Вплив початкових напружень є найбільш істотним у локальній зоні прикладення поверхневого навантаження, де формується основна частина хвильового поля і відбувається інтенсивна передача енергії від навантаження до середовища. У цій області початкові напруження безпосередньо змінюють ефективні хвильові швидкості та умови формування поверхневих і підповерхневих хвиль, що призводить до суттєвих змін амплітуд напружень і швидкостей переміщень. Це пояснюється тим, що в цій області сумарний тензор напружень формується як суперпозиція початкового стану та індукованого динамічного поля. У віддалених зонах

хвильове поле зазнає геометричного розсіювання та внутрішнього перерозподілу енергії, внаслідок чого внесок початкових напружень стає другорядним.

2. Асиметрія впливу стискання і розтягування. За попереднього стискання матеріалу темп зростання досліджуваних величин є вищим, ніж при розтягуванні. Фізично це пов'язано з тим, що при стисканні ефективна жорсткість середовища зростає, змінюючи швидкості поширення хвиль і механізми концентрації напружень. При розтягуванні, навпаки, відбувається часткове «розсіювання» енергії хвиль, що знижує чутливість системи до початкових деформацій. У випадку розтягування середовище поводить себе більш «м'яко», а хвильові збурення частково компенсуються початковим станом.

3. Існування зон слабкої чутливості. Виявлено області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень практично не залежать від початкових деформацій. Такі зони формуються внаслідок балансу між геометричним затуханням хвиль, їх дисперсією та перерозподілом енергії між об'ємними і поверхневими хвилями. В цих зонах домінують об'ємні хвилі, а локальні поверхневі ефекти вже згасли, що узгоджується з хвильовою природою поширення збурень у пружних середовищах. Це дозволяє в окремих інженерних задачах нехтувати початковими напруженнями без істотної втрати точності.

4. Взаємодія швидкості руху та початкових напружень. Зі зростанням швидкості руху навантаження амплітуди напружень і швидкостей переміщень загалом зменшуються, що пов'язано зі скороченням часу дії навантаження на фіксовану точку середовища. Водночас вплив початкових напружень посилюється, оскільки вони визначають фонові хвильові властивості середовища. Найбільш виражено це проявляється для попередньо стиснених матеріалів, де змінюється спектр допустимих хвильових режимів.

5. Дозвуковий режим. У дозвуковій області характер впливу початкових напружень залишається практично незмінним зі зростанням швидкості. Це зумовлено відсутністю ударних хвиль і збереженням квазістаціонарного хвильового поля, в якому фронти збурень симетрично поширюються вперед і назад відносно точки навантаження.

6. Симетричність епюр при дозвукових швидкостях. Симетричність епюр при дозвукових швидкостях має і математичну, і фізичну природу. Вона не є універсальною фізичною властивістю, а виникає за певних ідеалізацій.

Симетричність епюр напружень і переміщень, що спостерігається при дозвукових швидкостях руху навантаження, є наслідком лінійності задачі, відсутності дисипативних механізмів та розгляду усталеного режиму в рухомій системі координат.

Формальна симетрія хвильового поля при дозвукових швидкостях має також умовний фізичний характер і зумовлена ідеалізаціями математичної моделі. Врахування дисипації, нестационарності або контактної нелінійності призводить до асиметрії хвильових фронтів перед навантаженням і за ним.

7. Асиметрія в транс- і надзвукових режимах. Для трансзвукових і надзвукових швидкостей епюри напружень і швидкостей переміщень стають асиметричними відносно точки прикладення навантаження. Формування асиметричного хвильового поля обумовлене появою конусів Маха та різною швидкістю затухання прямих і зворотних хвиль. Фізично це пов'язано з порушенням причинно-наслідкової симетрії: хвилі не встигають поширюватися вперед, що призводить до формування переважного збудження в області позаду рухомого навантаження.

8. Поведінка прямих і зворотних хвиль. При надзвукових швидкостях пряма хвиля загасає значно швидше, ніж зворотна, однак не зникає повністю. Наявність поверхневого шару створює додаткові хвильові канали, зокрема квазіповерхневі моди, які підтримують існування випереджальних збурень навіть у надзвуковому режимі. Це підтверджує важливу роль захисного покриття у формуванні хвильового поля при високих швидкостях руху навантаження.

9. Вплив жорсткості поверхневого шару. Зі збільшенням жорсткості поверхневого шару зменшуються амплітуди напружень і швидкостей переміщень у півпросторі. Це пояснюється ефектом екранування: жорсткий шар перерозподіляє енергію навантаження в площині контакту та зменшує глибину проникнення динамічних збурень. Частина енергії зосереджується в самому шарі.

10. Роль умов контакту. При нежорсткому контакті (відсутність дотичних напружень) напруження і швидкості переміщень у півпросторі є більшими, ніж при жорсткому контакті. Це зумовлено зменшенням енерговідведення через зсувні деформації та більшою концентрацією нормальних напружень у зоні контакту. Аналогічно при жорсткому контакті вплив як швидкості навантаження, так і початкових напружень є менш вираженим, ніж у випадку нежорсткого контакту, оскільки жорстке зчеплення забезпечує більш рівномірний розподіл хвильової енергії між шаром і півпростором.

11. Демпфувальний ефект жорсткого контакту. Жорсткий контакт зменшує чутливість системи до швидкості руху навантаження та початкових напружень. Встановлено, що при жорсткому контакті вплив як швидкості навантаження, так і початкових напружень є менш вираженим, ніж у випадку нежорсткого контакту, оскільки жорстке зчеплення забезпечує більш рівномірний розподіл хвильової енергії між шаром і півпростором.

Таким чином, отримані результати узгоджуються з фізичними уявленнями про хвильові процеси в попередньо напружених шаруватих середовищах і дозволяють дати ґрунтовну інтерпретацію механізмів формування напружено-деформованого стану при дії рухомих навантажень у широкому діапазоні швидкостей.

8.2.4. Зауваження щодо меж застосування розглянутих моделей

Отримані результати справедливі в межах лінеаризованої теорії пружності для ізотропних гіперпружних тіл із однорідними початковими напруженнями за умови малих додаткових деформацій. У моделі не враховуються нелінійні ефекти, пов'язані з великими деформаціями, пластичністю, руйнуванням матеріалу, в'язкістю, а також можливі локальні порушення контакту між захисним шаром і півпростором. Розглядається усталений режим руху навантаження з постійною швидкістю, що обмежує застосування результатів до задач із різко змінними або імпульсними навантаженнями. Вплив неоднорідності матеріалів, анізотропії та скінченних розмірів конструкцій також не враховується. Тому отримані закономірності слід інтерпретувати як фізично

обґрунтовані в межах прийнятих припущень та використовувати з урахуванням зазначених обмежень при інженерному аналізі.

8.3. Шаруватий півпростір з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження (2D модель)

Даний розділ присвячено аналізу фундаментальних двовимірних (плоских) моделей динамічної взаємодії рухомого навантаження з шаруватим попередньо напруженим середовищем. Плоска постановка задачі дозволяє отримати точні аналітичні або напіваналітичні розв'язки, які є не тільки цінними самі по собі для класу задач зі збереженням геометрії в одному напрямку (наприклад, довгі балки, стрічкові фундаменти, дорожні покриття), але й слугують важливим інструментом для верифікації загальних чисельних методів та глибшого розуміння фізики явищ без накладення складності повного тривимірного аналізу.

Послідовність підрозділів відображає поступове ускладнення структури основи та умов її взаємодії з підстилаючим середовищем:

- 8.3.1. Пружна смуга на жорсткій основі – найпростіша модель, що дозволяє ізолювати вплив початкових напружень та обмеженої товщини верхнього шару на динамічну відповідь.

- 8.3.2. Пружна смуга на пружній основі – узагальнення моделі з урахуванням пружного опору нижнього півпростору, що відповідає більш реалістичній ситуації.

- 8.3.3. Двошарове покриття на жорсткій основі – модель, що враховує структуру самого верхнього покриття (наприклад, асфальтобетон на цементобетонній основі), покладеного на нерухому основу.

- 8.3.4. Двошарове покриття на пружній основі – найзагальніша з розглянутих двовимірних моделей, яка інтегрує в собі ефекти шаруватості покриття, пружності основи та початкових напружень.

Для розв'язку задач застосовується регуляційно-спектральний метод із структурною регуляризацією (розділ 4).

Метою досліджень є отримання фундаментальних розв'язків цих задач, аналіз впливу початкових напружень та швидкості руху навантаження на

динамічні характеристики системи та визначення особливостей хвильових полів у двовимірному випадку.

8.3.1. Смуга на жорсткій основі

Чисельні дослідження проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій для матеріалу з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (8.11) і пружним потенціалом гармонічного типу (8.1).

На рис. 8.19 і 8.20 показаний розподіл узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} у смузі при $y_2 = -h/(2\lambda_2)$ для різних матеріалів пружної смуги.

На рис. 8.21 показаний розподіл узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} у смузі на глибині $y_2 = -h/(2\lambda_2)$ при різних умовах контакту смуги та жорсткої основи (a – нежорсткий контакт, b – жорсткий контакт).

Швидкість поверхневого навантаження – дозвукова $v^2/c_0^2 = 0.1, c_0^2 = \mu / \rho$. Решта параметрів мають значення: $P/\eta = 0.5; \nu = 0.25; \alpha = \pi/2$.

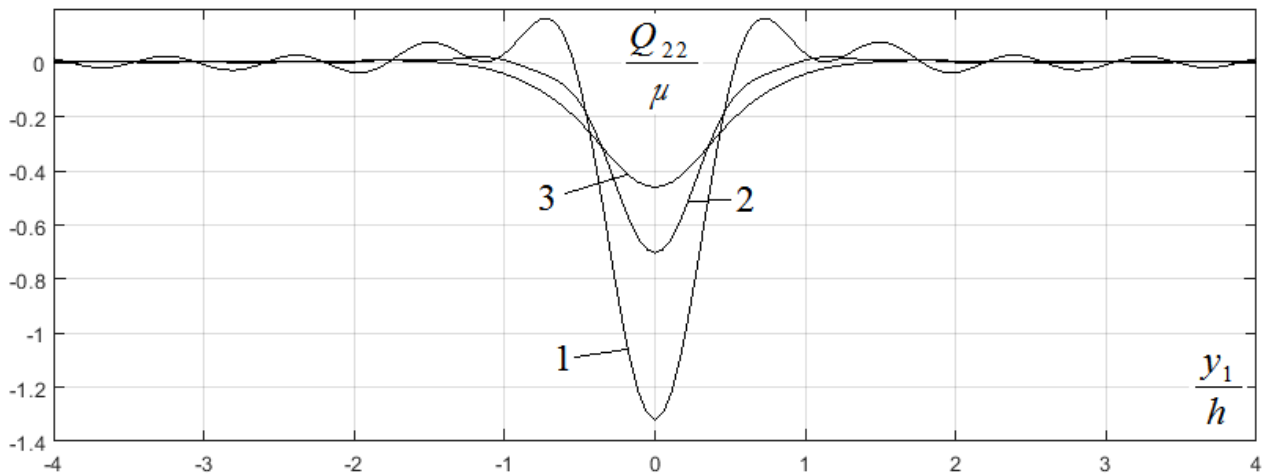


Рис. 8.19. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} у смузі при $y_2 = -h/(2\lambda_2)$.

Потенціал Бартенєва-Хазановича

Тут і на рисунках P – зовнішнє навантаження, α – кут нахилу навантаження, η – модуль зсуву, ρ – щільність матеріалу в природному стані, ν – коефіцієнт

Пуасона, λ_1 – видовження. Криві 1, 2, 3 на рис. 8.19 і 8.20 відповідають значенням $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1.1$.

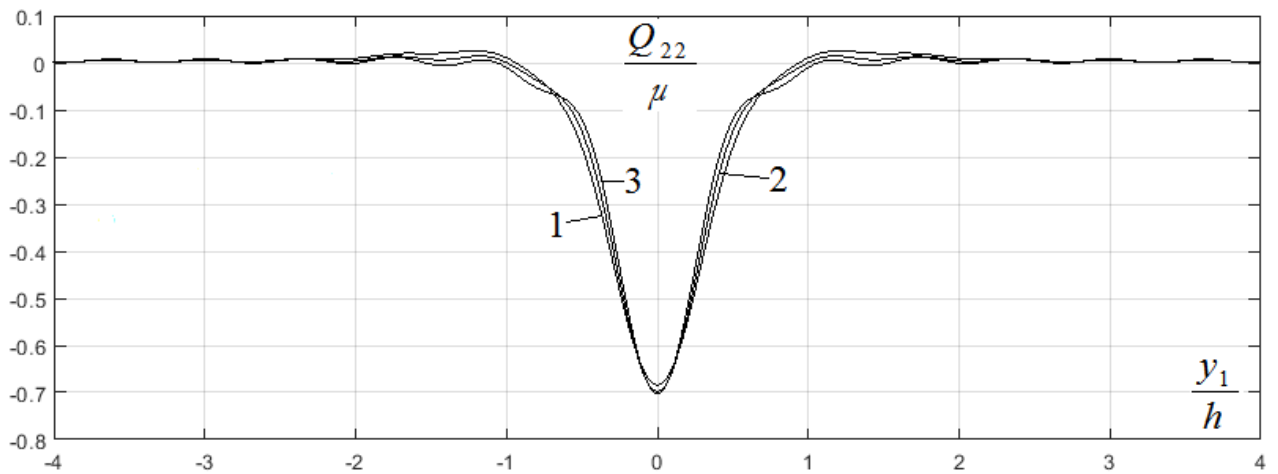


Рис. 8.20. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} у смузі при $y_2 = -h/(2\lambda_2)$. Гармонічний потенціал

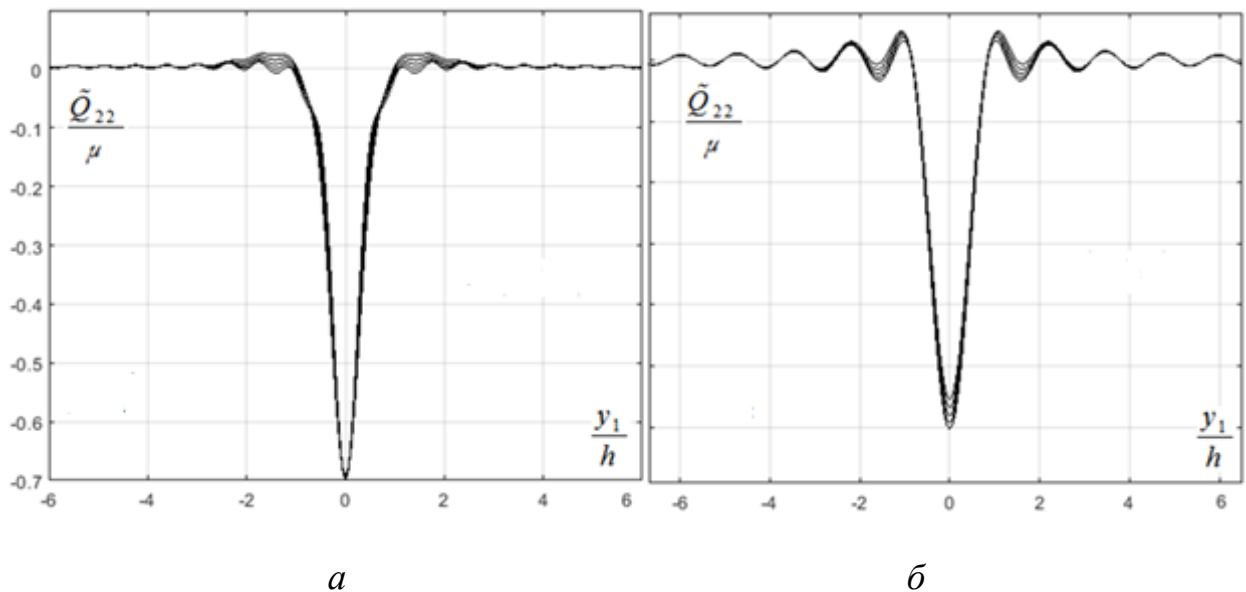


Рис. 8.21. Узагальнені напруження в смузі \tilde{Q}_{22} при $y_2 = -h/2\lambda_2$,
 а – нежорсткий контакт, б – жорсткий контакт. Гармонічний потенціал

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан смуги, визначаються координатами точки, що досліджується, початковими напруженнями, швидкістю навантаження, умовами контакту смуги та основи та механічними параметрами шаруватого середовища.

Пружна смуга на жорсткій основі є базовою еталонною моделлю, яка демонструє чисту динамічну поведінку смуги без втрат енергії в основі. Отримані результати служать реперними значеннями для верифікації складніших моделей. Практично ця модель застосовна для розрахунку конструкцій, що спираються на масивні непорушні основи (наприклад, технологічні лінії на скельному ґрунті чи консольні конструкції).

8.3.2. Смуга на пружній основі

Чисельні дослідження проведені для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу (8.1). Контакт між смугою і півпростором вважається жорстким.

На рис. 8.22 і 8.23 показаний розподіл узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} у смузі при $y_2 = -h/(2\lambda_2)$ і у підстиляючому півпросторі на глибині $y_2 = -2h/\lambda_2^{(2)}$.

Швидкість поверхневого навантаження – дозвукова $v^2/c_0^2 = 0.1$, $c_0^2 = \mu / \rho$.

Решта параметрів мають значення: $P/\eta^{(2)} = \eta^{(2)}/\eta^{(1)} = \rho^{(2)}/\rho^{(1)} = 0.5$; $\nu^{(1)} = 0.25$; $\nu^{(2)} = 0.3$; $\lambda_1^{(1)} = 1$; $\alpha = \pi/2$.

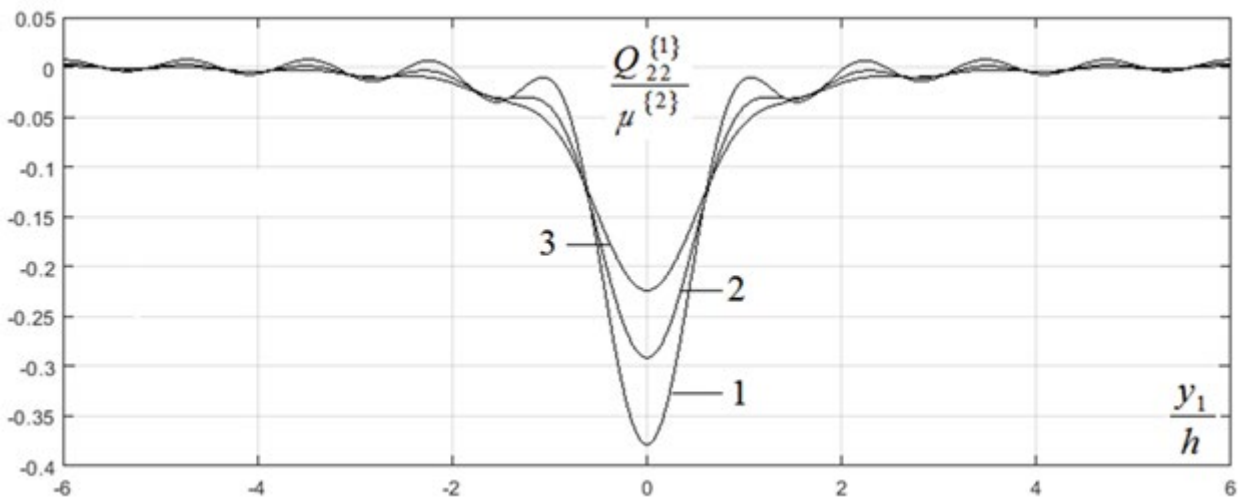


Рис. 8.22. Узагальнені напруження $\tilde{Q}_{22}^{(1)}$ у полосі при $y_2 = -h/(2\lambda_2^{(2)})$

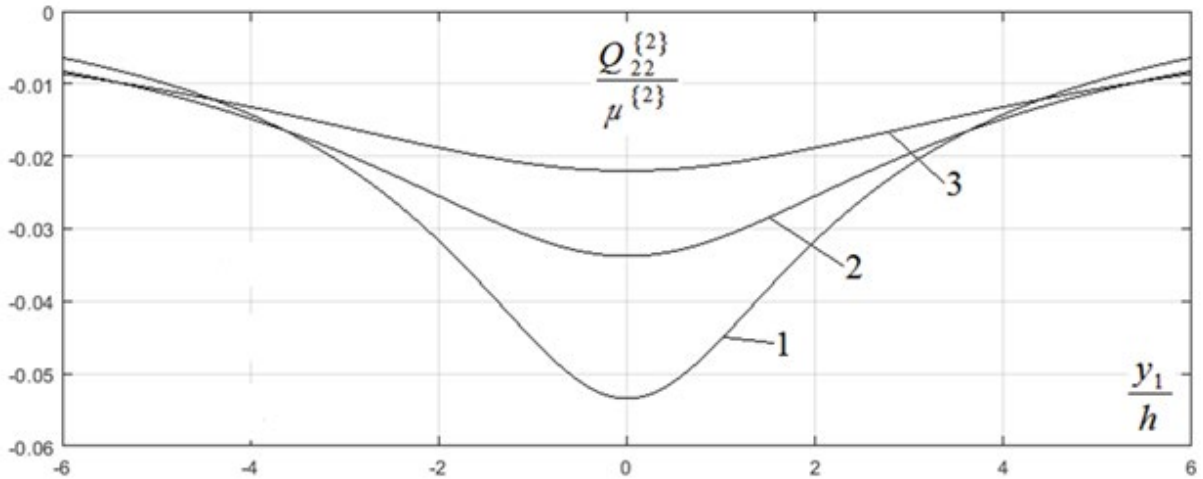


Рис. 8.23. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $y_2 = -2h/\lambda_2^{(2)}$

Криві 1, 2, 3 на рис. 8.22 і 8.23 відповідають значенням $\lambda_1^{(2)} = 0.9$, $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_1^{(2)} = 1.1$.

На рис. 8.24 показаний розподіл узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} у смузі і основі у випадку нежорсткого контакту між смугою і півпростором. Значення основних параметрів такі ж, як і при жорсткому контакті.

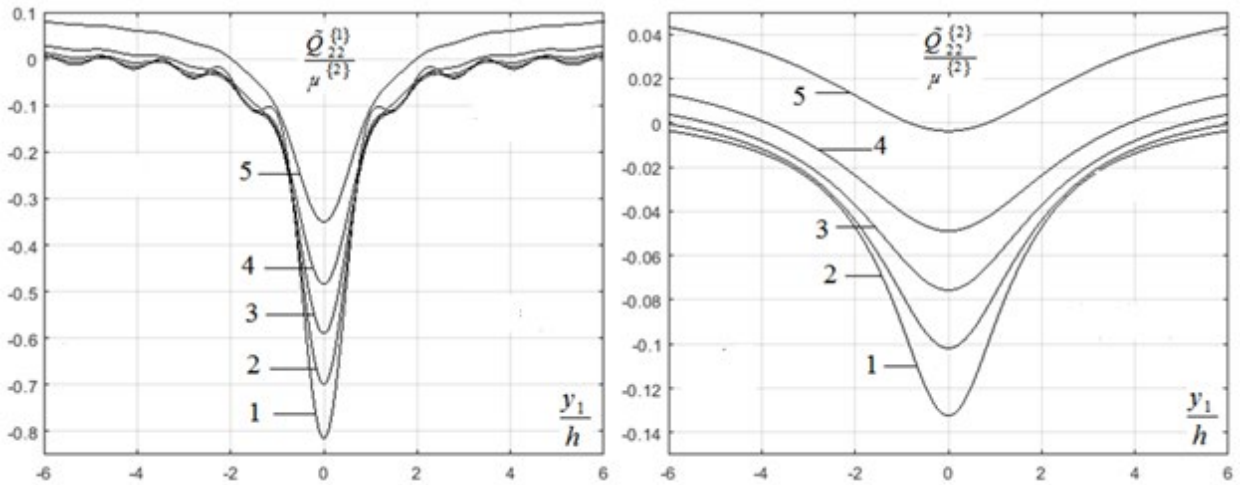


Рис. 8.24. Узагальнені напруження $\tilde{Q}_{22}^{(1)}$ у смузі при $y_2 = -h/2\lambda_2$ та узагальнені напруження $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ у півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$

Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 8.24 відповідають значенням початкового видовження $\lambda_1^{(2)} = 0,8$, $\lambda_1^{(2)} = 0,9$, $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_1^{(2)} = 1,1$ і $\lambda_1^{(2)} = 1,2$.

