

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА**

Кіпніс Олександр Леонідович



УДК 539.3

**СТІЙКІСТЬ МАТЕРІАЛІВ З ПОКРИТТЯМ ПРИ СТИСКУ
ВЗДОВЖ МЕЖІ ПОДІЛУ ЗА РІЗНИХ УМОВ МІЖФАЗНОГО КОНТАКТУ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2026

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі реології Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Науковий консультант: академік НАН України, доктор фізико-математичних наук
Богданов Вячеслав Леонідович,
завідувач відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Марчук Олександр Васильович,
в.о. завідувача кафедри опору матеріалів і машинознавства
Національного транспортного університету;

доктор фізико-математичних наук, професор
Куш Володимир Іванович,
провідний науковий співробітник відділу №9
Інституту надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Острик Володимир Іванович,
провідний науковий співробітник
Інституту прикладної фізики НАН України.

Захист відбудеться « 14 » травня 2026 року о 10:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 311.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504, та на офіційному веб-сайті: <https://inmech.kyiv.ua/1/ua/dissertations/>.

Автореферат розісланий « 6 » квітня 2026 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01
доктор фізико-математичних наук



Анатолій ХОРОШУН

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з можливих механізмів початку (старту) процесу руйнування при стиску неоднорідних тіл і елементів конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, як шаруваті композити, армовані волокнисті структури і матеріали з покриттям, є втрата стійкості частини матеріалу. Це може бути локальна нестійкість поблизу існуючого дефекту, мікровипучування волокна або зморщування тонкої плівки покриття. При цьому руйнування таких конструкцій при стиску часто відбувається за менших значень зовнішнього навантаження, ніж при розтягу.

Значний внесок в дослідження втрати стійкості тіл при стиску, в т.ч. вздовж дефектів та вздовж межі поділу середовищ кусково-однорідного тіла, зробили О.М. Гузь, В.Л. Богданов, В.М. Назаренко, І.Ю. Бабич, С.Ю. Бабич, І.О. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Кнюх, Ю.В. Коханенко, І.П. Стародубцев, Ю.І. Хома, В.М. Чехов, Н.G. Allen, A.D. Bakiler, M.A. Biot, Y. Cao, X. Chen, B. Cotterell, P. Gu, J.W. Hutchinson, H. Mei, S. Nikraves, R.W. Ogden, X.R. Zhuo та інші науковці.

Вагомі результати з моделювання різних типів міжфазних з'єднань (в кусково-однорідних тілах) та умов контакту отримали С.Д. Акбаров, О.Є. Андрейків, Ю.А. Антипов, І.Ю. Бабич, О.М. Гузь, І.О. Гузь, А.О. Камінський, Л.А. Кіпніс, В.С. Кирилюк, Ю.В. Коханенко, Р.М. Кушнір, В.І. Куш, В.В. Лобода, Р.М. Мартиняк, О.В. Марчук, В.В. Михаськів, В.І. Острик, В.В. Панасюк, Г.Я. Попов, М.П. Саврук, Г.Т. Сулим, А.Ф. Улітко, В.М. Чехов, М.О. Шульга, M. Comninou, J. Dundurs, F. Erdogan, J.R. Rice та інші.

Елементи конструкцій, що складаються з товстої податливої підкладки, покритої тонкою жорсткішою плівкою (бішар), знаходять широке застосування у мікроелектроніці (гнучкі датчики та дисплеї), робототехніці, відновлювальній енергетиці (сонячні панелі), біомедичних технологіях та інших областях. При цьому, щоб не обмежувати здатність плівки до деформації, при виготовленні таких елементів контакт плівки з підкладкою часто роблять не ідеальним, а таким, що допускає проковзування з низьким коефіцієнтом тертя. Також в процесі виготовлення таких елементів конструкцій, їх збирання чи подальшої експлуатації в них можуть виникати різноманітні дефекти (тріщини, розшарування, непроклеї тощо), які повинні враховуватись при розрахунках на їх міцність і довговічність.

Якщо такий структурний елемент знаходиться в умовах стиску, то при досягненні навантаженням свого критичного значення відбувається втрата стійкості плівки покриття з утворенням на поверхні бішару хвилеподібного візерунка; таке явище називають *зморщуванням* (в англійській літературі використовується термін *wrinkling*).

На критичні параметри втрати стійкості бішарів істотно впливає наявність у них дефектів, як-от тріщини (розшарування) чи зони проковзування. Наприклад, при формуванні достатньо довгого розшарування на межі поділу підкладки та покриття, візерунок на поверхні, що виникає при втраті стійкості, є одним вираженим блистером в області над розшаруванням; даний механізм відомий в літературі як *випучування* (*buckling*).

Для визначення критичних параметрів стискаючого навантаження, що відповідають втраті стійкості таких структур, широко використовуються наближені підходи на основі різних прикладних двовимірних теорій балок і пластин (балкові підходи). Однак ці підходи мають низку істотних недоліків.

По-перше, вони беруть до уваги лише один із механізмів втрати стійкості (*wrinkling* або *buckling*), не враховуючи їхньої можливої взаємодії. В результаті реальні критичні навантаження можуть бути значно нижчими від тих, що передбачаються наближеними моделями. І хоча змішаний характер втрати стійкості неодноразово спостерігався в експериментах та числових дослідженнях, його теоретичний опис досі залишався нерозробленим.

По-друге, наближені формули отримано для фізично-лінійних матеріалів тіла, що виправдано лише тоді, коли плівка істотно жорсткіша за підкладку. Це суттєво обмежує їх застосовність, особливо у задачах, де компоненти бішару мають порівнянну між собою жорсткість, а самі матеріали є гіперпружними і здатними витримувати великі деформації. Так, наприклад, у багатьох біологічних системах у процесі розвитку на їх поверхні двошарової тканини формується характерний зморшкуватий малюнок, пов'язаний з невідповідністю напружень у шарах. У таких випадках наближені формули можуть давати похибку в десятки відсотків.

Незважаючи на ці обмеження, наближені підходи (моделі) продовжують широко використовуватися для валідації результатів, отриманих чисельними методами. При цьому навіть із їх застосуванням задачі про стиск гіперпружних бішарів з дефектами вздовж межі поділу середовищ при великих критичних деформаціях залишаються практично не дослідженими – через незастосовність лінійної теорії пружності у відповідному біфуркаційному аналізі. Задачі ж про стиск бішарів з компонентами, що проковзують, і міжфазними зонами проковзування скінченної довжини в літературі і зовсім досі не розглядалися.

Ефективним підходом до вивчення зазначених проблем є застосування розробленої в роботах О.М. Гузя тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл у поєднанні із запропонованим ним в її рамках критерієм руйнування тіл при стиску.

У цій дисертаційній роботі вказаний лінеаризований підхід застосовується до дослідження плоских задач (за умов плоскої деформації) про стиск напівобмежених кусково-однорідних гіперпружних тіл з дефектами і без них зусиллями, спрямованими уздовж прямолінійної межі поділу середовищ.

Таким чином, дисертація спрямована на розвиток тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл стосовно задач про стиск напівобмежених гіперпружних бішарів – як без дефектів, так і з різними типами міжфазних дефектів або дефектів, розташованих поза межею поділу середовищ. Поставлені завдання мають як теоретичну наукову значущість, так і прикладну цінність для інженерних застосувань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Наукове дослідження, представлене у дисертаційній роботі, відповідає програмам і планам наукових досліджень НАН України (Секція фізико-технічних і математичних наук), а окремі його результати увійшли до звітів з науково-дослідних робіт, які проводилися в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка за темами: «Дослідження стійкості армованих композитних матеріалів та оболонкових елементів конструкцій з них з різними типами геометричних та структурних недосконалостей» (№ ДР 0120U101775, 2020–2021 рр.), «Дослідження поведінки композитних матеріалів різної структури (армованих короткими волокнами та шаруватих) та оболонкових конструкцій з них в умовах дії стискаючих навантажень» (№ ДР 0119U103519, 2020–2024 рр.), «Чисельно-аналітичне моделювання процесів деформування, стійкості та руйнування структурно-неоднорідних матеріалів (в тому числі з дефектами) при різних умовах навантаження» (№ ДР 0124U005008, 2025–2029 рр.), «Прогнозування макрохарактеристик композитних матеріалів регулярної та нерегулярної структури з урахуванням довготривалого деформування для розрахунку елементів конструкцій ракетної техніки» (№ ДР 0125U000923, 2025–2026 рр). Також результати дисертації увійшли до проміжного звіту з науково-дослідної роботи молодих вчених НАН України «Дослідження критичного стану тріщин та траєкторій їх поширення, а також розповсюдження хвиль в рамках нелінійних підходів сучасної комп'ютерної та аналітичної механіки» (№ ДР 0125U001293) в рамках гранту НАН України для молодіжних лабораторій/груп молодих вчених в 2025–2026 рр.

Метою дослідження є

- розробка в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл напіваналітичного підходу до дослідження задач про стиск напівобмежених тіл із плівкою покриття (бішар) вздовж дефектів, розташованих на прямолінійній межі поділу середовищ або паралельних їй;

- застосування цього підходу до дослідження задач плоскої деформації про стиск напівобмежених гіперпружних тіл з покриттям, послаблених тріщинами або міжфазними зонами гладкого проковзування;
- дослідження задач про стиск аналогічних тіл без дефектів як граничних випадків задач для тіл з дефектами;
- аналіз залежностей одержаних критичних параметрів навантаження від механічних характеристик матеріалів і геометричних параметрів задачі, а також від виду комбінації пружних потенціалів нелінійно-пружних (гіперпружних) матеріалів тіла.

Для досягнення мети вирішувались наступні завдання:

- формулювання в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості строгої математичної постановки відповідних граничних задач про стиск гіперпружного бішару з дефектами та без дефектів та перехід до еквівалентних граничних задач у термінах потенціальних гармонічних функцій із використанням загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги;
- зведення цих граничних задач до трансцендентних рівнянь відносно параметра критичного навантаження у випадку відсутності дефектів або до задач на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду (або системи таких рівнянь) у випадку наявності дефекту;
- розробка та реалізація числового дослідження зазначених трансцендентних рівнянь і задач на власні значення з метою визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають початковому етапу руйнування, зумовленому локальною втратою стійкості матеріалу;
- дослідження впливу на критичні значення параметрів навантаження таких чинників:
 - механічних характеристик компонентів бішару (жорсткості, стисливості), а також відносної товщини покриття (у випадку наявності дефекту);
 - умов контакту між берегами дефекту та між компонентами бішару;
 - виду конститутивної моделі гіперпружних матеріалів, що утворюють бішар;
- вивчення взаємодії двох різних механізмів втрати стійкості (*зморщування (wrinkling)* та *випучування (buckling)*) при стисканні бішарів вздовж міжфазних дефектів та аналіз застосовності відповідних їм наближених підходів на основі геометрично лінійних та нелінійних теорій балок та пластин.

Об'єктом дослідження є явище втрати стійкості при стиску гіперпружних кусково-однорідних напівобмежених тіл вздовж межі поділу середовищ, як у присутності, так і за відсутності дефектів.

Предметом дослідження є критичні параметри навантаження, що відповідають втраті стійкості бішарів із різних гіперпружних матеріалів: при зморщуванні тіл без дефектів, при стиску вздовж міжфазних зон гладкого проковзування та тріщин.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії пружності та представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції для випадку плоскої задачі. З використанням апарату інтегральних перетворень Фур'є сформульовані граничні задачі відносно гармонічних потенціалів зведено до задач на власні значення для інтегральних рівнянь (систем рівнянь) Фредгольма першого роду у випадку задач для тіл з дефектами або до трансцендентних рівнянь у випадку задач для тіл без дефектів. Для чисельного дослідження інтегральних рівнянь використано метод Бубнова-Гальборкіна; чисельне інтегрування проведено за допомогою квадратурних формул Гауса з вузлами в нулях поліномів Лежандра. Для чисельного дослідження трансцендентних рівнянь в роботі використовувався метод Ньютона та метод бісекції.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- Вперше у рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розроблено напіваналітичний підхід до дослідження критичних параметрів втрати стійкості напівобмежених гіперпружних бішарів при стиску, який дозволяє враховувати довільну структуру пружних потенціалів, як для стисливих, так і для нестисливих матеріалів. Зазначений підхід використано до дослідження нового класу задач механіки руйнування матеріалів – плоских задач про стиск напівобмежених тіл з покриттям вздовж прямолінійної межі поділу середовищ за різних умов контакту підкладки і шару покриття.
- Вперше розв'язано плоску задачу про втрату стійкості напівобмеженого бішару без дефектів під дією стискаючих зусиль, спрямованих вздовж межі поділу середовищ. При цьому:
 - одержано трансцендентні рівняння для визначення критичних параметрів навантаження для тіл з жорстко з'єднаними або проковзуючими без тертя компонентами;
 - оцінено точність класичних наближених формул для визначення wrinkling-деформації та обґрунтовано межі застосовності моделей із напівобмеженою підкладкою.
- Вперше розв'язано плоскі задачі про втрату стійкості напівобмеженого бішару з міжфазними дефектами та дефектами, розташованими поза межею поділу середовищ, під дією стискаючих зусиль, спрямованих вздовж межі поділу. При цьому:
 - задачі про бішар з міжфазною тріщиною (у випадку жорстко з'єднаних та проковзуючих без тертя компонент) і бішар з міжфазною зоною гладкого проковзування

зведено до задач на власні значення для інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (або їх систем), які допускають ефективне чисельне дослідження;

- для випадків відносно коротких і відносно довгих тріщин проведено порівняння отриманих в роботі результатів з відомими результатами, отриманими раніше іншими авторами в рамках наближених підходів на основі різних прикладних двовимірних теорій балок і пластин, які застосовуються для оцінки критичних *wrinkling*- і *buckling*-деформацій, відповідно. У разі тріщин проміжної довжини вперше теоретично показано, що через взаємодію механізмів зморщування (*wrinkling*) та випучування (*buckling*) критичні значення відносних укорочень у бішарі істотно нижчі, ніж передбачається в рамках наближених підходів;

- розглянуто задачу про бішар з тріщиною, розташованою паралельно межі поділу, та проаналізовано застосовність континуальних наближень структурно неоднорідних тіл для цього класу задач.

- Здійснено аналіз впливу типу дефекту, умов контакту на межі поділу середовищ, механічних характеристик матеріалів та вибору конститутивної моделі на критичні параметри навантаження.
- Наведено інженерні оцінки щодо доцільності врахування міжфазних дефектів (в залежності від їх відносної довжини) при визначенні параметрів міцності на стиск елементів конструкцій з покриттям на початковій стадії руйнування.

Обґрунтованість та достовірність наукових результатів забезпечується:

- коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл та використанням апробованих методів їх розв'язання;
- збіжністю числових алгоритмів, використаних при розв'язанні трансцендентних рівнянь і задач на власні значення;
- узгодженістю отриманих результатів з відомими даними:
 - a у разі кусково-однорідного тіла з однаковими матеріалами – з результатами, отриманими іншими авторами при дослідженні аналогічних задач для однорідного тіла;
 - b у часткових випадках – з даними натурних експериментів і числових симуляцій, а також з результатами, отриманими в рамках наближених підходів, відомими в літературі;
 - c для тіл з дефектами – з результатами для тіл без дефектів у граничних випадках «нескінченно довгих» та «нульової довжини» дефектів.

- фізичною інтерпретацією результатів, яка узгоджується з відомими механізмами втрати стійкості в бішарах;
- апробацією основних результатів у рецензованих фахових виданнях.

Практичне значення отриманих результатів полягає в:

- можливості застосування отриманих результатів при моделюванні контрольованого зморщування та оцінці несучої здатності гнучких елементів у мікроелектронних та біомедичних пристроях, сонячних елементах, м'якій робототехніці тощо;
- можливості визначення механічних сталих конкретних матеріалів у межах заданої конститутивної моделі на основі спостережених критичних навантажень у експериментах на стискання зразків з тонким покриттям;
- формуванні теоретичної основи для постановки експериментальних досліджень втрати стійкості в тонкоплівкових системах з різними типами дефектів;
- наданні інженерних критеріїв доцільності врахування міжфазних дефектів або послабленого зв'язку між компонентами бішару при оцінюванні міцності на стиск елементів конструкцій на початкових етапах руйнування;
- застосовності розробленого напіваналітичного підходу як незалежного інструмента для валідації результатів, отриманих із використанням скінченно-елементного аналізу та інших числових методів.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавторстві з науковим консультантом академіком НАН України В.Л. Богдановим та академіком НАН України В.М. Назаренком, дисертантом виконано математичну постановку задач, отримано розв'язальні рівняння або їх системи, розроблено алгоритми числового дослідження, виконано числові розрахунки для конкретних моделей матеріалів та проаналізовано залежність критичних параметрів втрати стійкості від геометричних параметрів задач та механічних характеристик досліджуваних матеріалів.

Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародних конференціях, зокрема: International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics ІСТАЕМ-2 (Ханья, Греція, 2019 р.); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019» (Дніпро, 2019 р.); II Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій», присвяченій пам'яті акад. В.І. Моссаковського (Дніпро, 2019 р.); XIX International Conference “Dynamic System Modeling and Stability Investigation” (DSMSI) (Київ, 2019 р.); Міжна-

родній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2024» (Дніпро, 2024 р.); I Міжнародній науково-технічній конференції «Прикладна механіка» (Тернопіль, 2024 р.); X Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2024 р.); 11-тій Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024 р.); Міжнародній науковій конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, 2024 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» (Київ, 2025 р.).

Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на об'єднаному семінарі 3-х відділів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – акад. НАН України Богданов В.Л.) та в повному обсязі – на науковому семінарі секції «Механіка композитних та неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — чл.-кор. НАН України Руцицький Я.Я.) та загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (керівник — акад. НАН України Назаренко В.М.) і одержали позитивні оцінки.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 26 наукових праць: 11 (публікації [1–9, 15, 18]) у виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus, з яких 4 публікації ([2, 5, 6, 8]) – віднесені відповідно до класифікації SCImago Journal до квартилю Q2, 5 (публікації [1, 3, 4, 7, 9]) – до квартилю Q3; 1 публікація [15] – до квартилю Q4; 2 (публікації [13, 16]) – у періодичних виданнях, включених до категорії «А» переліку наукових фахових видань України; 5 (публікації [10–12, 14, 17]) – у періодичних виданнях, включених до категорії «Б» переліку наукових фахових видань України. Дев'ять наукових праць (публікації [18–26]) – тези доповідей міжнародних наукових конференцій. Праці [5–7, 11–17, 19–22, 24, 25] опубліковані автором самостійно.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел із 244 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 344 сторінки, разом із 121 рисунком та 17 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність науковому консультанту академіку НАН України Вячеславу Леонідовичу Богданову та академіку НАН України Володимирі Михайловичу Назаренку за ґрунтовні наукові поради та неоціненну підтримку, надану під час підготовки цієї роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи: проаналізовано стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, окреслено її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету та завдання дослідження; підкреслено наукову новизну й практичну цінність отриманих результатів; наведено дані про апробацію матеріалів дисертації та публікації за її темою; виокремлено особистий внесок здобувача в роботах, виконаних у співавторстві; подано відомості про структуру й обсяг дисертації, а також стисло описано її зміст.

У **першому розділі** подано огляд літературних джерел за темою дослідження. Висвітлено сучасний стан вивчення актуальних задач механіки деформівного твердого тіла: зокрема, граничних станів однорідних і кусково-однорідних тіл при стиску вздовж тріщин, а також втрати стійкості тіл з тонкоплівковим покриттям. На основі аналізу літератури обґрунтовано новизну виконаного дослідження та визначено його місце у сучасному науковому контексті.

Явище втрати стійкості тіла при стиску, що полягає у переході системи в новий стан рівноваги після досягнення критичного навантаження, відоме ще з часів Ейлера, який досліджував втрату стійкості стрижня. Перші результати з визначення критичних параметрів стиску напівобмежених однорідних тіл (зокрема, за умов скінченних деформацій) були отримані в середині ХХ століття у працях Н.Г. Allen, М.А. Biot, С. Sensenig та ін. Тоді ж, у межах геометрично лінійної теорії з використанням балкового наближення, було виведено перші формули для оцінки критичної деформації втрати стійкості бішару, що складається з податливої напівобмеженої підкладки, вкритої тонкою жорсткою плівкою.

У подальшому тривимірна лінеаризована теорія стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ), запропонована О.М. Гузем, надала можливість строгої постановки та аналізу широкого класу плоских і просторових задач. У межах цієї теорії розглядалися задачі про стійкість шаруватих та армованих композитів, проте *задачі про втрату стійкості тонкоплівкових гіперпружних систем у межах ТЛТСДТ досі не вивчалися.*

Інтерес до проблеми втрати стійкості тонких плівок на підкладках значно зріс за останнє десятиліття, про що свідчить велика кількість сучасних теоретичних та експериментальних досліджень. Матеріали, покриті тонкою плівкою, сьогодні широко використовуються в таких галузях, як мікроелектроніка, робототехніка, біомедицина. У роботах J. Groenewold, R. Huang, L. Jin, С.М. Landis, М. Li, Н. Mei, S. Nikraves, R.W. Ogden, M.J. Sharba, В. Sun, F. Xu та інших вчених вивчалися різні аспекти зморщування тонких плівок, що жорстко з'єднані з нестисливою підкладкою. Для дослідження пере-

дусім використовувалися чисельні методи, коректність яких забезпечується порівнянням з наближеними формулами.

Випадки, коли компоненти бішару є гіперпружними та здатні витримувати великі деформації, досліджено значно слабше. Найбільше уваги зосереджено на неогуківських матеріалах, результати для яких наведені у роботах Y. Cao, J.W. Hutchinson, H.M. Verhelst, A.D. Bakiler, A. Javili. *Інші типи гіперпружних матеріалів, а також інші типи зв'язку між компонентами, відмінні від ідеального контакту, не розглядалися.*

У разі наявності на межі поділу компонент тріщини (відшарування) чи іншого дефекту класичні підходи механіки руйнування, сформовані у роботах А. Гріффітса, І. Ешелбі, Дж. Ірвіна, М.Я. Леонова, Е. Орована, В.В. Панасюка, Дж. Райса, А. Уеллса, Г.П. Черепанова та ін., є непридатними для дослідження задач про стиск тіл вздовж таких дефектів.

Натомість ефективним інструментом аналізу проблем про руйнування тіл при стиску вздовж тріщин є поєднання ТЛТСДТ з критерієм руйнування, розробленим у її межах, а саме, критерієм, відповідно до якого початок (старт) процесу руйнування тіл при стиску вздовж тріщин пов'язується з локальною втратою стійкості стану рівноваги частини матеріалу біля тріщини. З використанням такого підходу було детально вивчено плоскі і просторові задачі для однорідних ізотропних і анізотропних нелінійно-пружних матеріалів з тріщинами; при цьому однорідні анізотропні матеріали у межах континуального наближення моделюють також і композитні матеріали. Для розв'язання задач, сформульованих у строгій постановці, застосовувалися як аналітичні, так і числові методи. Над цими задачами працювали О.М. Гузь, В.Л. Богданов, В.М. Назаренко, В.І. Кнюх, І.П. Стародубцев, Ю.І. Хома та інші.

У роботах О.М. Гузя, В.Л. Богданова, В.М. Назаренка, С.Ю. Бабича розглядалися також задачі механіки руйнування для однорідних тіл за наявності діючих уздовж тріщин початкових (залишкових) напружень, у тому числі, стискаючих.

У роботах О.М. Гузя, І.О. Гузя, Ю.В. Коханенка та В. Winiarski було досліджено деякі задачі про стиск необмежених кусково-однорідних тіл із міжфазними тріщинами.

З використанням балкового наближення на основі різних геометрично лінійних та нелінійних теорій балок та пластин або за допомогою скінченно-елементного аналізу задачі про стиск бішарів вздовж міжфазного відшарування досліджували G.G. Adams, V. Cotterell, X. Chen, P. Gu, J.W. Hutchinson, H. Mei, S. Tarasovs, X.R. Zhuo та інші. Практично в усіх дослідженнях матеріали бішару вважалися лінійно пружними.

Як засвідчив аналіз літературних джерел, *задачі про стиск гіперпружних бішарів з різним типом з'єднання компонентів вздовж міжфазних і неміжфазних дефектів у межах ТЛТСДТ раніше не розглядалися.* З використанням інших (наближених) підхо-

дів, які застосовні тільки для надтонких плівок, було досліджено лише окремі задачі про стиск лінійно пружного бішару у випадку ідеального контакту між компонентами вздовж міжфазного відшарування (тріщини). Адекватного ж теоретичного обґрунтування результатів натурних і числових експериментів досі надано не було.

У **другому розділі** роботи стисло викладено необхідні для подальшого дослідження основні співвідношення ТЛТСДТ як у випадку загальних, так і однорідних докритичних напружено-деформованих станів. Окремо, для задач про одновісний стиск в умовах плоскої деформації, проілюстровано побудову загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції для стисливих і нестисливих тіл у разі однорідного початкового стану.

Виклад проведено в координатах недеформованого (природного) стану та з використанням тензорів напружень і деформацій, віднесених до цього стану у межах теорії скінченних початкових деформацій. Основні лінеаризовані співвідношення в загальній формі були одержані О.М. Гузем шляхом строгої послідовної лінеаризації відповідних рівнянь нелінійної теорії пружності.

Розглядаються три стани рівноваги деформівного тіла: недеформований (природний) стан – в тілі відсутні напруження та деформації; початковий (незбурений) напружено-деформований стан, викликаний початковими (або залишковими) напруженнями; збурений стан, викликаний додатковими, по відношенню до початкових, збуреннями напружень та деформацій.

Величини, що відносяться до початкового (незбуреного) стану, надалі будемо позначати індексом “0”. Збурення всіх величин, які вважаються малими по відношенню до величин початкового стану, додатковим індексом не позначаються. Величини, які відносяться до збуреного стану, можна представити як суму величин початкового стану та збурень.

Для опису деформованого стану тіла будемо використовувати лагранжеві координати x_j , $j = \overline{1,3}$, які в недеформованому стані збігаються з декартовими.

В якості міри деформацій приймемо тензор деформацій Гріна ε , компоненти якого внаслідок лінеаризації з урахуванням малості збурень мають вигляд

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} + \left(\delta_{jn} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right], \quad (2.1)$$

де u_j, u_j^0 , $j = \overline{1,3}$ – компоненти відповідних векторів переміщень.

Для опису напруженого стану використовуємо несиметричний тензор Піоли–Кірхгофа \tilde{t} , який вводиться як перерахований на одиницю площі недеформованого ті-

ла тензор Коші, що використовується в класичній теорії пружності, та симетричний тензор напружень Лагранжа \tilde{S} , який відповідає тензору узагальнених напружень.

Тензори напружень \tilde{t} та \tilde{S} пов'язані таким лінеаризованим співвідношенням:

$$t_{ij} = \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}. \quad (2.2)$$

Умова нестисливості (для випадку нестисливих тіл) може бути подана у вигляді

$$g_{*0}^{nm} \varepsilon_{nm} \equiv g_{*0}^{nm} \left(\delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = 0, \quad (2.3)$$

де \vec{g}_j^* – орти системи координат в деформованому стані.

Лінеаризовані рівняння рівноваги в напруженнях записуються наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} t_{ij} + F^j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[S^{in} \left(\delta_{jn} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \right] + F^j = 0, \quad (2.4)$$

а граничні умови в напруження на частині S_1 поверхні тіла і граничні умови в переміщеннях на частині S_2 поверхні мають вигляд

$$N_i t_{ij} \Big|_{S_1} = \left[\left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] \Big|_{S_1} = P_j \quad (2.5)$$

$$u_j \Big|_{S_2} = f_j. \quad (2.6)$$

В (2.4) – (2.6) введені такі позначення: F^j – компоненти масових сил; N_i – складова орта нормалі до поверхні тіла в недеформованому стані; P_j – складові поверхневих сил, пов'язані з поверхнею тіла в деформованому стані.

У дисертаційній роботі розглядаються *ізотропні гіперпружні* тіла. Під *гіперпружними* розуміємо такі нелінійно-пружні матеріали, для яких існує *пружний потенціал* Φ . Для стисливих тіл в цьому разі маємо

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi,$$

для нестисливих тіл

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi + p g_{*}^{ij},$$

де p – скалярна функція, пов’язана з гідростатичним тиском.

Загальна постановка задачі замикається лінеаризованим співвідношеннями пружності для *однорідних ізотропних гіперпружних тіл*.

Для стисливих тіл маємо такі співвідношення між компонентами тензора напружень і вектора переміщень:

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (2.7)$$

де складові тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \omega_{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left(\delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}, \\ S_0^{i\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0, \quad \Phi^0 = \Phi(\varepsilon_{11}^0, \dots, \varepsilon_{33}^0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для нестисливих тіл маємо

$$t_{ij} = \varkappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + q^{ij} p, \quad (2.9)$$

де складові тензорів $\tilde{\omega}$ та \tilde{q} визначаються так:

$$\begin{aligned} \varkappa_{ij\alpha\beta} &= \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left(\delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 - p^0 (g_{*0}^{i\beta} g_{*0}^{mn} + g_{*0}^{im} g_{*0}^{\beta n}) \right] + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}, \\ q^{ij} &= g_{*0}^{im} \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right), \quad S_0^{i\beta} = p^0 g_{*0}^{i\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0 \quad (i, j, \alpha, \beta = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Умови навантаження, які розглядаються у відповідних задачах *плоскої деформації про стиск кусково-однорідних тіл*, будуть забезпечувати реалізацію в кожній з компонент кусково-однорідного тіла однорідного докритичного напружено-деформованого стану, який визначається такими виразами для переміщень:

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i; \quad \lambda_i = \text{const}, \quad \lambda_3 = 1 \quad (i = \overline{1,3}), \quad (2.11)$$

де λ_i – коефіцієнти укорочень вздовж координатних осей x_i ($\lambda_1 < 1$). Недеформованому стану відповідають значення $\lambda_i = 1$.

У разі виконання умов (2.11) в працях О.М. Гузя було побудовано подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги, записаних з урахуванням (2.4), (2.7), (2.9) у термінах переміщень, через потенціальні функції. Так, загальні розв'язки для *однорідного* тіла можуть бути подані через невідому потенціальну функцію χ , яка визначається для стисливих тіл з рівняння

$$\left[\left(\omega_{1111} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\omega_{1221} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2222} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - (\omega_{1122} + \omega_{1212})^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] \chi = 0,$$

а для нестисливих тіл з рівняння

$$\left\{ \mathfrak{a}_{1221} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \left[\mathfrak{a}_{2222} + q^2 \mathfrak{a}_{1111} - 2q (\mathfrak{a}_{1122} + \mathfrak{a}_{1212}) \right] \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + q^2 \mathfrak{a}_{2112} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right\} \chi = 0, \quad q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Подальші спрощення пов'язані з тим, яким є зв'язок між кореням n_1 і n_2 характеристичних рівнянь, які відповідають наведеним вище диференціальним рівнянням для потенціальної функції χ . Зв'язок між цими коренями визначається видом пружного потенціалу матеріалу тіла (інакше кажучи, конкретними виразами для компонентів тензора $\tilde{\omega}$ або $\tilde{\mathfrak{a}}$).

Для стисливих матеріалів справедливі наступні вирази:

$$n_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - \frac{\omega_{2222}\omega_{2112}}{\omega_{1111}\omega_{1221}}}, \quad 2c = \frac{\omega_{2222}}{\omega_{1221}} + \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1111}} - \frac{(\omega_{1122} + \omega_{1212})^2}{\omega_{1111}\omega_{1221}}. \quad (2.12)$$

Для нестисливих матеріалів маємо

$$n_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - q^2 \frac{\mathfrak{a}_{2112}}{\mathfrak{a}_{1221}}}, \quad 2c = \frac{\mathfrak{a}_{2222}}{\mathfrak{a}_{1221}} + q^2 \frac{\mathfrak{a}_{1111}}{\mathfrak{a}_{1221}} - 2q \left(\frac{\mathfrak{a}_{1122} + \mathfrak{a}_{1212}}{\mathfrak{a}_{1221}} \right). \quad (2.13)$$

Подання загальних розв'язків через нові потенціальні функції для *рівних* коренів $n_1 = n_2 = n$ мають вигляд

$$u_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - z \frac{\partial F}{\partial x_1}; \quad u_2 = p_1 F + p_2 \Phi + p_2 z \frac{\partial F}{\partial z};$$

$$t_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[k_1 F + k_2 \Phi + k_2 z \frac{\partial F}{\partial z} \right]; \quad t_{22} = k_4 \frac{\partial F}{\partial z} + k_5 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + k_5 z \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad z = -\frac{x_2}{\sqrt{n}}, \quad (2.14)$$

а для *нерівних* коренів $n_1 \neq n_2$:

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1 + \varphi_2); \quad u_2 = p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2};$$

$$t_{21} = k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1 \partial z_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1 \partial z_2}; \quad t_{22} = k_4 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + k_5^i \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2}, \quad z_j = -\frac{x_2}{\sqrt{n_j}}, \quad j=1,2. \quad (2.15)$$

У виразах (2.14), (2.15) потенціальні функції F , φ , Φ , φ_j , $j=1,2$ є гармонічними функціями; коефіцієнти $k_{1,2,4,5}$, $p_{1,2}$ є відомими функціями компонентів тензорів $\tilde{\omega}$ (для стисливих тіл) або $\tilde{\alpha}$ (для нестисливих тіл). Явний вираз для цих коефіцієнтів різний у випадку рівних і нерівних коренів.

Компоненти тензорів $\tilde{\omega}$ та $\tilde{\alpha}$, що забезпечують зв'язок між напруженнями та похідними від переміщень для стисливих (2.7) та нестисливих (2.9) тіл, у разі реалізації однорідного докритичного стану у випадку плоскої задачі (2.11) залежать від двох параметрів – коефіцієнтів укорочень вздовж координатних осей λ_1 і λ_2 (при одновісному стиску $\lambda_3 = 1$). Указані параметри у випадку задач про стиск тіл вздовж тріщин, які розташовані в площинах $y_2 = const$, не є незалежними; залежність між ними визначається з умови відсутності напружень на площинах, в яких розташовані тріщини, тобто $S_0^{22} = 0$. Тому надалі будемо вважати, що компоненти зазначених тензорів та, як наслідок, коефіцієнтів лінеаризованих рівнянь рівноваги і загальних представлень їх розв'язків, є функціями параметру λ_1 .

