

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КІПНІС ОЛЕКСАНДР ЛЕОНІДОВИЧ



УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**СТІЙКІСТЬ МАТЕРІАЛІВ З ПОКРИТТЯМ ПРИ СТИСКУ
ВЗДОВЖ МЕЖІ ПОДІЛУ ЗА РІЗНИХ УМОВ МІЖФАЗНОГО
КОНТАКТУ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

науковий консультант:
БОГДАНОВ Вячеслав Леонідович,
завідувач відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
академік НАН України, доктор фізико-математичних наук

КИЇВ–2026

АНОТАЦІЯ

Кіпніс О.Л. Стійкість матеріалів з покриттям при стиску вздовж межі поділу за різних умов міжфазного контакту. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04. «Механіка деформівного твердого тіла» (F1 – прикладна математика). – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2026.

Прикладний запит, пов'язаний з широким використанням у промисловості матеріалів, що складаються з податливої, часто нестисливої підкладки, вкритої тонким жорстким покриттям, при виробництві гнучких дисплеїв та датчиків, проєктуванні компонентів «м'якої» робототехніки, виготовленні сонячних елементів тощо, обумовлює зростання наукового інтересу до вивчення різних аспектів деформування таких матеріалів.

До окремої групи матеріалів слід віднести ті, в яких жорсткості компонентів відрізняються не настільки суттєво, а самі матеріали здатні витримувати великі деформації. Йдеться, наприклад, як про тканини живих організмів, так і про синтетичні матеріали, що все частіше використовуються в біомедичних технологіях.

Типовим варіантом навантаження в таких бішарових системах (досить товста підкладка, вкрита тоншою плівкою) є стиск уздовж межі поділу середовищ між шарами. Коли величина прикладеного стискаючого навантаження досягає свого критичного значення, спостерігається ейлерова втрата стійкості поверхні бішару, відома як *короблення* (англ. – *blistering*). Залежно від характеру адгезійної взаємодії між компонентами бішару, виділяють два типи (або механізми) *короблення* (*blistering*): *зморщування*

(англ. – *wrinkling*) і *випучування* (англ. – *buckling*). (В подальшому частіше будемо вживати англійські терміни.)

Механізм *wrinkling* полягає у формуванні на поверхні хвилеподібного візерунку при досягненні критичних значень деформацій. Кероване зморщування тонких плівок на податливих підкладках використовується для підвищення функціональності пристроїв і елементів конструкцій, а також для оцінки механічних властивостей тонкоплівкових полімерних покриттів.

Зазначений механізм у «чистому вигляді» реалізується передусім для бішарів без дефектів на інтерфейсі і є досить добре вивченим у випадку жорстких лінійно-пружних плівок, жорстко з'єднаних із податливими нестисливими лінійно-пружними підкладками. У цьому разі прийнятну оцінку величини критичної деформації появи зморшок дають наближені формули, що використовуються для валідації числових симуляцій. Проте в ситуаціях, коли компоненти бішарової системи виготовлені з гіперпружних матеріалів, а критичні деформації є великими, ці формули можуть давати похибки у десятки відсотків.

Аналіз літературних джерел показує, що теоретичні результати з дослідження зморщування гіперпружних бішарових систем при стиску були проведені лише для однієї конститутивної моделі – комбінації двох нестисливих неогуківських матеріалів.

Недостатньо дослідженим залишається і випадок, коли вздовж межі поділу умови контакту між підкладкою та плівкою не є ідеальними, а, наприклад, допускають проковзування.

Ослаблення зв'язку між структурними елементами бішару може відбуватися як внаслідок накопичення мікрodefektів у процесі експлуатації, так і бути «закладеним» на етапі виробництва з метою зменшити обмеження плівки у здатності деформуватися. Останнє особливо актуальне для

мікроелектроніки, зокрема коли між тонкою функціональною плівкою і податливою підкладкою може відбуватися відносне зміщення; при моделюванні біомедичних інтерфейсів (наприклад, при контакті рогівки і лінзи або шкіри і фасції); при проектуванні інтелектуальних самозмащуваних полімерних композитів тощо.

Припустимо тепер, що внаслідок ослаблення адгезії на інтерфейсі системи підкладка/плівка на відрізу скінченної довжини відбувся розрив суцільності з втратою зв'язку між компонентами тіла і утворенням дефекту з берегами, що не перебувають у контакті — тріщини (відшарування). Очевидно, що значення критичних blistering-деформацій у такому випадку виявляться нижчими, ніж у випадку аналогічного бішару без дефекту на інтерфейсі. Якщо довжина утвореного відшарування є досить великою, то спостережуваний візерунок на поверхні бішару матиме вигляд одного вираженого блістеру в області над відшаруванням.

Такий механізм втрати стійкості називають *buckling*. Оцінка критичних buckling-деформацій може бути надана за допомогою відомих наближених формул, отриманих із використанням так званого «балкового наближення», у межах якого відшарована частина плівки розглядається як балка з різними граничними умовами на торцях.

У випадку кусково-однорідного тіла, з застосуванням геометрично нелінійної теорії пластин, було виведено трансцендентне рівняння для визначення критичних buckling-деформацій, що дозволяє враховувати податливість підкладки. Це рівняння сьогодні широко застосовується для верифікації результатів, отриманих методом скінченних елементів. При цьому коефіцієнти зазначеного трансцендентного рівняння необхідно визначати для кожної конкретної пари лінійно-пружних матеріалів бішару в

результаті числового розв'язання інтегральних рівнянь, що робить процес досить трудомістким.

Основним обмеженням балкових наближень, заснованих на різних теоріях пластин, є те, що вони описують лише ідеалізований випадок «чистого» buckling і застосовні переважно для досить довгих відшарувань, яким відповідають малі значення критичних деформацій.

Водночас, дані експериментів і числових симуляцій демонструють можливість реалізації змішаного механізму втрати стійкості — wrinkling і buckling — при стиску систем підкладка/тонка плівка вздовж міжфазних тріщин (відшарувань). Проте взаємодія цих механізмів залишається недостатньо вивченою.

Ще одним обмеженням наближених підходів є припущення про лінійно-пружну поведінку матеріалів. Проте у випадках порівнянної жорсткості шарів втрата стійкості відбувається при деформаціях поза межами застосовності фізично лінійної моделі.

Результати з дослідження стиску бішарових систем уздовж іншого типу міжфазних дефектів (наприклад, зон гладкого проковзування) або дефектів, не розташованих на межі поділу середовищ, у літературі не представлені.

Ефективним підходом до вивчення зазначених проблем втрати стійкості тонкоплівкових систем – як з дефектами, так і без них – при стиску вздовж межі поділу є застосування запропонованої у роботах О.М. Гузя, тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) у поєднанні з розробленим у її межах критерієм руйнування. Основні співвідношення ТЛТСДТ одержано шляхом послідовної лінеаризації рівнянь нелінійної теорії пружності, а строга постановка задач в рамках лінеаризованої теорії дозволяє уникати обмежень, властивих окресленим вище наближеним підходам.

Дисертаційна робота є завершеною науковою працею, в якій представлено дослідження втрати стійкості гіперпружних кусково-однорідних напівобмежених тіл, що складаються з товстішої підкладки, вкритою плівкою тонкого покриття, (бішарів) при їх стиску вздовж межі поділу середовищ.

У випадку відсутності дефектів у бішаровій системі розглянуто задачі про зморщування при стиску тонкої плівки, яка жорстко з'єднана з підкладкою або проковзує відносно неї без тертя. Відповідні граничні задачі лінеаризованої теорії стійкості було зведено до трансцендентних рівнянь для визначення критичних параметрів навантаження. Ці рівняння отримано в загальному вигляді для комбінації двох стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів із довільною структурою їх пружних потенціалів.

У випадку жорсткого з'єднання компонентів був проведений аналіз застосовності наближених балкових підходів до визначення критичних деформацій зморщування та критичних довжин хвиль, а також надано оцінку доцільності використання моделі напівобмеженого тіла. Валідація результатів відбувалася шляхом порівняння з граничним випадком однорідного тіла (коли механічні характеристики компонентів бішару однакові), з відповідними наближеними формулами, а також з результатами натурних і числових експериментів, представленими в роботах інших авторів.

Для обох типів зв'язку між компонентами бішару детально проаналізовано залежність критичних параметрів навантаження від механічних характеристик бішару та проаналізовано їх чутливість до вибору конститутивної моделі гіперпружних складових.

У випадку, коли бішарова система послаблена дефектами, у межах ТЛТСДТ було розглянуто такі задачі: про стиск бішару вздовж межі поділу середовищ з міжфазною тріщиною (відшаруванням) за різних умов з'єднання

компонентів поза межами тріщини; про стиск бішару вздовж межі поділу середовищ при наявності тріщини, що розташована в підкладці паралельною межі поділу жорстко з'єднаних середовищ; про стиск бішару вздовж межі поділу середовищ з міжфазною зоною гладкого проковзування. Відповідні граничні задачі, сформульовані в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зведено до задач на власні значення для інтегральних рівнянь (або систем рівнянь) Фредгольма першого роду. Вказані інтегральні рівняння, які отримано в загальному вигляді для комбінації двох стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів з довільною структурою їх пружних потенціалів, досліджувались чисельно із застосуванням методу Бубнова–Гальоркіна. Для верифікації результатів проводилося порівняння одержаних критичних значень параметрів навантаження з граничними випадками дефекту «нульової довжини» та «нескінченно довгого» дефекту, які відповідають задачам для тіл без дефектів, розв'язаним раніше в межах цього дослідження.

У випадку міжфазної тріщини на межі жорстко з'єднаних середовищ проаналізовано застосовність двох основних балкових підходів з визначення критичних деформацій випучування (для довгих тріщин), а також комплексного підходу до визначення критичних blistering-деформації у випадку тріщин довільної довжини. Валідація результатів відбувалася шляхом порівняння: для кожного з розглянутих потенціалів – з відповідною задачею для однорідного тіла; з результатами наближених підходів, а також з даними, отриманими іншими авторами методами чисельного моделювання для лінійно-пружних матеріалів.

Для міжфазної тріщини та міжфазної зони гладкого проковзування сформульовано рекомендації щодо доцільності врахування коротких дефектів при визначенні критичних параметрів нестійкості бішару. Проаналізовано

вплив умов контакту між компонентами тіла й між берегами дефектів, а також структури пружних потенціалів на значення критичних параметрів.

У всіх задачах проведено систематичний аналіз залежності критичних значень параметрів навантаження від геометричних параметрів бішару та механічних характеристик матеріалів його компонент та сформульовано висновки, які мають теоретичну й практичну значущість.

Обґрунтованість та достовірність одержаних результатів забезпечується, зокрема: коректністю та строгістю математичних постановок задач та використанням апробованих методів їх розв'язання; збіжністю числових алгоритмів, використаних при розв'язанні трансцендентних рівнянь і задач на власні значення; узгодженістю отриманих результатів з відомими даними та фізичною інтерпретацією результатів, яка узгоджується з відомими механізмами втрати стійкості в бішарових системах.

За темою дисертації опубліковано 26 наукових праць: 11 у виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus, з яких 4 публікації віднесені відповідно до класифікації SCImago Journal до квартилю Q2, 5 публікацій – до квартилю Q3; 1 публікація – до квартилю Q4; 2 роботи опубліковано у періодичних виданнях, включених до категорії «А» переліку наукових фахових видань України; 5 робіт – у періодичних виданнях, включених до категорії «Б» переліку наукових фахових видань України; 9 наукових праць – тези доповідей міжнародних наукових конференцій. 16 праць опубліковані автором самостійно.