Пружна смуга на пружній основі демонструє принципово іншу поведінку через можливість розсіювання енергії в півпростір. Чисельні результати підтверджують значне зниження амплітуд параметрів НДС порівняно з першою моделлю. Ця модель адекватно описує реальні інженерні системи типу залізничних рейок, дорожніх плит або фундаментних балок на ґрунтовій основі.

8.3.3. Двошарове покриття на жорсткій основі

Розглядається двошарова попередньо напружена смуга. Граничні поверхні плоскі і паралельні між собою. Початковий напружено-деформований стан смуги вважається однорідним. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні з постійною швидкістю.

Аналітичні результати свідчать, що напружено-деформований стан попередньо напруженої смуги залежить від механічних параметрів елементів шаруватого середовища, швидкості руху навантаження, початкових напружень, умов контакту і координат точок, що досліджуються.

Чисельні дослідження проведені для матеріалу з пружним гармонічним потенціалом.

Нижче наведені результати дослідження напружено-деформованого стану смуги при докритичних швидкостях поверхневого навантаження. Вважаємо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє.

На рис. 8.25 і 8.26 показаний розподіл узагальнених напружень \tilde{Q}_{22} в елементах стисливої двошарової смуги.

Товщина шарів – однакова ($h^{\{1\}} = h^{\{2\}} = h$). Контакт між елементами – жорсткий. Швидкість поверхневого навантаження – дозвукова $v^2/c_0^2 = 0.1$, $c_0^2 = \mu^{\{2\}} / \rho^{\{2\}}$. Решта параметрів мають значення: $P/\eta^{\{2\}} = 0.5$; $\alpha = \pi/2$; $\eta^{\{2\}}/\eta^{\{1\}} = 0.5$; $\rho^{\{2\}}/\rho^{\{1\}} = 0.5$; $\nu^{\{1\}} = 0.25$; $\nu^{\{2\}} = 0.3$; $\lambda_1^{\{1\}} = 1$.

Тут і на рисунках P – зовнішнє навантаження, α – кут нахилу навантаження, $\eta^{\{s\}}$ – модуль зсуву, $\rho^{\{s\}}$ – щільність матеріалу в природному стані, $\nu^{\{s\}}$ – коефіцієнт Пуасона, $\lambda_1^{\{s\}}$ – видовження.

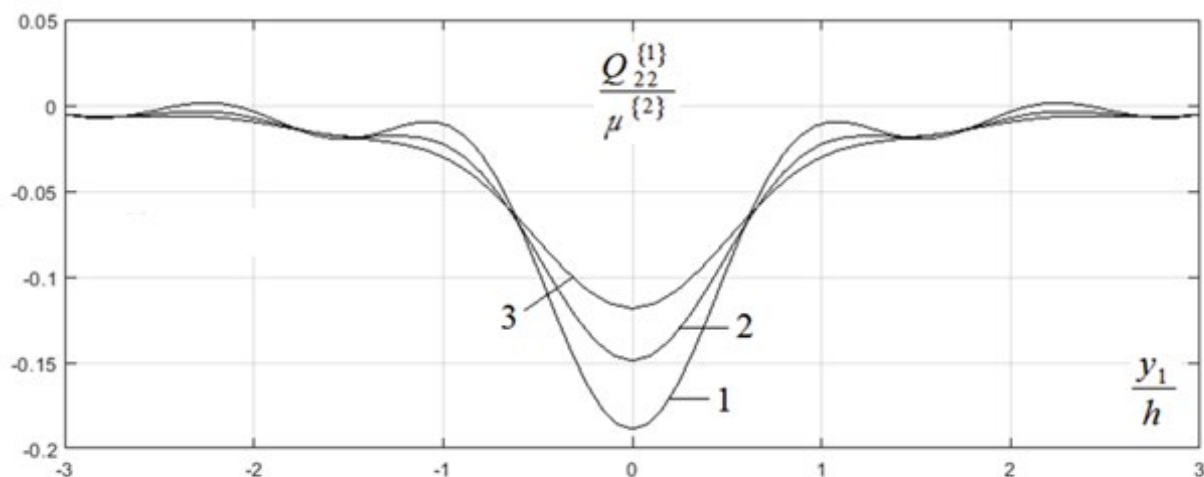


Рис. 8.25. Узагальнені напруження у 1-й полосі $\tilde{Q}_{22}^{(1)}$ при $y_2 = -h/(2\lambda_2^{(2)})$

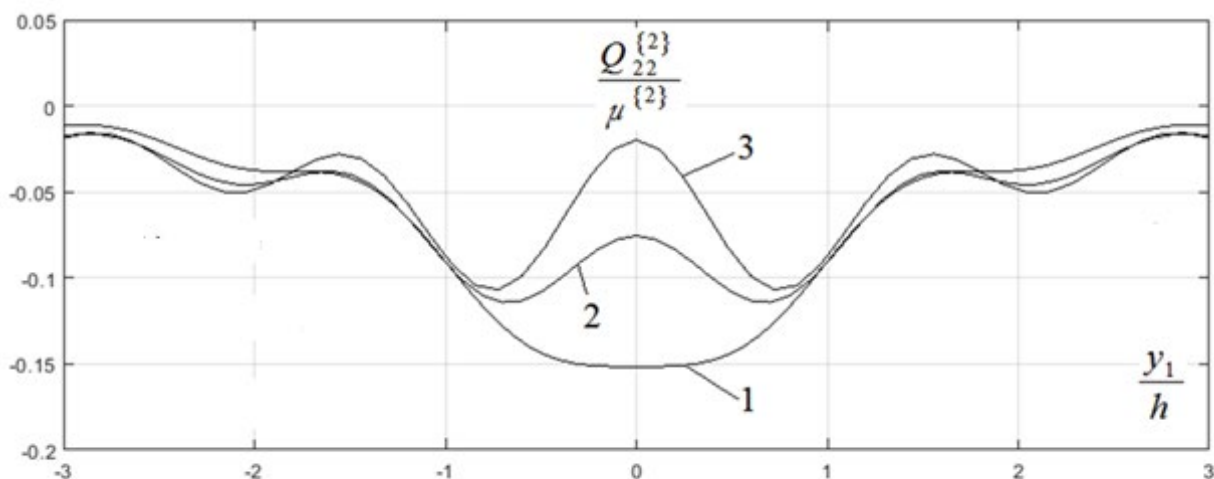


Рис. 8.26. Узагальнені напруження у 2-й полосі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $y_2 = -3h/(2\lambda_2^{(2)})$

Криві 1, 2, 3 на рис. 8.25 і 8.26 відповідають значенням $\lambda_1^{(2)} = 0.9$, $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_1^{(2)} = 1.1$.

Двошарове покриття на жорсткій основі дозволяє виявити ефекти взаємодії шарів з різними механічними властивостями. Аналіз показав, що наявність верхнього шару (наприклад, покриття) може значно змінювати характеристики системи та виконувати функцію динамічного демпфера. Модель корисна для проектування композитних плит, сендвіч-панелей або спеціальних покриттів, де нижній шар можна вважати практично нерухомим.

8.3.4. Двошарове покриття на пружній основі

На рис. 8.27, 8.28 і 8.29 показані узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} в елементах тришарового півпростору (дві смуги однакової товщини лежать на пружному півпросторі). Матеріал для всіх елементів стисливий (гармонічний потенціал). Товщина шарів – однакова ($h^{\{1\}} = h^{\{2\}} = h$). Контакт між елементами шаруватого середовища жорсткий. Швидкість поверхневого навантаження – дозвукова $v^2/c_0^2 = 0.1$, $c_0^2 = \mu^{\{3\}} / \rho^{\{3\}}$.

Криві 1, 2, 3 на рис. 8.27–8.29 відповідають значенням $\lambda_1^{\{3\}} = 0.9$, $\lambda_1^{\{3\}} = 1$, $\lambda_1^{\{3\}} = 1.1$. Решта параметрів мають значення: $P/\eta^{\{3\}} = 0.5$; $\eta^{\{3\}}/\eta^{\{1\}} = 0.6$; $\rho^{\{3\}}/\rho^{\{1\}} = 0.8$; $\eta^{\{3\}}/\eta^{\{2\}} = 0.4$; $\rho^{\{3\}}/\rho^{\{2\}} = 0.5$; $\nu^{\{1\}} = 0.25$; $\nu^{\{2\}} = 0.27$; $\nu^{\{2\}} = 0.3$; $\lambda_1^{\{1\}} = \lambda_2^{\{1\}} = 1$; $\lambda_1^{\{2\}} = \lambda_2^{\{2\}} = 1$; $\alpha = \pi/2$.

Тут застосовуються такі ж позначення, що і в підрозділі 8.3.3.

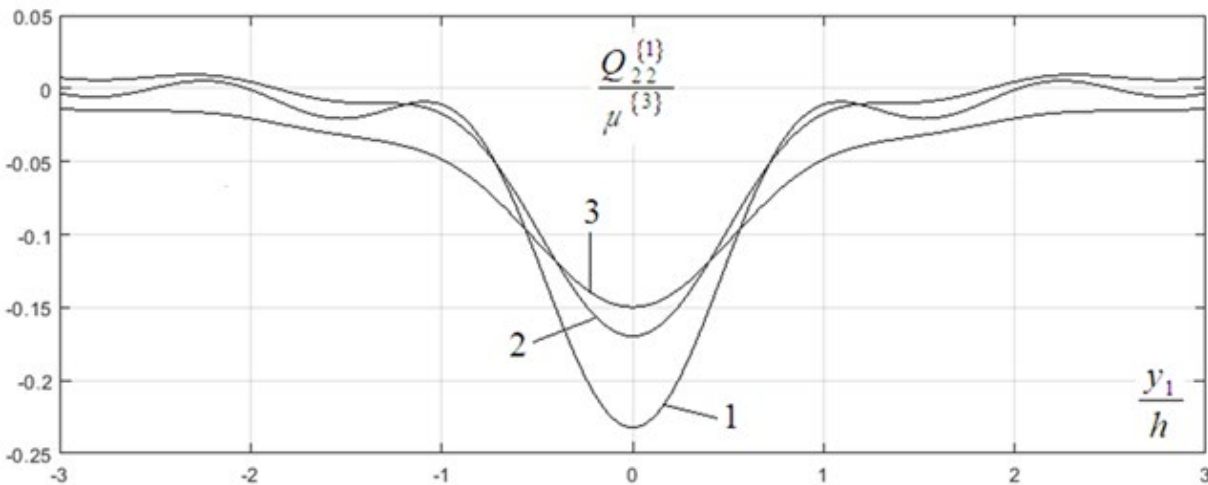


Рис. 8.27. Узагальнені напруження у 1-й смузі $\tilde{Q}_{22}^{\{1\}}$ при $y_2 = -h/(2\lambda_2^{\{3\}})$

Двошарове покриття на пружній основі є повною і реалістичною моделлю для широкого кола практичних застосувань. Проведене чисельне моделювання підтвердило адекватність запропонованої моделі та дало змогу виявити низку важливих закономірностей. Результати свідчать про складну інтерференцію хвиль, що генеруються в кожному шарі та основі. Особливо виразно

проявляється ефект фільтрації: верхній шар послаблює високочастотні коливання, водночас передаючи низькочастотні компоненти в глиб основи.

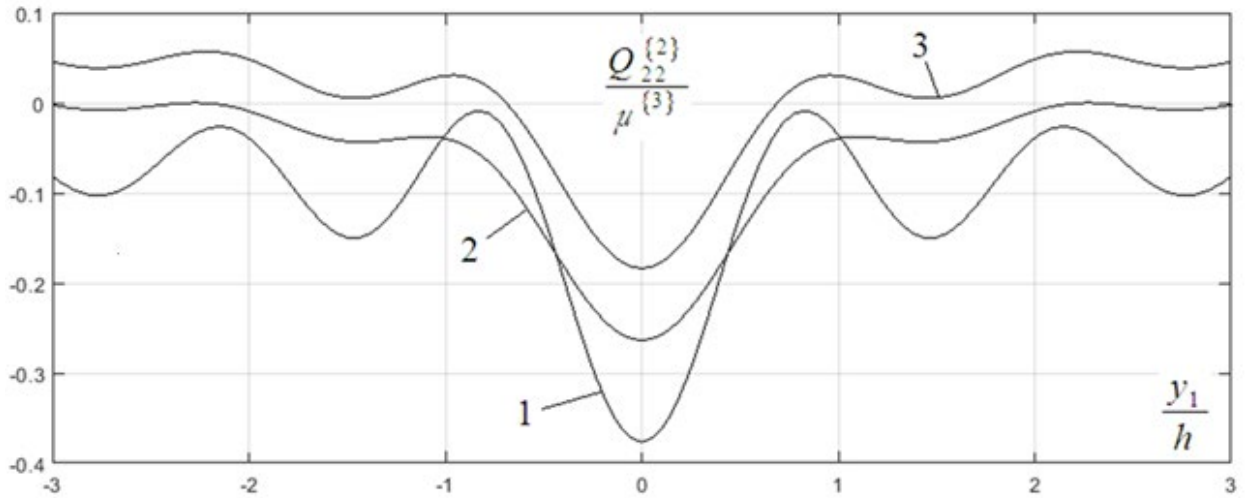


Рис. 8.28. Узагальнені напруження у 2-й смузі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $y_2 = -3h/(2\lambda_2^{(3)})$

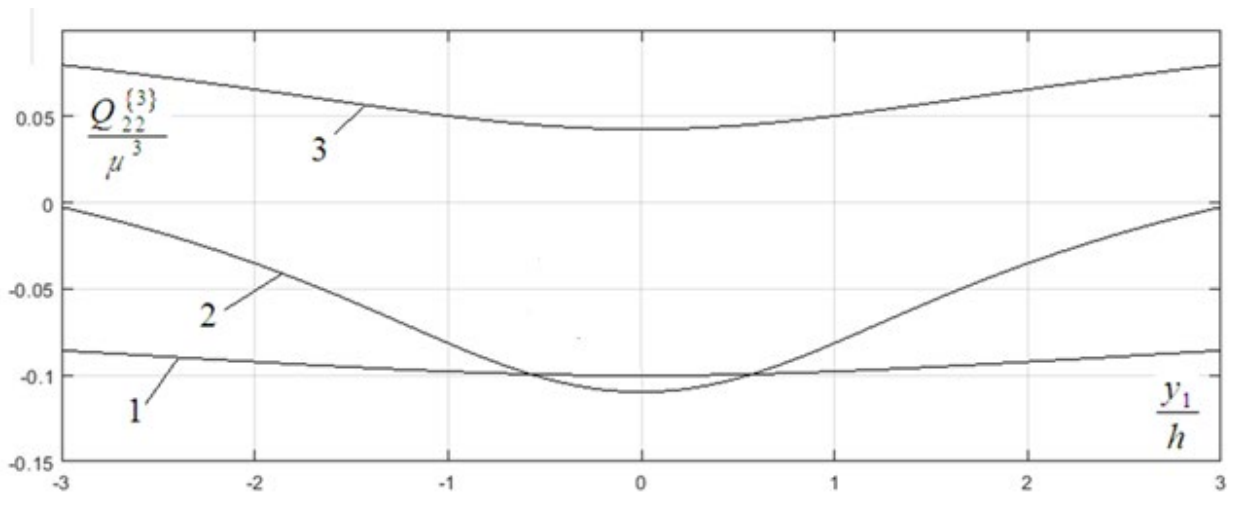


Рис. 8.29. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(3)}$ при $y_2 = -3h/\lambda_2^{(3)}$

Отримані дані демонструють суттєвий вплив взаємодії між смугами на розподіл контактних тисків і динамічний відгук системи загалом. Взаємний вплив призводить до перерозподілу навантаження та формування локальних зон підвищених напружень у півпросторі. Це створює підґрунтя для оптимізації параметрів шаруватих систем з метою підвищення їх несучої здатності та динамічної стійкості.

Таким чином, розроблена модель двох взаємодіючих пружних смуг на пружному півпросторі може ефективно застосовуватися для розрахунку сучасних транспортних покриттів, злітно-посадкових смуг аеродромів, багат шарових фундаментів та інших відповідальних конструкцій.

Загальний висновок: Послідовне ускладнення моделей від 8.3.1 до 8.3.4 дозволяє поетапно враховувати всі ключові фактори впливу: від внутрішньої динаміки конструктивного елемента до повномасштабної взаємодії шаруватої системи з пружним середовищем. Отримані результати створюють наукову основу для обґрунтованого вибору розрахункової схеми при проектуванні конкретних інженерних об'єктів з урахуванням їх конструктивних особливостей та умов експлуатації.

8.4. Шаруватий півпростір з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження (3D модель)

Підрозділ присвячено вивченню динамічної відповіді шаруватого попередньо напруженого пружного півпростору на дію рухомого поверхневого навантаження у повній тривимірній просторовій (3D) постановці. Це є узагальненням класичних моделей на випадок, коли необхідно одночасно враховувати шарувату будову середовища, наявність початкових напружень та просторовий характер навантаження. Такі задачі виникають при аналізі відгуку дорожніх покриттів, залізничних основ, аеродромних покриттів та інженерних споруд, що взаємодіють зі складними ґрунтовими масивами під дією рухомих джерел збудження (транспортних засобів, поїздів, літаків).

Основна увага зосереджена на двох ключових граничних моделях, що відповідають різним умовам сприйняття навантаження нижніми шарами основи:

- 8.4.1. Шар на жорсткій основі – модель, яка ідеалізує ситуацію, коли підстилаючий масив є значно жорсткішим за верхній шар (наприклад, бетонна плита на скельному ґрунті). Тут аналізується вплив попереднього напруження в обмеженому шарі на характер утворення та поширення хвиль.

- 8.4.2. Шар на пружній основі – більш загальна модель, що враховує пружний опір нижніх шарів, дозволяє моделювати реальну шарувату структуру основи та досліджувати явища відбиття і перевипромінювання хвиль на межах шарів з різними властивостями.

Метою досліджень є отримання фундаментальних розв'язків цих задач, аналіз впливу початкових напружень та швидкості руху навантаження на динамічні характеристики системи та визначення особливостей хвильових полів у тривимірному випадку.

Для розв'язку задач застосовується регуляційно-спектральний метод із структурною регуляризацією (розділ 4).

8.4.1. Шар на жорсткій основі

Для демонстрації підходу до розв'язування просторових задач розглянемо тривимірний стисливий шар із стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу (8.1), що лежить на жорсткій основі. Контакт між шаром і основою вважаємо абсолютно жорстким (3.27) і (3.28). Розглянемо симетричний початковий напружений стан у вигляді (3.4).

Вважаємо, що поверхневе навантаження відсутнє ($S_0^{33} = 0$). Вирази для складових тензора $\tilde{\omega}$ для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанту теорії малих початкових деформацій мають вигляд (8.5).

Для представлених нижче графіків $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $v^2/c_0^2 = 0.1$; $P/\eta = 0.5$; $\nu = 0.25$; $\varphi = 0$. Тут $c_0^2 = \mu/\rho$; c_0 – швидкість поперечних хвиль у шарі без початкових напружень. При таких заданих параметрах всі характеристичні корені різні.

На рис. 8.30 показаний розподіл узагальненого напруження \tilde{Q}_{33} при $y_3 = -h/(2\lambda_3)$, а на рис. 8.31 – при $y_3 = -h/(2\lambda_3)$ і $y_2 = 0$.

На рис. 8.31 аналізуються точки шару, які збігаються в природному стані. Криві 1, 2 і 3 на рис. 8.31 відповідають значенням початкового видовження $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_2 = 1$ і $\lambda_3 = 1,1$.

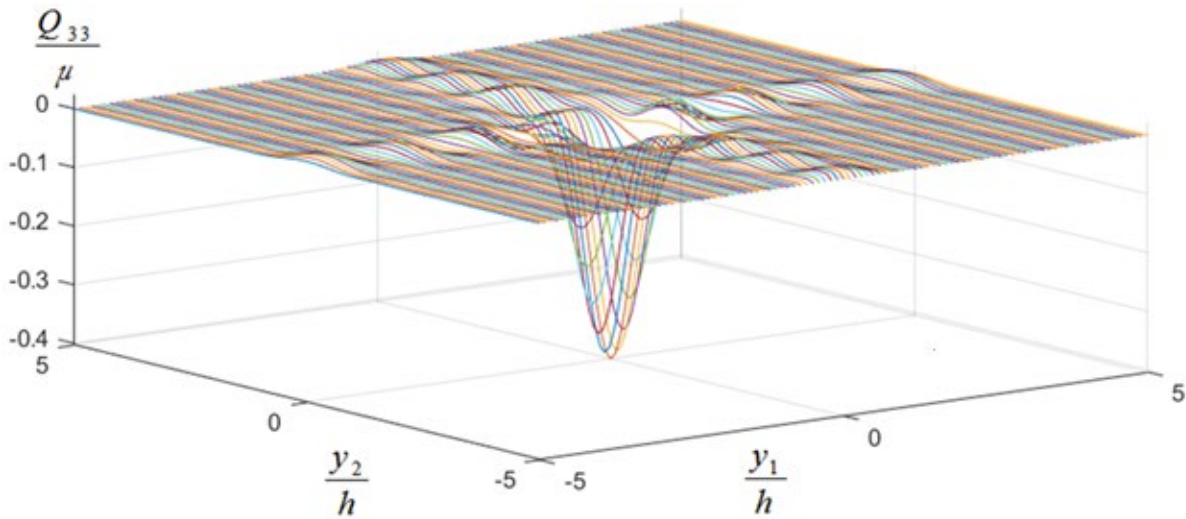


Рис. 8.30. Узагальнені напруження у шарі \tilde{Q}_{33} при $y_3 = -h/(2\lambda_3)$

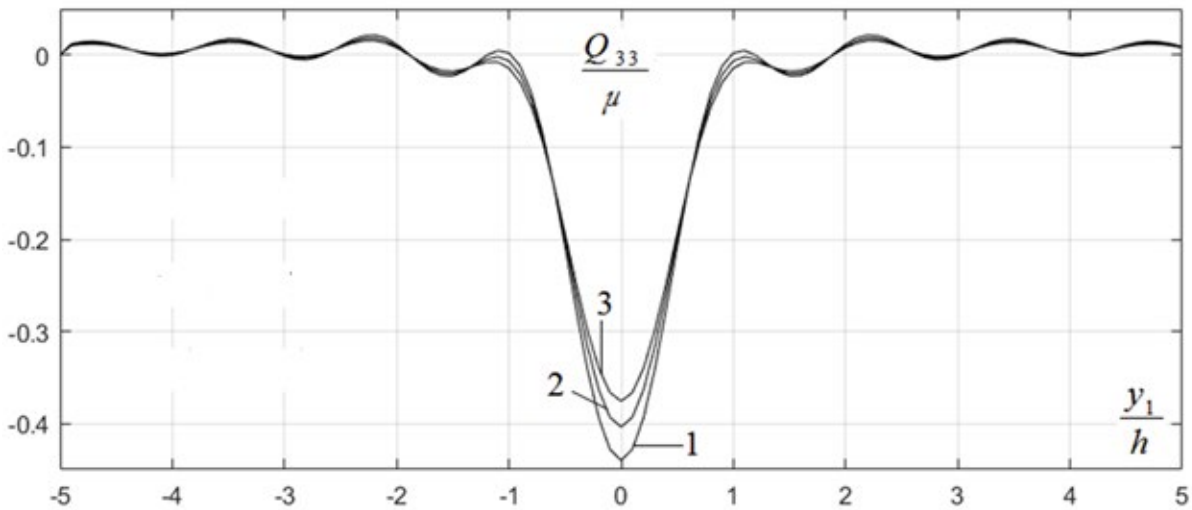


Рис. 8.31. Узагальнені напруження у шарі \tilde{Q}_{33} при $y_3 = -h/(2\lambda_3)$, $y_2 = 0$

Початкові (залишкові) напруження впливають на значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан шару.