Напіваналітичний підхід, що пропонується у межах дисертаційного дослідження, і який пов'язаний з використанням загальних подань розв'язків рівнянь рівноваги (2.14), (2.15) при дослідженні граничних задач про стійкість бішарових систем, дозволяє одержувати розв'язальні рівняння в загальному вигляді для довільної комбінації пружних потенціалів, що описуються стисливі або нестисливі компоненти тіла.

Лише на етапі чисельного дослідження одержаних рівнянь, який є фінальним етапом розв'язання задачі, відбувається конкретизація конститутивних моделей матеріалів шляхом підстановки відповідних залежностей для компонентів тензорів $\tilde{\omega}$ чи $\tilde{\alpha}$.

Будемо використовувати чотири види пружних потенціалів різної структури. Розглядаються стандартний *гармонічний потенціал* (рівні корені) і *квадратичний потенціал* (нерівні корені) для стисливих тіл, а також *потенціал Бартенєва–Хазановича* (рівні корені) і *потенціал Трелоара* (неогуківське тіло, нерівні корені) для нестисливих тіл.

Двоконстантні гармонічний і квадратичний пружні потенціали характеризуються двома сталими μ і ν , в той час як одноконстантні потенціали Бартенєва–Хазановича і Трелоара можуть бути описані однією пружною сталою μ .

Оскільки у разі малих початкових (докритичних) деформацій всі зазначені потенціали моделюють також і лінійно пружні тіла, а сталі μ і ν переходять відповідно у

модулі жорсткості і коефіцієнти Пуассона класичної лінійної теорії пружності, домовимося далі називати їх модулем жорсткості і коефіцієнтом Пуассона матеріалів, взявши до уваги зазначене зауваження.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню стійкості при стиску бішарових систем без дефектів. Бішар складається з двох різних однорідних гіперпружних матеріалів: напівобмеженої підкладки та плівки покриття. Стиск відбувається вздовж прямолінійної межі поділу середовищ, які жорстко з'єднані між собою або проковзують без тертя одне відносно одного.

Елементи конструкцій з тонким покриттям, які знаходяться в умовах стиску, широко використовуються в таких галузях, як мікроелектроніка (гнучкі датчики, дисплеї тощо), робототехніка та біомедична інженерія.

У цьому розділі у межах строгої постановки задачі ТЛТСДТ вперше розглядаються задачі плоскої деформації про стиск кусково-однорідного гіперпружного тіла вздовж межі поділу середовищ за різних умов їх з'єднання. Для кожного випадку з використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.14), (2.15) гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до трансцендентних рівнянь для визначення критичних параметрів навантаження. Розглянуто всі чотири можливі комбінації співвідношень між коренями характеристичних рівнянь (2.12), (2.13).

Одержані в загальному вигляді трансцендентні рівняння для стисливих і нестисливих тіл із довільною структурою пружних потенціалів досліджуються чисельно. На основі результатів для низки конкретних конститутивних моделей аналізуються залежність критичних значень відносного укорочення та критичних довжин хвиль, що утворилися на поверхні тіла в результаті зморщування плівки покриття, від механічних характеристик компонентів бішару, а також чутливість цих значень до структури їх пружних потенціалів.

Проводиться порівняння з відомими наближеними балковими моделями та оцінюються межі їх застосовності. У випадку матеріалу з потенціалом Трелоара (неогуківське тіло) також здійснюється порівняння з результатами, одержаними методами нелінійного біфуркаційного аналізу. Наведено порівняння з даними експериментів та числових симуляцій.

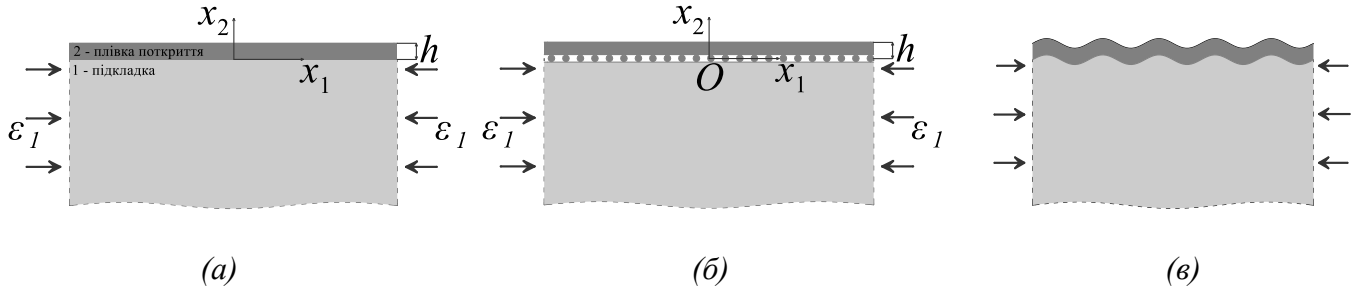


Рис. 3.1

В умовах плоскої деформації розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, що складається з двох компонент: напівобмеженої гіперпружної підкладки «1» ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «2» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ є ненавантаженою. Таке тіло будемо називати *бішаром* або *бішаровою системою*.

Розглядаємо два типи з'єднання компонентів бішарової системи: жорстке з'єднання (рис. 3.1 а) та проковзування без тертя (рис. 3.1 б). Перший тип з'єднання визначається умовами ідеального контакту і забезпечує неперервність компонентів тензора напружень і вектора переміщень вздовж межі поділу. Другий тип – допускає розрив лише дотичного переміщення, а дотичне напруження дорівнює нулю.

Нехай на нескінченності компоненти бішару стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = const, \quad i = 1, 2; \quad \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)} \quad (3.1)$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі Ox_1 для обох компонентів: підкладки та плівки

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = const, \quad \lambda_1 < 1, \quad (3.2)$$

де λ_1^1 , λ_1^2 – коефіцієнти укорочення підкладки та плівки, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно.

Тут і надалі верхнім індексом «1» (іноді – в дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу підкладки, а верхнім індексом «2» (іноді – в дужках) – матеріалу плівки покриття «2».

У цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей «1» і «2» є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень (див. (2.11))

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Відносні укорочення, що реалізуються в компонентах бішару, визначаються через коефіцієнт укорочення λ_1 наступним чином

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^2 = 1 - \lambda_1. \quad (3.4)$$

Граничні умови сформульованої задачі у випадку *жорсткого з'єднання* (рис. 3.1 а) запишуться наступним чином

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} &= 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} &= t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ u_2^{(1)} &= u_2^{(2)}, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty). \end{aligned} \quad (3.5)$$

У випадку *гладкого проковзування* (рис. 1.б) замість останнього рядка в (3.5) маємо

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty). \quad (3.6)$$

Ставиться задача визначити критичні значення відносних укорочень ε_1^f (жорстке з'єднання) та ε_1^s (гладке проковзування), за яких бішарова система втрачає стійкість (рис. 3.1 в). Домовимось надалі називати значення ε_1^f , ε_1^s – критичними деформаціями зморщування або *wrinkling*-деформаціями, як це прийнято в літературі, маючи на увазі значення інженерної деформації (*engineering strain*), а не головного значення тензора деформацій Гріна за відповідним напрямком.

Зведемо задачі з граничними умовами (3.5) та (3.6) до граничних задач, записаних у термінах потенціальних гармонічних функцій.

Хід розв'язання задач у Розділах 3 – 7 суттєвим чином залежить від комбінації співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, записаних для пружного потенціалу матеріалу підкладки n_1^1, n_2^1 та матеріалу плівки n_1^2, n_2^2 . Обмежуючись випадком пружних тіл (корені рівнянь дійсні) до розгляду маємо чотири можливих комбінації між коренями, кожену яких необхідно досліджувати окремо: (i) $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 = n_2^2$; (ii) $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$; (iii) $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$; (iv) $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 = n_2^2$.

Надалі процес побудови трансцендентних (Розділ 3) та інтегральних (Розділи 4 – 7) рівнянь детально викладемо у випадку (i). Інші випадки досліджуються аналогічно.

Підставляючи (2.14) в граничні умови (3.5), (3.6), одержуємо наступні представлення для граничних умов, записані в термінах потенціальних гармонічних функцій:

для *жорсткого з'єднання*

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$\begin{aligned}
& k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^i h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
& k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& k_4^4 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}});
\end{aligned} \tag{3.7}$$

для гладкого проковзування

$$\begin{aligned}
& k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^i h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_1^2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
& k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& k_4^4 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
& k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad (z_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}});
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Не обмежуючи загальності, з урахуванням симетрії конфігурації рис. 3.1 *a, б* відносно осі Ox_2 , по аналогії до задач для однорідного тіла, представимо невідомі потенціальні функції (у випадку рівних коренів характеристичного рівняння) у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1 .

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^{\infty} A(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 d\eta, \quad \Phi^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} B(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 d\eta, \\
F^{(2)}(x_1, z_2) &= \int_0^{\infty} [C_1(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + C_2(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\sinh \eta h_1},
\end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [D_1(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + D_2(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\sinh \eta h_1}, \quad (3.9)$$

$$\varphi^{(1)}(x_1, z_1) = -\int_0^{\infty} B(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 \frac{d\eta}{\eta},$$

$$\varphi^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [D_2(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + D_1(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta \sinh \eta h_1};$$

Представлення (3.9) відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1, z_1)$ відносно координати x_1 , тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$. Крім того, ці представлення для потенціальних функцій у необмеженій за x_2 області «1» забезпечують затухання напружень і переміщень при $x_2 \rightarrow -\infty$.

Підставляючи (3.9) у (3.7) та (3.8), отримаємо системи шести однорідних рівнянь відносно шести невідомих функцій $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$, $D_1(\eta)$, $D_2(\eta)$:

для жорсткого з'єднання

$$\begin{aligned} k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0; \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0; \\ k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0; \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0; \\ p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 &= 0; \\ B + D_1 + \coth \mu \cdot D_2 &= 0 \quad (\mu = \eta h_1); \end{aligned} \quad (3.10)$$

для гладкого проковзування

$$\begin{aligned} k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0; \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0; \\ k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0; \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0; \\ p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 &= 0; \\ k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 + k_1^2 C_2 + k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 + k_2^2 D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Значення критичної деформації зморщування ε_1^r визначається наступним чином: ε_1 дорівнює першому значенню при збільшенні, починаючи зі значення $\varepsilon_1 = 0$, за якого визначник системи рівнянь (3.10) (у випадку (i)), або аналогічної системи рівнянь

для решти трьох випадків перетворюється в нуль при деякому значенні $\eta = \eta^r > 0$, тобто, коли виконується умова

$$\det M_j^r = 0 \quad (j = \overline{1,4}), \quad (3.12)$$

де M_j^r – матриця коефіцієнтів системи рівнянь, що відповідає випадку j з переліку випадків (i) – (iv).

Критична довжина хвилі у випадку *жорсткого з'єднання* визначається так:

$$\lambda^r = \frac{2\pi}{\eta^r}. \quad (3.13)$$

Аналогічно з системи (3.11) маємо трансцендентне рівняння для визначення критичної деформації зморщування ε_1^s у разі гладкого проковзування:

$$\det M_j^s = 0 \quad (j = \overline{1,4}), \quad (3.14)$$

де M_j^s – матриця коефіцієнтів системи рівнянь, що відповідає випадку j з переліку випадків (i) – (iv) (у випадку (i) це система рівнянь (3.11)).

На рис. 3.2, 3.3 представлені результати дослідження у разі жорсткого з'єднання компонентів бішару (рівняння (3.13)) для випадку, коли ті описуються *потенціалом гармонічного типу*. Графік на рис 3.2. відображує залежність критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення $g = \mu_2 / \mu_1$ жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки. Рис 3.3 презентує залежність критичної довжини хвилі, нормованої на товщину плівки (λ^r / h), від параметру g , обраховані за формулою (3.13).

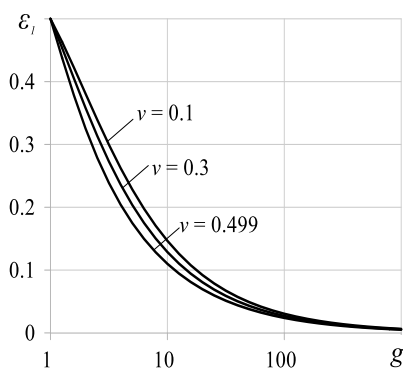


Рис. 3.2

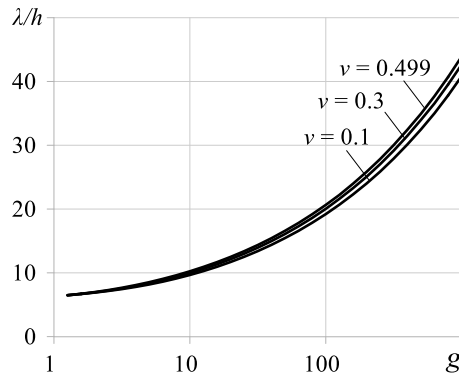


Рис. 3.3

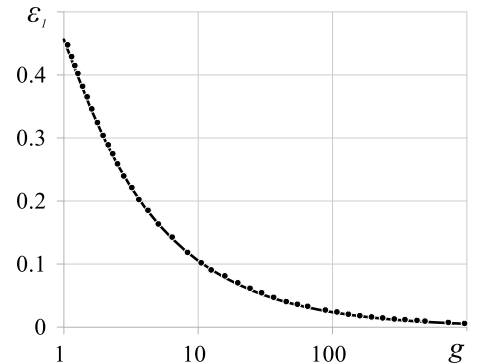


Рис. 3.4

На рис. 3.4 суцільна крива відповідає залежності $\varepsilon_1^r(g)$ для випадку матеріалів з *потенціалом Трелоара*, а крива з маркерів – результатам, одержаним іншими авторами для аналогічного матеріалу з використанням нелінійного біфуркаційного аналізу.

Аналіз даних рис. 3.2, 3.3 показує, що в частинному випадку – коли характеристики жорсткості підкладки і покриття є однаковими ($g = 1$) – одержані значення критичних деформацій зморщування збігаються з відомими з літератури значеннями аналогічного параметру для *однорідної* півплощини.

Також спостерігається гарна узгодженість результатів, отриманих у рамках запропонованого в цій роботі підходу, з результатами експериментальних досліджень.

Порівняння отриманих в роботі результатів з результатами числових симуляцій в роботах інших авторів дало змогу встановити межі застосовності моделі напівобмеженої підкладки: при визначенні критичних деформацій зморщування у випадку *нестисливих тіл* така модель застосовна у разі, коли плівка тонша від неї у 10 та більше разів, а для визначення критичної довжини хвилі – у 30 та більше разів.

Для валідації результатів із визначення критичних деформацій і критичних довжин хвиль, отриманих із застосуванням чисельних методів, обов'язковим є їхнє порівняння з відповідними результатами, що отримані в рамках теоретичного підходу.

Найбільш застосовною є наступна інженерна формула для визначення критичних деформацій зморщування:

$$\varepsilon_1^c = \frac{1}{4} \left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \right)^{2/3}, \quad (3.15)$$

яка отримана з використанням балкового наближення і визначає критичну деформацію зморщування лінійно-пружної плівки, розташованої на більш податливій лінійно-пружній напівобмеженій підкладці, в припущенні ідеально зв'язаних шарів та нехтує зсувним зчепленням на межі поділу. В цьому разі критична довжина хвилі (утвореного на поверхні патерна) визначається так:

$$\lambda^c = 2\pi h \left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \right)^{-1/3} \quad (3.16)$$

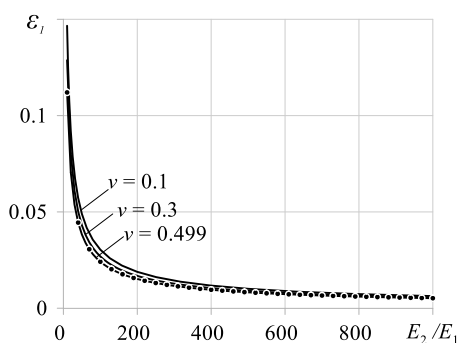


Рис. 3.5

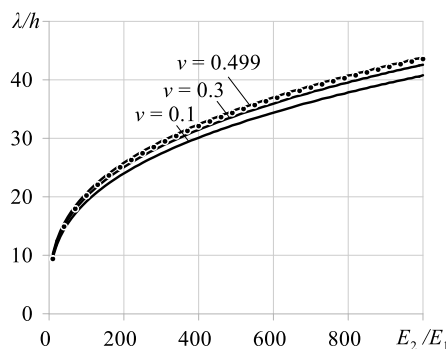


Рис. 3.6

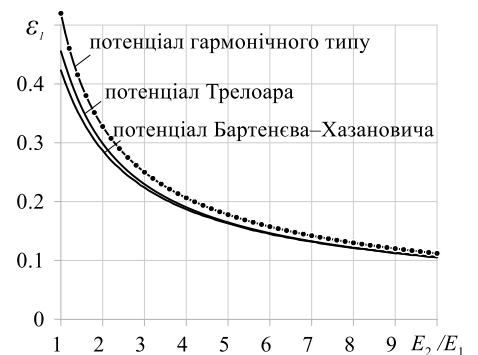


Рис. 3.7

Суцільні криві на графіку, зображеному на рис. 3.5, представляють залежності критичних деформацій для початку утворення зморшок ε_1^r від значення E_2/E_1 відношення модулів Юнга матеріалів системи. Залежності відносної критичної довжини хвилі λ^r/h від цього параметру показано на рисунку 3.6. Для обох компонентів бішару використовувався *потенціал гармонічного типу* та значення коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.499$.