Наукові результати дисертації отримано автором самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавторстві з науковим консультантом академіком НАН України В.Л. Богдановим та академіком НАН України В.М. Назаренком, дисертантом виконано математичну постановку задач, отримано розв'язальні рівняння або їх системи, розроблено алгоритми числового

дослідження, виконано числові розрахунки для конкретних моделей матеріалів та проаналізовано залежність критичних параметрів втрати стійкості від геометричних параметрів задач та механічних характеристик досліджуваних матеріалів.

Основні результати роботи доповідались на понад десяти міжнародних конференціях. Дисертаційна робота в повному обсязі представлялась і обговорювалась на фахових наукових семінарах, де отримала позитивні відгуки.

Ключові слова: кусково-однорідне тіло, втрата стійкості, wrinkling, buckling, міжфазна тріщина, зона гладкого проковзування, критичні деформації, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, гіперпружні матеріали, тонкі покриття.

ABSTRACT

Kipnis O.L. Stability of Materials with Coatings under Compression along the Interface Boundary under Various Interfacial Contact Conditions. – Qualification scientific work presented as a manuscript.

Dissertation submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.02.04 “Mechanics of deformable solids” (F1 – Applied Mathematics). – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2026.

The applied interest associated with the wide use in industry of materials consisting of a compliant, often incompressible, substrate covered with a thin stiff coating, in the production of flexible displays and sensors, the design of components of “soft” robotics, the fabrication of solar cells, etc., leads to increasing scientific attention to the study of various aspects of deformation of such materials.

A separate class of materials includes those where the stiffnesses of the components differ not so significantly, and the materials themselves are capable of sustaining large deformations. This refers, for example, both to the tissues of living organisms and to synthetic materials that are increasingly used in biomedical technologies.

A typical loading case in such bilayer systems – a rather thick substrate covered with a thinner film – is compression along the interface between the layers. When the magnitude of the applied compressive load reaches its critical value, an Euler-type loss of stability of the bilayer surface is observed, known as blistering (from English “blistering”). Depending on the nature of the adhesive interaction between the components of the bilayer, two types (or mechanisms) of blistering are distinguished: wrinkling and buckling.

The wrinkling mechanism consists in the formation of a wave-like pattern on the surface when critical strain values are reached. Controlled wrinkling of thin films on compliant substrates is used to improve the functionality of devices and structural elements, as well as to assess the mechanical properties of thin-film polymer coatings.

This mechanism in its “pure form” is realized primarily for bilayers without defects at the interface and is fairly well studied in the case of stiff linear-elastic films rigidly bonded to compliant incompressible linear-elastic substrates. In this case, acceptable estimates of the critical wrinkling strain are given by approximate formulas used to validate numerical simulations. However, in situations where the components of the bilayer system are hyperelastic materials and the critical strains are large, these formulas can give errors of tens of percent.

Analysis of the literature shows that theoretical results on the study of wrinkling of hyperelastic bilayer systems under compression have been obtained only for one constitutive model – a combination of two incompressible neo-Hookean materials.

Also insufficiently studied is the case when the contact conditions along the interface between the substrate and the film are not ideal, and, for example, allow for sliding.

The weakening of the connection between the structural elements of the bilayer may occur either due to the accumulation of microdefects during operation or be “embedded” at the production stage in order to reduce the constraint of the film’s ability to deform. The latter is especially relevant for microelectronics, particularly when relative displacement can occur between a thin functional film and a compliant substrate; in modeling biomedical interfaces (for example, contact between the cornea and a lens or the skin and fascia); in the design of intelligent self-lubricating polymer composites, etc.

Suppose now that as a result of adhesion weakening at the substrate/film interface, a loss of continuity occurred over a finite interval, with the loss of connection between the components of the body and the formation of a defect with faces not in contact — a crack (delamination). Obviously, the values of the critical blistering strains in such a case will be lower than in the case of a similar bilayer without a defect at the interface. If the length of the delamination is large enough, the pattern observed on the surface of the bilayer will appear as a single pronounced blister in the region above the delamination.

This mechanism of loss of stability is called buckling. The critical buckling strains can be estimated using known approximate formulas obtained using the so-called “beam approximation,” in which the delaminated part of the film is considered as a beam with various boundary conditions at the ends.

In the case of a piecewise-homogeneous body, using the geometrically nonlinear theory of plates, a transcendental equation was derived to determine the critical buckling strains, allowing the compliance of the substrate to be taken into account. This equation is widely used today to verify results obtained by the finite element method. However, the coefficients of the transcendental equation must be determined for each specific pair of linear-elastic materials of the bilayer by numerically solving integral equations, which makes the process quite labor-intensive.

The main limitation of beam approximations based on various plate theories is that they describe only the idealized case of “pure” buckling and are applicable mainly to sufficiently long delaminations corresponding to small values of critical strain.

At the same time, experimental data and numerical simulations demonstrate the possibility of realizing a mixed mechanism of loss of stability — wrinkling and buckling — under compression of substrate/thin-film systems along interfacial

cracks (delaminations). However, the interaction of these mechanisms remains insufficiently studied.

Another limitation of the aforementioned approximate approaches is the assumption of linear-elastic material behavior. However, in the case where the components of the bilayer have comparable stiffness, loss of stability under compression can occur at strains that significantly exceed the range of applicability of a physically linear model.

No results on the study of compression of bilayer systems along another type of interfacial defect (for example, a sliding zone), or of defects not located on the interface, are currently available in the literature.

An effective approach to studying the above-mentioned problems of stability loss in thin-film systems — both with and without defects — under compression along the interface is the application of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable solids (TDLTSDS) developed in the works of O.M. Guz, in combination with the failure criterion formulated within this theory. The basic relations of TDLTSDS are obtained by sequential linearization of the equations of nonlinear elasticity, and the strict formulation of problems within the linearized theory makes it possible to avoid the limitations inherent in the above-mentioned approximate approaches.

The dissertation is a completed scientific work, presenting a study of loss of stability in hyperelastic, piecewise-homogeneous, semi-infinite bodies consisting of a thicker substrate covered by a thin film (bilayer), under compression along the interface.

In the absence of defects in the bilayer system, problems of wrinkling under compression of a thin film rigidly bonded to the substrate or sliding relative to it without friction are considered. The corresponding boundary value problems of the linearized theory of stability are reduced to transcendental equations for

determining the critical loading parameters. These equations are obtained in general form for a combination of two compressible or incompressible hyperelastic materials with arbitrary elastic potential structure.

In the case of rigid connection between the components, the applicability of approximate beam models for determining critical wrinkling strains and critical wavelengths is analyzed, and the applicability of the semi-infinite body model is evaluated. Validation of the results was performed by comparison with the limiting case of a homogeneous body (when the mechanical properties of the components of the bilayer are identical), with the corresponding approximate formulas, and with experimental and numerical results presented in the works of other authors.

For both types of connection between the components of the bilayer, the dependence of the critical loading parameters on the mechanical characteristics of the bilayer is thoroughly analyzed, as well as their sensitivity to the choice of constitutive model.

In the case when the bilayer system is weakened by defects, the following problems are considered within TDLTSDS: compression of the bilayer along the interface in the presence of an interfacial crack (delamination) under various bonding conditions; a crack in the substrate parallel to the interface of rigidly bonded media; a bilayer with an interfacial frictionless sliding zone. The corresponding boundary value problems, formulated in terms of harmonic potential functions using Fourier integral transform techniques, are reduced to eigenvalue problems for Fredholm integral equations (or systems of equations) of the first kind. The obtained equations are formulated in general form for a combination of two compressible or incompressible hyperelastic materials with arbitrary potential structure and are solved numerically using the Bubnov–Galerkin method. For result validation, comparisons were made between the obtained critical loading parameters and the limiting cases of “zero-length” and “infinitely long” defects,

which correspond to problems solved earlier in this research for bodies without defects.

In the case of an interfacial crack at the boundary of bonded media, the applicability of two main beam approaches for determining critical buckling strains (for long cracks), as well as a combined approach for determining critical blistering strains in the case of cracks of arbitrary length, is analyzed. Validation of the results was carried out by comparison: for each of the considered potentials — with the corresponding problem for a homogeneous body; with approximate approaches; and with results obtained by other authors using numerical methods for linear-elastic materials.

For the interfacial crack and interfacial frictionless sliding zone, recommendations are provided regarding the feasibility of accounting for short interfacial defects when determining the critical instability parameters of the bilayer. The influence of contact conditions between the components and between the defect faces, as well as the structure of the elastic potentials, on the values of the critical parameters is analyzed.

In all problems, a systematic analysis of the dependence of the critical loading parameters on the geometrical and mechanical characteristics of the bilayer is carried out, and conclusions are formulated that are of theoretical and practical significance.

The justification and reliability of the obtained results are ensured by the correctness and mathematical rigor of the problem formulations and the use of verified solution methods; the convergence of numerical algorithms applied in solving the transcendental and eigenvalue problems; and the consistency of the obtained results with known data and physical interpretation consistent with the known mechanisms of loss of stability in bilayer systems.

A total of 26 scientific works have been published on the topic of the dissertation: 11 in publications indexed in the Web of Science Core Collection and/or Scopus databases, of which 4 publications are ranked in the Q2 quartile according to the SCImago Journal Rank classification, 5 publications in the Q3 quartile, and 1 publication in the Q4 quartile; 2 works were published in periodical editions included in Category "A" of the list of scientific specialized publications of Ukraine; 5 works in periodical editions included in Category "B" of the list of scientific specialized publications of Ukraine; 9 scientific works are abstracts of reports at international scientific conferences. 16 works were published by the author solely.

The scientific results of the dissertation were obtained independently by the author. In all papers co-authored with academic advisors, Academician of NAS of Ukraine V.L. Bogdanov and Academician of NAS of Ukraine V.M. Nazarenko, the author performed the mathematical problem formulation, derived the governing equations or systems, developed the numerical analysis algorithms, carried out the computations for specific material models, and analyzed the dependence of critical stability parameters on the geometrical and mechanical characteristics of the studied materials.

The main results of the dissertation were presented at more than ten international conferences. The dissertation was fully presented and discussed at relevant academic seminars and received positive evaluations.

Keywords: piecewise-homogeneous body, loss of stability, wrinkling, buckling, interfacial crack, frictionless sliding zone, critical strains, three-dimensional linearized theory of stability, hyperelastic materials, thin films.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Bogdanov, V.L., Kipnis, A.L. Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. *J Math Sci* 253, 99–107 (2021). (Scopus, Q3)
2. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, A.L. Compression of a semi-bounded body with a coating layer along the interface sliding zone. *Z Angew Math Mech* 105, e202400799 (2024). (Scopus, Q2)
3. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I. *Int Appl Mech* 60, 511–524 (2024). (Scopus, Q3)
4. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part II. *Int Appl Mech* 60, 641–652 (2024). (Scopus, Q3)
5. Kipnis, A.L. Stability of a piecewise-homogeneous half-plane with sliding components under compression along an interface crack. *Mech Compos Mater* 61, 409–424 (2025) (Scopus, Q2)
6. Kipnis, A.L. Wrinkling of hyperelastic thin film on hyperelastic semibounded substrate in cases of rigid connection and frictionless sliding of components. *J Elast* 157, 40 (2025). (Scopus, Q2)
7. Kipnis, A.L. Investigation of the compression of a piecewise homogeneous half-plane with a fixed boundary along the interface crack. *Mater Sci* 60, 736–746 (2025). (Scopus, Q3)
8. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, A.L. Critical loads for a piecewise-homogeneous half-plane of different hyperelastic materials under compression along the interface sliding zone. *Arch Appl Mech* 95, 213 (2025). (Scopus, Q2)

9. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Material Compressibility Effect on the Surface Instability of a Coated Body Under Compression. *Strength Mater* (2026). (Scopus, Q3)
10. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Розв'язання плоскої задачі механіки руйнування для кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. *Доповіді Національної академії наук України* (4), 3–13 (2024). (категорія «Б»)
11. Кіпніс, О.Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з'єднання. *Доповіді Національної академії наук України* (5), 62–74 (2024). (категорія «Б»)
12. Кіпніс, О. Плоска задача про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. *Доповіді Національної академії наук України* (6), 43–52 (2024). (категорія «Б»)
13. Кіпніс, О.Л. Стійкість однорідної нескінченної смуги при стисканні вздовж внутрішньої тріщини. *Мат. методи та фіз.-мех. поля* 67(1-2), 224–232 (2024). (категорія «А»)
14. Кіпніс, О.Л. Аналіз застосовності наближених підходів до визначення критичних деформацій зморщування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці. *Доповіді Національної академії наук України* (2), 42–53 (2025). (категорія «Б»)
15. Кіпніс, О.Л. Стиснення шаруватого композиту з компонентами, що проковзують, уздовж двох паралельних міжфазних структурних тріщин. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки* 80(1), 60–63 (2025). (Scopus, Q4)
16. Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідної півплощини при стиску вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ. *Прикл. механіка* 61 (6), 114–130 (2025). (категорія «А»)
17. Кіпніс, О. Л. Локальна втрата стійкості покриття тонкоплівкової системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини за різних умов контакту.