Найбільше початкові напруження впливають на напружено-деформований стан основи в зоні прикладення поверхневого навантаження.

Для дозвукових швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладення навантаження.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан в конкретній точці багат шарового середовища, залежить від координат точки,

що досліджується, від траєкторії та швидкості руху поверхневого навантаження, механічних параметрів елементів шаруватого середовища та умов їх контакту.

Існують інваріантні області шару, в яких значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан мало залежать від початкових деформацій.

Модель "шар на абсолютно жорсткій основі" надає фундаментальні рішення для розрахунку конструкцій, де можливість деформування основи вкрай мала, – наприклад, бетонних плит на скельному масиві, промислових підлог або спеціальних облицювань на масивних опорах. Чисельний аналіз виявляє чіткі резонансні частоти та підсилення коливань у шарі через відсутність енерговідведення, що дозволяє точно визначати небезпечні режими навантаження та обґрунтовувати конструктивні заходи для їх усунення, такі як зміна товщини шару або використання демпфуючих матеріалів.

8.4.2. Шар на пружній основі

На рис. 8.32 і 8.33 показані узагальнені напруження \tilde{Q}_{22} в елементах двошарового півпростору (пружний шар лежить на пружному півпросторі – модель 3D). Матеріал для всіх елементів стисливий (гармонічний потенціал), контакт між елементами шаруватого середовища нежорсткий. Основні розрахункові параметри: $P/\eta^{\{2\}} = 0.5$; $h^{\{1\}} = h$; $v^2/c_0^2 = 0.1$; $v^{\{1\}} = 0.3$; $v^{\{2\}} = 0.25$; $\eta^{\{2\}}/\eta^{\{1\}} = 0.5$; $\rho^{\{2\}}/\rho^{\{1\}} = 0.5$; $\lambda_1^{\{1\}} = \lambda_2^{\{1\}} = \lambda_3^{\{1\}} = 1$; $\lambda_1^{\{2\}} = \lambda_2^{\{2\}} = \lambda_3^{\{2\}} = 1$; $\alpha = \pi/2$.

Отримані розв'язки для просторової моделі "пружний шар на пружному півпросторі" демонструють принципову зміну хвильової картини порівняно з моделлю «пружний півпростір»: шар виконує роль хвилеводу, значно модифікуючи амплітудно-частотну характеристику системи.

Чисельні результати чітко показують, як товщина та жорсткість верхнього шару визначають критичну швидкість навантаження та ефективно фільтрують високочастотні коливання, перенаправляючи енергію в нижній півпростір, що має ключове значення для розрахунків з довговічності та вібраційного захисту.

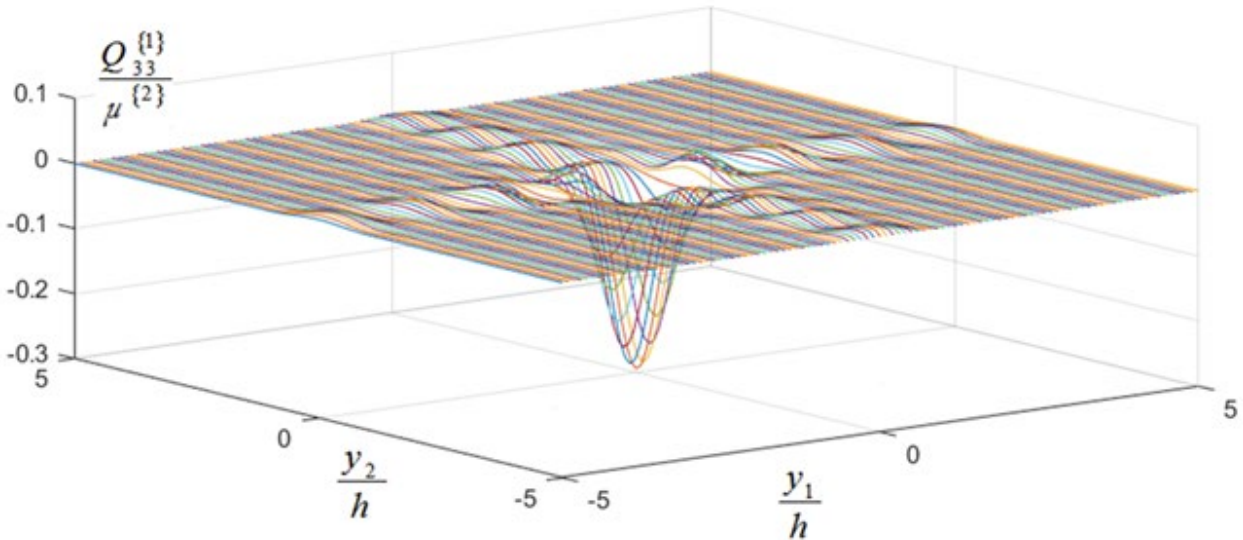


Рис. 8.32. Узагальнені напруження у шарі $\tilde{Q}_{33}^{(1)}$ при $y_3 = -h/(2\lambda_3^{(2)})$

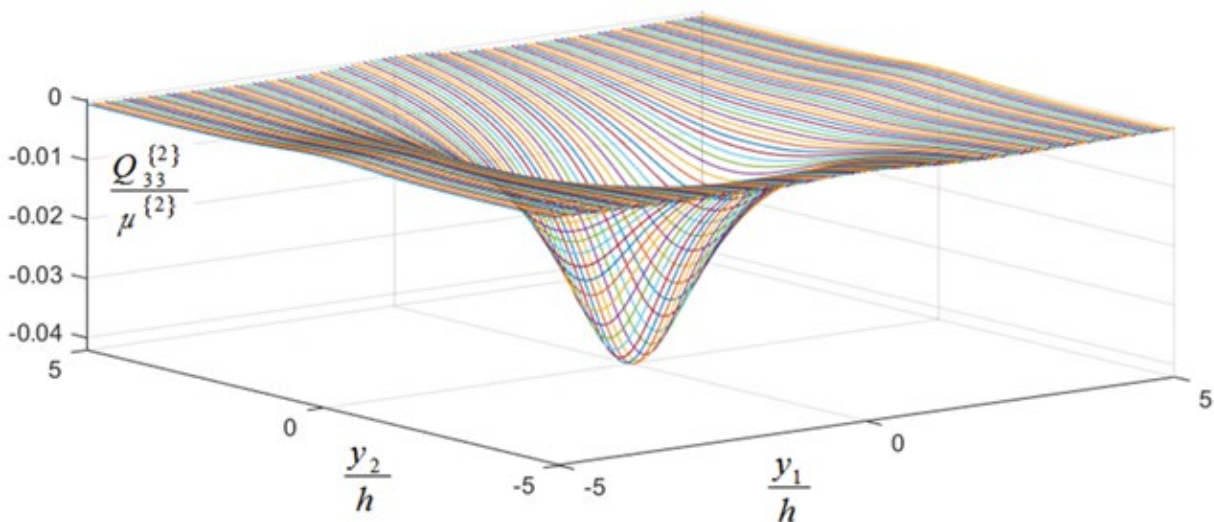


Рис. 8.33. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{33}^{(2)}$ при $y_3 = -2h/\lambda_3^{(2)}$

Чисельні результати підтверджують ефективність запропонованого методу для аналізу шаруватих структур, де необхідно враховувати як локальну жорсткість верхнього шару, так і можливість розсіювання енергії в глибокому підстилаючому середовищі.

Просторова модель "шар на пружному півпросторі" є адекватним інструментом для прогнозування динамічного відгуку реальних шаруватих систем, таких як асфальтобетонне покриття на ґрунтовому земляному полоті або фундаментна плита на природній основі.

Загальний висновок: Моделі 8.4.1 і 8.4.2 утворюють концептуальні межі для оцінки динамічної поведінки шаруватих систем: перша описує конструкції з концентрацією енергії в обмеженому об'ємі, а друга – конструкції з максимальним розсіюванням енергії. Порівняльний аналіз їх результатів дає інженерові зрозумілий інструмент для оцінки впливу жорсткості основи на динамічну відповідь всієї конструкції.

8.5. Порівняльний аналіз розв'язків для різних моделей шаруватого півпростору

Метою даного розділу є порівняльний аналіз результатів, отриманих для різних математичних моделей динаміки шаруватих пружних систем. Такий аналіз є критично важливим для оцінки меж застосовності спрощених (наближених) моделей, виявлення фізично суттєвих особливостей різних постановок та формулювання практичних рекомендацій щодо вибору моделі для конкретних інженерних задач.

Розділ структурований за принципом зростання складності та повноти моделей:

- 8.5.1. Порівняння наближених моделей зосереджене на оцінці розбіжностей між класичними інженерними підходами – моделлю дискретних мас та моделлю безперервної пластини на пружній основі. Це дозволяє чітко визначити, в яких випадках врахування безперервності та жорсткості верхнього шару є принциповим.

- 8.5.2. Порівняння для плоских задач розширює аналіз, протиставляючи розв'язки для різних двовимірних постановок, зокрема включаючи модель пружної смуги. Це дає змогу оцінити вплив кінцевої ширини конструкції на її динамічну відповідь.

- 8.5.3. Порівняння точних 2D та 3D розв'язків є кульмінацією аналізу. Воно дозволяє кількісно оцінити похибки, що виникають при зведенні реальної просторової задачі до плоского наближення, та виявити принципово тривимірні ефекти, які не можуть бути описані в рамках двовимірних моделей.

- 8.5.4. Оцінка достовірності та інженерної застосовності наближених моделей двошарової основи. Тут узагальнюються результати порівнянь і формулюються межі точності, прийнятні для практичних розрахунків.

- 8.5.5. Моделі багат шарового півпростору та межі їх застосування у динамічних задачах (огляд літератури та інженерні критерії). Особливий акцент зроблено на виборі спрощень, що забезпечують оптимальний баланс між обчислювальною ефективністю та фізичною адекватністю моделі.

Результати цього розділу забезпечують наукове обґрунтування для вибору адекватної складності моделі при вирішенні прикладних задач у транспортному будівництві, геотехніці та машинобудуванні.

8.5.1. Порівняння розв'язків для наближених моделей шаруватого півпростору

Розглядаються дві моделі двошарового півпростору: модель 1 – зосереджені маси на пружному півпросторі з початковими напруженнями, модель 2 – пружна пластина Тимошенко на пружному півпросторі з початковими напруженнями. Матеріал півпростору – стисливий з пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (8.11). Початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє. Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження.

Для епюр зображених на рис. 8.34–8.37 розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів: модель 1 (зосереджені маси) (рис. 8.34, 8.36) $\delta_1 = 1$ (жорсткий контакт); $e/e_1 = 0,25$; $\alpha = \pi/2$; модель 2 (пластини) (рис. 8.35, 8.37) $\delta_1 = 1$; $\delta_0 = 1$ (врахування інерції обертання); $e/e_1 = 0,5$; $\mu / G_1 = 0,5$; $\nu = 0,845$; $\alpha = \pi/2$.

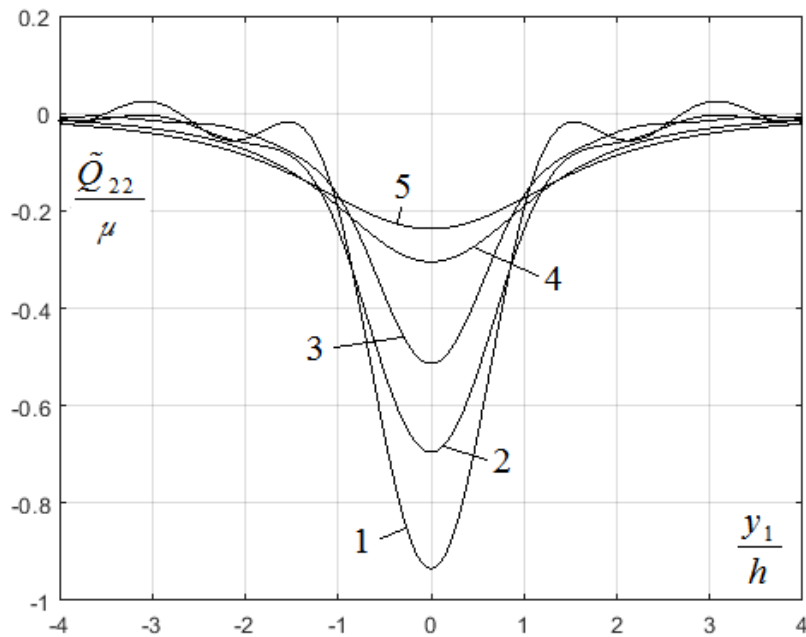


Рис. 8.34. Узагальнене напруження \tilde{Q}_{22} . Дозвукова швидкість.

Модель 1 (зосереджені маси)

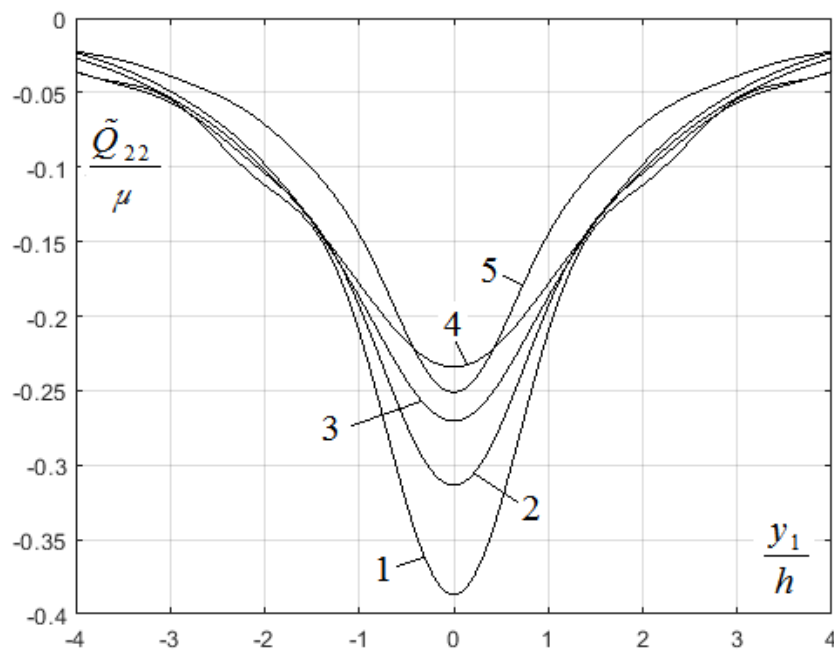


Рис. 8.35. Узагальнене напруження \tilde{Q}_{22} . Дозвукова швидкість.

Модель 2 (пластина)

Досліджувались швидкості навантаження в діапазонах $v < c_1$ і $v > c_1$. Тут c_1 - швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями. У випадку, коли $v < c_1$ розглядалися тільки докритичні швидкості навантаження [67, 68].

На рис. 8.34 і 8.35 показаний розподіл узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$. Тут $c_0^2 = \mu/\rho$.

Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 8.34–8.37 відповідають значенням $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1,1$ і $\lambda_1 = 1,2$.

Зміна \tilde{Q}_{22} в півпросторі при $v > c_1$ у залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 8.36 і 8.37. Розрахунки в цьому випадку проводилися при $y_2 = -2h/\lambda_2$. Швидкість навантаження становила $v^2 = 2c_0^2$. Умовні позначення на рис. 8.36 і 8.37 такі ж, як і на рис. 8.34 і 8.35.

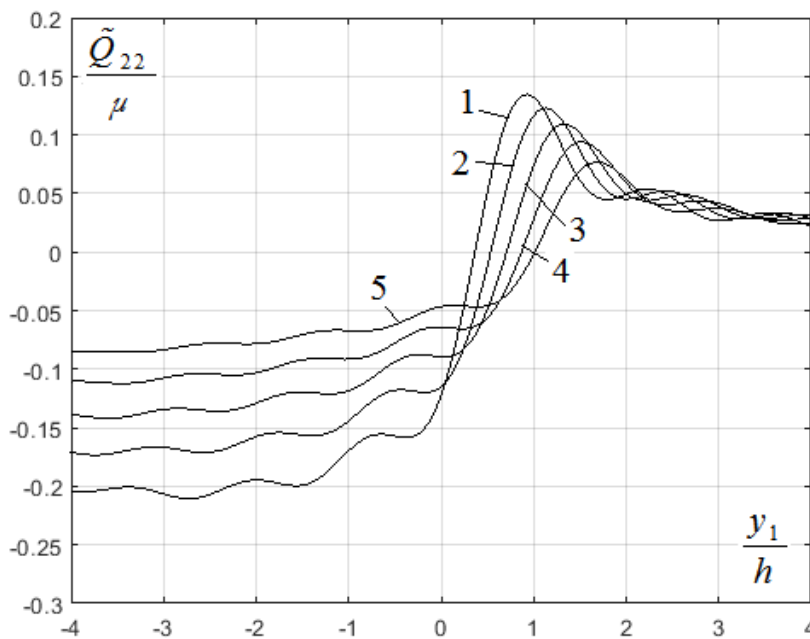


Рис. 8.36. Узагальнене напруження \tilde{Q}_{22} . Надзвукова швидкість.

Модель 1 (зосереджені маси)

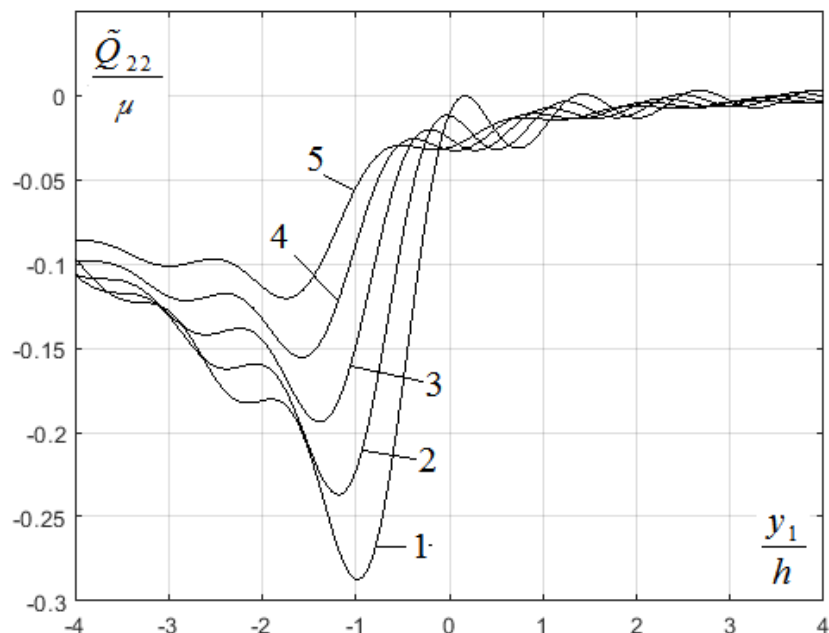


Рис. 8.37. Узагальнене напруження \tilde{Q}_{22} . Надзвукова швидкість.

Модель 2 (пластина)

При дозвукових швидкостях руху амплітуди параметрів, що досліджувались, значно більші для першої моделі півпростору (зосереджені маси). При надзвукових швидкостях така відмінність є не значною.

8.5.2. Порівняння розв'язків для плоских задач

Порівняння розв'язків двовимірних задач для різних моделей двошарового півпростору представлено на рис.8.38–8.40.

На рис. 8.38 порівнюються результати для стисливого матеріалу (гармонічний потенціал) і жорсткого контакту на глибині $y_2 = -2h/\lambda_2^{\{2\}}$ при швидкості навантаження $v^2 / c_0^2 = 0.1$ ($c_0^2 = \mu^{\{2\}} / \rho^{\{2\}}$), на рис. 8.39 – при швидкості навантаження $v^2 / c_0^2 = 0.3$, на рис. 8.40 – при швидкості навантаження $v^2 / c_0^2 = 0.4$. Порівнюються точки основи, які збігаються в ненапруженому стані. Криві 1, 2, 3 на рис. 8.38–8.40 відповідають значенням $\lambda_1^{\{2\}} = 0.9$, $\lambda_1^{\{2\}} = 1$, $\lambda_1^{\{2\}} = 1.1$.