Криві з круглих маркерів на рис. 3.5, 3.6 відповідають критичним значенням ε_1^c та λ^c відповідно, отриманим за формулами (3.15) та (3.16) для випадку, коли $\nu_1 = \nu_2$.

Результати показують, що наближені формули найкраще описують випадок, коли обидва матеріали бішару є нестисливими ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$). Як і очікувалося, зі збільшенням параметра E_2/E_1 (що відповідає зменшенню критичної деформації зморщування), розбіжність результатів зменшується.

Щоб встановити, результати для якої з конститутивних моделей для нестисливих тіл (з тих, що розглядаються у роботі), найкраще апроксимують наведені інженерні формули, розглянемо *потенціал гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$), *потенціал Барте-нєва–Хазановича* та *потенціал Трелоара*. Дані рисунка 3.7 встановлюють найкращу відповідність результатів, одержаних з використанням (3.12) з результатами для *гармонічного матеріалу*.

В роботах, опублікованих в останні роки, було запропоновано уточнені порівняно з (3.15), (3.16) формули, в яких враховується вплив зсувного зусилля на межі розділу системи плівка/підкладка, а саме:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \right)^2 \right]^{-2/3}, \quad \lambda^* = \lambda^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (3.17)$$

| g | $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$ | | | $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ | | | $\nu_1 = \nu_2 = 0.499$ | | |
|-------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| | ε_1^r | $\delta_1, \%$ | $\delta_2, \%$ | ε_1^r | $\delta_1, \%$ | $\delta_2, \%$ | ε_1^r | $\delta_1, \%$ | $\delta_2, \%$ |
| 10 | 0.146642 | 30.89 | 13.03 | 0.128766 | 14.93 | 8.59 | 0.110050 | 1.77 | 1.77 |
| 100 | 0.030404 | 25.96 | 8.77 | 0.026888 | 11.40 | 5.25 | 0.023923 | 0.89 | 0.89 |
| 500 | 0.010082 | 22.13 | 5.47 | 0.009023 | 9.31 | 3.27 | 0.008225 | 0.37 | 0.37 |
| 1000 | 0.006287 | 20.90 | 4.40 | 0.005650 | 8.64 | 2.64 | 0.005188 | 0.24 | 0.24 |
| 10000 | 0.001325 | 18.23 | 2.10 | 0.001201 | 7.19 | 1.27 | 0.001120 | 0.05 | 0.05 |

Табл. 3.1

У таблиці 3.1 наведено значення критичної деформації зморщування ε_1^r , отримані з розв'язку рівняння (3.12) для матеріалів з *гармонічним потенціалом*, а також значення

$$\delta_1 = \frac{|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^c|}{\varepsilon_1^c} \cdot 100\%, \quad \delta_2 = \frac{|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^*|}{\varepsilon_1^*} \cdot 100\%,$$

що демонструють відносну розбіжність даних значень від значень, отриманих за допомогою наближених формул (3.15) та (3.17).

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що наближені формули, які отримано за допомогою геометрично лінійної теорії балок для лінійно-пружних тіл, у випадку бішарів із достатньо стисливими компонентами можуть бути застосовані із задовільною точністю для критичних деформацій, що не перевищують 10%.

Коли критичні деформації перевищують вказану межу, значним стає вплив структури пружних потенціалів компонентів бішару на ці значення. Аналіз даних показує, що вплив нелінійності, яка закладена у структуру пружного потенціалу, сягає більше 15%.

На рис. 3.8 зображені залежності $\varepsilon_1^r(g)$ для різних комбінацій означених пружних потенціалів. Розглянуто всі чотири можливих випадки; відповідні позначення для кривих на рис. 3.8 наведені у табл. 3.2.

Результати з визначення критичних деформацій зморщування у випадку гладкого проковзування компонентів бішару представлені на рис. 3.9 – 3.11.

На рис. 3.9 побудовано криві $\varepsilon_1^s(g)$ у разі компонентів системи з *потенціалом гармонічного типу* для різних комбінацій значень їх коефіцієнтів Пуассона.

| Крива | Пружний потенціал підкладки | Пружний потенціал плівки |
|-------|-----------------------------|--------------------------|
| «1» | Трелоара | Трелоара |
| «2» | Бартенєва–Хазановича | Трелоара |
| «3» | Трелоара | Бартенєва–Хазановича |
| «4» | Бартенєва–Хазановича | Бартенєва–Хазановича |

Табл. 3.2

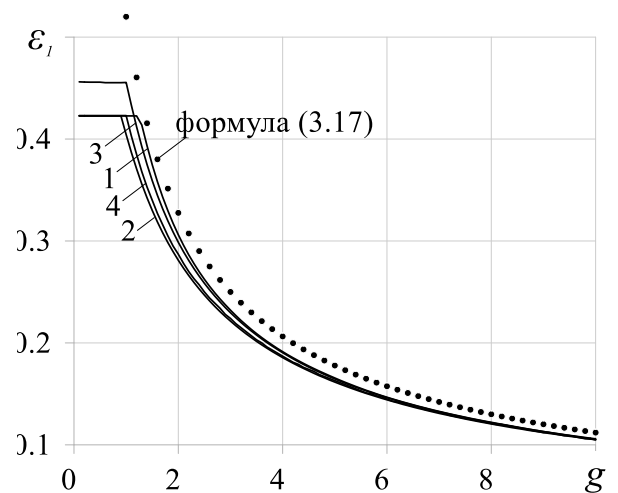


Рис. 3.8

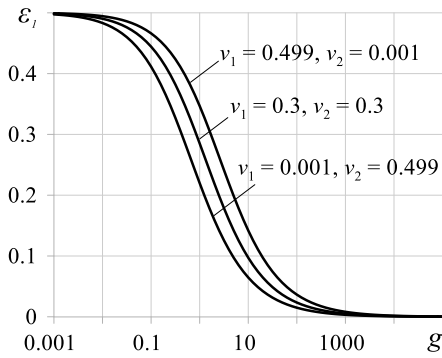


Рис. 3.9

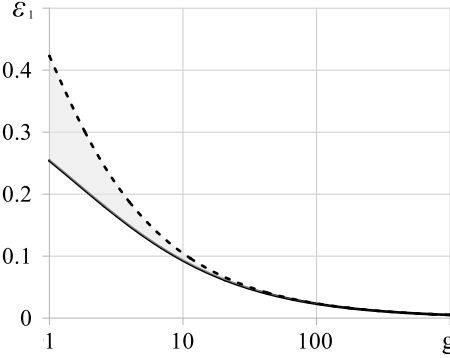


Рис. 3.10

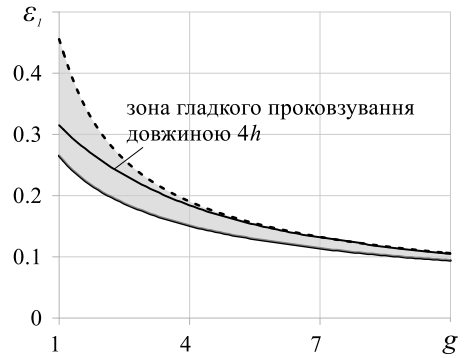


Рис. 3.11

На рис. 3.10 та 3.11 штрихові криві відповідають значенням критичної деформації ε_1^r для нестабільності плівки у випадку ідеального контакту між поверхнею плівки та підкладкою (рівняння (3.12)), а суцільні криві – значенням ε_1^s у випадку проковзування без тертя (3.14). Рис. 3.10 відповідає випадку матеріалів, що описуються *потенціалом Трелоара*, а рис. 3.11 – *потенціалом Бартенєва–Хазановича*.

Дані, наведені на рис. 3.9– 3.11, свідчать про те, що при $g \rightarrow 0$ (жорсткість матеріалу підкладки необмежено зростає по відношенню до жорсткості матеріалу покриття) за будь-яких значень коефіцієнтів Пуассона (у разі потенціалу гармонічного типу), значення критичної деформації, що відповідає приповерхневій нестійкості *кусково-однорідної* площини, прямує до значення ε_1^{hp} , що відповідає приповерхневій нестійкості *однорідної* півплощини, виготовленої з матеріалу з аналогічним пружним потенціалом:

$$\varepsilon_1^s \rightarrow \varepsilon_1^{hp} \text{ при } g \rightarrow 0.$$

У разі ослаблення адгезійного зв'язку між компонентами бішарового матеріалу, які спочатку були жорстко з'єднаними, на деяких ділянках межі поділу може виникнути розрив суцільності з утворенням зон проковзування (з тертям або без нього). У цьому випадку критичне значення ε_1 для поверхневої нестійкості цієї системи має бути таким, щоб відповідні точки на графіках рис. 3.10, 3.11 потрапляли в сірі області, розташовані між «верхньою» штриховою та «нижньою» суцільною кривими. Як приклад, на рис. 3.10 показано криву, що відповідає розв'язку задачі про визначення критичних деформацій втрати стійкості бішару, що стискається вздовж міжфазної зони гладкого проковзування, у випадку, коли довжина зони в чотири рази перевищує товщину плівки, а матеріали описуються *потенціалом Трелоара*. Зазначена задача детально вивчена в Розділі 5.

Аналіз результатів показує, що для *нестисливих тіл* у випадку жорстких плівок на податливих підкладках, який є актуальним для широкого кола прикладних задач, наявність зон послаблення зв'язку на межі поділу не приводить до значного зменшення критичної деформації та критичної довжини хвилі. Наприклад, у разі, коли плівка жорсткіша за підкладку у 100 разів, критичні деформації зморщування для проковзуючих компонентів зменшуються на $\sim 2\%$ у порівнянні з жорстко закріпленими компонентами. Коли ж плівка жорсткіша за підкладку у 1000 разів, ця величина становить вже менше 0.5%.

Останній висновок, загалом кажучи, не розповсюджується на *стисливі тіла* через високу чутливість критичних значень параметрів навантаження до зміни коефіцієнтів Пуассона матеріалів тіл, особливо у випадку гладкого проковзування компонентів.

У **четвертому розділі** дисертаційної роботи досліджено стійкість бішарових систем при їх стиску вздовж міжфазної тріщини (відшарування). Розглядається випадок, коли компоненти системи поза тріщиною жорстко з'єднані між собою.

Натепер у науковій літературі не представлено єдиного теоретичного підходу, який дозволяв би визначити критичні параметри навантаження, що відповідають втраті стійкості бішарів при їх стиску вздовж міжфазного відшарування, незалежно від його довжини. Навіть у межах фізично-лінійних моделей наявні наближені підходи застосовні лише до окремих випадків – достатньо довгих та достатньо коротких відшарувань, які враховують лише один з двох механізмів втрати стійкості, що може реалізовуватись у напівобмеженому бішарі, але не їхню взаємодію.

Якщо довжина наявного на межі поділу дефекту є досить малою порівняно з товщиною плівки покриття, його наявність як правило нехтують, розглядаючи дефект як недосконалість інтерфейсу, який не впливає суттєвим чином на значення критичних параметрів навантаження. У такому разі до розгляду беруть задачу про стиск бішару вздовж межі поділу жорстко з'єднаних середовищ (без дефектів, рис. 3.1 *a*). Зі збільшенням довжини тріщини критичні навантаження зменшуються, і за певного значення довжини наближені підходи, які враховують лише зморщування поверхні тіла, стають незастосовними.

Якщо довжина тріщини є достатньо великою, домінуючим механізмом втрати стійкості є *випучування (buckling)* (рис. 4.1). Оцінка критичних *buckling*-деформацій може бути надана за допомогою балкового наближення, у межах якого відшарована частина плівки розглядається як балка з відповідними граничними умовами на її торцях.

Взаємодія ж між двома механізмами – зморщуванням та випучуванням – яка спостерігається в натурних і числових експериментах, досі не знаходила теоретичного

підтвердження, а єдиного способу визначення критичних деформацій втрати стійкості бішарів з міжфазними тріщинами в літературі не представлено.

У даному розділі пропонується напіваналітичний підхід до визначення критичних деформацій втрати стійкості гіперпружної бішарової системи при стиску вздовж міжфазної тріщини. Дослідження проводиться у межах строгої постановки граничної задачі плоскої деформації ТЛТСДТ. З використанням загальних подань розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги у вигляді (2.14), (2.15) гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, із застосуванням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповненої додатковою умовою. Числове дослідження задачі на власні значення виконується методом Бубнова–Гальоркіна.

Критичні параметри навантаження визначаються для низки конкретних пружних потенціалів для стисливих і нестисливих тіл. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних характеристик матеріалів бішару та геометричного параметру задачі (відношення товщини плівки покриття до довжини тріщини), вивчається вплив структури пружних потенціалів на критичні деформації. Результати порівнюються з результатами, одержаними іншими дослідниками в межах наближених підходів, окремо для відносно довгих і коротких тріщин та з результатами числових симуляцій; визначаються умови застосовності наближених формул.



Рис. 4.1

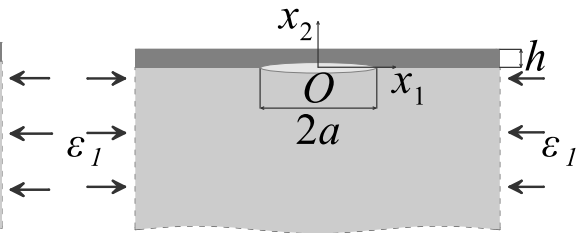


Рис. 4.2

Розглядається бішарова система, послаблена міжфазною тріщиною довжини $2a$, в умовах стиску вздовж межі поділу середовищ, коли виконуються умови (3.1) – (3.3) (рис. 4.2). Гранична поверхня бішару та береги тріщини є ненавантаженими. Граничні умови задачі є такими:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} &= 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} &= t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{21}^{(2)} &= 0, \quad t_{22}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\
 u_1^{(1)} &= u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких бішарова система підкладка/плівка втрачає стійкість.

Переходячи з використанням (2.14) від умов, записаних у формі (4.1), до граничної задачі для потенціальних гармонічних функції та, представляючи останні у вигляді інтегральних розкладів Фур'є (див. (3.9)), для наскрізних граничних умов (перші два рядки в (4.1)) одержуємо наступну систему рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ (для випадку (i) комбінації між коренями характеристичних рівнянь):

$$\begin{aligned} k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0, \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0, \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0 \quad (\mu = \lambda h_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Визначаючи $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ і $D_2(\lambda)$ через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= -\Delta^{-1} \left[(s_1 + \mu s_2 + \mu \coth \mu \cdot s_3) C_1 + (s_4 + \mu s_5 + \mu \coth \mu \cdot s_6) C_2 \right], \\ B &= \Delta^{-1} \left[(r_1 + \mu r_2 + \mu \coth \mu \cdot r_3) C_1 + (r_4 + \mu r_5 + \mu \coth \mu \cdot r_6) C_2 \right], \\ D_1 &= -\frac{k_1^2}{k_2^2} C_1 + \mu C_2, \quad D_2 = \mu C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} C_2, \quad \Delta = k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де s_i , r_i , $i = \overline{1,6}$ – відомі функції, наведені в тексті дисертаційної роботи.

З урахуванням (4.3) граничні умови на тріщині (третій рядок в (4.1)) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\mu C_1(\lambda) + (-k + \mu \coth \mu) C_2(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda &= const \quad (|x_1| \leq a), \\ \int_0^\infty \lambda \left[(k + \mu \coth \mu) C_1(\lambda) + \mu C_2(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0 \quad (|x_1| \leq a). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аналогічно, з граничних умов поза тріщиною (останній рядок в (4.1)) маємо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Y_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0, \quad \int_0^\infty \lambda Y_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| > a), \\ Y_1(\lambda) &= \alpha_1 C_1(\lambda) + \alpha_2 C_2(\lambda), \quad Y_2(\lambda) = \beta_1 C_1(\lambda) + \beta_2 C_2(\lambda). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Невідома константа $const$ в правій частині першого рівняння в (4.4) пов'язана з додатковою умовою

$$\int_0^{\infty} Y_2(\lambda) \sin \lambda a d\lambda = 0; \quad (4.6)$$

функції $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1,2}$ в (4.5) – відомі функції, наведені в тексті дисертаційної роботи.

Вибір функцій Y_1, Y_2 у вигляді

$$Y_1(\lambda) = \lambda^{-2} \int_0^a \varphi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \quad Y_2(\lambda) = -h_1 \lambda^{-3} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt \quad (4.7)$$

($\varphi(t), \psi(t)$ – нові невідомі функції, неперервні, як і їхні похідні, на відрізку $[0, a]$) дозволяє тотожно задовольнити рівнянням (4.5). У той же час рівняння (4.4) для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1, \eta \equiv a^{-1}t$ приводять до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} P_{1j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} P_{2j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = 0, \\ & \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} Q_{1j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} Q_{2j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta - const = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad j = \overline{1,4}$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi), g(\xi) \equiv a \psi(a\xi)$ та невідомої константи $const$, яка пов'язана з додатковою умовою (4.6). Остання ж, у свою чергу, представляється так:

$$\int_0^1 g(\eta) (1 - \eta^2) d\eta = 0. \quad (4.9)$$

Функції $P_{1j}, P_{2j}, Q_{1j}, Q_{2j}$ у ядрах інтегральних рівнянь (4.8) – відомі функції, а індекс $j = \overline{1,4}$ визначається відповідними випадками (i) – (iv), про які йшлося вище.