Доповіди Національної академії наук України (6), 74–84 (2025). (категорія «Б»)

Праці апробаційного характеру

18. Bogdanov, V.L., Kipnis, A.L. An Approach to Analysis of Fracture of Semi-bounded Body Under Compressing Along Interfacial Near-Surface Crack. *Structural Integrity*, vol 8. Springer, Cham, 110–113 (2019).
19. Кіпніс, О.Л. Стійкість межі поділу середовищ кусково-однорідної півплощини при стиску вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. *Матеріали міжнародної конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2024»*, 77–78 (2024).
20. Кіпніс, О.Л. Плоска задача механіки руйнування про стиск кусково-однорідної півплощини з закріпленою межею вздовж міжфазної тріщини. *Прикладна механіка: Праці I Міжнародної науково-технічної конференції*, 189–192 (2024).
21. Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідного напівобмеженого тіла, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*, 57–59 (2024).
22. Кіпніс, О.Л. Стискання кусково-однорідного напівобмеженого тіла за різних умов з'єднання його компонентів вздовж міжфазної тріщини. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур (6)*, 118 (2024).
23. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідної півплощини при стисканні вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур (6)*, 124 (2024).
24. Кіпніс, О.Л. Критичні параметри навантаження в задачі про стискання напівобмеженого тіла з покриттям вздовж міжфазної зони проковзування. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024»*, 19–21 (2024).
25. Кіпніс, О.Л. Втрати стійкості тонкої жорсткої плівки на податливій нестисливій підкладці при стиску вздовж міжфазного відшарування.

Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», 104–107 (2025).

26. Богданов, В.Л., Назаренко, В.М., Кіпніс, О.Л. Критичні параметри навантаження в задачі про стискання напівобмеженого тіла з покриттям вздовж міжфазної зони проковзування. Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», 68–71 (2025).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	25
Розділ 1 Сучасний стан дослідження критичних параметрів стиску кусково-однорідних тіл та тіл з дефектами.....	37
1.1 Результати для бішарових систем.....	38
1.1.1 Застосування тонкоплівкових систем.....	38
1.1.2 Сучасний стан дослідження критичних параметрів стиску бішарових систем.....	41
1.2 Результати, одержані в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл.....	48
1.2.1 Некласичні проблеми механіки руйнування.....	48
1.2.2 Сучасний стан дослідження задач про стиск тіл вздовж тріщин.....	51
Основні результати та висновки розділу.....	55
Розділ 2 Основні положення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл.....	58
2.1 Основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості.....	58
2.2 Співвідношення пружності.....	62
2.3 Лінеаризовані співвідношення і загальні розв'язки при однорідному докритичному стані.....	68
2.4 Плоскі задачі.....	71
2.4.1 Загальні представлення розв'язків для стисливих тіл.....	72
2.4.2 Загальні представлення розв'язків для нестисливих тіл.....	76
2.4.3 Чотири моделі ізотропних гіперпружних тіл.....	78
Основні результати та висновки розділу.....	81
Розділ 3 Стиск напівобмежених бішарових систем при жорсткому з'єднанні і гладкому проковзуванні компонентів.....	82
3.1 Постановка задач.....	84
3.2 Граничні задачі для потенціальних гармонічних функцій.....	88
3.2.1 Жорстке з'єднання.....	91
3.2.2 Гладке проковзування.....	92

3.3 Трансцендентні рівняння для критичних деформацій зморщування	93
3.3.1 Жорстке з'єднання	94
3.3.2 Гладке проковзування.....	96
3.4 Аналіз результатів за жорсткого з'єднання.....	98
3.4.1 Критичні параметри навантаження	98
3.4.2 Задачі для однорідних тіл.....	104
3.4.3 Порівняння результатів: експериментальні дані.....	105
3.4.4 Порівняння результатів: числові симуляції.....	106
3.4.5 Порівняння результатів: нелінійний біфуркаційний аналіз.....	108
3.4.6 Вплив стисливості на критичні деформації.....	109
3.4.7 Модель підкладки скінченної товщини	112
3.5 Аналіз застосовності балкового наближення.....	114
3.6 Аналіз результатів за гладкого проковзування.....	121
3.7 Оцінка впливу типу зв'язку між компонентами на величини критичних деформацій	126
3.8 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій зморщування.....	130
Основні результати та висновки розділу.....	134

Розділ 4 Стиск напівобмежених бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами вздовж міжфазної тріщини 137

4.1 Постановка задачі	140
4.2 Граничні задачі для потенціальних гармонічних функцій	141
4.3 Система інтегральних рівнянь задачі.....	144
4.4 Дослідження ядер інтегральних рівнянь	152
4.5 Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь.....	155
4.5.1 Задача на власні значення	157
4.5.2 Методика чисельно-аналітичного визначення коефіцієнтів системи рівнянь....	158
4.5.3 Аналіз практичної збіжності.....	161
4.6 Аналіз числових результатів.....	164
4.6.1 Задачі для однорідних тіл.....	165
4.6.2 Критичні параметри навантаження: потенціал гармонічного типу	167
4.6.3 Критичні параметри навантаження: потенціал Бартенєва–Хазановича	173

4.6.4 Критичні параметри навантаження: потенціал Трелоара	175
4.6.5 Критичні параметри навантаження: квадратичний потенціал	178
4.6.6 Вплив стисливості на критичні деформації.....	180
4.6.7 Втрата стійкості P3HT:PCBM та PEDOT:PSS плівок покриття на PDMS підкладці.....	186
4.7 Взаємодія <i>wrinkling</i> - і <i>buckling</i> -механізмів втрати стійкості	189
4.7.1 «Короткі» відшарування.....	190
4.7.2 «Довгі» відшарування.....	192
4.7.3 Взаємодія механізмів втрати стійкості	197
4.7.4 Малі деформації	201
4.8 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій втрати стійкості.....	203
Основні результати та висновки розділу	207

Розділ 5 Стиск напівобмежених бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами вздовж міжфазної зони гладкого проковзування 214

5.1 Постановка задачі	216
5.2 Граничні задачі для гармонічних потенціальних функцій	218
5.3 Інтегральні рівняння задачі.....	220
5.4 Дослідження ядер інтегральних рівнянь	226
5.5 Чисельне дослідження інтегрального рівняння. Аналіз практичної збіжності.	227
5.6 Аналіз числових результатів.....	231
5.6.1 Критичні параметри навантаження: потенціал гармонічного типу	231
5.6.2 Критичні параметри навантаження: потенціал Бартенєва–Хазановича і потенціал Трелоара	237
5.6.3 Вплив стисливості на критичні деформації.....	241
5.7 Вплив міжфазної недосконалості на критичні параметри зморщування бішару.....	244
5.8 Вплив умов контакту між берегами міжфазного дефекту на значення критичних параметрів навантаження.....	247
5.9 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій втрати стійкості.....	251
Основні результати та висновки розділу	255

Розділ 6 Стиск напівобмежених бішарових систем з компонентами, що проковзують, вздовж міжфазної тріщини.....	260
6.1 Постановка задачі. Гранична задача для гармонічних потенціальних функцій.....	261
6.2 Інтегральні рівняння задачі.....	264
6.3 Чисельне дослідження інтегрального рівняння. Аналіз практичної збіжності.	267
6.4 Аналіз числових результатів.....	269
6.5 Аналіз застосовності балкового наближення для «довгих» тріщин.....	274
6.6 Вплив послаблення зв'язку між компонентами в області поза тріщиною на критичні параметри навантаження.....	276
Основні результати та висновки розділу.....	280
Розділ 7 Стиск напівобмежених бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу.....	284
7.1 Постановка задачі	285
7.2 Гранична задача для гармонічних потенціальних функцій.....	287
7.3 Система інтегральних рівнянь задачі.....	289
7.4 Аналіз практичної збіжності і апробація підходу	296
7.5 Аналіз числових результатів.....	298
Основні результати та висновки розділу.....	305
Загальні висновки дисертаційного дослідження	308
Список використаних джерел.....	314

ВСТУП

Актуальність теми

Одним з можливих механізмів початку (старту) процесу руйнування при стиску неоднорідних тіл і елементів конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, як шаруваті композити (з різними умовами контакту між шарами), армовані волокнисті структури і матеріали з покриттям, є втрата стійкості частини матеріалу. Це може бути локальна нестійкість поблизу існуючого дефекту, мікровипучування волокна або зморщування тонкої плівки покриття. При цьому руйнування таких конструкцій при стиску часто відбувається за менших значень зовнішнього навантаження, ніж при розтягу.

Значний внесок в дослідження втрати стійкості тіл при стиску, в т.ч. вздовж дефектів та вздовж межі поділу середовищ кусково-однорідного тіла, зробили О.М. Гузь, В.Л. Богданов, В.М. Назаренко, І.Ю. Бабич, С.Ю. Бабич, І.О. Гузь, М.В. Довжик, В.М. Кнюх, Ю.В. Коханенко, І.П. Стародубцев, Ю.І. Хома, В.М. Чехов, Н.G. Allen, A.D. Bakiler, M.A. Biot, Y. Cao, X. Chen, V. Cotterell, P. Gu, J.W. Hutchinson, H. Mei, S. Nikraves, R.W. Ogden, X.R. Zhuo та інші науковці.

Вагомі результати з моделювання різних типів міжфазних з'єднань (в кусково-однорідних тілах) та умов контакту отримали С.Д. Акбаров, О.Є. Андрейків, Ю.А. Антипов, І.Ю. Бабич, О.М. Гузь, І.О. Гузь, А.О. Камінський, Л.А. Кіпніс, В.С. Кирилюк, Ю.В. Коханенко, Р.М. Кушнір, В.І. Куц, В.В. Лобода, Р.М. Мартиняк, О.В. Марчук, В.В. Михаськів, В.І. Острик, В.В. Панасюк, Г.Я. Попов, М.П. Саврук, Г.Т. Сулим, А.Ф. Улітко, В.М. Чехов, М.О. Шульга, M. Comninou, J. Dundurs, F. Erdogan, J.R. Rice та інші.