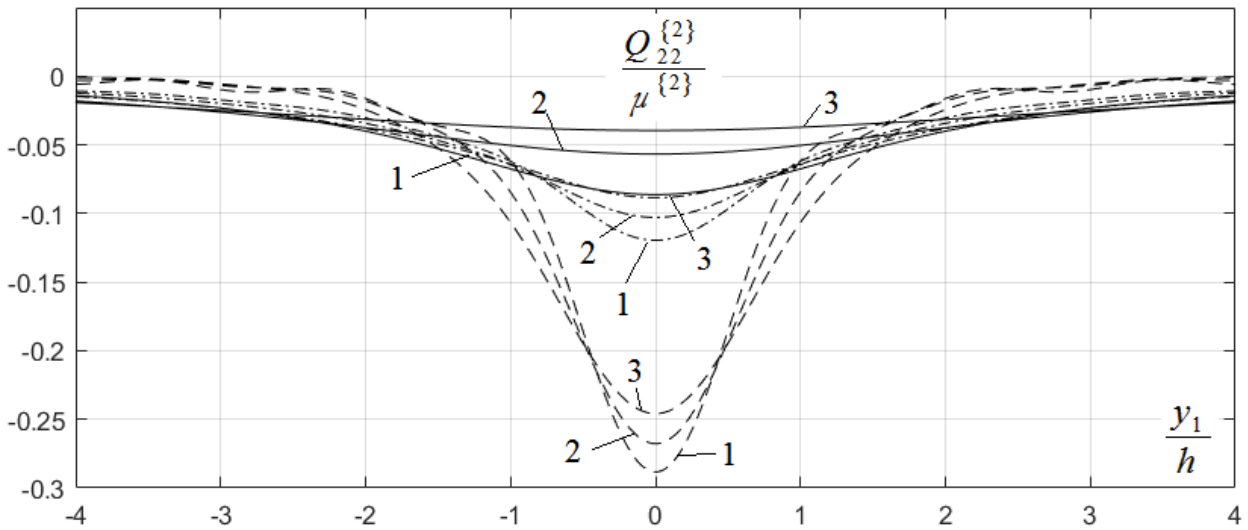


Рис. 8.38. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $v^2 / c_0^2 = 0.1$

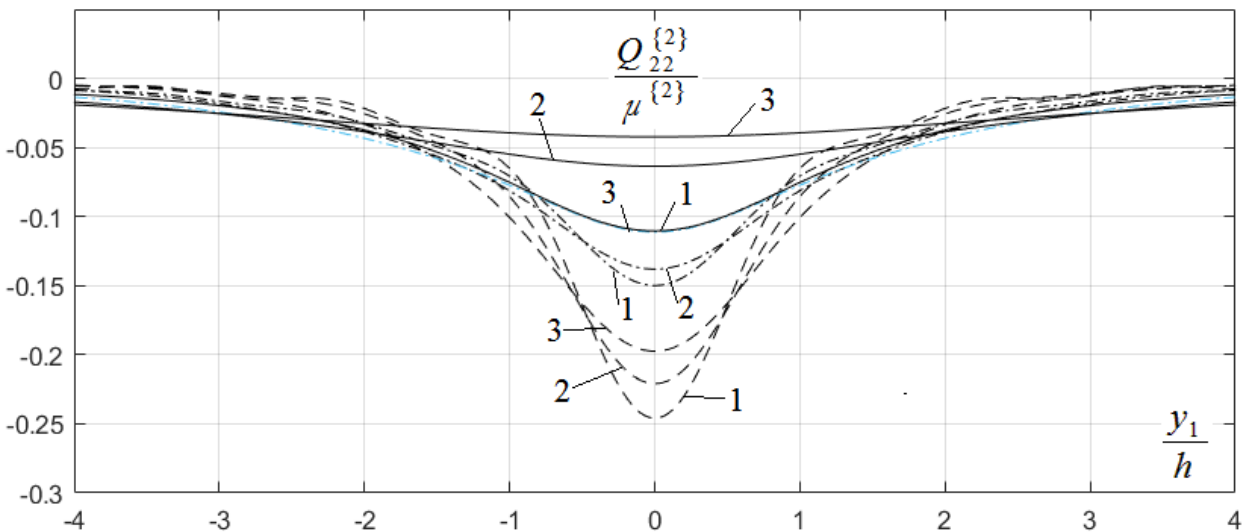


Рис. 8.39. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $v^2 / c_0^2 = 0.3$

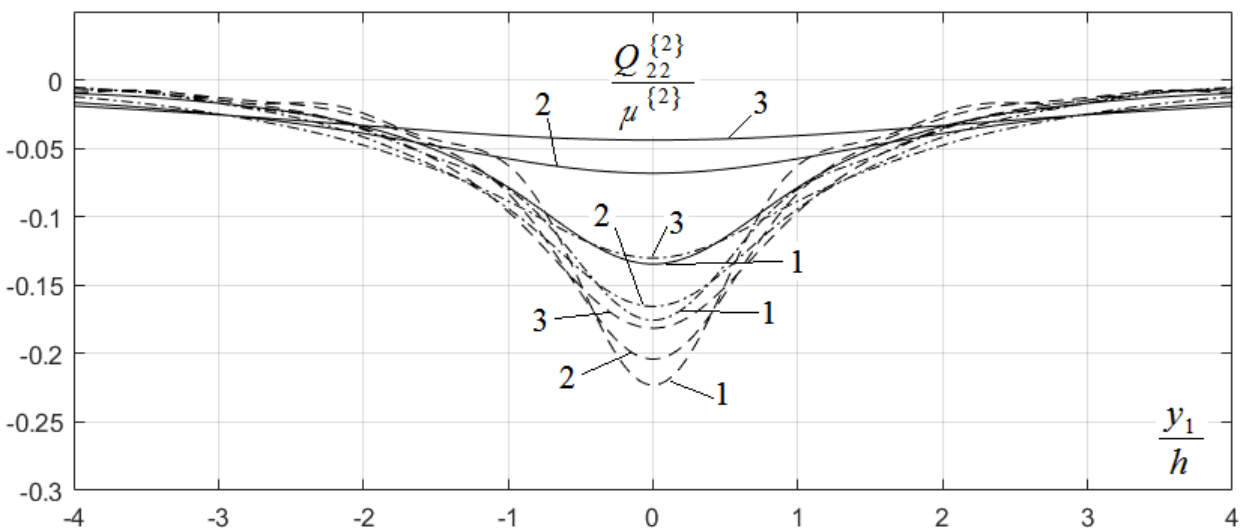


Рис. 8.40. Узагальнені напруження у півпросторі $\tilde{Q}_{22}^{(2)}$ при $v^2 / c_0^2 = 0.4$

На рис. 8.38–8.40 суцільними лініями позначені результати для моделі «пружна смуга на півпросторі», штрихпунктирними лініями – результати для пластини Тимошенка і пунктирними лініями – результати для моделі «зосереджені маси». Основні розрахункові параметри:

$$P/\eta^{\{2\}} = 0.5; \eta^{\{2\}}/\eta^{\{1\}} = \rho^{\{2\}}/\rho^{\{1\}} = 0.5; \nu^{\{1\}} = 0.3; \nu^{\{2\}} = 0.25; \lambda_1^{\{1\}} = \lambda_2^{\{1\}} = 1; \alpha = \pi/2.$$

В зоні найбільшого збудження (це приблизно одна товщина верхнього шару від точки прикладення навантаження) максимальна різниця між амплітудами для моделей, що розглядаються, може складати до 400 %. Як в таких випадках інженерно оцінювати такі відмінності між розглянутими моделями:

1. Наближені моделі описують усереднений НДС, а не локальні піки

Двовимірна модель (2D) та спрощені моделі (пластина на півпросторі, зосереджені маси) не відтворюють тривимірну локалізацію напружень, яка неминуча у 3D. Тому локальні відмінності в зоні концентрованого впливу можуть сягати сотень відсотків – і це норма.

2. Головна мета інженерних розрахунків – правильний порядок величин і форма поля. Якщо характер деформації, розподіл напружень у глибину, хвильова картина якісно збігаються, то модель інженерно придатна.

Навіть якщо амплітуда відрізняється в 2–4 рази, це не робить модель непрацездатною – це лише визначає межу її застосування.

3. У зоні збудження завжди найбільша похибка. Усі теорії (і класичні, і сучасні) стверджують одне й те саме: чим ближче до точки прикладання навантаження, тим сильніше модель реагує на те, як саме враховано просторовість середовища. Тобто саме там очікувані максимальні розбіжності.

4. На інженерну міцність впливають не піки, а інтегральні характеристики. Будівельні та транспортні конструкції оцінюють за контактними напруженнями, прогинами, реакціями основи, середніми та еквівалентними напруженнями, втому, несучою здатністю. Для цих величин похибка наближених моделей значно менша, ніж 100 – 400%.

5. Такі моделі використовуються десятки років і вважаються інженерно надійними. Пластини на півпросторі, балки на основі Вінклера, моделі Хетенї,

Власова, Міндіна — усі дають відмінності на локальному рівні, але залишаються стандартними інженерними схемами.

Отже, незважаючи на відмінності локальних амплітуд у зоні максимального збудження (до 100 – 400%), наближені двовимірні моделі та моделі типу «пластина/маса на півпросторі» залишаються інженерно застосовними. Такі моделі коректно відтворюють загальну хвильову картину, характер розподілу напружень і основні параметри НДС поза локальною областю збудження, що є визначальним для практичних розрахунків.

8.5.3. Порівняння точних розв'язків для 2D і 3D моделей

На рис. 8.41–8.43 порівнюються двовимірні та тривимірні моделі. Розглядаються і порівнюються смуга (2D) і шар (3D) на жорсткій основі. Матеріал вважається стисливим (гармонічний потенціал), контакт жорстким. Основні розрахункові параметри: $\alpha = \pi/2$; $v^2/c_0^2 = 0.01$; $P/\eta = 0.5$; $\nu = 0.25$;

$$\lambda_1^{\{3D\}} = \lambda_2^{\{3D\}} = 1; \quad y_2^{\{2D\}} = -h/(2\lambda_2^{\{2D\}}); \quad y_2^{\{3D\}} = 0; \quad y_3^{\{3D\}} = -h/(2\lambda_3^{\{3D\}}).$$

На рис. 8.41 смуга (шар) попередньо стиснута, на рис. 8.42 – без попереднього напруження, на рис. 8.43 – попередньо розтягнута.

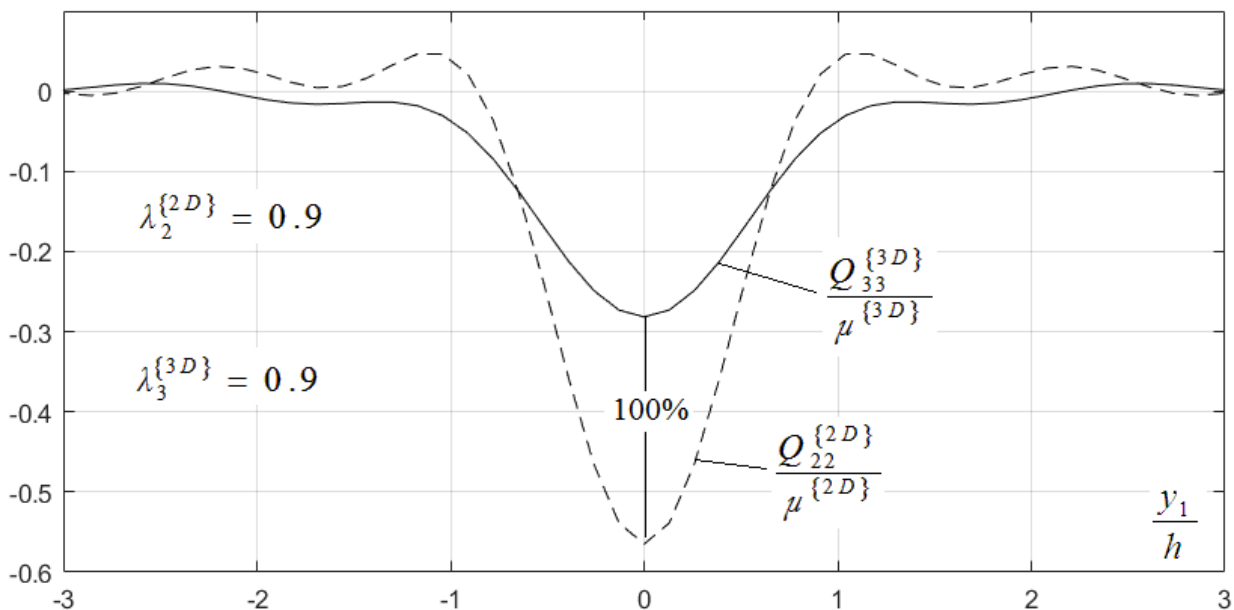


Рис. 8.41. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{\{2D\}} = \lambda_3^{\{3D\}} = 0.9$

На наведених вище рисунках при початковому розтягуванні результати 2D і 3D-моделей майже збігаються, а при початковому стисканні розбіжність різко зростає. Причина:

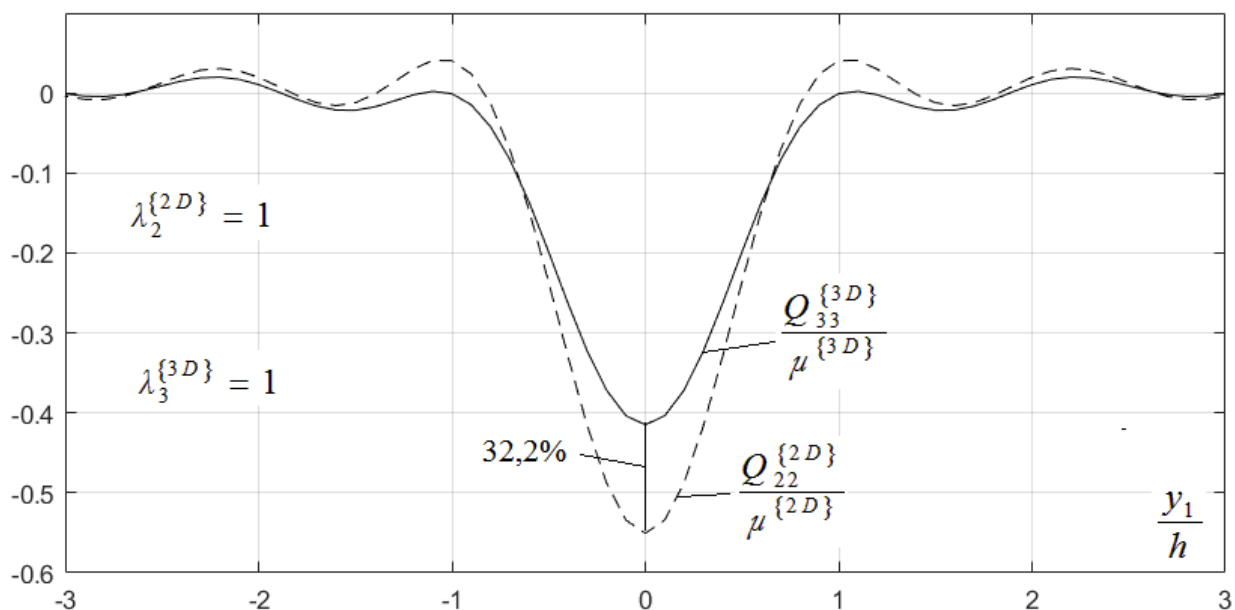


Рис. 8.42. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{\{2D\}} = \lambda_3^{\{3D\}} = 1$

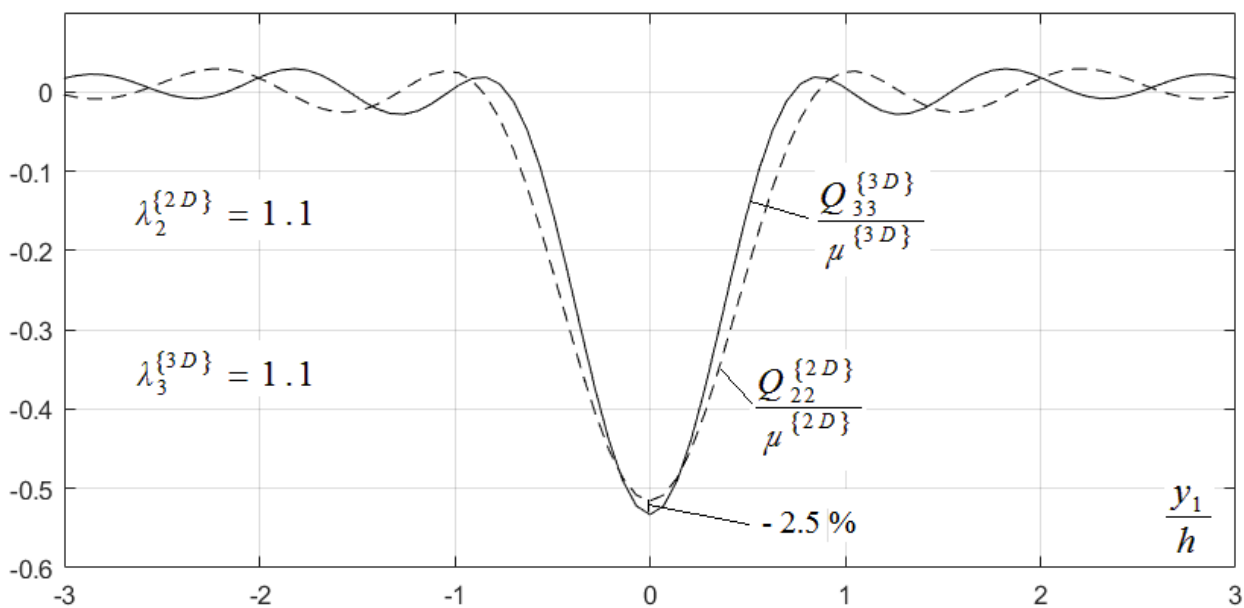


Рис. 8.43. Узагальнені напруження у шарі при $\lambda_2^{\{2D\}} = \lambda_3^{\{3D\}} = 1.1$

1. Стискання активує нестійкі режими (ефекти випучування). У напруженому стані попередньо стиснуте середовище має меншу ефективну жорсткість у напрямку хвильового поширення. У 3D проявляються локальні згинальні моди, бічне випучування, тривимірні форми деформацій, а у 2D таких

мод немає – модель «видає» надлишкове зростання амплітуд. Через це при стисканні розрив між 2D і 3D росте.

2. Розтягування пригнічує нестійкі хвильові моди. Попередні розтягувальні напруження стабілізують матеріал, збільшують ефективну жорсткість, пригнічують бічні моди та флатероподібні форми, роблять поведінку майже «мембранною» і в 2D, і в 3D. Тому епюри розтягнутого середовища в 2D та 3D майже збігаються.

3. 2D-модель недооцінює енергетичні канали розсіювання при стисканні. При стисканні в 3D включаються додаткові шляхи розсіювання енергії: поперечні хвилі, об'ємні P- та S-хвилі, позаплощинні деформації, тривимірні інерційні ефекти. У 2D таких каналів немає, отже енергія концентрується і піки більші.

4. Стискання різко знижує “радіаційну здатність” шару. Під стисканням хвилі «поширюються гірше» (ефективна швидкість зменшується): у 3D це компенсується об'ємним перерозподілом енергії; у 2D компенсації немає – амплітуди ростуть.

5. Математично: стискання зменшує знаменник у спектральній області. Якщо початкове видовження менше одиниці, то знаменник стає меншим, і навіть невеличка зміна в 3D приводить до сильнішої різниці з 2D, бо 2D-спектр бідніший.

Таким чином, при попередньому розтягуванні тривимірні та двовимірні моделі мають близькі результати, оскільки розтягування підвищує ефективну жорсткість та пригнічує нестійкі хвильові моди.

При початковому стисканні розходження між 2D та 3D зростає, оскільки 3D-модель описує тривимірні форми втрати стійкості, об'ємне розсіювання енергії та поперечні хвильові моди, тоді як 2D-модель такої можливості не має і переоцінює пікові амплітуди.

8.5.4. Оцінка достовірності та інженерної застосовності наближених моделей двошарової основи

Порівняння результатів для двовимірних та тривимірних двошарових моделей показує, що в зоні максимального збудження, тобто на відстані порядку однієї-двох товщин шару від точки прикладення рухомого навантаження, спостерігаються найбільші локальні відмінності між амплітудами напружено-деформованого стану. Для 2D-моделей ці відмінності можуть досягати 100 %, тоді як для простіших наближених схем (пластина на півпросторі, система зосереджених мас на півпросторі) різниця в окремих локальних характеристиках може зростати до 300 – 400 %.

Такі розбіжності є природними і добре відомими у механіці деформівного твердого тіла. Вони пов'язані не з некоректністю моделей, а з фундаментальними особливостями хвильового поля тривимірного пружного середовища. У безпосередній околиці точки прикладення навантаження формується складна локалізована зона високих градієнтів напружень і деформацій, де повноцінна 3D-модель відтворює просторову структуру поля з максимальною точністю. Водночас двовимірні та наближені моделі описують усереднені характеристики НДС, тому відмінності біля точки збудження закономірно зростають.

З інженерної точки зору ключовим критерієм застосовності моделі є не збіг локальних пікових амплітуд, а правильне відтворення загальної хвильової картини, характеру поширення хвиль у глибину, інтегральних параметрів НДС та реакції основи поза локальною областю збудження. Усі розглянуті наближені моделі – двовимірні, модель пластини на півпросторі та модель зосереджених мас – забезпечують коректний опис цих глобальних характеристик.

Крім того, інженерні розрахунки ґрунтуються переважно на інтегральних критеріях міцності, наприклад на еквівалентних напруженнях, приведених деформаціях, контактних реакціях, усереднених параметрах або питомих енергіях деформації. Для таких величин похибка наближених моделей істотно менша, ніж локальна різниця амплітуд. Досвід експлуатації дорожніх та залізничних конструкцій, а також багаторічне застосування моделей Хетеньї,

Власова, Міндіна, Вінклера та їх численних узагальнень, підтверджують інженерну надійність наближених схем навіть за наявності значних локальних розбіжностей.

Таким чином, наявність локальних відмінностей у межах однієї–двох товщин шару не знижує інженерної цінності наближених двовимірних моделей. Усі вони можуть використовуватися для аналізу динамічної відповіді конструкцій, оскільки коректно відтворюють глобальні характеристики напружено-деформованого стану та забезпечують адекватний прогноз поведінки шаруватої основи під дією рухомих навантажень. Локальні різниці амплітуд слід розглядати як природний наслідок різної просторової деталізації моделей, а не як ознаку їх непридатності.

8.5.5. Моделі багат шарового півпростору та межі їх застосування у динамічних задачах (огляд літератури та інженерні критерії)

Динамічний аналіз багат шарових пружних півпросторів традиційно базується на низці математичних моделей, які наближено або точно описують поширення хвиль, напружено-деформований стан та реакцію середовища на рухомі або імпульсні навантаження. Основним параметром, який визначає можливість коректного застосування тієї чи іншої моделі, є **відносна товщина поверхневого шару** h/λ , де h – товщина верхнього шару, λ – довжина хвилі збурення. Саме це відношення контролює, наскільки хвиля «бачить» структуру шару, наскільки важливими є згинні та зсувні деформації, а також коли поверхневі дисперсійні ефекти стають визначальними.

У літературі відсутні жорсткі нормативні межі, проте існують добре усталені критерії, що походять із класичних робіт з хвильової механіки та сучасних досліджень. Нижче подано систематизований огляд, що узагальнює висновки таких авторів, як Дж. Ахенбах [94], К. Графф [163], Дж. Мікловіц [197], М. Лоу [192], М. Міндлін [198], Е. Каузел [176, 177], а також класичні підходи Тимошенка та Міндіна.

1. Повні тривимірні моделі (3D elasticity).

Область застосування:

Повний тривимірний підхід є необхідним у випадках, коли:

- $h/\lambda \geq 0.3 \div 0.5$,
- у шарі проявляються власні хвильові моди,
- виникає помітна дисперсія,
- збурення має складну просторову структуру.

У роботах Дж. Ахенбаха [94], К. Граффа [163], Дж. Мікловіца [197] зазначено, що при таких значеннях h/λ тонкошарові наближення перестають бути достовірними. Для багатьох інженерних систем (залізничні колії, дорожні покриття, композитні прошарки) це саме той діапазон, де шар поводить себе як самостійний хвильовий провідник, що не допускає спрощених моделей.

Переваги:

- найвища точність;
- можливість врахування початкових напружень, анізотропії, дисперсії, рухомих навантажень.

Недоліки:

- значні обчислювальні витрати;
- складність аналітичного опису;
- громіздкість обернених інтегралів Фур'є.

2. Плоскі задачі (2D elasticity).

Область застосування:

2D-моделі дають коректні результати, коли:

- геометрія та навантаження допускають плоский стан,
- дисперсійні ефекти незначні,
- $h/\lambda \lesssim 0.3$.

Як свідчить аналіз, приведений в роботах [94] і [192], у діапазоні 0.1–0.3 товщина шару ще не призводить до суттєвих тривимірних ефектів, і використання 2D-моделі дає меншу похибку (10–30%).

Особливість:

У зоні максимального збурення амплітуди 2D-розв'язку часто вищі, ніж у 3D (ефект «пригнічення об'ємних хвиль»), що не є помилкою моделі, а природним наслідком зменшення енергії, яку хвиля здатна розподілити у третьому вимірі.