Резюмуємо, що задача про стискання кусково-однорідної півплощини, що утворена жорстким з'єднанням двох стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів, – напівобмеженої підкладки і плівки покриття – вздовж міжфазної тріщини була зведена до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого

роду, доповнених певною додатковою умовою, в загальному вигляді при довільній структурі пружних потенціалів складових компонентів тіла. Конкретизація моделей матеріалів тіла відбувається лише на етапі чисельного дослідження системи інтегральних рівнянь на власні значення, який є фінальним етапом визначення критичних значень параметрів навантаження в задачі, що досліджується.

Числове дослідження задачі типу (4.8), (4.9) реалізоване із застосуванням методу Бубнова–Гальоркіна.

Апроксимуючи невідомі функції $f(\xi)$, $g(\xi)$ у вигляді лінійної комбінації перших N координатних функцій повної на $[0,1]$ системи функцій $1, \xi, \xi^2, \dots$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^N f_j \xi^{j-1}, \quad g(\xi) = \sum_{j=1}^N g_j \xi^{j-1},$$

та записуючи умови ортогональності лівих частин однорідних інтегральних рівнянь (4.8) координатним функціям, приходимо до наступної системи однорідних лінійних рівнянь розмірністю $(2N+1) \times (2N+1)$ відносно невідомих коефіцієнтів розкладів f_j , g_j та деякої невідомої сталої c :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f_{ijm}^{(1)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ijm}^{(1)} g_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^N f_{ijm}^{(2)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ijm}^{(2)} g_j + c_{im} \cdot c &= 0, \\ \sum_{j=1}^N g_{jm}^{(3)} g_j &= 0 \quad (i = \overline{1, N}, m = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Коефіцієнти системи (4.10) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} f_{ijm}^{(1)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty P_{1m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\{ \xi^{i-1} d\xi \right\}; \\ g_{ijm}^{(1)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty P_{2m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\{ \xi^{i-1} d\xi \right\}; \\ f_{ijm}^{(2)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty Q_{1m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\{ \xi^{i-1} d\xi \right\}; \\ g_{ijm}^{(2)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty \frac{Q_{2m}(\lambda)}{\lambda} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\{ \xi^{i-1} d\xi \right\}; \\ c_{im} &= \frac{1}{i}, \quad g_{jm}^{(3)} = \frac{2}{j(j+2)} \quad (i, j = \overline{1, N}, m = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Параметр задачі на власні значення ε_1 характеризує докритичний стан та нелінійним чином входить у коефіцієнти (4.11). Розшукується перше значення параметру $\varepsilon_1 > 0$, за якого система (4.10) має нетривіальний розв'язок (визначник системи обертається в нуль).

Строге дослідження неперервності ядер інтегральних рівнянь (4.8) та методика напіваналітичного визначення коефіцієнтів (4.11) системи лінійних рівнянь (4.10) наведені у тексті дисертаційної роботи. У межах автореферату обмежимося представленням деяких результатів стосовно характеру практичної збіжності запропонованого методу числового дослідження.

У таблиці 4.1 наведено критичні значення ε_1 для різних значень геометричного параметру задачі (відносної товщини плівки покриття, віднесеної до половини довжини тріщини) $\beta = h/a$ для випадку, коли компоненти бішару описуються пружним потенціалом Бартенєва–Хазановича. Значення критичних деформацій ε_1 в цьому

прикладі визначалися з точністю до трьох значущих цифр; відношення жорсткостей матеріалів бішару було прийнято $g = \mu_2 / \mu_1 = 5$.

На практиці для забезпечення точності у три значущих цифри в більшості випадків достатнім є використання $N = 4$ або $N = 5$ координатних функцій при визначенні критичних параметрів втрати стійкості бішару при стиску вздовж міжфазної тріщини. Зауважимо, що автори робіт з дослідження аналогічних задач для *однорідних*

тіл вказували на необхідність утримання $N = 3$ або $N = 4$ координатних функцій для забезпечення такої ж точності при використанні методу Бубнова–Гальоркіна.

| β | N | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0.1 | 0.015 | 0.008 | 0.009 | 0.007 | 0.007 |
| 0.2 | 0.024 | 0.022 | 0.024 | 0.023 | 0.023 |
| 0.3 | 0.037 | 0.041 | 0.044 | 0.042 | 0.042 |
| 0.4 | 0.052 | 0.060 | 0.063 | 0.063 | 0.063 |
| 0.5 | 0.068 | 0.078 | 0.082 | 0.081 | 0.081 |
| 0.6 | 0.084 | 0.094 | 0.098 | 0.098 | 0.098 |
| 0.7 | 0.098 | 0.108 | 0.111 | 0.111 | 0.111 |
| 0.8 | 0.110 | 0.119 | 0.122 | 0.122 | 0.122 |

Табл. 4.1

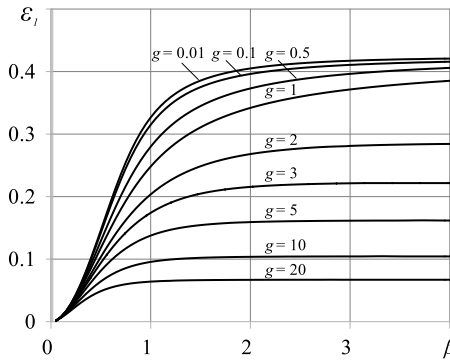


Рис. 4.3

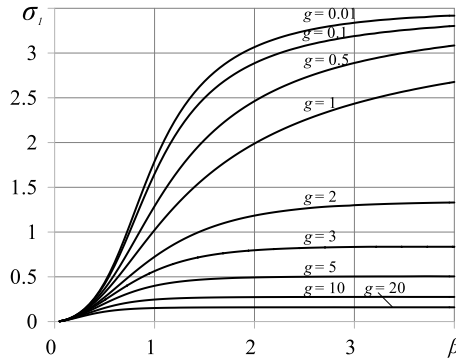


Рис. 4.4

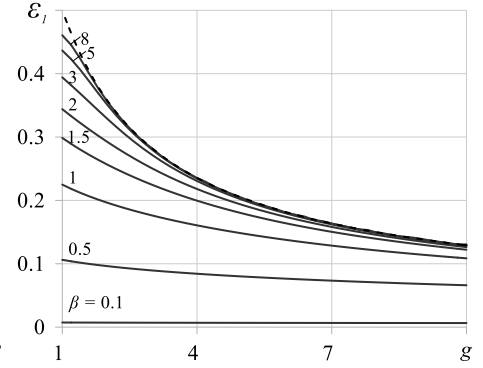


Рис. 4.5

Графіки на рис. 4.3, 4.4 демонструють, відповідно, залежності критичної деформації ε_1 та безрозмірного критичного напруження стиску $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення відносної товщини покриття $\beta = h/a$ при деяких значеннях параметру g . Розглядаються нестисливі бішарові системи з компонентами із пружним потенціалом *Бартенєва–Хазановича*. Зауважимо, що у випадку $g = 1$ відповідні криві на рисунках збігаються з аналогічними для випадку задачі про стиск однорідного тіла вздовж приповерхневої тріщини, яка досліджена у роботах інших авторів.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням жорсткості покриття по відношенню до жорсткості підкладки значення критичних деформацій та критичних напружень, що відповідають втраті стійкості, зменшуються.

Зі збільшенням геометричного параметру $\beta = h/a$ критичні значення ε_1 також збільшуються. При цьому має місце наступна асимптотична поведінка:

$$\varepsilon_1(\beta, g) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1^{hp} = 0.423, & g \leq 1 \\ \varepsilon_1^r(g), & g > 1 \end{cases} \quad \text{при } \beta \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

яка свідчить про різний характер втрати стійкості в залежності від того, який з двох матеріалів тіла є більш жорстким (докладніше див. текст дисертаційної роботи).

Граничний перехід (4.12) свідчить про узгодженість між собою одержаних розв'язків таких двох задач: про стиск бішару з жорстко з'єднаними компонентами вздовж межі поділу середовищ у випадках відсутності на ній дефектів і в разі наявності дефекту типу тріщини. При цьому перша з цих задач, яка розв'язана в Розділі 3 роботи, може розглядатися як граничний випадок задачі про «тріщину нульової довжини».

Вказана узгодженість добре ілюструється даними рис. 4.5 для *потенціалу гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Суцільні криві на рис. 4.5 демонструють залежності $\varepsilon_1(g)$

при деяких фіксованих значеннях $\beta = h/a$; штрихова крива – залежність $\varepsilon_1^r(g)$ критичної деформації зморщування від відношення жорсткостей матеріалів тіла.

Аналіз результатів свідчить, що для достатньо коротких міжфазних тріщин у випадку, коли покриття жорсткіше за підкладку, такий дефект на межі поділу середовищ може розглядатися як недосконалість інтерфейсу, яка суттєвим чином не впливає на значення критичних параметрів, обрахованих для тіла без дефекту. У цьому разі визначальним при дослідженні механізму втрати стійкості бішару є структурна особливість конструкційного матеріалу, що досліджується (наявність плівки покриття), а домінуючим механізмом втрати стійкості є зморщування (див. рис. 3.1 в). Натомість для достатньо «довгих» тріщин визначальним є наявність міжфазної тріщини, а домінуючим механізмом втрати стійкості є випучування (рис. 4.1).

Указана якісна картина підтверджується графіками, зображеними на рис. 4.6.

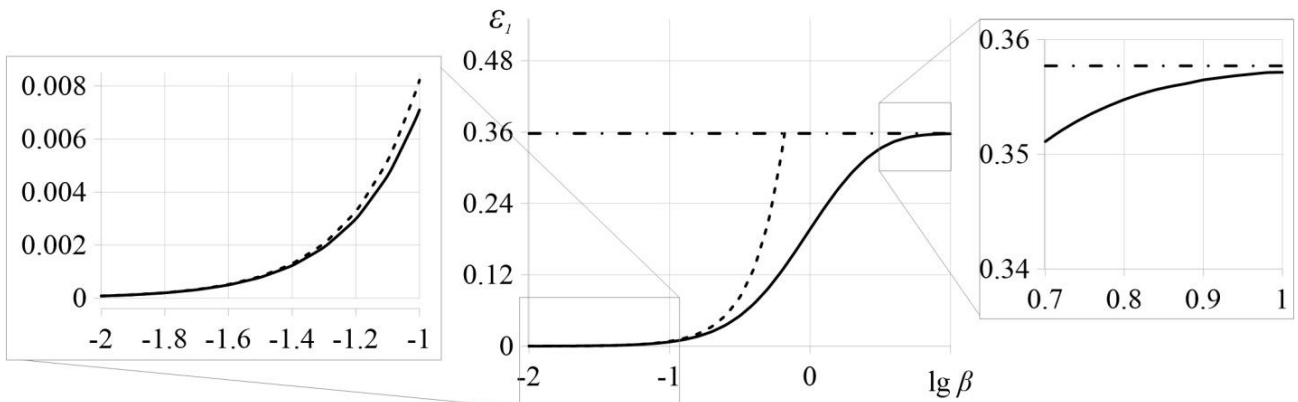


Рис. 4.6

На рис. 4.6 для випадку пружного потенціалу гармонічного типу у разі $E_2 = 2E_1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ представлені такі залежності: суцільною кривою – $\varepsilon_1(\beta)$ (система (4.10)), штрих-пунктирною прямою – $\varepsilon_1^r(g)$ (рівняння (3.12)); штриховою кривою – $\varepsilon_1^0(\beta)$, яка відповідає відомій наближеній формулі

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\pi^2}{12} \beta^2. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) в рамках балкового наближення одержана для лінійно пружного матеріалу плівки. Частина матеріалу плівки в області розшарування (див. рис. 4.1) моделювалася балкою, на торцях якої задані умови жорсткого защемлення, а деформацією підкладки нехтують. У зв'язку з цим отримані значення критичних деформацій випучування не залежать від пружних параметрів матеріалів бішару.

Пізніше із застосуванням геометрично-нелінійної теорії пластин von Kármán було отримано наступне трансцендентне рівняння для визначення критичних buckling-

деформацій ε_b , що дозволяє, на відміну від формули (4.13), враховувати податливість підкладки:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_b}} \tan\left(\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_1^0}}\right) = \frac{\pi}{12} \beta \left(\frac{A_{12}^2}{A_{11} + 1} - A_{22} \right), \quad (4.14)$$

де ε_1^0 визначається з (4.13), а коефіцієнти A_{11} , A_{12} , A_{22} – з чисельного розв’язання деяких інтегральних рівнянь.

У дисертаційній роботі показано, що зручна у використанні формула (4.13) дає тим кращу оцінку критичних деформацій, чим більшою є довжина тріщини відносно товщини покриття і чим жорсткішим відносно матеріалу покриття є матеріал підкладки. Так, для всіх $g < 2$ і розшарувань $\beta < 0.1$ значення ε_1 відрізняються від значень ε_1^0 не більше, ніж на 10%, для $\beta < 0.01$ – не більше, ніж на 1%.

У разі міжфазних тріщин «проміжної» довжини жодна з наближених формул (3.17), (4.13) не дає задовільної оцінки критичних відносних укорочень в бішаровій системі, які відповідають початку втрати стійкості при стиску. Для таких тріщин механізм втрати стійкості не носить характеру чистого *buckling* або *wrinkling*, але є результатом їх взаємодії.

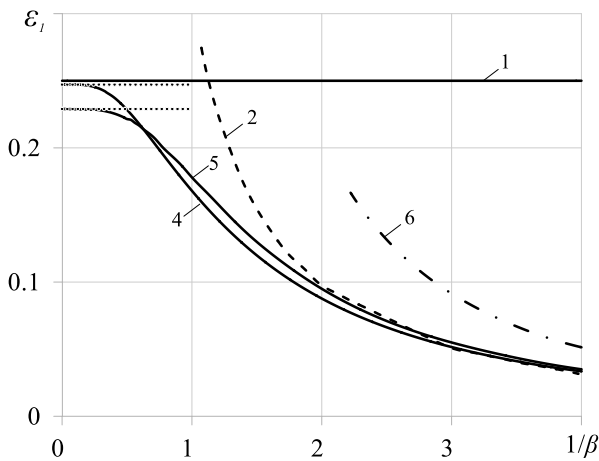


Рис. 4.7

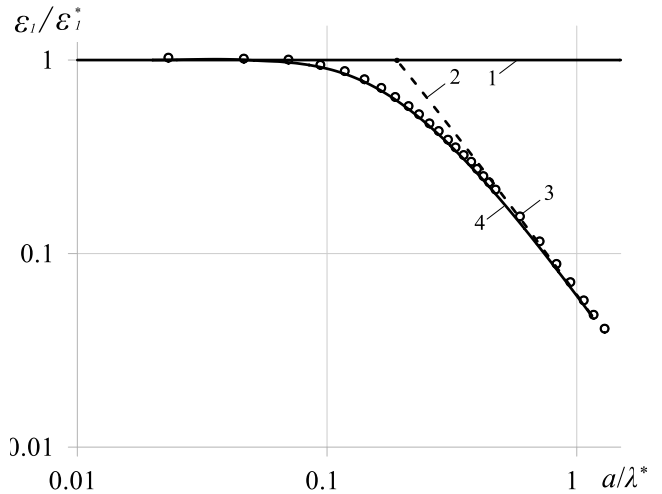


Рис. 4.8

На рис. 4.7 ($g = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$) та рис. 4.8 ($g = 1000$, $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$) суцільна пряма «1» відповідає значенням критичних деформацій зморщування (ε_1^* , (3.17)); штрихова крива «2» відповідає значенням критичних деформацій випучування (ε_b , (4.14)); круглі маркери задають криву «3», побудовану іншими авторами із застосуванням методу скінченних елементів; суцільна криві «4» (потенціал гармонічного типу) і «5» (потенціал Трелоара) побудовані в результаті розв’язання задачі на власні значення

(4.10). Штрих-пунктирна крива «б» на рис. 4.7 відповідає значенням деформацій ε_1^0 , отриманим за наближеною формулою (4.13).

Аналіз наведених даних свідчить: оцінки критичних деформацій, одержані в рамках наближеного теоретичного підходу, можуть більше ніж на 30% переоцінювати значення цього параметру (ε_1), одержане у результаті розв'язання задачі у строгій постановці (4.1). При цьому спостерігається гарна узгодженість із результатами числового експерименту.