Елементи конструкцій, що складаються з товстої податливої підкладки, покритої тонкою жорсткішою плівкою, (бішари) знаходять широке

застосування у мікроелектроніці (гнучкі датчики та дисплеї), робототехніці, відновлювальній енергетиці (сонячні панелі), біомедичних технологіях та інших областях. При цьому, щоб не обмежувати здатність плівки до деформації, при виготовленні таких елементів контакт плівки з підкладкою часто роблять не ідеальним, а таким, що допускає проковзування з низьким коефіцієнтом тертя. Також в процесі виготовлення таких елементів конструкцій, їх збирання чи подальшої експлуатації в них можуть виникати різноманітні дефекти (тріщини, розшарування, непростеї тощо), які повинні враховуватись при розрахунках на їх міцність і довговічність.

Якщо такий структурний елемент знаходиться в умовах стиску, то при досягненні навантаженням свого критичного значення відбувається втрата стійкості плівки покриття з утворенням на поверхні бішару хвилеподібного візерунка; таке явище називають *зморщуванням* (в англійській літературі використовується термін *wrinkling*).

На критичні параметри втрати стійкості бішарів істотно впливає наявність у них дефектів, як-от тріщини (розшарування) чи зони проковзування. Наприклад, при формуванні достатньо довгого розшарування на межі поділу підкладки та покриття, візерунок на поверхні, що виникає при втраті стійкості, є одним вираженим блистером в області над розшаруванням; даний механізм відомий в літературі як *випучування* (*buckling*).

Для визначення критичних параметрів стискаючого навантаження, що відповідають втраті стійкості таких структур, широко використовуються наближені підходи на основі різних прикладних двовимірних теорій балок і пластин (балкові підходи). Однак ці підходи мають низку істотних недоліків.

По-перше, вони беруть до уваги лише один із механізмів втрати стійкості (*wrinkling* або *buckling*), не враховуючи їхньої можливої взаємодії. В результаті реальні критичні навантаження можуть бути значно нижчими від

тих, що передбачаються наближеними моделями. І хоча змішаний характер втрати стійкості неодноразово спостерігався в експериментах та числових дослідженнях, його теоретичний опис досі залишався нерозробленим.

По-друге, наближені формули отримано для фізично-лінійних матеріалів тіла, що виправдано лише тоді, коли плівка істотно жорсткіша за підкладку. Це суттєво обмежує їх застосовність, особливо у задачах, де компоненти бішару мають порівнянну між собою жорсткість, а самі матеріали є гіперпружними і здатними витримувати великі деформації. Так, наприклад, у багатьох біологічних системах у процесі розвитку на їх поверхні двохшарової тканини формується характерний зморшкуватий малюнок, пов'язаний з невідповідністю напружень у шарах. У таких випадках наближені формули можуть давати похибку в десятки відсотків.

Незважаючи на ці обмеження, наближені підходи (моделі) продовжують широко використовуватися для валідації результатів, отриманих чисельними методами. При цьому навіть із їх застосуванням задачі про стиск гіперпружних бішарів з дефектами вздовж межі поділу середовищ при великих критичних деформаціях залишаються практично не дослідженими – через незастосовність лінійної теорії пружності у відповідному біфуркаційному аналізі. Задачі ж про стиск бішарів з компонентами, що проковзують, і міжфазними зонами проковзування скінченної довжини в літературі і зовсім досі не розглядалися.

Ефективним підходом до вивчення зазначених проблем є застосування розробленої в роботах О.М. Гузя тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл у поєднанні із запропонованим ним в її рамках критерієм руйнування тіл при стиску.

У цій дисертаційній роботі вказаний лінеаризований підхід застосовується до дослідження плоских задач (за умов плоскої деформації)

про стиск напівобмежених кусково-однорідних гіперпружних тіл з дефектами і без них зусиллями, спрямованими уздовж прямолінійної межі поділу середовищ.

Таким чином, дисертація спрямована на розвиток тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл стосовно задач про стиск напівобмежених гіперпружних бішарів – як без дефектів, так і з різними типами міжфазних дефектів або дефектів, розташованих поза межею поділу середовищ. Поставлені завдання мають як теоретичну наукову значущість, так і прикладну цінність для інженерних застосувань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Наукове дослідження, представлене у дисертаційній роботі, відповідає програмам і планам наукових досліджень НАН України (Секція фізико-технічних і математичних наук), а окремі його результати увійшли до звітів з науково-дослідних робіт, які проводилися в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка за темами: «Дослідження стійкості армованих композитних матеріалів та оболонкових елементів конструкцій з них з різними типами геометричних та структурних недосконалостей» (№ ДР 0120U101775, 2020–2021 рр.), «Дослідження поведінки композитних матеріалів різної структури (армованих короткими волокнами та шаруватих) та оболонкових конструкцій з них в умовах дії стискаючих навантажень» (№ ДР 0119U103519, 2020–2024 рр.), «Чисельно-аналітичне моделювання процесів деформування, стійкості та руйнування структурно-неоднорідних матеріалів (в тому числі з дефектами) при різних умовах навантаження» (№ ДР 0124U005008, 2025–2029 рр.), «Прогнозування макрохарактеристик композитних матеріалів регулярної та нерегулярної структури з урахуванням довготривалого деформування для

розрахунку елементів конструкцій ракетної техніки» (№ ДР 0125U000923, 2025–2026 рр). Також результати дисертації увійшли до проміжного звіту з науково-дослідної роботи молодих вчених НАН України «Дослідження критичного стану тріщин та траєкторій їх поширення, а також розповсюдження хвиль в рамках нелінійних підходів сучасної комп'ютерної та аналітичної механіки» (№ ДР 0125U001293) в рамках гранту НАН України для молодіжних лабораторій/груп молодих вчених в 2025–2026 рр.

Метою дослідження є

- розробка в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл напіваналітичного підходу до дослідження задач про стиск напівобмежених тіл із плівкою покриття (бішар) вздовж дефектів, розташованих на прямолінійній межі поділу середовищ або паралельних їй;
- застосування цього підходу до дослідження задач плоскої деформації про стиск напівобмежених гіперпружних тіл з покриттям, послаблених тріщинами або міжфазними зонами гладкого проковзування;
- дослідження задач про стиск аналогічних тіл без дефектів як граничних випадків задач для тіл з дефектами;
- аналіз залежностей одержаних критичних параметрів навантаження від механічних характеристик матеріалів і геометричних параметрів задачі, а також від виду комбінації пружних потенціалів нелінійно-пружних (гіперпружних) матеріалів тіла.

Для досягнення мети вирішувались наступні завдання:

- формулювання в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості строгої математичної постановки відповідних граничних задач про стиск гіперпружного бішару з дефектами та без дефектів та перехід до еквівалентних граничних задач у термінах потенціальних гармонічних

функцій із використанням загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги;

- зведення цих граничних задач до трансцендентних рівнянь відносно параметра критичного навантаження у випадку відсутності дефектів або до задач на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду (або системи таких рівнянь) у випадку наявності дефекту;
- розробка та реалізація числового дослідження зазначених трансцендентних рівнянь і задач на власні значення з метою визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають початковому етапу руйнування, зумовленому локальною втратою стійкості матеріалу;
- дослідження впливу на критичні значення параметрів навантаження таких чинників:
 - механічних характеристик компонентів бішару (жорсткості, стисливості), а також відносної товщини покриття (у випадку наявності дефекту);
 - умов контакту між берегами дефекту та між компонентами бішару;
 - виду конститутивної моделі гіперпружних матеріалів, що утворюють бішар;
- вивчення взаємодії двох різних механізмів втрати стійкості (*зморщування (wrinkling)* та *випучування (buckling)*) при стисканні бішарів вздовж міжфазних дефектів та аналіз застосовності відповідних їм наближених підходів на основі геометрично лінійних та нелінійних теорій балок та пластин.

Об'єктом дослідження є явище втрати стійкості при стиску гіперпружних кусково-однорідних напівобмежених тіл вздовж межі поділу середовищ, як у присутності, так і за відсутності дефектів.

Предметом дослідження є критичні параметри навантаження, що відповідають втраті стійкості бішарів із різних гіперпружних матеріалів: при зморщуванні тіл без дефектів, при стиску вздовж міжфазних зон гладкого проковзування та тріщин.

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії пружності та представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції для випадку плоскої задачі. З використанням апарату інтегральних перетворень Фур'є сформульовані граничні задачі відносно гармонічних потенціалів зведено до задач на власні значення для інтегральних рівнянь (систем рівнянь) Фредгольма першого роду у випадку задач для тіл з дефектами або до трансцендентних рівнянь у випадку задач для тіл без дефектів. Для чисельного дослідження інтегральних рівнянь використано метод Бубнова-Гальоркіна; чисельне інтегрування проведено за допомогою квадратурних формул Гауса з вузлами в нулях поліномів Лежандра. Для чисельного дослідження трансцендентних рівнянь в роботі використовувався метод Ньютона та метод бісекції.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- Вперше у рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розроблено напіваналітичний підхід до дослідження критичних параметрів втрати стійкості напівобмежених гіперпружних бішарів при стиску, який дозволяє враховувати довільну структуру пружних потенціалів, як для стисливих, так і для нестисливих матеріалів. Зазначений підхід використано до дослідження нового класу задач механіки руйнування матеріалів – плоских задач про стиск

напівобмежених тіл з покриттям вздовж прямолінійної межі поділу середовищ за різних умов контакту підкладки і шару покриття.

- Вперше розв'язано плоску задачу про втрату стійкості напівобмеженого бішару без дефектів під дією стискаючих зусиль, спрямованих вздовж межі поділу. При цьому:

- одержано трансцендентні рівняння для визначення критичних параметрів навантаження для тіл з жорстко з'єднаними або проковзуючими без тертя компонентами;

- оцінено точність класичних наближених формул для визначення *wrinkling*-деформації та обґрунтовано межі застосовності моделей із напівобмеженою підкладкою.

- Вперше розв'язано плоскі задачі про втрату стійкості напівобмеженого бішару з міжфазними дефектами та дефектами, розташованими поза межею поділу середовищ, під дією стискаючих зусиль, спрямованих вздовж межі поділу середовищ. При цьому:

- задачі про бішар з міжфазною тріщиною (у випадку жорстко з'єднаних та проковзуючих без тертя компонент) і бішар з міжфазною зоною гладкого проковзування зведено до задач на власні значення для інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (або їх систем), які допускають ефективне чисельне дослідження;

- для випадків відносно коротких і відносно довгих тріщин проведено порівняння отриманих в роботі результатів з відомими результатами, отриманими раніше іншими авторами в рамках наближених підходів на основі різних прикладних двовимірних теорій балок і пластин, які застосовуються для оцінки критичних *wrinkling*- і *buckling*-деформацій, відповідно. У разі тріщин проміжної довжини вперше теоретично показано, що через взаємодію механізмів зморщування (*wrinkling*) та

випучування (*buckling*) критичні значення відносних укорочень у бішарі істотно нижчі, ніж передбачається в рамках наближених підходів;

- розглянуто задачу про бішар з тріщиною, розташованою паралельно межі поділу, та проаналізовано застосовність континуальних наближень структурно неоднорідних тіл для цього класу задач.

- Здійснено аналіз впливу типу дефекту, умов контакту на межі поділу середовищ, механічних характеристик матеріалів та вибору конститутивної моделі на критичні параметри навантаження.
- Наведено інженерні оцінки щодо доцільності врахування міжфазних дефектів (в залежності від їх відносної довжини) при визначенні параметрів міцності на стиск елементів конструкцій з покриттям на початковій стадії руйнування.

Обґрунтованість та достовірність наукових результатів забезпечується:

- коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл та використанням апробованих методів їх розв'язання;
- збіжністю числових алгоритмів, використаних при розв'язанні трансцендентних рівнянь і задач на власні значення;
- узгодженістю отриманих результатів з відомими даними:
 - у разі кусково-однорідного тіла з однаковими матеріалами – з результатами, отриманими іншими авторами при дослідженні аналогічних задач для однорідного тіла;
 - у часткових випадках – з даними натурних експериментів і числових симуляцій, а також з результатами, отриманими в рамках наближених підходів, відомими в літературі;

– для тіл з дефектами – з результатами для тіл без дефектів у граничних випадках «нескінченно довгих» та «нульової довжини» дефектів.