3. Моделі пластини Тимошенка

Область застосування:

Межі застосування добре відомі з результатів Тимошенка [232] і Міндліна [198]:

- $h/\lambda \leq 0.1-0.2$ – висока достовірність;
- $0.2 < h/\lambda \leq 0.3$ – припустима точність, але зростають похибки;
- при $h/\lambda > 0.3$ виникають суттєві невідповідності з 3D-моделлю.

Пластина Тимошенка враховує зсув і обертальну інерцію, тому її застосовують у динамічних задачах, де частоти не надто високі, а хвилі – довгі порівняно з товщиною шару.

Переваги:

- швидкість обчислень;
- можливість урахування початкових напружень;
- напіваналітичні розв'язки.

4. Моделі зосереджених мас (інерційні моделі поверхневого шару)

Інерційні моделі поверхневого шару ([194, 241]) використовуються, коли поверхневий шар настільки тонкий, що його вплив полягає лише в інерції.

Область застосування:

- $h/\lambda \leq 0.02-0.05$ – «ультратонкий» шар;
- шар працює, як маса, а не як хвильовий провідник.

Такі моделі широко застосовуються у ґрунтовій механіці, сейсмології, моделюванні тонких технологічних покриттів.

5. Інженерні висновки щодо меж придатності моделей

На основі узагальнення численних джерел можна сформулювати такі твердження:

- Модель зосереджених мас коректна при $h/\lambda \lesssim 0.05$.

- Пластина Тимошенка – при $0.05 \leq h/\lambda \leq 0.2$ (надійно) або до 0.3 (із застереженнями).

- 2D-модель – коли $0.1 \leq h/\lambda \leq 0.3$.

- 3D-модель – необхідна при $h/\lambda \geq 0.3-0.5$.

Ці межі узгоджуються з висновками, отриманих в роботах [94, 163, 177, 192, 197, 198, 232, 241].

6. Практичне значення узагальнення

Розуміння меж застосування моделей дозволяє правильно обирати математичний інструмент для:

- розрахунку дорожніх і залізничних покриттів,
- аналізу композитних матеріалів та шаруватих структур,
- моделювання підоснови конструкцій,
- задач вібраційного навантаження та хвильової динаміки.

Ці межі є критично важливими для обґрунтування коректності застосування регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією як до тривимірних, так і двовимірних задач.

8.6. Результати та висновки

У цьому розділі наведено результати чисельних досліджень для наближених моделей двошарового півпростору, описаних у розділі 7, а також для ряду точних двовимірних і тривимірних задач, побудованих відповідно до постановок, викладених у розділі 3. Для розв'язку плоских і тривимірних задач в точній постановці використовувався регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією (розділ 4). Просторовий розв'язок виступає базою для кількісної оцінки точності спрощених моделей, а також для демонстрації ефективності запропонованого регуляційно-спектрального методу.

Розроблений метод зробив можливим проведення повноцінних чисельних досліджень тривимірних задач та виконання порівняльного аналізу з розв'язками плоских моделей. Отримані просторові рішення використовуються як еталон для визначення меж коректності двовимірних наближень.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Таким чином, у дисертаційній роботі вперше подано постановки та отримано аналітичні й чисельні розв'язки просторових і двовимірних задач про усталений рух багатошарових пружних основ із початковими напруженнями зі стисливих і нестисливих матеріалів під дією рухомого поверхневого навантаження.

До основних результатів, отриманих у роботі, належать такі.

1. Найважливіші нові положення дослідження

Уперше:

1.1. *Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід до дослідження хвильової динаміки багатошарових пружних основ із початковими напруженнями.*

1.2. *Розроблено і вперше застосовано регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією, який дозволяє ефективно розв'язувати динамічні задачі для багатошарових основ без необхідності використання традиційних прийомів регуляризації та контурних деформацій у комплексній площині.*

1.3. *Введено поняття регуляційних коефіцієнтів, що забезпечують фізично коректне узгодження хвильових полів між окремими шарами та стабілізують числову реалізацію методу.*

1.4. *Побудовано узагальнену спектрально-матричну схему, у якій обчислення спектральних амплітуд хвильових полів виконується на основі збіжного спектрального інтегралу, що забезпечує числову стійкість і фізичну коректність результату.*

1.5. *Отримано нові аналітичні співвідношення для опису хвильових полів у елементах шаруватого середовища, які узагальнюють класичні розв'язки для півпростору та багатошарових систем, у тому числі з початковими напруженнями.*

1.6. *Вперше розв'язано базову (еталонну) задачу про динамічну поведінку попередньо напруженої багатошарової смуги під дією рухомого навантаження; така постановка не має відомих аналогів у науковій літературі й може використовуватися як тестова для верифікації чисельних методів.*

1.7. *Обґрунтовано області застосування нового методу та показано його ефективність для моделювання рухомих навантажень, хвильової взаємодії у технічних основах, композитах та геоматеріалах.*

2. Розробка теорії та методів для багатошарових основ

2.1. У рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями вперше сформульовано постановки та розроблено методи розв'язку просторових і плоских задач про реакцію багатошарової основи на поверхневе навантаження, що рухається з постійною швидкістю.

2.2. Запропоновано загальний аналітично-чисельний підхід для якісного дослідження динамічних процесів у багатошарових конструкціях з плоско-паралельними границями під дією рухомого навантаження. Отримані точні розв'язки можуть слугувати еталоном для перевірки чисельних методів.

2.3. Розв'язки просторових і плоских задач в загальній постановці отримано із застосуванням *регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією.*

2.4. Постановки задач та їх розв'язки представлені у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл з довільним пружним потенціалом, для випадків рівних і нерівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення шарів та для будь-якої швидкості руху навантаження.

2.5. Задачі для наближених моделей двошарового півпростору з початковими напруженнями розглянуто із застосуванням інтегрального методу Фур'є та методу комплексних потенціалів. Показано збіг результатів, отриманих цими незалежними підходами.

3. Чисельні дослідження та порівняльний аналіз

3.1. На основі отриманих аналітичних розв'язків проведено чисельні дослідження впливу початкових напружень та швидкості руху навантаження на корені характеристичних рівнянь та напружено-деформований стан багат шарових середовищ. Дослідження виконано в рамках теорії скінченних початкових деформацій для стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом та для нестисливого матеріалу з потенціалом типу Бартенева-Хазановича.

3.2. Встановлено низку нових фізико-механічних ефектів, зумовлених дією початкових напружень, швидкістю рухомого навантаження та структурою багат шарової основи.

3.3. Проведено порівняння розв'язків двовимірних задач для різних наближених моделей двошарового півпростору: пружна смуга на пружному півпросторі; пластина на пружному півпросторі; зосереджені маси на пружному півпросторі.

3.4. Виконано порівняльний аналіз розв'язків просторових і плоских задач у точній постановці для оцінки меж застосування двовимірних моделей.

3.5. На основі точних просторових розв'язків визначено межі застосування низки наближених моделей шаруватих середовищ, що має практичне значення для інженерного моделювання та проектування.

4. Емерджентні ефекти, характерні для досліджуваних систем

4.1. Отримані аналітичні співвідношення та чисельні результати підтверджують практичну ефективність запропонованого підходу та демонструють, що кожна шарувата конфігурація формує власний набір емерджентних характеристик – власних хвильових чисел, критичних швидкостей і форм коливань.

4.2. *Важливим результатом дослідження є виявлення емерджентних механічних ефектів – явищ, що виникають саме на рівні взаємодії шарів*

унікальної шаруватої системи та не можуть бути зведені до суми властивостей окремих її компонентів. До них належать:

4.2.1. *Системний вплив початкових напружень.* Виявлено, що наявність у шаруватій основі елемента з початковими напруженнями суттєво змінює реакцію всієї конструкції та перерозподіл напружень у сусідніх шарах.

4.2.2. *Чутливість характеристичних коренів до початкових напружень.* Встановлено, що залежно від способу формування шаруватої конструкції вплив початкових напружень на характеристичні корені може бути значним. Виявлено, що за певних дозвукових швидкостей можуть існувати дійсні кратні корені характеристичних рівнянь.

4.2.3. *Локальність впливу початкових напружень.* Показано, що найсуттєвіший вплив початкових напружень на напружено-деформований стан спостерігається у безпосередній близькості від точки прикладення навантаження. У віддалених зонах цей вплив стає другорядним через розсіювання хвиль.

4.2.4. *Асиметрія впливу стиску та розтягу.* Встановлено, що попереднє стискання середовища призводить до інтенсивнішого зростання амплітуд напружень і переміщень порівняно з попереднім розтягуванням, що зумовлено зміною ефективною жорсткості та хвильових швидкостей. Це має ключове значення для оцінки міцності попередньо стиснутих конструкцій (наприклад, у ґрунтах під фундаментами). Затухання збурень із віддаленням від навантаження відбувається повільніше за попереднього стискання.

4.2.5. *Зони слабкої чутливості.* Виявлено області в середовищі, де напружено-деформований стан практично не залежить від початкових деформацій, що дозволяє в окремих інженерних розрахунках нехтувати цим фактором без суттєвої втрати точності.

4.2.6. *Складна взаємодія швидкісного режиму та початкових напружень.* Зі збільшенням швидкості навантаження загальний рівень амплітуд знижується,

однак відносний вплив початкових напружень посилюється, особливо для попередньо стиснених матеріалів.

4.2.7. *Зміна симетрії хвильового поля залежно від швидкісного режиму.*

- У дозвуковому режимі спостерігається симетричність поля напружень і переміщень відносно точки навантаження, що узгоджується з класичними уявленнями для лінійних стаціонарних задач.
- У транс- та надзвуковому режимах виникає виражена асиметрія, зумовлена формуванням конусів Маха та різним затуханням прямих і зворотних хвиль.
- У надзвуковому режимі можливі збурення, що випереджають навантаження. Вони виникають в результаті взаємодії шарів унікальної шаруватої системи

4.2.8. *Вплив властивостей поверхневого шару та умов контакту.*

- Збільшення жорсткості верхнього шару призводить до екранування та зменшення амплітуд у півпросторі.
- Жорсткий контакт між шарами забезпечує більш рівномірний розподіл енергії та зменшує чутливість системи до швидкості навантаження та початкових напружень порівняно з нежорстким контактом.

4.3. У 2D- та 3D-постановках у точному формулюванні зростає варіантність поведінки системи, що, у свою чергу, підсилює емерджентний характер отриманих результатів.

Отже, основним науковим внеском роботи є не лише розв'язок окремих задач, а створення методичного інструментарію (регуляційно-спектрального методу зі структурною регуляризацією) для виявлення та аналізу емерджентних динамічних властивостей шаруватих систем. Отримані результати узгоджуються з фізичними уявленнями про хвильові процеси та формують основу для прогнозування напружено-деформованого стану шаруватих середовищ під дією рухомих навантажень у широкому діапазоні швидкостей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амандосов А.А., Нуржумаев О., Сабодаш П.Ф. Поведение полупространства, на границе которого действуют подвижные нагрузки// Труды ин-та мат. и мех. АН Каз.ССР. – 1971. – № 2. – С. 136–151.
2. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на слоистое полупространство с начальными напряжениями. – Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (51). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 53–58. - ISSN 1562-9945
3. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки. – Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 3(62). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 93–98. - ISSN 1562-9945
4. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // IX міжнародний симпозіум. Збірник наукових праць «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій». Випуск 9. – Львів, Каменярь, 2012. – С. 7–17. - ISBN 978-966-7144-98-1
5. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойного несжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Збірник наукових праць. Випуск 13. – Дніпропетровськ, Ліра, 2012. – С. 29–34. - ISBN 978-966-2198-01-1
6. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Изгиб пластины на упругом основании при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2017. – 53, № 3. – С. 1–14. - ISSN 0001-5979

7. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойного полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2021. – 57, № 1. – С. 54–63. – ISSN 0001-5979
8. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Реакція стисливого попередньо-напруженого півпростору із захисним покриттям на рухоме навантаження // Прикл. механика. – 2024. – 60, № 3. – С. 45–58. – ISSN 0001-5979
9. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36–54. – ISSN 0001-5979
10. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 4. – С. 35–55. – ISSN 0001-5979
11. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 5. – С. 3–15. – ISSN 0001-5979
12. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф.В. Поведение пластины, лежащей на предварительно-напряженном полупространстве, при воздействии подвижной нагрузки. – Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С. 55–60. – ISSN 1562-9945
13. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф. В. Влияние начальных напряжений и подвижной нагрузки на распределение скоростей перемещений в двухслойном предварительно напряженном полупространстве // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: «Каменяр». – Випуск 8, 2009. – С. 7–14. – ISBN 978-966-607-311-9
14. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф. В. Динамические задачи для двухслойного полупространства с начальными напряжениями // Науковий

- вісник Мукачівського державного університету. Випуск 11(6). – Мукачево, 2011. – С.24–51. – ISSN 1813-4661
15. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Про одну динамічну задачу для шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. – Львів: Каменяр, 2014. – № 10. – С. 6–15.
 16. Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень // *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2021. Вип. 39, № 2. С. 116–124. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)
 17. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
 18. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
 19. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 287 с.
 20. Власов В. З. Загальна теорія оболонок та її застосування в техніці. – Київ: Держтехвидав УРСР, 1949. – 784 с.
 21. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
 22. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
 23. Глухов Ю.П. Представление решения задачи о реакции многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. Сжимаемый материал. – Системні технології. Регіональний міжвузівський

- збірник наукових праць. Випуск 3(62). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 105–110. – ISSN 1562-9945
24. Глухов Ю.П. Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки. – Доповіді НАН України. – 2010, № 2. – С. 53–58. – ISSN (Print): 1025-6415, ISSN (Online): 2518-153X. Режим доступу: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/19593>
25. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием. – Вісник Черкаського національного університету. Випуск 172. – Черкаси, 2010. – С. 20–24. ISSN 2076-5886
26. Глухов Ю.П. Об одной задаче о воздействии подвижной загрузки на многослойное основание. – Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 14. – Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2010. – С. 102–108. – ISBN 978-966-675-674-2
27. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для слоя с начальными напряжениями на жестком основании. – Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 15. – Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2011. – С. 54–59. – ISBN 978-966-675-909-5
28. Глухов Ю.П. Предварительно напряженный слой на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. – Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 17. – Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2011. – С. 68–74. – ISBN 978-966-675-984-2
29. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. – Доповіді НАН України. – 2011, № 7. – С. 52–57. – ISSN 1025-6415. Режим доступу URI: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/43826>

30. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании. – Доповіді НАН України. – 2011, № 8. – С.48–53. – ISSN 1025-6415. Режим доступу: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/38570>
31. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача. – Доповіді НАН України. – 2011, № 11. – С. 65–69. – ISSN 1025-6415. Режим доступу: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/38137>
32. Глухов Ю.П. Реакція багатопарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Нестисливий матеріал // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 14. – Львів, 2011. – С. 23–28. – ISSN 1816-1545
33. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной полосы при воздействии подвижной нагрузки // Вісник НТУ «ХПИ». Випуск 42. – Харків, 2011. – С. 57–67. – ISSN 2222-0631
34. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной плиты на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. – Доповіді НАН України. – 2012, № 2. – С. 70–75. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу: <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/49035>
35. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями. – Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 20. – Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2012. – С. 108–114. – ISBN: 978-966-346-936-6
36. Глухов Ю.П. К вопросу существования кратных корней характеристических уравнений для динамических задач // Сб. трудов XXV междунар. науч. конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ – 25». Т. 9., 2–4 октября 2012 г., г. Харьков, Национ. техн. ун-т «ХПИ». – Изд-

во Саратовского гос. техн. ун-та, 2012. – С. 73–75. – ISSN 1999-8341, ISBN 978-5-8158-1066-1

37. Глухов Ю.П. Условия существования кратных корней характеристических уравнений для двухмерных динамических задач // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 21. – Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2013. – С. 68–82. – ISBN 978-966-02-6733-8
38. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для двухслойной полосы на жестком основании. // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса, 2014. – № 2 (44). – С. 9–14. – ISBN 978-966-7598-61-1
39. Глухов Ю.П. Про одну модель захисного покриття для нестисливого півпростору з початковими напруженнями // XVI Міжнародній науково-технічній конференції «ABIA – 2023». – Київ, 18–20 квітня 2023. – С. 15.5–15.9. – ISBN 978-966-02-9797-7
40. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан нестисливого попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям при дії рухомого навантаження // XXIII МНТК “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”, 30 травня – 1 червня 2023 р. м. Київ. – С. 1–4. – DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.278107
41. Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватому нестисливому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1 ' 2023. XXI Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2023) 26 – 30 червня 2023, Київ-Харків. – Харків: ХНУ, 2023. – С. 75–81. – ISBN 978-966-623-990-5
42. Глухов Ю.П. Вплив жорсткості поверхневого шару і умов контакту на напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями // III Міжнародна науково-технічна конференція

- «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту», Вінниця, ВНТУ, 1-3 червня 2023 року. – С. 78–79. – ISBN 978-966-641-935-7
43. Глухов Ю.П. Вплив початкових напружень та швидкості навантаження на напружено-деформований стан нестисливого півпростору // Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки – 2023», Київ, 14 – 16 листопада, 2023. – С. 28–30. – ISBN 978-617-95378-0-6
44. Глухов Ю.П. Динамічні процеси в шаруватій основі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // XXVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, ЛНУ, ІППММ, 7–9 листопада 2023 року. – С. 102–106. – ISBN 978-966-02-9977-3
45. Глухов Ю.П. Захищений пружним шаром стисливий попередньо напружений півпростір при дії рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації – Optima – 2024», Кам'янець Подільський, 28–29 червня 2024. – С. 77–80. – Режим доступу: URL <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>
46. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів в шаруватій нестисливій основі з початковими напруженнями // 10-а міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 5–7 червня 2024. – С. 133–137. – ISBN 978-617-689-284-2
47. Глухов Ю.П. Дві моделі захисного покриття для пружної основи з початковими напруженнями // Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи», 7–11 жовтня 2024, Київ, Інститут механіки ім. С.П Тимошенка НАН України. – С. 322–324. – ISBN 978-617-95378-0-6
48. Глухов Ю.П. Вплив початкових напружень та швидкості навантаження на напружено-деформований стан стисливого півпростору // XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних

- структур», 24–26 вересня 2024, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – С. 159–161. – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0502.pdf
49. Глухов Ю.П. Шаруватий півпростір з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи», 7–11 жовтня 2024, Київ, Інститут механіки ім. С.П Тимошенка НАН України. – С. 328–330. – ISBN 978-617-95378-0-6
50. Глухов Ю.П. Шарувата попередньо напружена полоса на пружній основі при дії рухомого навантаження // XXIII МНТК “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”. – Київ, 28–29 листопада 2024 р. – С. 56–59. – ISBN 978-617-8113-12-9
51. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан двошарової полоси з початковими напруженнями на пружній основі // Конференція молодих вчених «Підстригачівські читання – 2025», ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Львів, 27–29 травня 2025 р. – Режим доступу: URL <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2025/abstracts/GlukhovYu.pdf>
52. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан полоси з початковими напруженнями на жорсткій основі // XI Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки». – Одеса, 21–23 травня 2025 р. – С. 69–73. – Режим доступу: URL https://drive.google.com/file/d/1-_4KvLbCIrvlJz-iV3JHdiYbAEkPVDLx/view
53. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан двошарової полоси з початковими напруженнями на жорсткій основі // IV Міжнародна науково-технічна конференція «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту», ВНТУ. – Вінниця, 3–5 червня 2025 року. – С. 341–342. – Режим доступу: URL https://www.researchgate.net/publication/393163755_Zbirnik_tez_dopovidej_IV_Mizna_rodnoi_naukovo-tehnicnoi_konferencii_Pers

pektivi_rozvitku_masinobudu vanna_ta_transportu_-_2025_3_-_5_cervna_2025_r

54. Глухов Ю.П. Регуляційно-спектральний метод зі структурною регуляризацією для аналізу динамічної поведінки шаруватих конструкцій // XXV міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2025». – Дніпро, 13–14 листопада 2025 р. – С. 44. – Режим доступу: URL [https:// www.dnu.dp.ua/docs/ndc/2025/inform%20povid/9.pdf](https://www.dnu.dp.ua/docs/ndc/2025/inform%20povid/9.pdf)
55. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю. Пружна основа із захисним покриттям та початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 4. – С. 45–54. – ISSN 0001-5979
56. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Корнієнко В.Ф. Рухоме навантаження нестисливої півплощини з початковими напруженнями // Прикл. механіка. – 2023. – 60, № 2. – С. 3–18. – ISSN 0001-5979
57. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Маляр М.М., Млавець Ю.Ю. Напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями та захисним покриттям при дії рухомого навантаження// Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2024, том 44, № 1. – С. 83–92. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).83-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).83-92)
58. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Млавець Ю.Ю. Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2023, том 43, № 2. – С. 82–95. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2))
59. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях – К.: Наукова думка, 1973. – 272 с.
60. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. - Киев: Наук. думка, 1979. – 114 с.

61. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
62. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 511 с.
63. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями // Прикладная механика. – 2002. – 38, № 1. – С. 35–78. – ISSN 0001-5979
64. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с. – ISBN 966-539-431-2
65. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с. – ISBN: 978-3-659-95254-9
66. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с. – ISBN 978-3-659-95342-3
67. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг, 2007. – Издательство «Кременчуг». – 795 с. – ISBN 966-7513-70-X
68. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, 2015. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 468 с. – ISBN: 978-3-659-76495-0
69. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
70. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 103 с.

71. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
72. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977. – 151 с.
73. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 520 с.
74. Зарембо Л.К., Красильников Е.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах// Успехи физических наук. – 1970. – 103, № 4. – С.549–586.
75. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – М.: Изд. иностр. лит., 1955. – 192 с.
76. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев: Наук. думка, 1979. – 183 с.
77. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
78. Майлз Дж. Реакция слоистого полупространства на движущуюся нагрузку // Прикладная механика. – М.: Мир, 1966. – № 3. – С. 232–234.
79. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
80. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
81. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
82. Пастернак П. Л. О новом методе расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. – 1954, № 5. – С. 69–77.

83. Рахматулин Х.А., Саатов Я.У., Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г. Двухмерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред. – Ташкент: ФАН, 1969. – 120 с.
84. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
85. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. – Киев: Наук. думка, 1976. – 283 с.
86. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
87. Филиппов И.Г., Бахрамов Б.М. Волны в упругих однородных и неоднородных средах. – Ташкент: ФАН, 1978. – 152 с.
88. Чебан Б.Г., Сабодаш П.Ф. Упругие и термоупругие волны в деформируемых средах. – Кишинева: Штиинца, 1972. – 266 с.
89. Шульга И.Д. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
90. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок// Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – Вып. 8. – С. 3–41.
91. Якушев Н.З. Динамика строительных систем под действием движущихся нагрузок// Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – Вып. 9. – С. 118–157.
92. Якушев Н.З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущейся нагрузки// Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985, – Вып. 19. – С. 158–171.