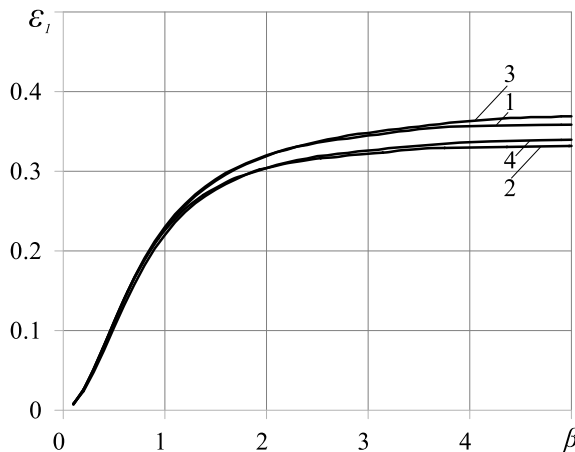


Рис. 4.9

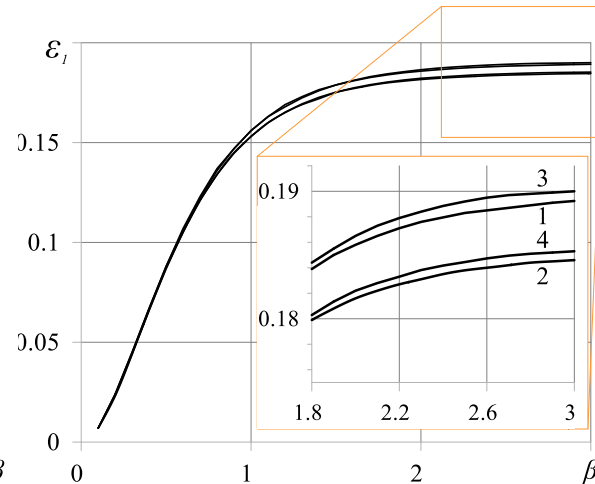


Рис. 4.10

З рис. 4.7 видно, що тип пружних потенціалів, якими описуються складові компоненти бішарової системи, може істотно впливати на значення критичних параметрів навантаження. На графіках рис. 4.9 ($g = 1.5$), 4.10 ($g = 4$) зображено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для різних варіантів комбінацій пружних потенціалів, що відповідають табл. 3.2. При цьому при значенні параметра $g = 1.5$ вплив структури потенціалу становить близько 13%, а при $g = 4$ – не перевищує 3%.

Як видно з графіків, навіть для найпростіших моделей при порівнянних жорсткостях матеріалів фізична нелінійність, закладена у структуру пружних потенціалів, може помітно впливати на результат: система демонструє високу чутливість до вибору конститутивної моделі. Іншими словами, у разі великих деформацій для досить коротких тріщин (досить товстих покриттів) знання лише параметрів жорсткості недостатньо для точного визначення критичних параметрів втрати стійкості. Без адекватних матеріальних моделей прогноз стійкості втрачає надійність навіть на інженерному рівні.

Стиск бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами вздовж міжфазної зони гладкого проковзування досліджено у **п'ятому розділі** дисертаційної роботи.

Для бішарових систем, у яких адгезія між компонентами послаблена, можна запропонувати наступну оцінку для критичної деформації ε_1 , що відповідає втраті стійкості

$$\varepsilon_1^s \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^r. \quad (5.1)$$

Оцінка (5.1) особливо підходить для так званих «дефектів зі з'єднаними берегами». Ці модельні дефекти є ідеалізацією для випадку, коли відбувається зміна природи міжшарового контакту. У цьому разі взаємодія шарів реалізується таким чином, що допускається нескінченно мале ковзання, але між шарами все ще немає зазорів (наприклад, молекулярні ланцюги у деяких видах клейового з'єднання тощо). Для дефектів зі з'єднаними берегами неперервність на межі поділу зберігається лише для нормальних компонентів збурень напружень та переміщень.

У дисертаційній роботі розглянуто такий вид дефекту зі з'єднаними берегами, який моделює найслабший зв'язок між компонентами тіла, – зону гладкого проковзування – на берегах якої збурення дотичних напружень дорівнюють нулю.

У разі подальшого послаблення адгезії між берегами дефекту можливим є втрата зв'язку з відривом плівки від підкладки та утворенням, зрештою, тріщини (відшарування) у цій області.

У цьому розділі підхід, запропонований у Розділі 4 для міжфазної тріщини, поширюється на випадок міжфазної зони гладкого проковзування: вихідна гранична задача зводиться до задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з додатковою умовою, яке досліджується чисельно.

Критичні параметри навантаження визначаються для низки конкретних пружних потенціалів для стисливих і нестисливих тіл. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних характеристик матеріалів бішару та геометричного параметру задачі, вивчається вплив структури пружних потенціалів на значення критичних деформацій.

У контексті порівняння результатів з результатами Розділу 4, досліджується вплив втрати зв'язку між берегами дефекту на зменшення критичних параметрів втрати стійкості.

В умовах стиску бішару вздовж межі поділу його компонент, коли виконуються умови (3.1) – (3.3), розглядається бішарова система, послаблена міжфазною зоною гладкого проковзування довжини $2a$ (рис. 5.2). Гранична поверхня бішару є вільною від напружень.

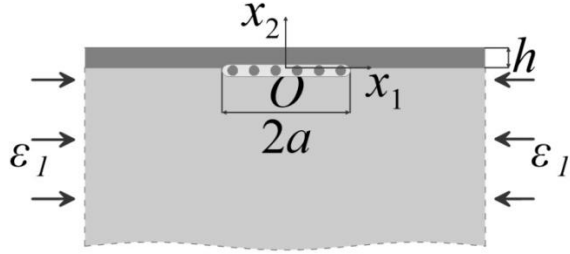


Рис. 5.1

Граничні умови задачі записуються у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} = 0, t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)}, u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, |x_1| \leq a); \\
 u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (x_2 = 0, |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Сформульована задача з визначення критичної деформації, при досягненні якої відбувається втрата стійкості, зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої безрозмірної функції $g(\xi)$

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty H_j(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta - const = 0, \quad 0 \leq \xi < 1, 0 \leq \eta \leq 1, j = \overline{1,4}, \tag{5.3}$$

яке доповнене додатковою умовою (3.9). Функції H_j в ядрі інтегрального рівняння (5.3) – відомі, а індекс $j = \overline{1,4}$, як і раніше, визначається відповідним випадком (i) – (iv). Чисельне дослідження інтегрального рівняння (5.3) реалізоване аналогічно до відповідного у Розділі 4.

На рисунках 5.2 – 5.6 представлені результати для випадку, коли обидва матеріали бішару описуються пружним потенціалом Трелоара.

На рис. 5.2, 5.3 зображено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для деяких значень відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = \mu_2 / \mu_1$. На рис. 5.4 представлено залежності $\varepsilon_1(g)$ для деяких значень безрозмірного геометричного параметру $\beta = h/a$, а також залежності $\varepsilon_1^r(g)$ (пунктирна крива) та $\varepsilon_1^s(g)$ (штрих-пунктирна крива).

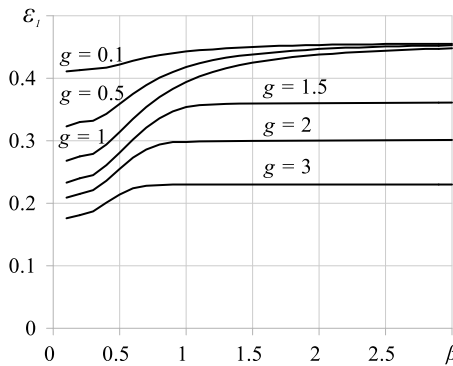


Рис. 5.2

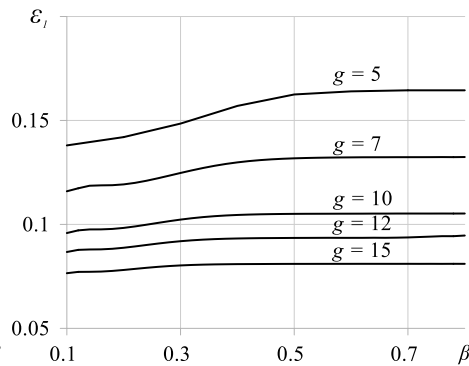


Рис. 5.3

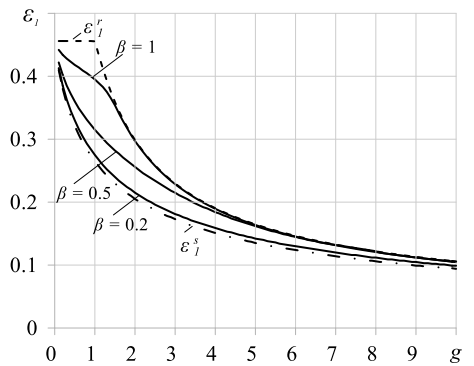


Рис. 5.4

Дані, наведені на рисунках, свідчать про гарну узгодженість між результатами задачі для тіла з дефектом у вигляді зони проковзування і задачі для тіла без дефектів: якщо при $\beta \rightarrow \infty$ асимптотична поведінка критичних деформацій є аналогічною випа-

дку міжфазної тріщини і визначається розв'язком задачі про стиск такого ж бішару без дефектів, то при $\beta \rightarrow 0$ асимптотична поведінка є такою:

$$\varepsilon_1(\beta, g) \rightarrow \varepsilon_1^s(g) \text{ при } \beta \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

У дисертаційній роботі представлено детальний аналіз виявлених механічних ефектів для різних конститутивних моделей матеріалів бішарової системи. Зокрема, встановлено, що для достатньо довгих зон міжфазного проковзування значення критичних параметрів навантаження суттєвим чином залежать від механічних характеристик матеріалів підкладки і плівки покриття, а також від виду їх пружних потенціалів, якщо ці матеріали мають порівняну жорсткість. Подібного ефекту для випадку міжфазної тріщини не спостерігається.

Нижче представлені результати щодо аналізу впливу втрати зв'язку між берегами дефекту на межі поділу компонентів бішарової системи на критичні деформації та напруження стиску.

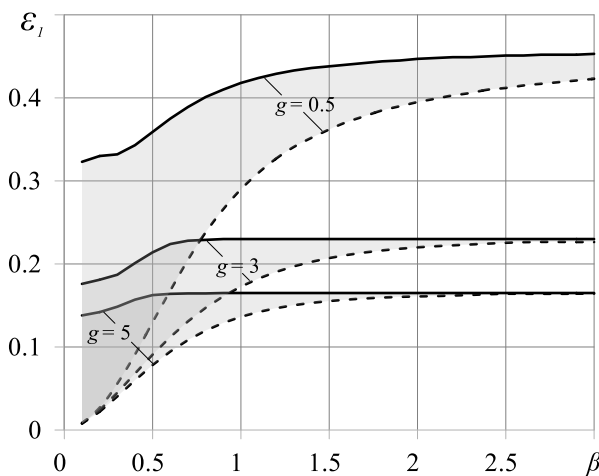


Рис. 5.5.

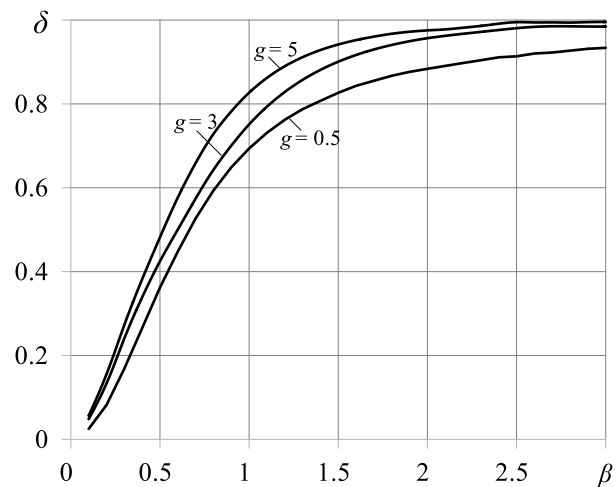


Рис. 5.6

На рис. 5.5 представлено залежності критичних деформацій $\varepsilon_1(\beta)$ від геометричного параметру задачі $\beta = h/a$ для значень $g = 0.5; 3; 5$. Суцільні криві відповідають випадку міжфазної зони гладкого проковзування, штрихові — випадку міжфазної тріщини.

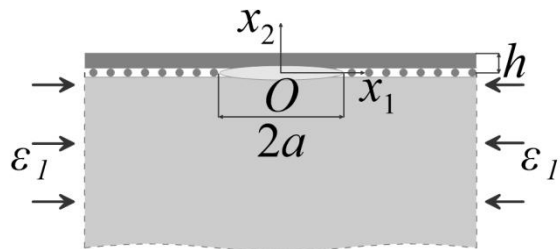
Зменшення впливу зв'язку між берегами дефекту на значення критичних параметрів навантаження зі збільшенням геометричного параметру β та механічного параметру g демонструється даними рис. 5.6. На ньому для $g = 0.5; 3$ та 5 зображено залежності δ (відношення критичної деформації у випадку міжфазної тріщини до критичної деформації у випадку міжфазної зони проковзування) від β .

Як свідчать наведені графіки, наявність зв'язку між берегами міжфазного дефекту в кусково-однорідному напівобмеженому тілі призводить до істотного збільшення

значення критичних параметрів навантаження, коли значення параметра g досить малі або коли довжина дефекту досить велика. В той же час, у разі, коли довжина дефекту достатньо мала (або покриття достатньо товсте), умови контакту між берегами дефекту майже не впливають на критичні параметри втрати стійкості бішару незалежно від його механічних характеристик.

Шостий розділ дисертації присвячено дослідженню критичних параметрів втрати стійкості гіперпружних бішарових систем з компонентами, що проковзують без тертя, при їх стиску вздовж міжфазної ненавантаженої тріщини.

Граничні умови відповідної задачі плоскої деформації з геометричною схемою на рис. 6.1 наступні:



$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} &= 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} &= t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(2)} &= 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\
 u_2^{(1)} &= u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Рис. 6.1

Застосовуючи запропонований у попередніх розділах напіваналітичний підхід, сформульована задача зводиться до наступного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої безрозмірної функції $f(\xi)$

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty L(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta = 0, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \tag{6.2}$$

де функція L – відома функція, одержана у випадку (i).

У дисертаційній роботі визначено проміжок неперервності ядра інтегрального рівняння (6.2), а чисельне дослідження цього інтегрального рівняння проведено із застосуванням методу Бубнова–Гальоркіна.

Критичні параметри навантаження визначено для низки конкретних пружних потенціалів, що описують стисливі і нестисливі тіла. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних характеристик матеріалів бішару та геометричного параметру задачі. Результати дослідження порівнюються з результатами для аналогічної задачі про стиск того ж бішару у разі відсутності міжфазних дефектів (рис. 3.1 б), яка є граничним випадком задачі для тріщини «нульової довжини».

У контексті порівняння цих результатів з результатами Розділу 4 досліджується вплив послаблення зв'язку між компонентами бішару в області поза тріщиною на значення критичних параметрів навантаження.

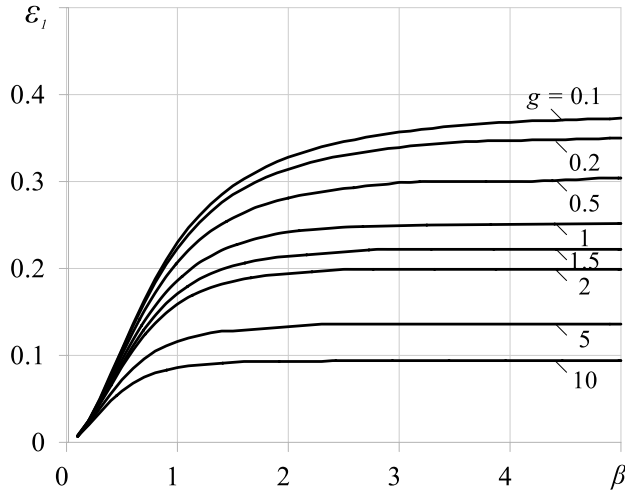


Рис. 6.2

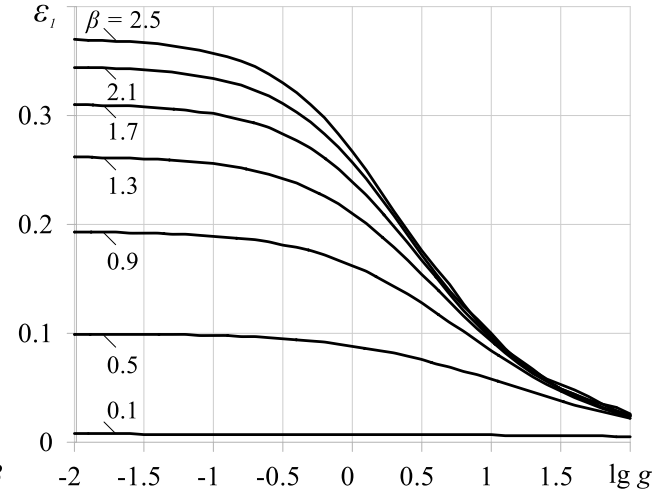


Рис. 6.3

На рис. 6.2 та 6.3 для пружного потенціалу Бартенєва–Хазановича представлено, відповідно, залежності $\varepsilon_1(\beta)$ (для різних значень відношення жорсткостей матеріалів g) та $\varepsilon_1(g)$ (для різних значень відносної товщини покриття β).

Аналогічно випадкам, коли на межі поділу двох жорстко з'єднаних середовищ розташована тріщина (Розділ 4) та зона гладкого проковзування (Розділ 5), критичні значення ε_1 , отримані з розв'язку задачі, що розглядається у цьому розділі, збільшуються як зі зменшенням відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки, так і зі зменшенням довжини міжфазного дефекту (збільшенням товщини покриття). При цьому в останньому випадку справедливою є асимптотика

$$\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1^s \text{ при } \beta \rightarrow \infty, \quad (6.3)$$

Асимптотика (6.3) свідчить про узгодженість розв'язку задачі, що розглядається, з розв'язком відповідної задачі для тіла без міжфазного дефекту (рис. 3.1 б).