- фізичною інтерпретацією результатів, яка узгоджується з відомими механізмами втрати стійкості в бішарах;
- апробацією основних результатів у рецензованих фахових виданнях.

Практичне значення отриманих результатів полягає в:

- можливості застосування отриманих результатів при моделюванні контрольованого зморщування та оцінці несучої здатності гнучких елементів у мікроелектронних та біомедичних пристроях, сонячних елементах, м'якій робототехніці тощо;
- можливості визначення механічних сталих конкретних матеріалів у межах заданої конститутивної моделі на основі спостережених критичних навантажень у експериментах на стискання зразків з тонким покриттям;
- формуванні теоретичної основи для постановки експериментальних досліджень втрати стійкості в тонкоплівкових системах з різними типами дефектів;
- наданні інженерних критеріїв доцільності врахування міжфазних дефектів або послабленого зв'язку між компонентами бішару при оцінюванні міцності на стиск елементів конструкцій на початкових етапах руйнування;
- застосовності розробленого напіваналітичного підходу як незалежного інструмента для валідації результатів, отриманих із використанням скінченно-елементного аналізу та інших числових методів.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати дисертації були отримані автором самотійно. У всіх працях, що опубліковані у співавторстві

з науковим консультантом академіком НАН України В.Л. Богдановим та академіком НАН України В.М. Назаренком, дисертантом виконано математичну постановку задач, отримано розв'язальні рівняння або їх системи, розроблено алгоритми числового дослідження, виконано числові розрахунки для конкретних моделей матеріалів та проаналізовано залежність критичних параметрів втрати стійкості від геометричних параметрів задач та механічних характеристик досліджуваних матеріалів.

Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародних конференціях, зокрема: International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics ІСТАЕМ-2 (Ханья, Греція, 2019 р.); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019» (Дніпро, 2019 р.); II Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій», присвяченій пам'яті акад. В.І. Моссаковського (Дніпро, 2019 р.); XIX International Conference “Dynamic System Modeling and Stability Investigation” (DSMSI) (Київ, 2019 р.); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2024» (Дніпро, 2024 р.); I Міжнародній науково-технічній конференції «Прикладна механіка» (Тернопіль, 2024 р.); X Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2024 р.); 11-тій Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024 р.); Міжнародній науковій конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ,

2024 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» (Київ, 2025 р.).

Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на об'єднаному семінарі 3-х відділів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – акад. НАН України Богданов В.Л.) та в повному обсязі – на науковому семінарі секції «Механіка композитних та неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — чл.-кор. НАН України Руцицький Я.Я.) та загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (керівник — акад. НАН України Назаренко В.М.) і одержали позитивні оцінки.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 26 наукових праць: 11 (публікації [1–9, 15, 18]) у виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus, з яких 4 публікації ([2, 5, 6, 8]) – віднесені відповідно до класифікації SCImago Journal до квартилю Q2, 5 (публікації [1, 3, 4, 7, 9]) – до квартилю Q3; 1 публікація [15] – до квартилю Q4; 2 (публікації [13, 16]) – у періодичних виданнях, включених до категорії «А» переліку наукових фахових видань України; 5 (публікації [10–12, 14, 17]) – у періодичних виданнях, включених до категорії «Б» переліку наукових фахових видань України. Дев'ять наукових праць (публікації [18–26]) – тези доповідей міжнародних наукових конференцій. Праці [5–7, 11–17, 19–22, 24, 25] опубліковані автором самостійно.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел із 244 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 344 сторінки, разом із 121 рисунком та 17 таблицями.

РОЗДІЛ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ КРИТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СТИСКУ КУСКОВО- ОДНОРІДНИХ ТІЛ ТА ТІЛ З ДЕФЕКТАМИ

У розділі наведено огляд літератури, присвяченої тематиці дисертаційної роботи, обґрунтовано актуальність дослідження та окреслено його місце в сучасному науковому контексті.

Розділ складається з двох частин.

У першій частині, на основі системного аналізу літературних джерел, узагальнено сучасний стан досліджень втрати стійкості бішарових систем типу «тонка плівка на товстішій підкладці» при стиску вздовж межі поділу середовищ. Відзначено значний прикладний інтерес до цієї проблематики, зумовлений широким використанням тонкоплівкових систем у різних високотехнологічних галузях. Особливу увагу приділено бішарам із гіперпружних компонентів, які здатні зазнавати значних деформацій. Підкреслено, що деформування таких систем залишається недостатньо вивченим у зв'язку з обмеженою придатністю традиційних лінійно-пружних балкових моделей для адекватного опису їхньої поведінки.

Друга частина розділу присвячена методології дослідження, використаній у роботі. Коротко охарактеризовано ефективність і переваги підходів тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл для розв'язання задач про стиск кусково-однорідних тіл уздовж межі поділу середовищ, а також задач про стиск тіл уздовж тріщин.

У висновках до розділу на основі аналізу літератури визначено наукові проблеми, які залишаються недостатньо дослідженими та будуть розглянуті в даній роботі.

1.1 Результати для бішарових систем

Явище втрати стійкості тіла при стиску, що полягає у переході системи в новий стан рівноваги після досягнення критичного навантаження, відоме ще з часів Ейлера, який досліджував втрату стійкості стрижня [101]. Перші результати з визначення критичних параметрів стиску напівобмежених однорідних тіл (зокрема, за умов скінченних деформацій) були отримані в середині ХХ століття [56, 60, 61, 208] у працях Н.Г. Allen, М.А. Biot, С. Sensenig та ін. Тоді ж у межах геометрично лінійної теорії з використанням балкового наближення було виведено перші формули для оцінки критичної деформації втрати стійкості бішарової системи, що складається з тонкої жорсткої плівки, жорстко з'єднаної з більш податливою товстою підкладкою.

Сьогодні такі тонкоплівкові системи знаходять все ширше застосування, а вивчення різних аспектів їх деформування, зокрема в умовах стиску викликає великий науковий і практичний інтерес.

1.1.1 Застосування тонкоплівкових систем

Відомо [207, 210], що міцність на стиск шаруватих композитів, до яких належать і матеріали з покриттям (бішарові системи) може бути на десятки відсотків нижчою за міцність на розтяг таких матеріалів. Більше того, для напівобмежених кусково-однорідних матеріалів, початок процесу руйнування при стиску може бути пов'язаний з приповерхневою нестійкістю – ейлеровою втратою стійкості поверхні зразка, яка виникає, коли навантаження (і, відповідно, деформація стиску) досягає свого критичного значення [18, 19, 95, 98, 162]. Явище нестійкості тонкої плівки при стиску бішару з утворенням хвилеподібного візерунка на поверхні відоме в літературі як *зморщування* (в англійській науковій літературі використовується термін *wrinkling*) [106, 147].

В останні роки інтерес до вивчення явища зморщування значно зріс через розширення області, в якій можна застосовувати отримані результати. Так, багато сучасних робіт зосереджені на аналізі зморщування та пост-зморщування *тонких жорстких плівок, розташованих на податливих нестиглих підкладках*. В таких системах жорсткість матеріалу плівки покриття може перевищувати жорсткість підкладки в тисячі разів.

Тонкоплівкові матеріали [219] широко використовуються, зокрема, в мікроелектроніці, де в ролі підкладки виступає еластомер, а тонка плівка може бути металізованим покриттям або електродом на основі вуглецевих нанотрубок (так звані діелектричні еластомери) [146, 203, 243].

Хвилястість поверхні, зумовлена нестійкістю, хоча часто є небажаною, також може бути використана для покращення функціональності пристрою. Наприклад, поверхневі зморшки можуть покращити світлову ефективність, пов'язану з органічними світловипромінювальними інструментами [153, 239], та ефективність збору світла органічних фотоелектричних шарів [158, 167, 239]. Для жорстких неорганічних провідних та фотоелектричних шарів також повідомлялося про кілька методів виготовлення хвилястих систем з метою покращення захоплення [83, 200, 206, 242] та розсіювання [226] сонячного світла. Зморшкувата структура може призвести до покращеної деформованості в гнучкій електроніці [199, 202, 203, 204, 225] та м'якій робототехніці [148], що дозволяє розгортати їх на криволінійних поверхнях та в тканинах. Була продемонстрована їхня механічна стійкість до розтягування, вигину та циклічного навантаження при збереженні стабільних оптоелектронних характеристик [149, 156, 204]. Розробка різних самоорганізуючих механізмів також є прямим застосуванням нестабільності зморшок [89, 165, 178, 217, 221, 235]. Явище поверхневої нестабільності

також використовується для визначення механічних параметрів полімерних плівок [187].

Поверхневі зморшки можуть утворюватися на широкій площі з відносною легкістю. Поширеним підходом є виготовлення шару плівки на попередньо натягнутому еластомерному матеріалі. Плівка фактично перебуває під стискаючим напруженням після зняття попереднього розтягнення; поверхнева нестабільність буде викликана, якщо стискаюче напруження, яке відчуває плівка, перевищить критичне значення, щоб зменшити енергію деформації системи. Подібний метод ініціації нестабільності тонкої плівки використовується, наприклад, в класичній експериментальній роботі [224], де досліджуються критичні параметри зморщування тонких платинових плівок на підкладці з каучукового матеріалу при різних температурних режимах.

Широка сфера практичного застосування включає також випадки, коли *жорсткості матеріалів бішарової системи є співставними*, а самі матеріали є гіперпружними [174] і здатними витримувати великі деформації [168]. Так, наприклад, у багатьох біологічних системах у процесі зростання і розвитку на поверхні двошарової тканини утворюється хвилястий візерунок, спричинений невідповідністю напружень в обох шарах [88, 214]. Висока еластичність та низька жорсткість тканин створює запит на сучасні полімерні матеріали з відповідними властивостями у біомедичній галузі [93].

Важливо зазначити, що умови контакту між компонентами бішарових систем не завжди є ідеальними. Накопичення мікроефектів на певній ділянці межі поділу середовищ може призводити до розриву суцільності з утворенням міжфазних дефектів типу тріщин (відшарувань).

Найслабший тип адгезійних зв'язків між компонентами бішару може моделюватися умовами проковзування без тертя (змащене проковзування)

[145, 18, 19] вздовж межі поділу контактуючих компонентів. Такі моделі інтерфейсів з проковзуванням як вздовж окремих ділянок, так і вздовж всієї лінії поділу середовищ, знаходять широке практичне застосування.

Змашене ковзання вздовж межі поділу між двома деформованими тілами [59] характеризується надзвичайно низьким коефіцієнтом тертя та може відбуватися в різних системах [215, 216], які часто зазнають великих деформацій. Наприклад, у гнучкій електроніці допустимим є відносне зміщення (мікроковзання) між тонкою функціональною плівкою та еластомерною підкладкою, щоб додатково не обмежувати здатність першої до деформування [202]. Подібні явища спостерігаються також при моделюванні біомедичних інтерфейсів [96], наприклад, при контакті між рогівкою та кришталіком [97] або між шкірою та фасцією [58].

Умови ковзання також характерні і для інтелектуальних самозмашувальних полімерних композитів, які є двофазними системами: м'яка фаза, що складається зі змашувального наповнювача, та полімерна матриця як жорстка фаза [103]. Такі матеріали характеризуються тривалим терміном служби з низьким рівнем шуму, низькою міцністю на зсув у напрямку ковзання, високою міцністю на стиск вздовж напрямку навантаження та низьким коефіцієнтом тертя [223].