93. Highway Research Board. The AASHO Road Test: Report 7. Summary Report / National Academy of Sciences – National Research Council. – Washington, D.C. : Highway Research Board, 1962. – (HRB Special Report 61G). – 83 p.
94. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. – 425 p. – ISBN: 9780720402667.
95. Achenbach J.D., Keshawa S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – 34, № 4. – P. 183–189.
96. Adams G.G. Steady solutions for a moving load on an elastic resting on an elastic half plane // Int.J.Solids and Struct. – 1975. – 15, № 11. – P. 885–897.
97. Ai Z.Y., Mu J.J., Ren G.P. 3D dynamic response of a transversely isotropic multilayered medium subjected to a moving load // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2017. – 42(4). – P. 636–654. – DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2758>
98. Ai Z.Y., Ren G.P. Dynamic response of an infinite beam on a transversely isotropic multilayered half-space due to a moving load // International Journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol. 133. – P. 817–828. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.09.042>
99. Ai Z.Y., Xu C.J., Ren G.P. Vibration of a pre-stressed plate on a transversely isotropic multilayered half-plane due to a moving load // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol. 59. – P. 728–738. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.02.027>
100. Akbarov S. D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses (review) // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, No. 12. – P. 1305–1324. – DOI: [10.1007/s10778-008-0003-8](https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8)
101. Akbarov S. D. The influence of the third order elastic constants on the dynamical interface stress field in a half-space covered with a pre-stretched layer //

- International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2006. – Vol. 41, No. 3. – P. 417–425. – DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2005.08.006
102. Akbarov S. D. Dynamical (time-harmonic) axisymmetric interface stress field in the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stretched layer // International Journal of Engineering Science. – 2006. – Vol. 44, No. 1. – P. 93–112. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2005.10.003
103. Akbarov S. D. Frequency response of the axisymmetrically finite pre-stretched slab from incompressible functionally graded material on a rigid body // International Journal of Engineering Science. – 2006. – Vol. 44, Nos. 8–9. – P. 484–500. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2006.04.004
104. Akbarov S. D., Emiroglu I., Tasci F. The Lamb's problem for a half-space covered with the pre-stretched layer // International Journal of Mechanical Sciences. – 2005. – Vol. 47, No. 9. – P. 1326–1349. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.05.004
105. Akbarov S. D., Güler C. Dynamical (harmonic) interface stress field in the half-plane covered by the pre-stretched layer under a strip load // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 2005. – Vol. 40, No. 3. – P. 225–235. – DOI: 10.1243/030932405X12867
106. Akbarov S. D., Güler C. On the stress field in a half-plane covered by the pre-stretched layer under the action of arbitrary linearly located time-harmonic forces // Applied Mathematical Modelling. – 2007. – Vol. 31, No. 11. – P. 2375–2390. – DOI: 10.1016/j.apm.2006.09.004
107. Akbarov S. D., Güler C., Dincsoy E. The critical speed of a moving load on a pre-stressed plate resting on a pre-stressed half-plane // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, No. 2. – P. 173–182. – DOI: 10.1007/s11029-007-0017-z
108. Akbarov S., İlhan N. Dynamics of a system comprising a pre-stressed orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane under the action of a moving load //

- International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45, Nos. 14–15. – P. 4222–4235. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.03.004
109. Akbarov S., İlhan N. Time-harmonic dynamical stress field in a system comprising a pre-stressed orthotropic layer and pre-stressed orthotropic half-plane // *Archive of Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 80, No. 11. – P. 1271–1286. – DOI: 10.1007/s00419-009-0369-z
110. Akbarov S.D., İlhan N., Temügan A. 3D dynamics of a prestressed stratified half-space under the action of an oscillating moving load // *Applied Mathematical Modelling*. – 2015. – 39. – P. 1–18. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.009>
111. Akbarov S. D., Ozaydin O. The effect of initial stresses on harmonic stress fields within the stratified half plane // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2001. – Vol. 20, No. 3. – P. 385–396. – DOI: 10.1016/S0997-7538(00)01133-5
112. Atalan M., Prendergast L. J., Grizi A., Thom N. A Review of Numerical Models for Slab-Asphalt Track Railways // *Infrastructures*. – 2022. – Vol. 7, Iss. 4. – Art. 59. – DOI: 10.3390/infrastructures7040059
113. Avramesco A. Charge mobile sur un semi-espace elastique stratifie // *Comptes Rendes.Acad.Sc.Paris. Ser.A*. – 1969. – 268, № 5. – P.289–291.
114. Avramesco A. Regimes transitorie ot permanent sur une structure stratifie (impact et charge mobile) // *Comptes Rendes.Acad.Sc.Paris. Ser.A*. – 1969. – 268, № 20. – P. 1206–1209.
115. Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. Bending a plate on prestressed elastic foundation under live static load // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 3. – P. 287–299. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0810-x>
116. Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2021. – 57, N 1. – P. 43–52. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>

117. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. Reaction of prestressed compressive half-space with protective coating to moving load // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – 60, N 3. – P. 291–304. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01282-w>
118. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamics of a Prestressed Compressible Layered Half-Space under Moving Load // *Int.Appl.Mech.* – 2008. – 44, N 3. – P.268–285. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0043-0>
119. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Dynamic Problem for a Prestressed Incompressible Layered Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 4. – P.388–405. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0051-0>
120. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 5. – P. 481–492. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0060-z>
121. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F., Zhiguts Yu. Yu. Dynamics of a twolayer half-space with initial stresses under the impact of a moving load // *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика».* – 2022. – Вип. 40, № 1. – С. 94–109. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).94-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).94-108)
122. Babich S., Glukhov Y., Zhiguts Y. Solution of the plane problem on the determination of stresses under the action of a moving load on the free surface of a half-space // *The XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research», June 03 – 05, 2024, Berlin, Germany.* 521 p. – P. 434–437. – ISBN – 9-789-40372-405-8
123. Babich S., Zhiguts Y, Glukhov Y. Solving the Problem of Determining the Pre-Stressed State of a Half-Space for Mobile Load Conditions by Integral Fourier Transforms // *The XXVI International Scientific and Practical Conference «World Problems and Ways of Solving Modern Problems», July 02 – 05, 2024,*

- Oslo, Norway. – P. 233–237. – ISBN – 979-8-89443-783-5. – DOI: 10.46299/ISG.2024.1.26
124. Bao T., Liu Z. L. Evaluation of Winkler Model and Pasternak Model for Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis of Structures Partially Embedded in Soils // *International Journal of Geomechanics*. – 2019. – Vol. 20, Iss. 2. – Art. 04019177. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622. 0001519
125. Bazant Z. P., Planas J. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. – Boca Raton: CRC Press, 1998. – 640 c. – ISBN 978-0-8493-8284-9
126. Behradnia S., Khosravifard A., Hematiyan M.-R., Shiah Y.C. Identification of Time Variations of Moving Loads Applied to Plates Resting on Viscoelastic Foundation Using a Meshfree Method // *Aerospace*. – 2022. – Vol. 9, Iss. 7. – Art. 357. – DOI: 10.3390/aerospace9070357
127. Belyaev A. K., Gladwell G. M. L., Mikhlin Y. V. Dynamic response of beams on elastic foundations // *Archive of Applied Mechanics*. – 2020. – Vol. 90, Iss. 2. – P. 215–230. – DOI: 10.1007/s00419-019-01644-3
128. Beskou N. D. Moving load problems on layered elastic foundations: A review // *Applied Mechanics Reviews*. – 2023. – Vol. 75, Iss. 4. – Art. 040801. – DOI: 10.1115/1.4062493
129. Beskou N. D., Chatzigogos C. T., Vrettos C. Response of plates on layered elastic foundations under moving loads // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2023. – Vol. 167. – Art. 107121. – DOI: 10.1016/j.soildyn. 2023. 107121
130. Beskou N.D., Muho E.V. Dynamic response of a finite beam resting on a Winkler foundation to a load moving on its surface with variable speed // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2018. – 115. – P. 222–226. – DOI: 10.1016/j.soildyn.2018.02.033
131. Beskou N. D., Muho E. V. Review on dynamic response of road pavements to moving vehicle loads; part 1: Rigid pavements // *Soil Dynamics and Earthquake*

- Engineering. – 2023. – Vol. 175. – Art. 108249. – DOI: 10.1016/j.soildyn.2023.108249
132. Biezeno C.B., Hencky H. On the general theory of elastic stability // Proc.Roy.Neth.Acad.Sci.Amsterdam. – 1928. – 31, № 6. – P. 569–592.
133. Biot, M. A. Bending of an Infinite Plate on an Elastic Foundation // Journal of Applied Mechanics. – 1937. – Vol. 4. P. A1–A10. – DOI:10.1115/1.4008897
134. Bhatra S., Maheshwari P. Double Beam Model for Reinforced Tensionless Foundations under Moving Loads // KSCE Journal of Civil Engineering. – 2019. – Vol. 23, Iss. 12. – P. 5045–5055. – DOI: 10.1007/s12205-019-1609-6
135. Cao T. N. T., Reddy J., Lieu Q. X., Nguyen X. V., Luong V. H. A multi-layer moving plate method for dynamic analysis of viscoelastically connected double-plate systems subjected to moving loads // Advances in Structural Engineering. – 2021. – Vol. 24, Iss. 9. – P. 1798–1813. – DOI: 10.1177/1369433220982730
136. Cao, T.N.T., Luong, V.H. Dynamic Responses of Composite Sandwich Plate Under Moving Load // In: Reddy, J.N., Wang, C.M., Luong, V.H., Le, A.T. (eds) ICSC EA 2021. Lecture Notes in Civil Engineering, vol 268. Singapore: Springer, 2023. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-19-3303-5_72
137. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. – New-York: Mc Graw-Hill, 1962. – 282 p.
138. Chen H., Ma Q., Zhou F., Wang W., Analytical determination of the dynamic response of layered saturated frozen foundation to moving loads under plane strain conditions // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2024. – Vol. 180. – Art. 108578. – ISSN 0267-7261. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2024.108578>
139. Cen Y., Liang D., Yang Y., Liu X. Wave focusing and sheltering effects of a multi-layered cylindrical structure in regular wave conditions // Ocean

Engineering. - 2025. – Vol. 342, Part 2. – Art. 123039. ISSN 0029-8018. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.123039>

140. Chen W., Hao H. Experimental investigations and numerical simulations of multi-arch double-layered panels under uniform impulsive loadings // *International Journal of Impact Engineering*. – 2014. – Vol. 63. – P. 140–157. – ISSN 0734-743X. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2013.08.012>
141. Chen W.-R., Lin C.-H. Dynamic Analysis of Elastically Supported Functionally Graded Sandwich Beams Resting on Elastic Foundations Under Moving Loads // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2024. – Vol. 24, Iss. 08. – Art. 2450087. – DOI: 10.1142/S0219455424500871
142. Clough R.W., Tocher J.L., Wilson E.L. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA. 1960. – P. 345–378.
143. Connolly D.P., Dong K., Alves Costa P., Soares P., Woodward P. K. High speed railway ground dynamics: a multi-model analysis // *International Journal of Rail Transportation*. – 2020. – 8(4). – P. 324–346. – DOI: <https://doi.org/10.1080/23248378.2020.1712267>
144. Dang-Trung H., Luong-Van H., Nguyen-Thoi T., Ang K.K. Analyses of Stiffened Plates Resting on Viscoelastic Foundation Subjected to a Moving Load by a Cell-Based Smoothed Triangular Plate Element // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2017. – Vol. 17, No. 01. – Art. 1750011. – DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417500110>
145. Dieterman H.A., Metrikine A.V. Critical velocities of a harmonic load moving uniformly along an elastic layer // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 1997. – 64. – P. 596–600.
146. Dutta S.C., Roy R., A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system // *Computers & Structures*. – 2002. –

Vol. 80, Iss. 20 – 21. – P. 1579–1594. – ISSN 0045-7949. – DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00115-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00115-3)

147. Emiroglu I., Tasci F., Akbarov S. D. Dynamical response of two axially prestrained system comprising of a covering layer and a half space to rectangular time-harmonic forces // CMES – Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2009. Vol. 49, No. 1. P. 47–68. – DOI: 10.3970/cmes.2009.049.047
148. Eno R., Wokwenmendiam M. L., Ndombou G. B., Simo H., Kenmogne F., Nguiya S. Dynamics of a nonlinear multilayer beam structure on elastic foundation: Chaos detection and application to transport engineering technologies // Mathematics and Systems Science. – 2025. – Vol. 3, Iss. 1. – Art. mss3058. – DOI: 10.54517/mss3058
149. Eringen A. C. Nonlocal Continuum Field Theories. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 376 p. – ISBN 978-0-387-95275-9
150. Eshelby J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1957. – Vol. 241, No. 1226. – P. 376–396. – DOI: 10.1098/rspa.1957.0133
151. Esveld C. Assessment of high-speed slab track design // Railway Gazette International. – 2006. – Vol. 39, Iss. 6. – P. 347–349.
152. Euler L. (Daniel Bernoulli). De motu corporum in mediam flexibilium [Про рух тіл у пружному середовищі]. Opera Omnia, Series Secunda. 1735.
153. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. Elastic waves in layered media. – New-York: Mc Graw-Hill, 1957. – 380 p.
154. Fan H., Wang J., Xu C. Dynamic response of a multi-layered pavement structure under moving load // International Journal of Pavement Engineering. – 2022. – Vol. 23, Iss. 10. – P. 3621–3635. – DOI: 10.1080/10298436.2021.1875917

155. Fan H., Zhang J., Zheng J. Dynamic response of a multi-layered pavement structure with subgrade modulus varying with depth subjected to a moving load // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2022. – Vol. 160. – Art. 107358. – DOI: 10.1016/j.soildyn.2022.107358
156. Fish J. *A First Course in Finite Elements*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2007. – 326 p. ISBN 978-0-470-03580-1. – DOI: 10.1002/9780470510858
157. Froio D., Rizzi E., Simões F. M. F., Pinto da Costa A. Dynamics of a beam on a bilinear elastic foundation under harmonic moving load // *Acta Mechanica*. – 2018. – Vol. 229. – P. 4141–4165. – DOI:10.1007/s00707-018-2213-4
158. Froio D., Rizzi E., Simões F. M. F., Pinto da Costa A. P. A true PML approach for steady-state vibration analysis of an elastically supported beam under moving load by a DLSFEM formulation // *Computers & Structures*. – 2020. – Vol. 239. – Art. 106295. – DOI: 10.1016/j.compstruc.2020.106295
159. Fryba L. *Vibration of solids and structures under moving loads*. – 3rd ed. London: Thomas Telford Publishing, 1999. – 560 p. – ISBN-10: 0-7277-2741-9
160. Glukhov Yu.P., Babich S.Yu. Elastic base with a protective coating and initial stresses under action of moving load // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – 60, N 4. – P. 422–430. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01302-9>
161. Glukhov Yu., Babich S., Kornienko V. Stress-strain state of a two-layered half-space with initial stresses under the influence of a moving load // Aleksander N. Guz, Holm Altenbach, Viacheslav Bogdanov, Vladimir M. Nazarenko Editors «*Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine*», Switzerland, Springer, 2023. – P. 103–118. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>
162. Glukhov Y.P., Babich S.Y., Kornienko V.F. Moving Load of Prestressed Incompressible Half-Plane. // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – Vol. 60, No. 2. – P. 123–136. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01267-9>

163. Graff K. F. Wave Motion in Elastic Solids. – Oxford–New York: Clarendon Press (Oxford University Press), 1975 – 688 p. – ISBN: 9780198591601
164. Green A.E., Rivlin R.S., Shield R.T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations// Proc.Roy.Soc. London. – 1952. – A211, № 1104. – P.128–154.
165. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. – Kyiv, Akadempriodyka, 2024. – 668 p. – ISBN 978-966-360-550-9
166. Han Z., Guo C., Yang L., Zhang J., Sun K. Dynamic Response of Crossanisotropic Layered Media with Imperfect Interface under Axisymmetric Loads // Advances in Civil Engineering. – 2022, Vol. 2022, Article ID 7697131. – DOI: <https://doi.org/10.1155/2022/7697131>
167. Haskell N. A. The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1953. – Vol. 43, No. 1. – P. 17–34. – DOI: 10.1785/BSSA0430010017
168. Heidarpour B., Rahi A., Shahravi M. Analytical study of shock response in circular plates on fractional viscoelastic foundations // Journal of Vibration and Control. – 2025. – Vol. 31, Nos. 7–8. – P. 1405–1415. – DOI: 10.1177/10775463251366358
169. Hetényi M. Beams on Elastic Foundation: Studies in Engineering. – Ann Arbor: University of Michigan Press, 1946. – 255 p.
170. Hosseinzadeh S., Gatzmiri B. Bearing behavior assessment of wind turbines' shallow foundations, comparison of gravity-based foundations and suction buckets // Ocean Systems Engineering. – 2025. – 15. – P. 241–270. – DOI: 10.12989/ose.2025.15.3.241
171. Huang H.-Y., Zhao M.-J., Rong Y., Sun Y., Xiao X. Analysis of the Vibration of the Ground Surface by Using the Layered Soil: Viscoelastic Euler Beam Model

- due to the Moving Load // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2021. – Vol. 2021. – Art. 6619197. – DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/6619197>
172. Huang M.-H., Thambiratnam D. P. Deflection response of plate on Winkler foundation to moving accelerated loads // *Engineering Structures*. – 2001. Vol. 23, Iss. 9. – P. 1134–1141. – DOI: 10.1016/S0141-0296(01)00004-9
173. Kaplunov J., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate (L) // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2014. – Vol. 136, Iss. 4. – P. 1487–1490. – DOI: 10.1121/1.4894795
174. Karami B., Ghayesh M. H. Moving load excited dynamics of multi-layered imperfect microplates based on various micromechanical models // *International Journal of Engineering Science*. – 2024. – Vol. 197. – Art. 104017. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104017
175. Kargarnovin M. H., Younesian D., Thompson D. J. Dynamic analysis of beams on Pasternak foundations under moving loads // *Journal of Sound and Vibration*. – 2019. – Vol. 457. – P. 84–101. – DOI: 10.1016/j.jsv.2019.06.015
176. Kausel E. Dynamic stiffness of consistent and lumped parameter models of layered soils // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 1979. – Vol. 3, No. 3. – P. 253–267. – DOI: 10.1002/nag.1610030306
177. Kausel E. Wave propagation in layered soils and rocks // *Fundamentals of Earthquake Engineering* / eds. N. Newmark, W. Hall. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1985. – P. 283–340.
178. Kausel E. Wave propagation in anisotropic layered media // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1986. – 23(10). – P. 1567–1578. – DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620231003>
179. Kennet B.L.N. *The Seismic Wavefield: Volume 1, Introduction and Theoretical Development* (Глава 7: "Wave propagation in stratification"). – Cambridge

University Press, 2001. – ISBN 9780521001220

180. Kerr A.D. The critical velocities of a load moving on a floating ice plate that is subjected to in-plane forces // *Cold Reg. Sci. Technol.* – 1983. – 6 (3). – P. 267–274.
181. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundations for plates // *Journal of Engineering Mechanics.* – 2000. – Vol. 126, Iss. 9. – P. 944–948. – DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:9(944)
182. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe [Про рівновагу та рух пружної пластини] // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal).* – 1850. – Bd. 40. – S. 51–88.
183. Kouroussis G., Verlinden O., Connolly D. Experimental validation of slab-track dynamics under moving trains // *Transportation Geotechnics.* – 2023. – Vol. 39. – Art. 100998. – DOI: 10.1016/j.trgeo.2023.100998
184. Lamprea-Pineda A. C., Connolly D. P., Hussein M. F. M. Beams on elastic foundations – A review of railway applications and solutions // *Transportation Geotechnics.* – 2022. – Vol. 33. – Art. 100696. – DOI: 10.1016/j.trgeo.2021.100696
185. Lee J.-W., Lee S.-J., Kee S.-H. Evaluation of a Concrete Slab Track with Debonding at the Interface between Track Concrete Layer and Hydraulically Stabilized Base Course Using Multi-Channel Impact-Echo Testing // *Sensors.* – 2021. – Vol. 21, Iss. 21. – Art. 7091. – DOI: 10.3390/s21217091
186. Lee J.H., Kim J.K., Tassoulas J.L., Dynamic analysis of a layered half-space subjected to moving line loads // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* – 2013. – Vol. 47. – P. 16–31. – ISSN 0267-7261. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2012.07.013>

187. Li J., Zhang Y., Chen W. Model order reduction for layered foundations under moving loads // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2024. – Vol. 419. – Art. 116675. – DOI: 10.1016/j.cma. 2023.116675
188. Li S., Luo J., Wang Y. Full-scale field measurements and FEM calibration for pavement–beam systems subjected to moving vehicles // *Construction and Building Materials*. – 2020. – Vol. 254. – Art. 119289. – DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2020.119289
189. Lien T. V., Ha L. T. Dynamic analysis of functionally graded viscoelastic beams on the elastic foundation under multiple moving loads // *Vietnam J. of Mechanics*. – 2025. – Vol. 47, No. 1. – P. 90–108. – DOI: 10.15625/ 0866-7136/ 22165
190. Liu, M.; Gan, Q. Experimental Research on Dynamic Response of Layered Medium under Impact Load // *Coatings*. – 2022. – Vol. 12. – Art. 1474. – DOI: <https://doi.org/10.3390/coatings12101474>
191. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1892. – 354 p.
192. Lowe M. J. S. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. – 1995. – Vol. 42, № 4. – P. 525–542. – DOI: 10.1109/58.393096
193. Luong V.H., Cao T.N.T, Reddy J. N., Ang K.K., Tran T.M., Dai J. Static and Dynamic Analyses of Mindlin Plates Resting on Viscoelastic Foundation by Using Moving Element Method // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2018. – Vol. 18, No. 11. – Art. 1850131. – DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455418501316>
194. Lysmer J., Kuhlemeyer R. L. Finite dynamic model for infinite media // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. – 1969. – Vol. 95, No. 4. – P. 859–877. – DOI: 10.1061/JMCEA3.0001144

195. Ma J., Wang J., Wang C., Li D., Guo Y. Vibration response of beams supported by finite-thickness elastic foundation under a moving concentrated force // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2024. – Vol. 38, Iss. 1. – P. 595–604. – DOI: 10.1007/s12206-023-1212-2
196. Metrikine A. V., Vrouwenvelder A. C. W. M. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model // *Journal of Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 234, No. 1. – P. 43–66. – DOI: 10.1006/jsvi.1999.2853
197. Miklowitz J. *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. – Amsterdam–New York: North-Holland Publishing Company, 1978. – 559 p. ISBN: 9780720405835
198. Mindlin R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates // *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*. – 1951. – Vol. 18, No. 1. – P. 31–38. – DOI: 10.1115/1.4010217
199. Muho E.V., Beskou N.D. Review on dynamic analysis of road pavements under moving vehicles and plane strain conditions // *Journal of Road Engineering*. – 2024. – 4(1). – P. 54–68. – DOI: 10.1016/j.jreng.2024.01.002
200. Musa A. E. S. Ritz method and approximate numerical schemes for free-free beams on tensionless elastic foundations // *Mathematics / MDPI*. – 2022. – Vol. 10. – Арт. 3271. – DOI:10.3390/math10183271
201. Navier C.-L. Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques [Про закони рівноваги та руху пружних твердих тіл] // *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*. – 1827. – Vol. 7. – P. 375–393.
202. Nguyen P.T., Vi T.V., Nguyen T.T., Vu V.T. The plate on the nonlinear dynamic foundation under moving load // *Coupled Systems Mechanics*. – 2023. – Vol. 12, N. 1. – P. 83–102. – DOI: <https://doi.org/10.12989/csm.2023.12.1.083>
203. Nguyen V. T., Do D. M., Tran L. H. Dynamic testing and numerical verification of beam–foundation systems under moving loads // *Transportation Infrastructure*