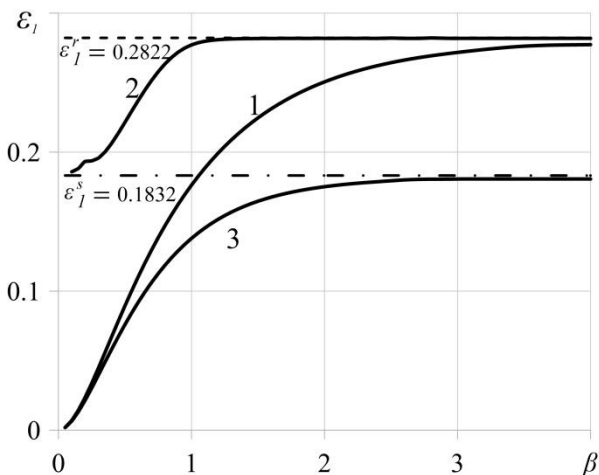


Рис. 6.4

На графіку, зображеному на рис. 6.4, для випадку, коли компоненти бішару описуються пружним потенціалом гармонічного типу ($g = 2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$), представлено наступні криві: суцільна крива «1» відповідає випадку міжфазної тріщини на межі поділу жорстко з'єднаних середовищ (рис. 4.2); крива «2» – випадку зони гладкого проковзування (рис. 5.1); крива «3» – випадку тріщини на межі поділу проковзуючих середовищ (рис. 6.1). Штрихова та штрих-пунктирна прямі на цьому ж рисунку

відповідають значенням деформацій зморщування у випадку жорсткого з'єднання та гладкого проковзування компонентів бішару, відповідно.

Рисунок 6.4. демонструє узгодженість між собою розв'язків усіх задач, що досліджені в Розділах 3 – 6.

Розглядаючи стиск бішарових систем із жорстко з'єднаними компонентами вздовж *достатньо довгих* міжфазних тріщин було, зокрема, виявлено, що критичні значення ε_1 слабо залежать від механічних параметрів бішару. До того ж для достатньо малих значень g застосовною є наближена формула (4.13).

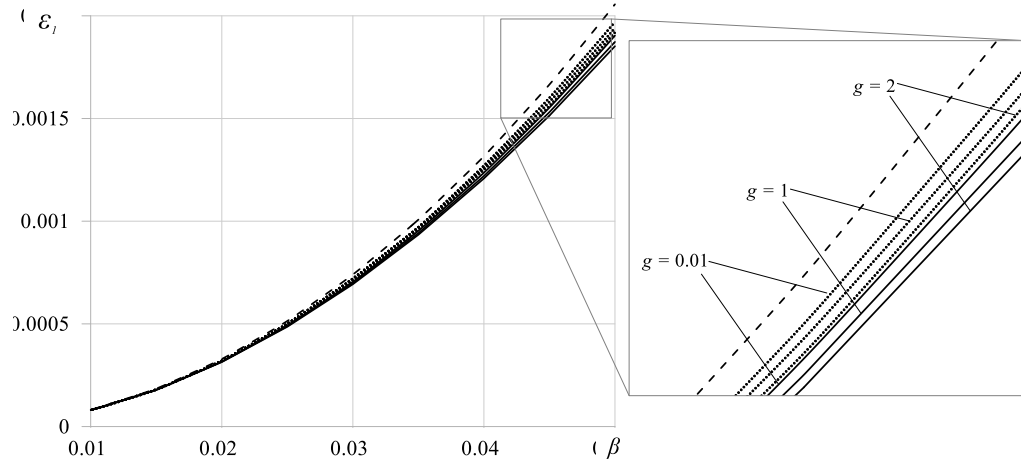


Рис. 6.5

На графіку, зображеному на рис. 6.5, для відносно довгих міжфазних тріщини (достатньо тонких покриттів) представлено такі залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для *потенціалу гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$): штрихова крива відповідає формулі балкового наближення (4.13); суцільні криві – результатам дослідження задачі з геометричною схемою на рис. 6.1 при указаному значенні відношення жорсткостей $g = \mu_2 / \mu_1$, а крива з круглих маркерів – задачі зі схемою на рис. 4.2.

Наведені дані свідчать про те, що й у випадку гладкого проковзування між компонентами у разі достатньо довгих міжфазних тріщин і достатньо малих значень g , критичні деформації, що відповідають втраті стійкості, майже не залежать від механічних характеристик матеріалів бішару і є близькими до відповідних значень у випадку жорсткого з'єднання. Наприклад, для $\beta \leq 0.05$ критичне значення ε_1 у випадку гладкого проковзування є меншим за відповідне значення у випадку жорсткого з'єднання не більше ніж на 4% для всіх $g \leq 2$.

Порівняння значень критичних параметрів навантаження в задачах зі схемою рис. 4.2 та рис. 6.1 також демонструє збільшення впливу послаблення зв'язку між компонентами тіла зі збільшенням геометричного параметру β та зменшенням механічно-

го параметру g . Одержані дані свідчать про те, що максимальний вплив умов контакту на межі поділу за фіксованих механічних характеристик бішару визначається невідповідністю між значеннями ε_1^s та ε_1^r , і може, наприклад у випадку *потенціалу гармонічного типу*, сягати майже 40%. Відповідні графіки представлені в повному тексті дисертаційної роботи.

У заключному, **сьомому розділі** дисертації, досліджено стійкість бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами при стиску вздовж тріщини, яка розташована в матеріалі підкладки паралельно до межі поділу середовищ на відстані h_0 від цієї межі (рис. 7.1).

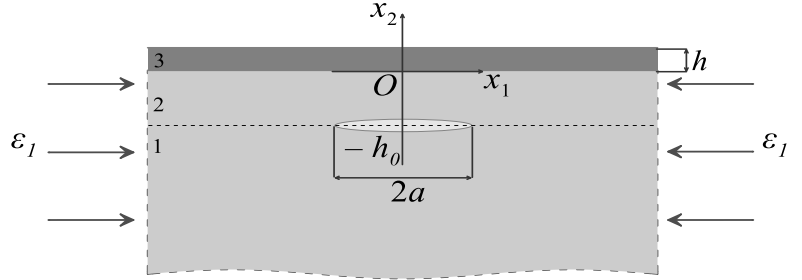


Рис. 7.1

Розгляд поставленої задачі переслідував подвійну мету. Перша з них полягає в апробації запропонованого у розділах 4 – 6 підходу до задачі для тіла, що складається з трьох компонентів. В даному разі трьома компонентами виступають плівка покриття («3») та дві області матеріалу підкладки: смугова область «над тріщиною» («2») та напівобмежена область «під тріщиною» («1»). Друга мета – з'ясувати, чи змінюються критичні параметри навантаження неперервно при переході від задачі для тріщини, не розташованої на межі поділу, до задачі для міжфазної тріщини.

Стиск на нескінченності, як і у попередніх задачах, відбувається таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення в кожній із зазначених областей тіла.

Граничні умови сформульованої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 & t_{22}^{(3)} = 0, \quad t_{21}^{(3)} = 0, \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 & t_{22}^{(2)} = t_{22}^{(3)}, \quad t_{21}^{(2)} = t_{21}^{(3)}, \quad u_1^{(2)} = u_1^{(3)}, \quad u_2^{(2)} = u_2^{(3)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 & t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = -h_0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 & t_{21}^{(1)} = 0, \quad t_{22}^{(1)} = 0, \quad (x_2 = -h_0, \quad |x_1| \leq a); \\
 & u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad (x_2 = -h_0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

У Розділі 7 обмежимося дослідженням випадку, коли для обох матеріалів тіла реалізуються випадок рівних коренів характеристичних рівнянь: (i) $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 = n_2^2$.

За аналогією з Розділом 4 сформульована гранична задача була зведена до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду та додаткової умови, які за структурою ідентичні тим, що одержані у випадку міжфазної тріщини ((4.8), (4.9)).

Слід зауважити, що у випадку трьохкомпонентної області (навіть з урахуванням того, що механічні характеристики областей «1» і «2» збігаються) кількість проміжних викладок суттєво збільшується у порівнянні з випадком міжфазної тріщини (рис. 4.2). Так, наприклад, кількість невідомих потенціальних функцій – складових загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги – збільшується з 6-ти до 9-ти. У зв'язку з цим явний вираз для ядер указаних інтегральних рівнянь є значно складнішим у випадку тріщини, яка не розташована на межі поділу.

Числові результати в Розділі 7 одержані для типового випадку бішарів, в яких жорсткішим з матеріалів є матеріал плівки покриття ($g \geq 1$) у разі потенціалу гармонічного типу.

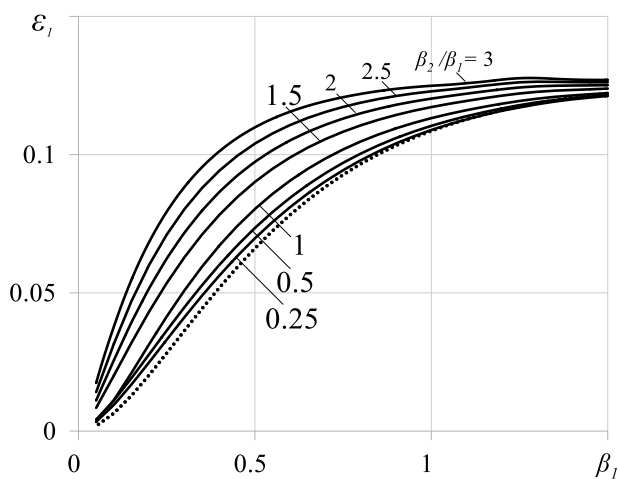


Рис. 7.2

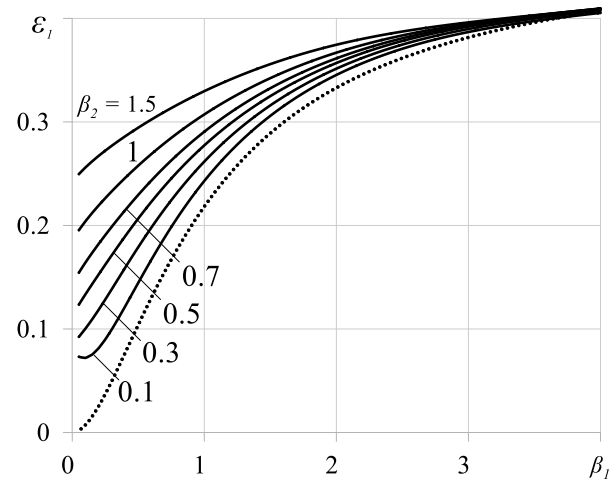


Рис. 7.3

Графік, зображений на рис. 7.2, відповідає випадку $g = 10$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Суцільними кривими подано залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної ширини смуги $\beta_1 = h/a$ для різних значень відношення параметрів β_2/β_1 , де $\beta_2 = h_0/a$. Збільшення значення параметру β_1 при фіксованому значенні β_2/β_1 відповідає неперервному зменшенню довжини тріщини при фіксованих значеннях відстаней h і h_0 . Пунктирна крива на рис. 7.2 відповідає розв'язку аналогічної задачі для міжфазної тріщини, яка досліджена у Розділі 4.

Як видно з представлених даних, при наближенні тріщини, що розташована в матеріалі підкладки, до межі поділу середовищ, критичні деформації в задачі з геометричною схемою на рис. 7.1 асимптотично наближаються до цих значень в задачі для мі-

жфазної тріщини зі схемою на рис. 4.2. При цьому, що більшою є відстань від тріщини до граничної поверхні тіла, то більшими є критичні параметри навантаження.

Так, при $g = 10$ у разі, коли відстань від тріщини до межі поділу середовищ становить чверть товщини плівки ($\beta_2 = 0.25\beta_1$), критичні значення ε_1 у випадку *внутрішньої тріщини* перевищують аналогічні значення у випадку *міжфазної тріщини* не більше ніж на 10% для $\beta_1 > 0.35$.

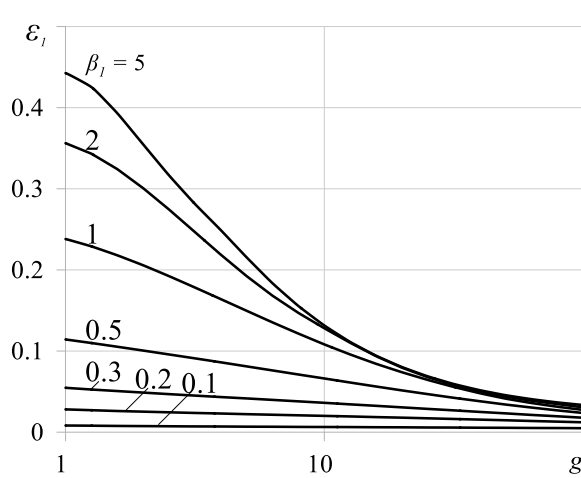


Рис. 7.4

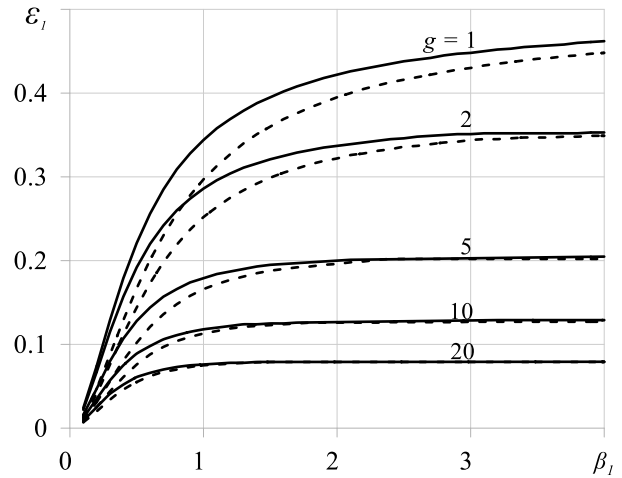


Рис. 7.5

На рис. 7.3 суцільними кривими зображено залежності критичної деформації $\varepsilon_1(\beta_1)$ для різних значень відносної відстані від межі поділу середовищ до тріщини $\beta_2 = h_0 / a$ (збільшення значення параметру β_1 при фіксованому значенні параметру β_2 відповідає неперервному зменшенню товщини плівки при фіксованих значеннях довжини тріщини та відстані від неї до межі поділу) при значенні відношення жорсткості матеріалу покриття до жорсткості матеріалу основи $g = 1.2$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Пунктирна крива на рисунку відповідає розв'язку аналогічної задачі для міжфазної тріщини.

На графіку, представленою на рис. 7.4, для широкого діапазону зміни значення відношення жорсткостей матеріалів g зображено залежність $\varepsilon_1(g)$ для деяких значень параметру β_1 при значеннях $\beta_2 = 0.1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Використовується логарифмічна шкала.

На графіку, зображеному на рис. 7.5, наведені залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ для різних значень параметру g . Суцільні криві на рисунку відповідають випадку, коли значення відстані від тріщини до межі поділу дорівнює товщині покриття ($\beta_2 = \beta_1$), штрихові криві – випадку, коли ця відстань вдвічі менша ($\beta_2 = 0.5\beta_1$).

Графіки, зображені на рис. 7.2 – 7.5, демонструють, що при $\beta_1 \rightarrow \infty$ критичні значення ε_1 асимптотично наближаються до значень ε_1' , що відповідають зморщуванню бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами (рис. 3.1 *a*) за тих самих значень фізико-механічних параметрів тіла. Іншими словами, при зменшенні довжини тріщини розв'язок задачі, що розглядається, за будь-якої відстані від тріщини до межі поділу середовищ наближається до розв'язку аналогічної задачі для тіла без тріщини. При цьому, максимальна довжина тріщини, яку можна не враховувати при визначенні критичних деформацій втрати стійкості, користуючись відповідними значеннями для зморщування бішару без дефекту (тобто розв'язком рівняння (3.12)), збільшується при віддаленні тріщини від межі поділу середовищ вглиб підкладки.

Висновки.

У роботі в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл представлено та апробовано ефективний напіваналітичний метод визначення критичних параметрів навантаження, що відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи «тонка плівка покриття на напівобмеженій підкладці» при стиску вздовж прямолінійної межі поділу середовищ. Розглянуто різні типи міжфазного контакту компонентів і проаналізовано вплив на міцність бішарів розташованих на межі поділу та поза нею тріщин та зон проковзування

Такі тонкоплівкові системи широко використовуються в низці високотехнологічних галузей, а науковий інтерес до їх дослідження підтверджується неперервним зростанням кількості наукових публікацій з відповідної тематики. В Розділі 1 дисертації проведено належний огляд літератури та обґрунтована наукова новизна дисертації.

Розділ 2 роботи є допоміжним. У ньому викладені необхідні для подальшого дослідження відомості з тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл та наведено відповідні співвідношення.

Розділ 3 роботи присвячено визначенню та аналізу критичних деформацій і критичних довжин хвиль (що утворюються на поверхні тіла в результаті зморщування плівки покриття), які відповідають втраті стійкості описаних бішарів *без дефектів*, яка в цьому разі відбувається за механізмом зморщування. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції вихідну граничну задачу плоскої деформації зведено до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій. Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є, остання зводиться до трансцендентного рівняння для визначення критичної деформації зморщування.