1.1.2 Сучасний стан дослідження критичних параметрів стиску бішарових систем

Зазначений прикладний інтерес до проблеми зморщування при стиску тонких плівок на товстіших підкладках обумовлює зростання кількості наукових публікацій, присвячених, зокрема, визначенню критичних параметрів навантаження таких систем.

В цьому літературному огляді спочатку зупинимось на роботах, в яких розглядалися бішари без дефектів. З огляду на велику кількість таких робіт,

перевага буде надана лише сучасним публікаціям, та таким, що становлять особливий інтерес в контексті порівняння отриманих в них результатів з результатами дисертаційного дослідження.

В другій частині цього пункту наведена бібліографія з дослідження бішарових систем при стиску вздовж міжфазного розшарування.

Більшість досліджень критичних параметрів стиску бішарів без дефектів присвячено випадку м'яких нестисливих підкладок з достатньо жорсткими плівками.

Так, у роботі [188] представлено числову модель для вивчення еволюції нестійкості тонких плівок на податливій підкладці, засновану на введенні однієї вбудованої недосконалості на межі поділу середовищ. Подібний метод також застосовувався в дослідженнях інших авторів (див., наприклад, [205, 211]). Запропонований метод дозволяє вивчати й закритичну морфологію поверхні зразка, зокрема, залежність амплітуди утвореної хвилі від прикладеної деформації стиску. Крім того, в [188] розглядається випадок покриттів, що складаються з двох різних тонких плівок, що характерно, наприклад, для сонячних елементів. У цьому випадку матеріали конструкції вважалися лінійно-пружними, плівки достатньо жорсткими, а підкладки податливими та нестисливими.

У роботі [166] представлено наближений підхід до визначення критичної деформації утворення зморшок та критичної довжини хвилі для бішарів зі скінченною товщиною на основі моделі лінійної теорії балок [49, 50, 82]. Для валідації результатів та вивчення зміни структури на поверхні бішару при закритичних значеннях деформації використовується метод скінченних елементів із застосуванням неогуківської моделі для нестисливих компонентів бішарової системи.

У праці [154] для визначення критичних параметрів початку зморщування бішарів в рамках інкрементальної (лінеаризованої) крайової задачі [193] використовується метод лінійного аналізу збурень.

У багатьох дослідженнях для визначення критичної деформації зморщування або для валідації результатів, одержаних чисельними методами, використовується відома наближена формула, яка не враховує стисливість підкладки [60, 224]. Ця наближена формула, отримана з використанням так званого «балкового наближення» для лінійно-пружних матеріалів, забезпечує досить хорошу оцінку критичних деформацій зморщування і критичних довжин хвиль лише для малих значень критичних деформацій, що характерно для багатьох конкретних систем плівка/підкладка, коли жорсткість плівки перевищує жорсткість підкладки в тисячі разів. У [172, 173] були запропоновані уточнені формули, що враховують вплив зсувного зчеплення на межі розділу системи плівка/підкладка. У дослідженні [173], на основі лінійної теорії пластин, наведено оцінку впливу коефіцієнта Пуассона підкладки на значення критичної деформації.

У випадку, коли жорсткості компонентів бішарової системи відрізняються не так суттєво, значення критичних деформацій, які відповідають початку утворення зморшок, збільшуються настільки, що геометрично та фізично лінійні моделі в цілому та указані наближені формули зокрема виявляються незастосовними. Відповідні задачі для бішарів із гіперпружних компонентів вивчені менш детально.

Зморщування бішарів з гіперпружних матеріалів, досліджувалося, наприклад, у роботах [84, 87, 150, 222, 234]. В основному розглядалися стисливі матеріали з пружним потенціалом Трелоара, що відповідає *нестисливому* неогуківському матеріалу. У роботі [87] проведено нелінійний біфуркаційний аналіз зморщування бішару з неогуківських матеріалів умовах

плоскої деформації підкладки з попереднім розтягуванням і без нього. В іншій роботі тих самих авторів [86] докладно досліджено вплив недосконалостей на межі тіла на критичні параметри поверхневої нестійкості в напівобмеженому однорідному тілі з неогуківського матеріалу. Також вивчалися й інші механізми прояву феномену поверхневої нестійкості у напівобмежених гіперпружних тілах, наприклад, у разі гармонічного потенціалу [85, 170, 227]. В роботі [57] досліджено вплив стисливості матеріалів бішарової системи із *стисливих* неогуківських компонентів на критичні параметри навантаження. Випадки інших конститутивних моделей не вивчалися. У випадку великих деформацій застосовна також варіаційна теорія [213].

Припустимо тепер, що внаслідок ослаблення адгезії на інтерфейсі системи підкладка/плівка на відрізку скінченної довжини стався розрив суцільності із втратою зв'язку між компонентами тіла та утворенням дефекту з берегами, що не перебувають у контакті – тріщини (розшарування) [157]. Вочевидь, значення критичних деформацій втрати стійкості у цьому разі виявляться нижчими, ніж у разі аналогічного бішару без дефекту на інтерфейсі [18]. Якщо довжина відшарування, що утворилося, досить велика, то візерунок, що спостерігається на поверхні бішару, буде одним яскраво вираженим блістером в області над розшаруванням. Такий механізм втрати стійкості називають «buckling» (випучування). Оцінка критичних деформацій випучування може бути дана за допомогою наближених формул [81, 92, 107, 240], отриманих з використанням так званого «балкового підходу» або «балкового наближення», в рамках якого частина плівки, що відшарувалася, розглядається як балка з відповідними граничними умовами на торцях. Такий підхід не враховує податливості підкладки, а одержані з його застосуванням

значення критичних деформацій не залежать від механічних характеристик бішарової системи, що значно обмежує його застосовність.

Вказаний наближений підхід вивчений, наприклад, в [79, 94, 110] для випадку відшарувань в *однорідних напівобмежених тілах*. В роботах окреслено межі зміни відстані від тріщини до вільної поверхні тіла, для якої точність наближеної формули є прийнятною.

У разі *кусково-однорідного тіла*, із застосуванням нелінійної теорії пластин von Kármán [80], було виведено трансцендентне рівняння для визначення критичних деформацій випучування, що дозволяє враховувати податливість підкладки [240]. Це рівняння широко застосовується для верифікації результатів, отриманих методом скінченних елементів [107, 173, 241]. При цьому коефіцієнти зазначеного трансцендентного рівняння необхідно визначати для кожної конкретної пари лінійно-пружних матеріалів бішару внаслідок чисельного розв'язання інтегральних рівнянь, що робить процес досить трудомістким.

Автори робіт, опублікованих останніми роками, (див., наприклад, [241]) розширюють область застосування даного рівняння шляхом уточнення таких параметрів, як кут змішування мод та розширений фазовий коефіцієнт як функції параметрів Дандурса [240].

У роботі [55], в рамках теорії пластин з використанням моделі адгезії Леннарда-Джонса, розглядаються спонтанне відшарування і одночасне випучування попередньо стиснутої плівки, розташованої на плоскій та жорсткій підкладці. Визначається мінімальне стискаюче напруження, при якому виникає початкове розшарування між компонентами, зв'язаними спочатку уздовж усього інтерфейсу.

В статті [244] досліджується поведінка бішарової системи з ортотропних компонентів при стисканні вздовж міжфазного відшарування.

Основним обмеженням балкових наближень, що ґрунтуються на різних теоріях пластин, є те, що вони описують лише ідеалізований випадок «чистого» buckling і застосовні переважно для досить довгих розшарувань, яким відповідають малі значення критичних деформацій.

У той же час дані експериментів та числових симуляцій [172, 173, 189, 218] демонструють можливість реалізації змішаного механізму втрати стійкості – wrinkling та buckling – при стисканні систем підкладка/тонка плівка вздовж міжфазних тріщин (розшарування). Однак взаємодія цих механізмів залишається недостатньо вивченою.

У роботі [189] у разі лінійно-пружних матеріалів запропоновано наближений підхід до визначення відстані від блістера, що утворився на поверхні, до поверхневих зморшок.

Зауважимо, що споріднені питання актуальні також і для розшарування однорідних гіперпружних матеріалів, наприклад, при моделюванні розшарування аорти [209, 236].

Нині під час інтерпретації результатів чисельного моделювання часто використовується наступний спрощений підхід [107, 173]. Якщо довжина міжфазної тріщини мала, її вплив на критичні параметри втрати стійкості вважається несуттєвим і в якості оцінки приймаються значення критичних деформацій зморщування, про які йшлося вище. У протилежному випадку — за досить довгої тріщини — використовують значення критичних деформацій випучування. При цьому зі зменшенням довжини тріщини відповідне buckling-значення зростає і, починаючи з певної довжини дефекту, стає порівняним з критичним wrinkling-значенням, яке не залежить від довжини тріщини.

Очевидно, що такий підхід не враховує взаємодії механізмів нестійкості, а отримані з його використанням теоретичні значення критичних деформацій слід очікувати більшими, ніж дійсні значення.

Іншим обмеженням згаданих наближених підходів є припущення про лінійно-пружну поведінку матеріалів, що складають бішар. Однак у випадку, коли компоненти бішару мають порівнянну жорсткість, втрата стійкості при стиску може відбуватися при деформаціях, що істотно перевищують діапазон застосування фізично лінійної моделі.

Міжфазні дефекти інших типів в бішарових системах, що перебувають в умовах стиску, як і дефекти, що розташовані не на межі поділу гіперпружних середовищ бішарової системи, в літературі не розглядалися. Так само не досліджено інші типи зв'язку між компонентами системи, окрім жорсткого з'єднання. Своєю чергою дослідження шаруватих структур іншого типу за умови неідеального контакту між компонентами в літературі представлені достатньо широко. Так у разі кусково-однорідних тіл з компонентами, що проковзують, вивчалися, наприклад, необмежені шаруваті композити при стиску вздовж меж поділу (див. [18, 145]), шаруваті ортотропні пластини під дією синусоїдального навантаження (див. [171]) тощо. До розгляду бралися і більш складні моделі інтерфейсу, наприклад, модель поверхневої пружності Гуртина–Мердока (див. [163, 164]).

Наостанок відзначимо спорідненість задачі стійкості для бішару з міжфазним дефектом типу зони проковзування і задачі про стиск бішару з компонентами, що проковзують, з деякими задачами контактних взаємодій (висвітленими в сучасних публікаціях) та механіки руйнування.

Наприклад, в [194] досліджувалася задача механіки контакту без тертя системи ортотропне покриття/ізотропна підкладка. В [195] досліджувався контакт без тертя ортотропного шару, що лежить на жорсткій основі та

стиснений жорстким штампом. В [99] досліджувалася плоска задача про контакт з тертям, що утворюється між пружним функціонально-градієнтним шаром та однорідним півпростором при їх притисненні один до одного. В [108] отримано точний розв'язок контактної задачі про тертя жорсткого штампа, що ковзає по ортотропному середовищу.

З математичної точки зору умови проковзування без тертя вздовж відрізка скінченної довжини еквівалентні умовам на гранях зсувної тріщини з повним контактом (див., наприклад, піонерську роботу [91]).

В монографії [45] представлено аналітичні розв'язки низки контактних задач про міжфазні тріщини в кусково-однорідному тілі за наявності тертя. В роботі [196] запропоновано аналітичний підхід до визначення межі області контакту берегів міжфазної навантаженої напівнескінченної тріщини.

1.2 Результати, одержані в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл

В цьому параграфі окреслюються переваги використання підходів тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) до дослідження неklasичних проблем руйнування та проводиться стислий огляд результатів, які були одержані в межах ТЛТСДТ при розв'язанні задач про стиск однорідних та кусково-однорідних тіл вздовж тріщин. Детальну бібліографію з цього питання з докладним аналізом відповідних результатів можна знайти в оглядових роботах О.М. Гузя та співавторів [110, 114, 118, 124] та в монографіях [18, 19] відповідно.