- Geotechnology. – 2023. – Vol. 12, No. 3. – P. 387–401. – DOI: 10.1007/s40515-023-00202-7
204. Pan Q., Zhang B., Gao C., Liu X. Experimental and analytical study on dynamic response of foundation beam with local void under moving load. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2025. – Vol. 192. – Art. 109312. – DOI: 10.1016/j.soildyn.2025.109312
205. Pandey G., Patel D., Mourya V., Kumar R., & Kumar S. A Review on Soil-Foundation-Interaction Models // *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*. – 2023. – 11(3). – P. 158–179. – DOI: [https://doi.org/ 10.22075/JRCE.2022.25247.1570](https://doi.org/10.22075/JRCE.2022.25247.1570)
206. Pao Y.-H. Elastic waves in solids// *Trans.ASME. Ser.E.J.Appl.Mech.* – 1983. – 50, № 4b. – P. 1152–1164.
207. Parida SP, Jena PC, Das SR, Basem A, Khatua AK, Elsheikh AH. Transverse vibration of laminated-composite-plates with fillers under moving mass rested on elastic foundation using higher order shear deformation theory // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2024. – 238(20). – P. 9878–9888. – DOI: 10.1177/09544062241256589
208. Peng L. X., He X. C., Mei G. X., Shen Y. J. Dynamic Response Analysis of Ribbed Plate Resting on Viscoelastic Pasternak Foundation via MLS Meshless Method // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2024 – Vol. 24, No. 17. Art. 2450191. – DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455424501918>
209. Prager W. The general variational principle of the theory of structural stability // *Quart.J.Appl.Mech.* – 1947. - 4, № 4. – P. 378–384.
210. Praharaj R. K., Datta N. Dynamic response of Euler–Bernoulli beam resting on a fractionally damped viscoelastic foundation subjected to a moving point load // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of*

Mechanical Engineering Science. – 2020. – Vol. 234, Iss. 24. – P. 4801–4812. – DOI: 10.1177/0954406220932597

211. Previati G., Ballo F., Pietro Stabile P. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems // *European Journal of Mechanics – A. Solids.* – 2025. – Vol. 111. – Art. 105514. – ISSN 0997-7538. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105514>
212. Punetha P., Nimbalkar S. Numerical investigation on the dynamic behaviour of unpaved roads under realistic moving loads // *Road Materials and Pavement Design.* – 2025. – Vol. 8, No. 3. – P. 399–421. – DOI: 10.1080/14680629.2025.2533350
213. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members.* – Amsterdam: North-Holland, 1969. – 822 p.
214. Ramos A., Correia A.G., Calçada R., Costa P.A., Esen A., Woodward P.K., Connolly D.P., Laghrouche O. Influence of track foundation on the performance of ballast and concrete slab tracks under cyclic loading: Physical modelling and numerical model calibration // *Construction and Building Materials.* – 2021. – Vol. 277. – Art. 122245. – ISSN 0950-0618. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.122245>
215. Sackman J.L. Uniformly Moving Load on a Layered Half-Plane // *J.Engin.Mech.Div.Proc.ASCE.* – 1961. – 87, EM 4. – P.75–89.
216. Sayeed M.A., Shahin M.A. Dynamic Response Analysis of Ballasted Railway Track–Ground System under Train Moving Loads using 3D Finite Element Numerical Modelling // *Transp. Infrastruct. Geotech.* – 2023. – 10. – P. 639–659. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s40515-022-00238-2>
217. Seyedkazemi M., Wenqi H., Jing G., Ahmadi P., Shuguo W., Khajehdezfuly A. Visco-elastic materials in railway superstructure: a comprehensive review // *Road Materials and Pavement Design.* – 2025. – Vol. 26, No. 1. – P. 1–57. – DOI: 10.1080/14680629.2025.2512881

218. Sheng X. (2019): A review on modelling ground vibrations generated by underground trains // *International Journal of Rail Transportation*. – 2019. – 7(5). P. 1–21. – DOI: 10.1080/23248378.2019.1591312
219. Sheng X., Jiang J., Thompson D. J. Dynamics of slab track systems subjected to moving loads // *Vehicle System Dynamics*. – 2021. – Vol. 59, Iss. 3. – P. 345–368. – DOI: 10.1080/00423114.2020.1717309
220. Sheng X., Jiang J., Thompson D. J. Wave propagation in layered track–subgrade systems under moving loads // *Journal of Sound and Vibration*. – 2022. – Vol. 528. – Art. 116913. – DOI: 10.1016/j.jsv.2022.116913
221. Shitikova M. V., Kandu V. V., Krusser A. I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance // *Journal of Sound and Vibration*. – 2023. – Vol. 549. – Art. 117564. – DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117564
222. Singh A. K., Negi A., Verma A. K., Santan K. Analysis of stresses induced due to a moving load on irregular initially stressed heterogeneous viscoelastic rock medium // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2017. – Vol. 143, Iss. 9. – Art. 04017096. – DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001307
223. Skripnyak V. A., Chirkov M., Skripnyak E., Skripnyak V. V. Mechanical response of layered structures with internal layers from metamaterials exposed to dynamic loadings // *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. – 2024. – Vol. 22, No. 3. – P. 595–606. – DOI: 10.22190/FUME231018001S
224. Sofi A. Nonlinear vibrations of beams with fractional derivative elements crossed by moving loads // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2024. – Vol. 159. – Art. 104567. – DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104567
225. Sofi A., Carpinteri A., Viola E. Fractional models in viscoelastic foundations: Theory and applications // *Mechanics of Materials*. – 2024. – Vol. 187. – Art. 104855. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2023.104855

226. Sommerfeld, A. *Partial Differential Equations in Physics*. – Academic Press, 1949. – 335 p.
227. Stancioiu, D., Ouyang, H. & Yang, J. Numerical and experimental investigations into feedback control of continuous beam structures under moving loads // *Arch Appl Mech*. – 2021. – 91. P. 2641–2659. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01910-8>
228. Tabejieu L.M.A., Nbandjo B.R.N., Filatrella G., Effect of the fractional foundation on the response of beam structure submitted to moving and wind loads // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. – Vol. 127. – P. 178–188. ISSN 0960-0779. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.06.039>
229. Timoshenko S. P. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars // *Philosophical Magazine*. Ser. 6. – 1921. – Vol. 41. – P. 744–746. – DOI: 10.1080/14786442108636264
230. Timoshenko S. P. *Theory of Plates and Shells*. – New York: McGraw-Hill, 1940. – 492 p.
231. Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of Elastic Stability*. – New York: McGraw-Hill, 1936. – 541 p.
232. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. – 2nd ed. – New York : McGraw-Hill, 1959. – 580 p.
233. Timoshenko S. P., Young D. H. *Vibration Problems in Engineering*. – New York: D. Van Nostrand Company, 1928. – 448 p.
234. Trefftz E. Über die Ableitung des Stabilitäts-kriterien des elastischen Gleigewichts aus der Elastizitätstheorie der endlichen Deformationen, *Verhandl // Proc. of the 3 Intern.Kongr.tech.Mech.(Stockholm, 1930)*. – 1931. – 3. – P.44–50.
235. Tsai C.H., Westmann R.A. On the efficient and correct description of elastic waves in a layered half-space // *Journal of Sound and Vibration*. – 1995. – 187(4).

– P. 707–719. – DOI: [https://doi.org/ 10.1006/jsvi.1995.0556](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0556)

236. Usman M. A., Hammed F. A., Ogunwobi Z. O., Okusaga S. T. Dynamic response of rayleigh beam on winkler foundation subjected to partially distributed moving load // *Lautech Journal of Engineering and Technology*. – 2018. – 12(2). P. 107–122. – DOI: [https://www.laujet.com/index.php/ laujet/article/view/348](https://www.laujet.com/index.php/laujet/article/view/348)
237. Wang Y., Lin G., Li Z. Dynamic Response of Anisotropic Multilayered Road Structures Induced by Moving Loads Based on a Novel Spectral Element Method // *Building*. – 2022,12(9). – Art. 1354. – DOI: [https:// doi.org/10.3390/buildings12091354](https://doi.org/10.3390/buildings12091354)
238. Watanabe K. Transient response of a layered elastic half space subjected to a reciprocating anti-plane shear load // *Int.J.Solids and Struct.* – 1977. – 13, № 1. – P. 63–74.
239. Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit [Вчення про пружність і міцність]. – Prag: Dominicus, 1867. 182 s.
240. Wright J.P., Baron M.L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space) // *Trans.ASME. Ser.E.J.Appl.Mech.* – 1970. – 37, № 1. – P. 148–159.
241. Wolf J.P., Song C. Finite-Element Modelling of Unbounded Media. – Chichester : John Wiley & Sons, 1996. – 331 p. – ISBN-10: 0471961345, ISBN-13: 978-0-471-96134-5
242. Xia Q., Chen B., Tan J., Zhang X., Xiang P. Dynamic analysis of laminated plate and ballastless track slab on Pasternak foundation under moving load based on different shear deformation theory // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. – 2024. – Vol. 53, Iss. 3. – P. 2182–2214. – DOI: [10.1080/15397734.2024.2404608](https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2404608)
243. Xu L., Ma M., Dynamic response of the multilayered half-space medium due to the spatially periodic harmonic moving load // *Soil Dynamics and Earthquake*

Engineering. – 2022. – Vol. 157. – Art. 107246. – ISSN 0267-7261. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107246>

244. Yao S.; Xie W.; Geng J.; Xu X.; Zheng S. A Numerical Analysis of the Non-Uniform Layered Ground Vibration Caused by a Moving Railway Load Using an Efficient Frequency–Wave-Number Method // *Mathematics*. – 2024. – 12. – Art. 1750. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math12111750>
245. Ye T.-L., Yan K.-Z. Dynamic Response of Infinite Beam Resting on a Fractional Pasternak Viscoelastic Foundation Subjected to Moving Load // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2024. – Vol. 24, No. 13. – Art. 2450145. – DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455424501451>
246. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications // *Nonlinear Dyn.* – 2019. – 97. – P. 853–895. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>
247. Youssef, A.A., Amein, N.K., Abdelrahman, N.S. Nonlinear Rayleigh wave propagation in a layered half-space in dual-phase-lag // *Sci. Rep.* – 2023. – 13. – Art. 2187. – DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-023-29411-4>
248. Zhai W., Wang K., Chen Z., Zhu S., Cai C., Liu G. Full-scale multi-functional test platform for investigating mechanical performance of track–subgrade systems of high-speed railways // *Rail. Eng. Science*. – 2020. – 28(3). – P. 213–231. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s40534-020-00221-y>
249. Zhao X., Connolly D. P., Alves Costa P., Thompson D. J. Experimental validation of beam–foundation models for railway track dynamics // *Journal of Sound and Vibration*. – 2021. – Vol. 505. – Art. 116150. – DOI: [10.1016/j.jsv.2021.116150](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116150)
250. Zhang Z., Liu S., Pan E., Wang Q. Dynamic loading in a transversely isotropic and layered elastic half-space // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2023. – Vol. 260. – Art. 108626. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108626>

251. Zheng L., Yao H.-l. Dynamic stress and deformation of a layered road structure under vehicle traffic loads: Experimental measurements and numerical calculations // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2012. – 39(2). – P. 100–112. – DOI: 10.1016/j.soildyn.2012.03.002

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Монографії

1. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: издательство «Кременчуг», 2007. – 795 с. – ISBN 966-7513-70-X

2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с. – ISBN: 978-3-659-76495-0

Розділ в колективній монографії

3. *Glukhov Yu., Babich S., Kornienko V.* Stress-strain state of a two-layered half-space with initial stresses under the influence of a moving load // Aleksander N. Guz, Holm Altenbach, Viacheslav Bogdanov, Vladimir M. Nazarenko Editors «Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine», Switzerland: Springer, 2023. – P. 103–118. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>

Статті в фахових виданнях України та в закордонних виданнях

4. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36–54. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Guz A.N. Dynamics of a Prestressed Incompressible Layered Half-Space under Moving Load // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 3. – P. 268–285. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0043-0>

5. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 4. – С. 35–55. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Guz A.N. Dynamic Problem for a Prestressed Compressible Layered Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 4. – P. 388–405. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0051-0>

6. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н.* Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // *Прикл. механика.* – 2008. – 44, № 5. – С. 3–15. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. and Guz A.N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, N 5. – P. 481–492. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0060-z>

7. *Глухов Ю.П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2010. – № 2. – С. 53–58. – ISSN 2518-153X. – Режим доступу: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/19593>

8. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием // *Вісник Черкаського національного університету.* Випуск 172. – Черкаси, 2010. – С. 20–24. – ISSN: 2076-5886

9. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки // *Доповіді НАН України.* – 2011. – № 7. – С. 52–57. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/43826>

10. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача // *Доповіді НАН України.* – 2011. – № 11. – С. 65 – 69. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/38137>

11. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании // Доповіді НАН України. – 2011. – № 8. – С. 48–53. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/38570>
 12. Глухов Ю.П. Реакція багат шарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Нестисливий матеріал // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 14. – Львів, 2011. – С. 23–28. – ISSN 1816-1545
 13. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной полосы при воздействии подвижной нагрузки // Вісник НТУ «ХП». Випуск 42. – Харків, 2011. – С. 57–67. – ISSN 2222-0631
 14. Глухов Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной плиты на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки // Доповіді НАН України. – 2012. – № 2. – С. 70–75. – ISSN 1025-6415. – Режим доступу: <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/49035>
 15. Глухов Ю. П. Об одной динамической задаче для двухслойной полосы на жестком основании. // Праці Одеського політехнічного університету. – Одеса, 2014. – № 2 (44). – С. 9–14. – ISBN 978-966-7598-61-1
 16. Глухов Ю. П. Динамическая задача для двухслойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – №2 – С. 46–52. – ISBN 978-966-599-743-1
 17. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Изгиб пластины на упругом основании при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2017. – 53, № 3. – С. 1–14. – ISSN 0001-5979
- Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. Bending a plate on prestressed elastic foundation under live static load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 287–299. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0810-x>*

18. *Бабич, С.Ю., Глухов, Ю.П., Корнієнко, В.Ф.* До задачі розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями // Доповіді НАН України. – 2019. – № 10. – С. 21–28. – DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.10.021>

19. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для многослойного полупространства с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 2021. – 57, № 1. – С. 54–63. – ISSN 0001-5979

Babich S.Yu., Gluchov Yu.P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – 57, N 1. – P. 43–52. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>

20. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 105–113. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).105–113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).105–113)

21. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 38, № 1. – С. 114–122. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).114–122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).114–122)

22. *Бабич С. Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2021. Вип. 39, № 2. – С. 116–124. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)

23. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F., Zhiguts Yu. Yu. Dynamics of a twolayer half-space with initial stresses under the impact of a moving load // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2022. Вип. 40, № 1. – С. 94–109. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).94-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).94-108)

24. Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватому нестисливому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1 ' 2023. XXI Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2023) 26–30 червня 2023, Київ-Харків. – Харків: ХНУ, 2023. – С. 75–81. – ISBN 978-966-623-990-5

25. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Млавець Ю.Ю. Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2023, том 43, № 2. – С. 82–95. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2))

26. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Маляр М.М., Млавець Ю.Ю. Напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями та захисним покриттям при дії рухомого навантаження// Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 2024, том 44, № 1. – С. 83–92. – DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).83-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).83-92)

27. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Корнієнко В.Ф. Рухоме навантаження нестисливої півплощини з початковими напруженнями // Прикл. механіка. - 2023. – 60, № 2. – С. 3–18. – ISSN 0001-5979

Glukhov Y.P., Babich S.Y., Kornienko V.F. Moving Load of Prestressed Incompressible Half-Plane. // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 1. – P. 123–136. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01267-9>

28. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Реакція стисливого попередньо-напруженого півпростору із захисним покриттям на рухоме навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 3. – С. 45–58. – ISSN 0001-5979

Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. Reaction of prestressed compressive half-space with protective coating to moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 3. – P. 291–304. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01282-w>

29. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Пружна основа із захисним покриттям та початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – 60, № 4. – С. 45–54. – ISSN 0001-5979

Glukhov Yu. P., Babich S. Yu. Elastic base with a protective coating and initial stresses under action of moving load // Int. Appl. Mech. – 2024. – 60, N 4. – P. 422–430. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01302-9>

Праці апробаційного характеру

(тези доповідей і матеріалів на наукових міжнародних конференціях)

1. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Контактная задача кручения для предварительно напряженного слоя // В кн. „Смешанные задачи механики деформируемого тела”. Тезисы докладов IV Всес. конф. – Ч. 2., Одесса, 1989. – С. 31.

2. *Бабич С.Ю., Борисов Є.М., Глухов Ю.П.* Про поверхневі хвилі Релея для півплощини з початковими напруженнями // В кн.: „Математичні проблеми технічної механіки”. Тези доповідей Міжнародної наукової конференції. Дніпропетровськ, 2006. – С.23.

3. *Бабич С.Ю., Борисов Є.М., Глухов Ю.П.* Застосування методу комплексних потенціалів у задачі про поширення поверхневих хвиль Релея для півплощини з початковими напруженнями // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (45). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 130–133. – ISSN 1562-9945

4. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Действие подвижной нагрузки на пластину, лежащую на полупространстве с начальными напряжениями // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2007”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 23–26 квітня 2007 року. – С. 52.
5. *Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Глухов Ю.П.* Применение комплексных потенциалов в задаче об установившемся движении упругого двухслойного полупространства с начальными напряжениями // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2007”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 23–26 квітня 2007 року. – С. 45.
6. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на слоистое полупространство с начальными напряжениями // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (51). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 53–58. – ISSN 1562-9945
7. *Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Глухов Ю.П.* К решению одной динамической задачи для двухслойного предварительно напряженного полупространства с использованием комплексных потенциалов. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4(51). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 50–52. – ISSN 1562-9945
8. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Влияние начальных напряжений и подвижной нагрузки на изгибающий момент в пластине, лежащей на полупространстве с начальными напряжениями // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2008”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 2008. – С. 69.
9. *Галаган О.Г., Глухов Ю.П.* Об одном представлении уравнений движения пластины // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2008”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 2008. – С. 66.
10. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф.В.* Поведение пластины, лежащей на предварительно-напряженном полупространстве, при воздействии подвижной

нагрузки. – Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С. 55–60. – ISSN 1562-9945

11. *Галаган О.Г., Глухов Ю.П.* Уравнения движения пластины с учетом сдвига и инерции вращения в цилиндрических координатах. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С. 3–8. – ISSN 1562-9945

12. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для слоистого предварительно напряженного полупространства // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2009”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 2009. – С. 44.

13. *Глухов Ю.П.* О представлении решения задачи о реакции многослойного предварительно напряженного полупространства на подвижную нагрузку // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2009”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 2009. – С. 108.

14. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф. В.* Влияние начальных напряжений и подвижной нагрузки на распределение скоростей перемещений в двухслойном предварительно напряженном полупространстве // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: «Каменяр». – Випуск 8, 2009. – С. 7–14. – ISBN 978-966-607-311-9

15. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки. // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 3(62). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 93–98. – ISSN 1562-9945

16. *Глухов Ю.П.* Представление решения задачи о реакции многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. Сжимаемый материал. // Системні технології. Регіональний міжвузівський

збірник наукових праць. Випуск 3(62). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 105–110. – ISSN 1562-9945

17. Глухов Ю.П. Трехмерная задача для слоя на жестком основании // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2010”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 19–22 апреля, 2010. – С. 42. – ISBN: 978-966-346-500-9

18. Глухов Ю.П. Многослойная плита на жестком основании. Плоская задача // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2010” (друга частина). – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 19–22 апреля, 2010. – С. 29–31. – ISBN: 978-966-346-500-9

19. Глухов Ю.П. Об одной задаче о воздействии подвижной загрузки на многослойное основание // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 14. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – С. 102–108. – ISBN: 978-966-675-674-2

20. Глухов Ю.П. Представлення розв'язку задачі про реакцію багатошарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2011” (том 1). – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 13-15 апреля, 2011. – С. 37. – ISBN: 978-966-346-759-1

21. Глухов Ю.П., Галаган А.И. Двухслойная предварительно напряженная полоса на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки // DSMSI–2011 XV Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 25 – 27 травня 2011, Київ. – С. 257. – ISBN: 978-966-02-5993-1

22. Глухов Ю.П. Многослойная предварительно напряженная полоса при воздействии подвижной нагрузки // Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 21–24 вересня 2011, Кременчук. – С. 11–12. – ISBN: 978-966-2512-41-1

23. Глухов Ю.П. Многослойное предварительно напряженное основание при воздействии подвижной нагрузки // Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі. XIII Всеукраїнська науково-методична конференція. – Миколаїв, 15–17 вересня 2011. – С.51–52. – ISBN: 978-966-8206-96-9
24. Глухов Ю.П. О представлении решений плоских и пространственных динамических задач для многослойного основания с начальными напряжениями // Актуальні проблеми інженерної механіки. Міжн. наук.-техн. конференція. – Миколаїв (25–26 жовтня 2011 р.), Національний університет кораблебудування. – С.33–34. – ISBN: 978-966-321-114-8
25. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для слоя с начальными напряжениями на жестком основании // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 15. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2011. – С. 54–59. – ISBN: 978-966-675-909-5
26. Глухов Ю.П. Предварительно напряженный слой на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 17. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2011. – С. 68–74. – ISBN: 978-966-675-984-2
27. Саленко А.Ф., Глухов Ю.П., Фомовская О.В., Мана О.М. Об опыте применения функционально ориентированных технологий при обработке изделий из волокнистых композитных материалов // Международная научная конференция «УНИТЕХ'11». – Габрово (18–19 ноября 2011), Технический университет. – С. 151–156. – ISBN: 978-954-683-374-1
28. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар Ф. В. Динамические задачи для двухслойного полупространства с начальными напряжениями // Науковий вісник Мукачівського державного університету. Випуск 11(6). – Мукачево, 2011. – С. 24–51. – ISSN: 1813-4661

29. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 20. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2012. – С. 108–114. – ISBN: 978-966-346-936-6
30. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойного сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // IX міжнародний симпозиум. Збірник наукових праць «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій». Випуск 9. – Львів, Каменяр, 2012. – С. 7–17. – ISBN 978-966-7144-98-1
31. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для многослойного несжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Збірник наукових праць. Випуск 13. – Дніпропетровськ, Ліра, 2012. – С. 29–34. – ISBN 978-966-2198-01-1
32. Глухов Ю.П. К вопросу существования кратных корней характеристических уравнений для динамических задач // Сб. трудов XXV междунар. науч. конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ – 25». Т. 9., 2–4 октября 2012 г., г. Харьков, Национ. техн. ун-т «ХПИ». – С. 73–75. – ISBN 978-5-8158-1066-1
33. Глухов Ю.П., Галаган А.І. Аналіз рівнянь руху багатозарового попередньо напруженого напівпростору при дії рухомого поверхневого навантаження // XIV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука. – Київ (19 – 21 квітня 2012), Національний технічний університет «КПІ». – С.129. – ISBN 978-966-02-6457-3
34. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Многослойная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. Представление решений // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2012”. –

Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 16 – 19 апреля 2012. – С. 123. – ISBN 978-966-02-6383-5

35. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* К вопросу об особенностях в контактных задачах для предварительно напряженных тел // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2012”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 16–19 апреля 2012. – С. 124. – ISBN 978-966-02-6383-5

36. *Глухов Ю.П.* Моделирование динамических процессов в многослойных предварительно напряженных телах при воздействии подвижной загрузки // Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)». – Крым. Севастополь, 10–14 сентября 2012. – С. 119–120. – ISBN 978-966-02-6566-2

37. *Глухов Ю.П.* Динамические задачи для многослойной предварительно-напряженной полуплоскости. Представление решений в виде Ламе // Актуальні проблеми інженерної механіки. Міжн. наук.-техн. конференція. – Миколаїв (22–24 жовтня 2012 р.), Національний університет кораблебудування. – С. 45. – ISBN 978-966-321-119-4