Розділи 4 – 7 роботи присвячені визначенню та аналізу критичних параметрів навантаження при стиску гіперпружних бішарових систем вздовж присутніх в них дефектів: тріщини (Розділ 4) та зони гладкого проковзування (Розділ 5) на межі поділу жорстко з'єднаних середовищ; тріщини на межі поділу середовищ, що проковзують (Розділ 6); тріщини, яка розташована поза межею поділу середовищ (Розділ 7). Використовуючи представлення невідомих функцій через гармонічні потенціали, введені в Розділі 3, відповідні граничні задачі зведено до інтегрального рівняння (Розділи 5, 6) або системи інтегральних рівнянь (Розділи 4, 7) Фредгольма першого роду. В кожному випадку визначається область неперервності ядер інтегральних рівнянь. Далі їх дослідження з використанням методу Бубнова–Гальоркіна зводиться до задачі на власні значення для системи лінійних однорідних рівнянь відносно критичного параметру навантаження, який нелінійним чином входить в коефіцієнти цієї системи.

«Ядро» дисертаційної роботи складають Розділи 3 – 5, розв'язальні рівняння в яких одержано в загальній формі для комбінації двох довільних пружних потенціалів, якими описуються гіперпружні стисливі або нестисливі складові бішарової системи. Це дало змогу вивчити чутливість критичних параметрів навантаження до вибору конституційних моделей матеріалів підкладки та плівки покриття.

Валідація одержаних результатів відбувається шляхом порівняння з: відповідними результатами для однорідних тіл (Розділи 3, 4, 7); результатами задач для тіл без дефектів (Розділи 4 – 7); результатами натурних (Розділ 3) та числових (Розділи 3, 4) експериментів інших авторів; результатами, одержаними із застосуванням наближених підходів (Розділи 3 – 6).

В кінці кожного з Розділів 3 – 7, що виносяться на захист, формулюються висновки та проводиться обговорення одержаних результатів, де викладається погляд автора на їх наукову цінність та обґрунтовуються перспективи подальших досліджень.

Висновки, що наведені нижче, стосуються проведеного дослідження в цілому. У них проводиться порівняння результатів задач для бішарів різної конфігурації, підкреслюючи як загальні тенденції, так і відмінності.

1. В задачах для бішарових систем з міжфазним дефектом та без дефектів у разі, коли компоненти тіла жорстко з'єднані між собою, а матеріал плівки є менш жорстким, ніж матеріал підкладки, втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом, аналогічним тому, що має місце у випадку однорідного тіла. При цьому в задачі для тіла без дефекту значення критичної деформації, що відповідає втраті стійкості, *дорівнює* меншому з відповідних значень критичної деформації для приповерхневої нестійкості півплощини, виконаної з матеріалу підкладки або з матеріалу плівки; в задачі для тіла з

дефектом – *прямує* до вказаного значення при зменшенні відносної довжини міжфазного дефекту.

2. В задачах для бішарових систем з дефектом, при зменшенні його відносної довжини, значення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, прямують до значень критичних деформацій, отриманих для тих же бішарових систем без дефектів. При цьому встановлені такі механічні ефекти:

- виявлено, що якщо матеріал плівки покриття є жорсткішим за матеріал підкладки, указані значення є критичними деформаціями, що відповідають зморщуванню плівки на більш податливій підкладці, і у разі жорсткого з'єднання компонентів в деяких випадках (див. п.3 Висновків) можуть бути визначені з використанням наближених формул;

- для усіх розглянутих задач показано, що чим більшою є жорсткість матеріалу плівки по відношенню до жорсткості матеріалу підкладки, тим більшою є максимальна довжина дефекту, наявність якого можна не враховувати при визначенні критичних деформацій, а користуватися значеннями критичних деформацій для тіла без дефекту;

- в усіх розглянутих задачах виявлена закономірність, що чим більшою є жорсткість матеріалу плівки по відношенню до жорсткості матеріалу підкладки, тим меншою є мінімальна товщина плівки покриття, потовщення якої не призводить до суттєвого збільшення міцності бішару на стиск за наявності в ньому дефекту заданої довжини.

3. Наближені формули для визначення критичних деформацій зморщування і критичних довжин хвиль для бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами (без дефектів) найкраще описують випадок бішару із нестисливих компонентів з потенціалом гармонічного типу. В усіх інших випадках формули можуть бути застосовними лише для достатньо податливих підкладок, коли критичні деформації менші 10%. Точність указаних формул зменшується зі збільшенням стисливості компонентів тіла.

4. Для достатньо довгих міжфазних тріщин (достатньо тонких покриттів) втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом локального випучування. При цьому

- якщо матеріал підкладки є жорсткішим ніж матеріал плівки покриття, критичні деформації втрати стійкості майже не залежать ані від механічних характеристик тіла, ані від типу зв'язку між його компонентами. Коли жорсткішим з двох є матеріал покриття, то зі збільшенням його відносної жорсткості залежність критичних деформацій від указаних характеристик посилюється;

- якщо відношення жорсткостей матеріалів бішарової системи достатньо мале ($\mu_2 / \mu_1 \lesssim 3$), то наближена формула (4.13) застосовна (орієнтовно для тріщин, довжина яких перевищує товщину покриття у 20 та більше разів) як для випадку жорсткого з'єднання, так і для випадку гладкого проковзування. Із послабленням зв'язку між

компонентами тіла та зі збільшенням відношення жорсткостей, точність формули зменшується;

- трансцендентне рівняння для визначення критичних деформацій випучування плівки, жорстко з'єднаної з більш податливою товстою підкладкою, застосовне навіть для достатньо жорстких плівок. Проте й це рівняння не враховує внесок механізму зморщування в явище втрати стійкості плівки, та зі збільшенням відношення μ_2 / μ_1 області його застосовності звужується.

5. Послаблення зв'язку між нестисливими компонентами бішару як вздовж всієї лінії поділу, так і на окремих її ділянках, не призводить до суттєвого зменшення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, якщо плівка достатньо жорстка. Цей висновок є справедливим як для систем з міжфазними тріщинами, так і для бішарів без дефектів. При цьому, зі збільшенням стисливості матеріалів тіла та зі зменшенням відносної жорсткості підкладки вплив послаблення зв'язку між його компонентами посилюється. У разі наявності тріщини на межі поділу указаний вплив також посилюється зі зменшенням її довжини; для достатньо довгих тріщин вплив є незначним (див п. 4а Висновків).

6. Якщо довжина міжфазної зони проковзування достатньо мала або відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки достатньо велике, то втрата зв'язку між берегами дефекту не призводить до суттєвого зменшення критичних параметрів навантаження.

7. Навіть для найпростіших моделей гіперпружних матеріалів у випадку співставної жорсткості компонентів бішару; фізична нелінійність, закладена в структуру пружних потенціалів, має помітний вплив на результат - система демонструє високу чутливість до вибору конститутивної моделі. Якщо у випадку міжфазної тріщини указаний вплив є суттєвим лише для достатньо коротких тріщини (достатньо тонких покриттів), то у випадку міжфазної зони гладкого проковзування він є суттєвим і у разі достатньо довгих дефектів.

8. Показано, що при зміні геометричного розташування тріщини від *внутрішнього* (усередині матеріалу основи) до *міжфазного* значення критичних деформацій змінюються неперервно. Сформульований висновок дає можливість застосовувати континуальні моделі для напівобмежених бішарових систем, в межах яких неможливо розрізнити міжфазні тріщини та тріщини, що не розташовані на межі поділу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Bogdanov, V.L., Kipnis, A.L. Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. *J Math Sci* 253, 99–107 (2021). (Scopus, Q3)
2. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, A.L. Compression of a semi-bounded body with a coating layer along the interface sliding zone. *Z Angew Math Mech* 105, e202400799 (2024). (Scopus, Q2)
3. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I. *Int Appl Mech* 60, 511–524 (2024). (Scopus, Q3)
4. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part II. *Int Appl Mech* 60, 641–652 (2024). (Scopus, Q3)
5. Kipnis, A.L. Stability of a piecewise-homogeneous half-plane with sliding components under compression along an interface crack. *Mech Compos Mater* 61, 409–424 (2025) (Scopus, Q2)
6. Kipnis, A.L. Wrinkling of hyperelastic thin film on hyperelastic semibounded substrate in cases of rigid connection and frictionless sliding of components. *J Elast* 157, 40 (2025). (Scopus, Q2)
7. Kipnis, A.L. Investigation of the compression of a piecewise homogeneous half-plane with a fixed boundary along the interface crack. *Mater Sci* 60, 736–746 (2025). (Scopus, Q3)
8. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, A.L. Critical loads for a piecewise-homogeneous half-plane of different hyperelastic materials under compression along the interface sliding zone. *Arch Appl Mech* 95, 213 (2025). (Scopus, Q2)
9. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Material Compressibility Effect on the Surface Instability of a Coated Body Under Compression. *Strength Mater* (2026). (Scopus, Q3)
10. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Розв'язання плоскої задачі механіки руйнування для кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. *Доповіді Національної академії наук України* (4), 3–13 (2024). (категорія «Б»)
11. Кіпніс, О.Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх

- з'єднання. Доповіді Національної академії наук України (5), 62–74 (2024). (категорія «Б»)
12. Кіпніс, О. Плоска задача про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. Доповіді Національної академії наук України (6), 43–52 (2024). (категорія «Б»)
13. Кіпніс, О.Л. Стійкість однорідної нескінченної смуги при стисканні вздовж внутрішньої тріщини. Мат. методи та фіз.-мех. поля 67(1-2), 224–232 (2024). (категорія «А»)
14. Кіпніс, О.Л. Аналіз застосовності наближених підходів до визначення критичних деформацій зморщування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці. Доповіді Національної академії наук України (2), 42–53 (2025). (категорія «Б»)
15. Кіпніс, О.Л. Стиснення шаруватого композиту з компонентами, що проковзують, уздовж двох паралельних міжфазних структурних тріщин. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки 80(1), 60–63 (2025). (Scopus, Q4)
16. Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідної півплощини при стиску вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ. Прикл. механіка 61 (6), 114–130 (2025). (категорія «А»)
17. Кіпніс, О. Л. Локальна втрата стійкості покриття тонкоплівкової системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини за різних умов контакту. Доповіді Національної академії наук України (6), 74–84 (2025). (категорія «Б»)

Праці апробаційного характеру

18. Bogdanov, V.L., Kipnis, A.L. An Approach to Analysis of Fracture of Semi-bounded Body Under Compressing Along Interfacial Near-Surface Crack. Structural Integrity, vol 8. Springer, Cham, 110–113 (2019).
19. Кіпніс, О.Л. Стійкість межі поділу середовищ кусково-однорідної півплощини при стиску вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Матеріали міжнародної конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2024», 77–78 (2024).
20. Кіпніс, О.Л. Плоска задача механіки руйнування про стиск кусково-однорідної півплощини з закріпленою межею вздовж міжфазної тріщини. Прикладна механіка: Праці I Міжнародної науково-технічної конференції, 189–192 (2024).
21. Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідного напівобмеженого тіла, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», 57–59 (2024).

22. Кіпніс, О.Л. Стискання кусково-однорідного напівобмеженого тіла за різних умов з'єднання його компонентів вздовж міжфазної тріщини. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур (6), 118 (2024).
23. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідної півплощини при стисканні вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур (6), 124 (2024).
24. Кіпніс, О.Л. Критичні параметри навантаження в задачі про стискання напівобмеженого тіла з покриттям вздовж міжфазної зони проковзування. Матеріали міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», 19–21 (2024).
25. Кіпніс, О.Л. Втрата стійкості тонкої жорсткої плівки на податливій нестисливій підкладці при стиску вздовж міжфазного відшарування. Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», 104–107 (2025).
26. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Критичні параметри навантаження в задачі про стискання напівобмеженого тіла з покриттям вздовж міжфазної зони проковзування. Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», 68–71 (2025).

АНОТАЦІЯ

Кіпніс О.Л. Стійкість матеріалів з покриттям при стиску вздовж межі поділу за різних умов міжфазного контакту. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2026.

Дисертаційну роботу присвячено визначенню та аналізу критичних параметрів навантаження, що відповідають втраті стійкості кусково-однорідних тіл, що складаються з напівобмеженої підкладки, яка вкрита тонкою плівкою покриття (бішарова система), при стиску вздовж межі поділу середовищ. В межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянуто плоскі задачі (для стану плоскої деформації) як для бішарових систем, послаблених міжфазними тріщинами та тріщинами, розташованими поза межею поділу середовищ, та зонами проковзування, так і задачі для бішарів без дефектів. Вивчаються два типи зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла – жорстке з'єднання та проковзування без тертя.

Розвинений в дисертаційній роботі напіваналітичний підхід полягає у використанні загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги для формулювання вихідних граничних задач у термінах потенціальних гармонічних функцій – складових указаних представлень. Із застосуванням техніки інтегрального перетворення Фур'є поставлені граничні задачі з визначення критичної деформації зводяться до трансцендентних рівнянь (у разі тіл без дефектів) або до однорідних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (чи їхніх систем) (у разі бішарів з дефектами). Вказані розв'язальні рівняння одержано в загальному вигляді для стисливих та нестисливих гіперпружних бішарових систем із довільною структурою пружних потенціалів, що описують матеріали їх компонентів.

Для низки конкретних конститутивних моделей матеріалів компонентів бішарів визначено критичні параметри, що відповідають втраті стійкості бішарових систем, які можуть асоціюватися з початковим етапом їх руйнування. Досліджено характер залежності цих критичних параметрів від механічних характеристик матеріалів кусково-однорідного тіла та геометричних параметрів задач, а також від форми пружних потенціалів його складових. Виявлено та проаналізовано нові механічні ефекти, пов'язані з впливом різних видів дефектів та умов контакту компонентів бішарових систем на їх стійкість при стиску вздовж прямолінійних меж поділу середовищ.

Ключові слова: кусково-однорідне тіло, втрата стійкості, wrinkling, buckling, міжфазна тріщина, зона гладкого проковзування, критичні деформації, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, гіперпружні матеріали, тонкі покриття.

SUMMARY

Kipnis O.L. Stability of Materials with Coatings under Compression along the Interface Boundary under Various Interfacial Contact Conditions.– Manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2026.

The dissertation is devoted to the determination and analysis of critical loading parameters corresponding to the loss of stability under compression along the interface of piecewise-homogeneous bodies consisting of a semi-bounded substrate covered with a thin coating film (bilayer system). Within the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, plane strain problems are considered both for bilayer systems weakened by interfacial and non-interfacial cracks and sliding zones, and for bilayers

without defects. Two types of connection between the body components are studied – rigid connection and frictionless sliding.

The developed semi-analytical approach consists in using general representations of solutions for linearized equations of equilibrium and the Fourier integral transform technique to formulate the initial boundary value problems in terms of potential harmonic functions – components of the specified representations.

In the case of no defects in the bilayer system, problems of wrinkling under compression of a thin film rigidly connected to the substrate or sliding relative to it without friction are considered. Boundary value problems for potential harmonic functions are reduced to transcendental equations for determining critical loading parameters. These equations are obtained in a general form for a combination of two compressible or incompressible hyperelastic materials with an arbitrary structure of their elastic potentials.

In the case of rigid connection of the components, an analysis of the applicability of approximate beam approaches is carried out, and an assessment of the expediency of using the semi-bounded body model is provided. Validation of the results was carried out by comparison with the limiting case of a homogeneous body, with corresponding approximate formulas, and with the results of field and numerical experiments presented in the works of other authors.

For both types of connection between the bilayer components, the dependence of critical loading parameters on the mechanical characteristics of the bilayer is analyzed, and their sensitivity to the choice of the constitutive model of the components is studied.

In the case of defects in a piecewise-homogeneous body, the following problems of bilayer compression along the interface are considered: systems with an interfacial crack under different component connection conditions; with a crack in the substrate parallel to the interface of rigidly connected media; with an interfacial zone of smooth sliding. The corresponding boundary value problems are reduced to eigenvalue problems for Fredholm integral equations (or systems of equations) of the first kind. The obtained equations are formulated in a general form for a combination of two compressible or incompressible hyperelastic materials with an arbitrary structure of their elastic potentials and investigated numerically using the Bubnov-Galerkin method. To validate the results, the obtained critical values of the loading parameters were compared with the corresponding ones in the limiting cases of a "zero-length" defect and an "infinitely long" defect, which correspond to problems for bodies without defects.

In the case of an interfacial crack on the boundary of rigidly connected media, the applicability of two beam approaches for determining critical buckling strains (for long cracks) is analyzed, as well as a comprehensive approach for determining critical blistering

strains in the case of cracks of arbitrary length. Validation of the results was carried out by comparison: for each of the considered potentials – with the corresponding problem for a homogeneous body; with the results of approximate approaches, as well as with data obtained by other authors using numerical modeling methods for linearly elastic materials.

For an interfacial crack and an interfacial smooth sliding zone, recommendations are given regarding the feasibility of taking into account short defects when determining the critical parameters of bilayer instability. The influence of contact conditions between the body components and between the defect faces, as well as the structure of elastic potentials on the values of critical loading parameters, is analyzed.

In all problems, a systematic analysis of the dependence of critical loading parameter values on the geometric and mechanical characteristics of the bilayer was carried out, and conclusions of theoretical and practical significance were formulated.

Keywords: piecewise-homogeneous body, loss of stability, wrinkling, buckling, interfacial crack, smooth sliding zone, critical strains, three-dimensional linearized theory of stability, hyperelastic materials, thin coatings.