1.2.1 Некласичні проблеми механіки руйнування

Окреслений в пп. 1.1.1, 1.1.2 клас задач механіки деформівного твердого тіла про стиск бішарових систем вздовж присутніх в них дефектів,

можна розглянути і як частину більш широкого класу – задач про руйнування при стиску конструкційних матеріалів, до яких належать шаруваті та волокнисті композити, матеріали з покриттям тощо, послаблених тріщинами. У відповідних задачах механіки руйнування такі матеріали можуть моделюватися, наприклад, кусково-однорідними тілами [18, 177] або (в континуальному наближенні) ортотропними (чи трансверсально-ізотропними) тілами [18, 19].

Попередні експериментальні дослідження показали, що одним із можливих механізмів ініціювання руйнування є мікронестабільність (мікровипучування) волокон або шарів, яка зазвичай виникає в зонах із високими градієнтами напружень, наприклад, поблизу країв отворів чи вільних поверхонь. Автори роботи [95] першими розглянули мікровипучування волокон як механізм руйнування однонаправленого композиту під час стискання. Відтоді початок руйнування необмежених шаруватих структур при стисканні зазвичай пов'язують із вигином мікроструктури матеріалу, коли критичне навантаження визначається параметрами мікроструктури композиту, а не розмірами чи формою зразка або конструктивного елемента, тобто з явищами внутрішньої нестабільності, як описано у Біо [60]. Цитована монографія надала поштовх для розвитку лінеаризованої теорії пружності.

Починаючи з 1970-х років [11, 16, 17] в авангарді розвитку лінеаризованої теорії стоїть київська школа механіки на чолі з Олександром Миколайовичем Гузем. Співвідношення ТЛТСДТ, викладені ним, зокрема, в роботах [4, 8, 9, 11], було отримано шляхом строгої та послідовної лінеаризації рівнянь нелінійної пружності [104, 169, 190] та розвивають підхід, запропонований Біо. З сучасним станом розвитку лінеаризованої теорії

можна ознайомитись в монографіях та главах в колективних монографіях [14, 109, 113, 115, 116].

Зазначимо, що інкрементальна теорія стійкості, яка являє собою лінеаризовану теорію стійкості, у якій, з урахуванням певних фізичних міркувань, уведено деякі математичні спрощення, також розвивалася незалежно різними авторами (див., наприклад, [102, 191, 193, 198]). Формулювання задач про втрату стійкості в рамках повної тривимірної нелінійної теорії пружності розглядалися, наприклад, у [193, 208]; у роботі [175] досліджується взаємодія механізмів втрати стійкості в волокнистому матеріалі на основі втрати еліптичності.

З широкого спектру означених на початку цього пункту задач найменш дослідженими є задачі, у яких тіла знаходяться в умовах стиску вздовж площин, в яких розташовані тріщини [110, 113, 114, 115]. Подібні питання відносяться до *некласичних проблем механіки руйнування* [20], оскільки у межах класичних критеріїв руйнування Гріффітса – Ірвіна і його узагальнень [40, 41, 90, 100, 105, 151, 152, 197, 201, 228, 229] коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин тріщин і величини, що характеризують розкриття тріщин, при зазначеній схемі навантаження дорівнюють нулю [43, 46, 53, 109].

Для дослідження таких проблем у роботах О.М. Гузя із залученням підходів ТЛТСДТ було запропоновано критерій руйнування [5, 6, 7, 10], відповідно до якого початок (старт) процесу руйнування *однорідного* матеріалу при його стиску вздовж тріщин пов'язується з втратою стійкості стану рівноваги матеріалу в локальній області поблизу тріщини (локальна втрата стійкості). При цьому теоретичній межі міцності та значенню граничного укорочення відповідає величина критичного стискаючого

навантаження та критичного значення укорочення, що обчислюються за допомогою зазначеного критерію.

У випадку стиску вздовж міжфазних тріщин в *кусково-однорідному* матеріалі наявність межі поділу середовищ та границі тіла зобов'язує враховувати той факт, що при деяких співвідношеннях між фізико-механічними характеристиками компонент композитного матеріалу вказаній *локальній* втраті стійкості поблизу тріщини може передувати *внутрішня* (зумовлена внутрішньою структурою композиту та стисканням вздовж напрямів його армування) [1, 18] або *поверхнева* (зумовлена наявністю граничної поверхні тіла і явищами, що виникають біля цієї поверхні) втрата стійкості [18, 28].

Взаємодія описаних механізмів втрати стійкості матеріалу залишається мало дослідженою. У випадку стиску бішарової структури – тонка плівка на напівобмеженій підкладці – локальній втраті стійкості частини матеріалу в області дефекта відповідає buckling-, а приповерхневій – wrinkling-механізм нестабільності (див. пп. 1.1.1, 1.1.2).

На відміну від підходів, в яких відшарована частина матеріалу тіла або все покриття в цілому моделюються з використанням різних балкових моделей, застосування апарату ТЛТСДТ дозволяє розв'язувати відповідні задачі з визначення критичних параметрів руйнування тіл при стиску в точній постановці із залученням строгих лінеаризованих співвідношень. Нижче дається огляд робіт, присвячених використанню цього апарату до дослідження проблем, споріднених з темою дисертаційного дослідження.

1.2.2 Сучасний стан дослідження задач про стиск тіл вздовж тріщин

Перші результати з дослідження *необмеженого однорідного тіла* при стиску вздовж внутрішньої тріщини представлені в роботах О.М. Гузя [111, 112]. На основі аналітичного розв'язку відповідних граничних задач було

показано, що значення критичних параметрів втрати стійкості таких тіл при стиску вздовж тріщини збігаються зі значеннями аналогічних параметрів, що відповідають приповерхневій нестійкості півпростору того ж матеріалу.

Надалі широкий клас плоских та просторових задач про стиск *однорідних* ізотропних та трансверсально-ізотропних тіл з тріщинами було розглянуто в роботах В.Л. Богданова, О.М. Гузя, В.І. Кнюха, В.М. Назаренка, І.П. Стародубцева, Ю.І Хоми. При цьому, трансверсально-ізотропні матеріали також моделюють в континуальному наближенні композитні матеріали з усередненими механічними характеристиками [18, 19, 42]. В рамках цих досліджень ефективно застосовувався напіваналітичний метод, який полягає у використанні загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги для зведення вихідної граничної задачі до інтегральних рівнянь або їх системи [115]. Перевагою запропонованого підходу є можливість одержувати розв'язальні рівняння в загальній формі – для стисливих та нестисливих пружних (гіперпружних), пластичних тіл (див., наприклад, [23, 128, 182]), а також композитів (див, наприклад, [22, 24, 72, 111, 127, 135, 138]) у випадку як малих, так і великих докритичних деформацій.

Систематизувавши указані вище роботи за геометричною схемою досліджуваної задачі про стиск *однорідних* тіл вздовж тріщин, можна виділити наступні чотири класи:

- задачі для приповерхневих тріщини в напівобмежених тілах (див. наприклад, [13, 23, 24, 68, 69, 72, 73, 127, 132, 134, 135, 181, 182, 183, 184, 185]);
- задачі для двох паралельних тріщин в необмежених тілах (див. наприклад, [22, 126, 128, 129, 137, 138]);
- задачі для періодичної системи паралельних тріщин в необмежених тілах (див. наприклад, [25, 67, 70, 136]);

- задачі для ізольованих тріщин в необмежених тілах (див. наприклад, [15, 26, 125, 127, 130, 131]).

У разі просторових осесиметричних та неосесиметричних задач розглядалися випадки кругових [13, 68, 69, 70, 128, 129, 132, 181] та циліндричних [26, 27, 125, 134, 135] тріщин.

Окремо слід виділити роботи В.Л. Богданова з механіки руйнування, в яких запропоновано метод визначення критичних параметрів руйнування тіл при стиску вздовж тріщин, відповідно до якого ці параметри вираховуються при розв'язуванні відповідних неоднорідних задач механіки руйнування матеріалів з початковими (залишковими) напруженнями як значення стискаючих початкових (залишкових) напружень, при досягненні яких відбувається різка «резонансоподібна» зміна основних величин напружено-деформованого стану, зокрема, коефіцієнтів інтенсивності напружень (див, наприклад, [63, 64, 65, 66, 133, 186]).

В останні роки з використанням сучасних пакетів символьних обчислень для розв'язку лінеаризованих просторових осесиметричних задач про стиск однорідного напівобмеженого тіла вздовж приповерхневої тріщини [29, 94, 117] і необмеженого тіла вздовж двох паралельних близькорозташованих дископодібних тріщин [31] або періодичної системи тріщин [30, 32] О.М. Гузем, В.М. Назаренком та М.В. Довжиком було вивчено питання про межі застосування методів «балкового наближення» (див. п. 1.1.2) у випадку відшарувань в однорідному тілі.

Перші результати з механіки руйнування шаруватих композитних матеріалів з використанням моделі *кусково-однорідного тіла* при стиску вздовж тріщин, розташованих у площинах поділу середовищ, в межах ТЛТСДТ були отримані в публікаціях І.О. Гузя та Ю.В. Коханенка [139, 144].
Із застосуванням методу скінченних різниць отримано вираз для

теоретичного значення граничного укорочення шаруватого композитного матеріалу з пружними компонентами (крихке руйнування) з однією тріщиною, розташованою у межі поділу середовищ.

У роботах О.М. Гузя та І.О. Гузя [119, 120, 121, 122, 123, 143] викладено результати дослідження плоскої задачі про стиск кусково-однорідного тіла, ослабленого довільним скінченим числом міжфазних мікротріщин, коли розміри тріщин є суттєво меншими від розмірів структурних елементів композиту і внаслідок цього можна розглядати задачу про стиск двох з'єднаних між собою різнорідних півплощин вздовж системи тріщин, розташованих на прямолінійній межі їх поділу). Результати отримано в єдиній загальній формі для теорії скінчених та малих докритичних деформацій у випадку пружних і пружно-пластичних стисливих і нестисливих ізотропних та ортотропних тіл. Метод, запропонований авторами, який полягає у зведенні плоскої задачі ТЛТСДТ на власні значення до однорідної задачі спряження двох голоморфних функцій, заданих у всій площині, дозволяє отримати точний аналітичний розв'язок відповідних задач.

Було розглянуто також просторові осесиметричні задачі про руйнування кусково-однорідних тіл з круговими міжфазними тріщинами, розташованими у двох паралельних площинах, [140] та про руйнування шаруватих композитних матеріалів періодичної структури з періодичною системою кругових міжфазних тріщин [141, 142]. Дослідження в рамках ТЛТСДТ проводилися із застосуванням чисельних методів.

В роботах [230, 231, 232, 233] було досліджено руйнування шаруватих композитів з двома паралельними макротріщинами в границях розділу шарів, коли тріщини зміщені в паралельних площинах одна відносно одної. В зазначених публікаціях також отримано результати для композиту з періодичною системою паралельних тріщин, які зміщені одна відносно одної.

Таким чином, в межах ТЛТСДТ достатньо детально вивчені задачі про стиск однорідних необмежених і напівобмежених тіл вздовж тріщин, а також деякі задачі про стиск кусково-однорідних необмежених тіл вздовж міжфазних тріщин. Інші задачі про стиск тіл вздовж тріщин, зокрема бішарових систем, не розглядалися.

Основні результати та висновки розділу

Як засвідчив наведений огляд, дослідження бішарових тонкоплівкових систем при стиску є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла, інтерес до якої зумовлений широким застосуванням таких матеріалів в різних високотехнологічних галузях. Проте, багато аспектів деформування бішарів з огляду можливої втрати стійкості при стисканні, яка може розглядатися як початковий етап руйнування такого структурного елемента, й досі вивчені недостатньо, а спостережені під час експериментів механічні ефекти потребують теоретичного підтвердження.