38. *Глухов Ю. П., Галаган А.И.* Побудова розв’язків динамічних задач для різних моделей шаруватого заздалегідь напруженого напівпростору при дії рухомого навантаження // DSMSI–2013 XVI Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 29–31 травня 2013, Київ. – С. 267. – ISBN 978-966-02-6943-1

39. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для двухслойной полосы на жестком основании // ММАР–2013 Міжнародна науково-технічна конференція «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки», 10–25 травня 2013 року, Харків. – С. 17–18. – ISBN 978-966-2199-13-1

40. *Глухов Ю.П.* Двухслойная полоса на жестком основании. Несжимаемый материал // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної

механіки – 2013”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 15–18 апреля 2013. – С. 73. – ISBN 978-966-02-7038-3

41. Глухов Ю.П. Двухслойная полоса на упругом основании при воздействии подвижной нагрузки. Сжимаемый материал // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково – методичні проблеми математики у вищій школі», 26–27 червня 2013. – Київ: НУХТ, 2013. – С. 88. – ISBN 978-966-8705-13-5

42. Глухов Ю.П. Двухмерные и трехмерные модели многослойного основания при воздействии подвижной загрузки // Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 23–27 вересня 2013, Кременчук. – С. 24–25. – ISBN 978-966-8460-54-7

43. Глухов Ю.П. Условия существования кратных корней характеристических уравнений для двухмерных динамических задач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. Випуск 21. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2013. – С. 68–82. – ISBN 978-966-02-6733-8

44. Глухов Ю.П. Дослідження характеристичних рівнянь для двовимірних динамічних задач. // I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, 7–9 квітня 2014 року, Львів. – С. 67–68. – ISBN 978-966-02-7237-0

45. Глухов Ю.П. Побудова чисельного алгоритму розв’язування задач для багатошарової основи з початковими напруженнями // Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика – 2014», 21–26 квітня, Суми. – С. 117. – ISBN 978-966-657-463-5

46. Глухов Ю.П. Про одну динамічну задачу для шаруватого напівпростору з початковими напруженнями // IX Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”. – Львів, 15–19 вересня 2014 року. – С. 337–338. – ISBN 978-966-02-7386-5

47. Глухов Ю.П. Динамика трехслойного полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2014”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, 14–17 квітня 2014. – С. 65. – ISBN 978-966-02-7248-6
48. Глухов Ю.П. Динамічні задачі про реакцію шаруватого задалегідь напруженого напівпростору на рухоме навантаження // XV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 83. – ISBN 978-966-02-7161-8
49. Глухов Ю. П., Бабич С.Ю. Дослідження характеристичних рівнянь для тривимірних динамічних задач // XIII Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. – Кременчук, 7–9 листопада 2014. – С. 130–131. – ISBN 978-966-8460-69-1
50. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів в багатошарових конструкціях с початковими напруженнями // XIII Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. – Кременчук, 7–9 листопада 2014. – С. 132. – ISBN 978-966-8460-69-1
51. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф. Про одну динамічну задачу для шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: Каменяр, 2014. – № 10. – С. 6–15. – ISBN 978-966-607-396-9
52. Глухов Ю.П. Динамічна задача для двошарового нестисливого напівпростору з початковими напруженнями // Електронний науково-методичний збірник «Математика в сучасному технічному університеті». – 2015. – С. 1–8. – ISBN 978-966-8594-37-1
53. Глухов Ю.П. Просторова динамічна задача для шаруватої стисливої основи з початковими напруженнями // XVII Міжнародний симпозіум «Методи

дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (МДОЗМФ-2015) 8–13 червня 2015, Харків – Суми. – Харків: ХНУ, 2015. – С. 63–66. – ISBN 978-966-623-763-5

54. Глухов Ю.П. Математичне моделювання хвильових процесів в шаруватих конструкціях з початковими напруженнями // 2-я міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса-Київ, 16–20 марта 2015. – С. 39–41. – ISBN 978-617-689-092-3

55. Глухов Ю.П. Чисельні дослідження розв’язків характеристичних рівнянь динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями // Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика – 2015», 20–25 квітня, Суми. – С. 261. – ISBN 978-966-657-579-3

56. Глухов Ю.П., Галаган А.И. Рівняння руху пластини при поверхневому навантаженні // XVII Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI–2015), Київ, 27–29 травня 2015. – С. 267. – ISBN 978-966-02-7575-3

57. Глухов Ю.П. Моделювання напружено-деформованого стану багатошарових конструкцій з початковими напруженнями // Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково – методичні проблеми математики у вищій школі», 25–26 червня 2015. – Київ: НУХТ, 2015. – С. 97–99. – ISBN 978-966-8705-35-7

58. Глухов Ю. П. Динамічна просторова задача для пластини, що лежить на стисливій основі з початковими напруженнями // Міжнародна науково-технічна конференція «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» 19–20 травня 2015. – Тернопіль: ТНТУ, 2015. – С. 36. – ISBN 978-966-675-328-5

59. Глухов Ю.П. Про напружений стан шаруватої нестисливої основи з початковими деформаціями при дії рухомого навантаження // IV Міжнародний

інтернет-симпозіум «Сучасні проблеми інженерної механіки» 15–17 травня 2015. – Луцьк: ЛНТУ, 2015. – ISBN 978-966-602-436-9

60. Глухов Ю.П. Моделювання пружно-деформованого стану шаруватої основи з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // XV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Сучасні проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» 17–19 вересня 2015, Миколаїв, 2015. – С. 48. – ISBN 978-966-336-241-9

61. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Денисенко В.І., Діденко Ю.Ф. Про поверхневу нестійкість «резонансного» типу в динамічних задачах для півплощини з початковими напруженнями // III Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 23–27 вересня 2015, Кременчук. – С. 100–101. – ISBN: 978-966-2512-86-2

62. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Просторова задача для пластини, що лежить на стисливому напівпросторі з початковими напруженнями, при дії рухомого навантаження // III Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 23–27 вересня 2015, Кременчук. – С. 98–99. – ISBN: 978-966-2512-86-2

63. Глухов Ю.П. Моделирование многослойного основания при воздействии подвижной нагрузки // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы V Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч.1. – Гомель: БелГУТ, 2016. – С. 115–119. – ISBN 978-985-554-352-8

64. Бабич С.Ю., Лазар В.Ф., Глухов Ю.П. Динамика двухслойного полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Науковий вісник Мукачівського державного університету, Мукачево: Вид-во МДУ, 2016. – № 21(16). – С.7–20. – ISSN 2311-8164

65. Бабич С.Ю., Глухов Ю. П., Дегтярь С.В. О плоских задачах со смешанными граничными условиями для полуплоскости с начальными напряжениями // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки –

2016”. – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ, Київ 18–21 квітня 2016. – С. 96. – ISBN 978-966-02-7993-5

66. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф.* Учет инерции вращения при определении напряженно-деформированного состояния двухслойного основания с начальными напряжениями // 3-я международная научно-практическая интернет-конференция «Актуальные проблемы инженерной механики», Одесса – Киев, 10–14 мая 2016. – С. 10–11. – ISBN 978-617-689-158-6

67. *Глухов Ю.П.* Влияние начальных напряжений на значение критических скоростей движения поверхностной нагрузки // IV Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 3–5 жовтня 2016, Кременчук. – С. 49–50. – ISBN 978-966-8460-91-2

68. *Глухов Ю.П.* Про одну динамічну задачу для шаруватої основи з початковими напруженнями // XV Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. – Кременчук, 4–6 листопада 2016. – С. 124. – ISBN 978-966-2512-97-8

69. *Глухов Ю.П.* Влияние начальных напряжений и скорости движения нагрузки на напряженно-деформированное состояние слоистого полупространства // V Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 3–5 жовтня 2017, Кременчук. – С. 33–35. – ISBN: 978-966-2512-20-6

70. *Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Корнієнко В.Ф.* Особенности динамических контактных задач для поперечно нагруженной плоскости, связанных с поверхностными волнами Релея // V Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика», 3–5 жовтня 2017, Кременчук. – С. 15–17. – ISBN: 978-966-2512-20-6

71. *Глухов Ю.П.* Про одну динамічну задачу для багатшарового півпростору з початковими напруженнями // XVI Міжнародна науково-технічна конференція

“Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. – Кременчук, 3–5 листопада 2017. – С. 129–130. – ISBN: 978-966-2512-23-7

72. Глухов Ю.П. Об одной задаче для многослойной плиты с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // VIII-я Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте», 23–24 ноября 2017, Республика Беларусь, г. Гомель. – С. 178–180. – ISBN 978-985-554-690-1

73. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Дегтяр С.В. Аналіз впливу початкових напружень при взаємодії системи двох однакових штампів на півплощину під дією нормальної сили // II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку». – Бердянськ, 25–26 квітня 2018. – С. 23–24. – ISBN: 978-966-8477-56-6

74. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Дегтяр С.В. Моделювання багатошарової основи з початковими напруженнями в задачах про рухоме навантаження // 8-ма Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». – Кам'янець-Подільський, 18–20 квітня 2018. – С. 87–88. – ISBN: 978-966-2184-21-0

75. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан двошарового напівпростору з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція „Математичні проблеми технічної механіки – 2018”. – Кам’янське, Дніпро, Київ 16–19 квітня 2018. – С. 38. – ISBN: 978-966-02-8477-3

76. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Математичне моделювання хвильових процесів в багатошарових конструкціях з початковими напруженнями // Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об’єктів, явищ і процесів: Матеріали III-ої всеукраїнської науково-практичної конференції (17–19 жовтня 2018 р., м. Миколаїв). – Миколаїв: МНУ імені В.О. Сухомлинського, 2018. – С.71–72. – ISBN: 978-966-2880-33-9

77. Глухов Ю.П. Про одну динамічну задачу для багатошарової напівплощини з початковими напруженнями // XVII Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів”. – Кременчук, 2–4 листопада 2018. – С. 167–168. – ISSN 2305-1353. – ISBN: 978-966-2512-36-7

78. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів в шаруватих конструкціях з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Прикладна математика та комп’ютерні науки: матеріали Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції, м. Маріуполь, 22 лютого 2019 року. – Маріуполь, Донецький державний університет управління, 2019. – С. 33–35. – ISBN: 978-617-7472-79-5

79. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для слоистого полупространства с начальными напряжениями // 6-я международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы инженерной механики», Одесса – Киев, 20–24 мая 2019. – С. 357–358. – ISBN 978-617-7195-87-9

80. Глухов Ю.П. Представление решения задачи о реакции многослойного сжимаемого основания с начальными напряжениями на подвижную нагрузку // IX-я Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте», 28–29 ноября 2019, Республика Беларусь, г. Гомель. – С. 197–199. – ISBN 978-985-554-879-0

81. Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватій основі з початковими напруженнями // Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об’єктів, явищ і процесів: Матеріали IV-ої всеукраїнської науково-практичної конференції (16–18 жовтня 2019 р., м. Миколаїв). – Миколаїв: МНУ імені В.О. Сухомлинського, 2019. – С.64–65. – ISBN 978-966-336-308-9

82. Глухов Ю.П. Представлення розв’язку задачі про реакцію багатошарового на півпросторі з початковими напруженнями на рухоме навантаження // XVIII Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних

і біологічних об'єктів". – Кременчук, 1–3 листопада 2019. – С. 133–134. – ISBN 978-966-8460-41-7

83. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан пружної основи з початковими напруженнями, захищеної пружним шаром, при дії рухомого навантаження // Міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2020», Дніпро, 13–16 квітня 2020. – С. 24. – ISBN 978-966-02-9162-3

84. Глухов Ю.П. Об одной динамической задаче для сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // IX Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. – Кам'янець-Подільський, 14–15 травня 2020. – С. 7–11. – ISBN 978-966-02-9197-5

85. Глухов Ю.П. Про одну модель захисного покриття для півпростору з початковими напруженнями // XIX Міжнародна науково-технічна конференція “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів”. – Кременчук, 6–8 листопада 2020. – С. 94–95. – ISBN 978-966-8460-51-6

86. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В.Ф. Построение точных решений динамических задач для тел с начальными напряжениями на основе комплексных потенциалов // X-я Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте», 26–27 ноября 2020, Республика Беларусь, г. Гомель. – С. 67–68. – ISBN 978-985-554-942-1

87. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів у попередньо напруженій основі із захисним покриттям // III Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Прикладна математика та комп'ютерні науки», Маріуполь, 26 лютого 2021. – С. 48–50. – ISBN 978-966-02-9271-2

88. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватій основі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // XXI міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми

технічної механіки – 2021», Кам'янське, Дніпро, 13–16 квітня 2021. – С. 30. – ISBN 978-966-02-9365-8

89. Глухов Ю.П. Моделювання захисного покриття для пружної основи з початковими напруженнями // 8-а міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 11–14 травня 2021. – С. 124–125. – ISBN 978-617-7900-40-4

90. Глухов Ю.П. Про одну модель захисного покриття для півпростору з початковими напруженнями. Метод комплексних потенціалів // Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою - 2022», Дніпро, 12–14 грудня 2022. – С. 19. – ISBN 978-617-7745-23-1

91. Глухов А.Ю., Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан пружного півпростору із захисним покриттям та початковими напруженнями // 89 Міжнародна наукова конференція молодих учених, аспірантів і студентів "Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті", Київ, 3–7 квітня 2023. Ч.2. – С. 102. – ISBN 978-966-8705-52-4

92. Глухов Ю.П. Вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і рухомого навантаження на напружено-деформований стан нестисливого півпростору // XXIII міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2023», Кам'янське, Дніпро, 13–16 квітня 2023. – С. 9. – ISBN 978-966-02-9827-1.

93. Глухов Ю.П. Про одну модель захисного покриття для нестисливого півпростору з початковими напруженнями // XVI Міжнародній науково-технічній конференції «АВІА – 2023», Київ, 18–20 квітня 2023. – С. 15.5–15.9. – ISBN 978-966-02-9797-7

94. Глухов Ю.П. Напружено-деформований стан пружної основи із захисним покриттям та початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління

кібербезпекою – 2023», Дніпро, 18–20 квітня 2023. – С. 7–8. – ISBN 978-617-7745-39-2

95. *Glukhov Yu.P.* About one model of protective covering for half-space with initial stresses. Complex potentials method // Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою – 2023», Дніпро, 18–20 квітня 2023. – С. 8–9. – ISBN 978-617-7745-39-2

96. *Глухов Ю.П.* Напружено-деформований стан нестисливого попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям при дії рухомого навантаження // XXIII МНТК “Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта”, 30 травня – 1 червня 2023 р. м. Київ. – С. 1–4. – DOI: 10.20535/2409-7160.2023.XXIII.278107

97. *Глухов Ю.П.* Про одну динамічну задачу для нестисливого півпростору з початковими напруженнями // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», Львів, 23–25 травня 2023. – С. 69–71. – ISBN 978-966-02-9853-0. – Режим доступу: http://iarpmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_27.pdf

98. *Глухов Ю.П.* Про одну модель захисного покриття для півпростору з початковими напруженнями. Метод комплексних потенціалів // XXIII міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2023», Кам’янське, Дніпро, 13–16 квітня 2023. – С. 40. – ISBN 978-966-02-9827-1

99. *Глухов Ю.П.* Напружено-деформований стан нестисливого шаруватого півпростору з початковими напруженнями при дотичному навантаженні // XXIII міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2023», Кам’янське, Дніпро, 13–16 квітня 2023. – С. 73. – ISBN 978-966-02-9827-1

100. *Glukhov Yu.P., Glukhov A.Yu.* Stressed-deformed state of an elastic base with a protective coating and initial stresses under the action of a moving load // VII International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics» Taras

Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics. – 28–29.08.2023, Kyiv, Ukraine. – P. 12. – ISBN 978-966-02-9931-5

101. Глухов Ю.П. Вплив жорсткості поверхневого шару і умов контакту на напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями // III Міжнародна науково-технічна конференція «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту», Вінниця, ВНТУ, 1–3 червня 2023 року. – С. 78–79. – ISBN 978-966-641-935-7

102. Глухов Ю.П. Вплив початкових напружень та швидкості навантаження на напружено-деформований стан нестисливого півпростору // Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки – 2023», Київ, 14–16 листопада, 2023. – С. 28–30. – ISBN 978-617-95378-0-6

103. Глухов Ю.П. Динамічні процеси в шаруватій основі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // XXVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, ЛНУ, ІППММ, 7–9 листопада 2023 року. – С. 102–106. – ISBN 978-966-02-9977-3

104. Глухов Ю.П. Математичне моделювання динамічних процесів в шаруватих конструкціях з початковими напруженнями // VIII Міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем КМОСС – 2023», Дніпро, 1–3 листопада 2023 року. – С. 38–39. – ISBN 978-966-02-9953-7

105. Глухов А.Ю., Глухов Ю.П. Поширення пружних хвиль кручення вздовж шарів композитного нестисливого матеріалу з початковими напруженнями // Міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2024», Дніпро, 17–19 вересня 2024. – С. 151. – ISBN 978-966-02-9999-5

106. Glukhov A.Y., Glukhov Yu.P. Propagation of elastic torsional waves along layers of an incompressible composite material with initial stresses // Міжнародна наукова

конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою – 2024», Дніпро, 14–17 квітня 2024. – С. 114. – ISBN 978-617-7745-60-6

107. Глухов А.Ю., Глухов Ю.П. Поширення пружних хвиль кручення вздовж шарів композитного стисливого матеріалу з початковими напруженнями // XXIV міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2024», Кам'янське, Дніпро, 18–20 квітня 2024. – С. 42. – ISBN 978-966-02-9999-5

108. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів в шаруватій основі з початковими напруженнями // Міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2024», Дніпро, 17–19 вересня 2024. – С. 141. – ISBN 978-966-02-9999-5

109. Glukhov Yu.P. Modeling of dynamic processes in a layered base with initial stresses // Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою – 2024», Дніпро, 14–17 квітня 2024. – С. 113. – ISBN 978-617-7745-60-6

110. Глухов Ю.П. Шарувата основа з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження // XXIV міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2024», Кам'янське, Дніпро, 18–20 квітня 2024. – С. 41. – ISBN 978-966-02-9999-5

111. Глухов Ю.П. Захищений пружним шаром стисливий попередньо напружений півпростір при дії рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації – Optima – 2024», Кам'янець Подільський, 28–29 червня 2024. – С. 77–80. – Режим доступу: URL <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>

112. Глухов Ю.П. Моделювання динамічних процесів в шаруватій нестисливій основі з початковими напруженнями // 10-а міжнародна науково-практична

конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки», Одеса, 5–7 червня 2024. – С. 133–137. – ISBN 978-617-689-284-2

113. *Babich S., Glukhov Y., Zhiguts Y.* Solution of the plane problem on the determination of stresses under the action of a moving load on the free surface of a half-space // The XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research», June 03–05, 2024, Berlin, Germany. 521 p. – P. 434–437. – ISBN 9-789-40372-405-8

114. *Babich S., Zhiguts Y., Glukhov Y.* Solving the Problem of Determining the Pre-Stressed State of a Half-Space for Mobile Load Conditions by Integral Fourier Transforms // The XXVI International Scientific and Practical Conference «World Problems and Ways of Solving Modern Problems», July 02–05, 2024, Oslo, Norway. – P. 233–237. – ISBN – 979-8-89443-783-5. – DOI: 10.46299/ISG.2024.1.26

115. *Глухов Ю.П.* Дві моделі захисного покриття для пружної основи з початковими напруженнями // Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи», 7–11 жовтня 2024, Київ, Інститут механіки ім. С.П Тимошенка НАН України. – С. 322–324. – ISBN 978-617-95378-0-6

116. *Глухов Ю.П.* Вплив початкових напружень та швидкості навантаження на напружено-деформований стан стисливого півпростору // XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», 24–26 вересня 2024, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – С. 159–161. – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/mpmns2024/materials/mpmns2024_S0502.pdf

117. *Глухов Ю.П.* Шаруватий півпростір з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження // Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи», 7–11 жовтня 2024, Київ, Інститут механіки ім. С.П Тимошенка НАН України. – С. 328–330. – ISBN 978-617-95378-0-6

118. *Глухов Ю.П.* Шарувата попередньо напружена полоса на пружній основі при дії рухомого навантаження // XXIII МНТК “Прогресивна техніка, технологія та

інженерна освіта”, 28–29 листопада 2024 р. м. Київ. – С. 56–59. – ISBN 978-617-8113-12-9

119. Глухов Ю.П. Про одну динамічну задачу для попередньо напруженої полоси на жорсткій основі // Міжнародна науково-практична конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2025», Дніпро, 15–17 квітня 2025. – С. 34.

ДОДАТОК Б

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ

Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових вітчизняних та міжнародних конференціях, зокрема: Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Кам'янське, Дніпро, 2006–2014, 2016, 2018, 2020–2025); XV–XVII Міжнародна конференція «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (Київ, 2011, 2013, 2015); Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика» (Кременчук, 2011, 2013, 2015–2017); XIII Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (Миколаїв, 2011); Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Миколаїв, 2011, 2012); XIV, XV Міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012, 2014); Міжнародна конференція «Моделювання, управління і стійкість (MCS-2012)» (Севастополь, 2012); Міжнародна науково-технічна конференція «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки (ММАР-2013)» (Харків, 2013); Всеукраїнська науково-методична конференція «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», (Київ, 2013, 2015); I Міжнародна XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2014); Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика» (Суми, 2014, 2015); IX, XI Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2014, 2024); XIII, XV–XIX Міжнародна науково-технічна конференція «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів» (Кременчук, 2014, 2016–2020); II, III, VI, VIII, X міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса–Київ, 2015, 2016, 2019, 2021, 2024); Міжнародна науково-технічна конференція «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» (Тернопіль, 2015); IV Міжнародний інтернет-симпозіум «Сучасні проблеми інженерної механіки» (Луцьк, 2015); XV

Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» (Миколаїв, 2015); II Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Наука III тисячоліття: пошуки, проблеми, перспективи розвитку» (Бердянськ, 2018); VIII, IX Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам'янець-Подільський, 2018, 2020); III, IV всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів»: (Миколаїв, 2018, 2019); Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція «Прикладна математика та комп'ютерні науки» (Маріуполь, 2019, 2021); Міжнародна наукова конференція «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою» (Дніпро, 2022–2024); Міжнародна наукова конференція молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті» (Київ, 2023); XVI Міжнародна науково-технічна конференція «АВІА-2023» (Київ, 2023); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 2023); VII International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics» (Kyiv, 2023); III Міжнародна науково-технічна конференція «Перспективи розвитку машинобудування та транспорту» (Вінниця, 2023); Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки» (Київ, 2023); XXVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2023); VIII Міжнародна науково-технічна конференція «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем (КМОСС-2023)» (Дніпро, 2023); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (Optima-2024)» (Кам'янець-Подільський, 2024); XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research» (Berlin, 2024); XXVI International Scientific and Practical Conference «World Problems and Ways of Solving Modern Problems» (Oslo, 2024); Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи»

(Київ, 2024); XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Київ, 2024).

У повному обсязі дисертація доповідалась й обговорювалась на науковому семінарі відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ (керівник – академік НАН України, д. ф.-м. н. Богданов В.Л., 2024, 2025 р.); на науковому семінарі за напрямком «Механіка композитних та неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., професор Рушицький Я.Я., 2025 р.); на загальноінститутських семінарах з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор Назаренко В.М., 2025 р.).