Так, аналіз критичних параметрів зморщування бішарів без дефектів в літературі представлений лише у двох випадках: широко – у разі застосовності лінійно-пружної моделі та наближених формул та менш широко – у разі бішарів з гіперпружних матеріалів. Досліджувались при цьому переважно системи із жорстко з'єднаними компонентами.

В першому випадку застосування сучасних розрахункових пакетів є ефективним методом не лише для визначення критичних параметрів втрати стійкості, а й для дослідження зміни морфології поверхні зразка при деформаціях, що перевищують критичні значення. Валідація результатів при цьому відбувається шляхом порівняння зі значеннями, отриманими за допомогою наближених формул.

В другому випадку представлені результати лише окремі результати для тонкоплівкових переважно нестисливих систем, компоненти яких моделюються неогуківським матеріалом.

Результати з визначення критичних деформацій та критичних довжин хвиль для інших типів конститутивних моделей і інших типів зв'язку між підкладкою та плівкою, як і аналіз застосовності наближених формул, в літературі не представлені.

Для бішарів, послаблених дефектами, теоретичні результати отримані лише у випадку наявності міжфазних відшарувань, відносна довжина яких настільки велика, що втрата стійкості плівки покриття відбувається за механізмом випучування частини плівки в області відшарування. В цьому разі для визначення критичних параметрів використовують наближене трансцендентне рівняння, межі застосовності якого досі не досліджені.

Результати для бішарів у разі широкого діапазону зміни довжини міжфазного відшарування одержані на сьогодні тільки в межах лінійно-пружної моделі з використанням чисельних методів.

Результати з визначення критичних деформацій для гіперпружних бішарів при стиску вздовж міжфазних відшарувань довільної заданої довжини, як і дослідження взаємодії двох різних механізмів втрати стійкості в літературі на разі не представлені. Не представлені також і результати для дефектів іншого типу і іншого типу зв'язку компонентів бішарової системи.

Таким чином, проведений аналіз літератури дозволяє зробити висновок, що питання стійкості бішарових гіперпружних систем із дефектами залишаються недостатньо дослідженими. Зокрема, потребують подальшого розвитку підходи тривимірної лінеаризованої теорії стійкості для задач про стиск напівобмежених кусково-однорідних тіл уздовж меж поділу середовищ

та вздовж дефектів. Саме цим питанням присвячено подальші розділи дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ДЕФОРМІВНИХ ТІЛ

В даному розділі викладено основні положення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [12, 21, 113].

Коротко розглянуто основні співвідношення лінеаризованої теорії у випадку загальних і однорідних докритичних напружено-деформованих станів: рівняння рівноваги і граничні умови та лінеаризовані співвідношення пружності для різних моделей матеріалів. Також для випадку одноосного стиску в умовах плоскої деформації проілюстровано процес побудови загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції для стисливих і нестисливих тіл у разі однорідного початкового стану.

Викладення ведеться з використанням координат природного недеформованого стану та збурень тензорів напружень і деформацій, віднесених до цього стану в межах теорії скінченних початкових деформацій.

2.1 Основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості

Основні співвідношення тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) при малих та великих (скінченних) докритичних деформаціях в загальній формі були побудовані О.М. Гузем і детально викладені, наприклад, в [12]. Вони одержані шляхом строгої послідовної лінеаризації відповідних рівнянь нелінійної теорії пружності [104, 169, 190].

Як вже зазначалося апарат, ТЛТСДТ є ефективним до дослідження широкого класу задач стійкості, зокрема для волокнистих та шаруватих композитних матеріалів; неklasичних задач механіки руйнування матеріалів про стиск тіл вздовж тріщин, зокрема при наявності початкових (залишкових) напружень, що діють вздовж тріщин тощо.

Для опису деформованого стану тіла будемо використовувати лагранжеві координати x_j , $j = \overline{1,3}$, які в недеформованому стані збігаються з декартовими, що задаються ортами \vec{g}_j .

В якості міри деформацій приймемо тензор деформацій Гріна [104] ε , компоненти якого в межах *нелінійної теорії* пружності мають вигляд

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right), m, n, k = \overline{1,3} \quad (2.1)$$

В задачах, що досліджуються в рамках дисертаційної роботи, геометрія тіла задається в недеформованому стані, тому будемо відносити всі величини до одиниць об'єму (площі) в недеформованому стані.

Для опису напруженого стану використовуємо несиметричний тензор Піоли–Кірхгофа \tilde{t} [17, 15, 104, 169, 190], який вводиться як перерахований на одиницю площі недеформованого тіла тензор Коші, що використовується в класичній теорії пружності, та симетричний тензор напружень Лагранжа \tilde{S} , який відповідає тензору узагальнених напружень. При цьому компоненти вектора напружень $\vec{t}^{(i)}$, що прикладений до площадки $x_i = const$ (в недеформованому стані) та вимірюється на площу цієї площадки, визначаються так:

$$\vec{t}^{(i)} = t^{ij} \vec{g}_j = S^{ij} \vec{g}_j^*, \quad (2.2)$$

де \vec{g}_j та \vec{g}_j^* – орти систем координат в недеформованому та деформованому станах, відповідно. Зв'язок між компонентами тензорів \tilde{S} та \tilde{t} має вигляд

$$t^{ij} = S^{in} \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \quad (2.3)$$

Рівняння рівноваги в напруженнях мають вигляд

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + F^j = 0, \quad (2.4)$$

де F^j – компоненти масових сил.

Граничні умови в напруженнях на частині S_1 поверхні тіла і граничні умови в переміщеннях на частині S_2 поверхні записуються наступним чином:

$$N_i t_{ij} \Big|_{S_1} = P_j, \quad (2.5)$$

$$u_j \Big|_{S_2} = f_j. \quad (2.6)$$

В (2.5), (2.6) N_i – складова орта нормалі до поверхні тіла в недеформованому стані, P_j – складові поверхневих сил, пов'язані з поверхнею тіла в деформованому стані.

Для нестисливих тіл, також повинна виконуватися умова нестисливості, яка записується, наприклад, у вигляді [12, 21, 113]

$$\det \|\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}\| = 1. \quad (2.7)$$

Для загальної постановки задачі в рамках *нелінійної теорії пружності*, рівняння (2.1) – (2.7) слід замкнути співвідношеннями пружності.

Лінеаризовані співвідношення отримуються шляхом лінеаризації відповідних співвідношень *нелінійної теорії*. Основні принципи лінеаризації детально викладені в монографіях [12, 20, 113].

Розглядаються три напружено-деформованих стани деформівного тіла:

1. недеформований стан – в тілі відсутні напруження та деформації;
2. початковий (незбурений) стан – зумовлений початковими (або залишковими) напруженнями;
3. збурений стан – викликаний додатковими, по відношенню до початкових, збуреннями напружень та деформацій.

Величини, що відносяться до незбуреного стану, надалі будемо позначати індексом “0”. Збурення всіх величин, які вважаються малими по відношенню до величин незбуреного стану, додатковим індексом не позначаються. Величини, які відносяться до збуреного стану, можна представити як суму величин початкового стану та збурень.

Враховуючи малість збурень, внаслідок лінеаризації приходимо до наступних лінеаризованих співвідношень.

Тензор деформації Гріна:

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} + \left(\delta_{jn} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right]; \quad (2.8)$$

рівняння рівноваги в напруженнях:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] + F^j = 0; \quad (2.9)$$

граничні умови:

$$N_i t_{ij} \Big|_{S_1} = \left[\left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] \Big|_{S_1} = P_j, \quad (2.10)$$

$$u_j \Big|_{S_2} = f_j. \quad (2.11)$$

Тензори напружень \tilde{t} та \tilde{S} пов'язані наступним співвідношенням:

$$t_{ij} = \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}. \quad (2.12)$$

Умова нестисливості у лінеаризованій формі запишеться так:

$$g_{*0}^{nm} \varepsilon_{nm} \equiv g_{*0}^{nm} \left(\delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = 0. \quad (2.13)$$

Усі наведені у підрозділі лінеаризовані співвідношення подані для теорії великих (скінченних) докритичних деформацій. Співвідношення для різних варіантів теорії малих докритичних деформації одержуються із наведених в результаті відповідних спрощень [12, 20, 113].

Для замикання загальної постановки задачі залишилось до рівнянь рівноваги (2.9) і граничних умов (2.10), (2.11) додати співвідношення, що визначають залежність між напруженнями і деформаціями (або похідними від переміщень), що і зроблено нижче.

2.2 Співвідношення пружності

В цьому підрозділі стисло викладається процес одержання та наводиться вигляд співвідношень пружності [21] як в межах нелінійної теорії, так і після процедури лінеаризації за принципами, описаними вище.

В дисертаційному дослідженні розглядаються лише пружні тіла, тобто тіла яким властива оборотність процесів, які в них відбуваються.

Обмежимося розглядом *гіперпружних* матеріалів, під якими розуміємо такі матеріали, для яких існує функція *пружного потенціалу* Φ .

Для стисливих тіл в цьому разі маємо

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi, \quad (2.14)$$

для нестисливих тіл:

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi + p g_*^{ij}, \quad (2.15)$$

де p – скалярна функція, пов’язана з гідростатичним тиском.

Розглянемо *ізотропні* тіла. Не обмежуючи загальності, будемо вважати пружний потенціал для стисливого тіла функцією алгебраїчних інваріантів тензору деформацій Гріна (2.1)

$$\Phi = \Phi(A_1, A_2, A_3). \quad (2.16)$$

В (2.16) A_1, A_2, A_3 – алгебраїчні інваріанти тензору деформацій Гріна, які у випадку нелінійної теорії визначаються наступним чином [12, 21]:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon_{nm}, \\ A_2 &= \varepsilon_{nm} \varepsilon_{nm}, \\ A_3 &= \varepsilon_{nm} \varepsilon_{mk} \varepsilon_{kn}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

У межах лінеаризованої теорії вирази (2.17) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}, \\ A_2 &= 2\varepsilon_{nm}^0 \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}, \\ A_3 &= 2\varepsilon_{im}^0 \varepsilon_{ni}^0 \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Керуючись (2.17) можна [12, 21] побудувати й інші системи інваріантів, наприклад:

$$I_1 = 3 + 2\varepsilon_{nm} = 3 + 2A_1,$$

$$I_2 = 3 + 4\varepsilon_{nn} + 2(\varepsilon_{nn}\varepsilon_{mm} - \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mn}) = 3 + 4A_1 + 2(A_1^2 - A_2), \quad (2.19)$$

$$I_3 = \det \|\delta_{rs} + 2\varepsilon_{ij}\| = 1 + 2A_1 + 2(A_1^2 - A_2) + \frac{4}{3}(2A_3 - 3A_1A_2 + A_1^3).$$

Беручи до уваги (2.7), одержуємо, що у випадку нестисливого тіла

$$I_3 = \det \|\delta_{rs} + 2\varepsilon_{ij}\| = 1.$$

Тому цю систему інваріантів зручно використовувати для конструювання функції пружного потенціалу для нестисливих тіл:

$$\Phi = \Phi(I_1, I_2) \equiv \Phi(I_1(A_1, A_2), I_2(A_1, A_2)) \equiv W(A_1, A_2). \quad (2.20)$$

Враховуючи (2.16), (2.14) для стисливих тіл маємо

$$S^{ij} = \delta_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial A_1} + 2\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} + 3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \frac{\partial \Phi}{\partial A_3}. \quad (2.21)$$

Для нестисливих тіл з (2.15), (2.20) отримуємо:

$$S^{ij} = pg_*^{ij} + \delta_{ij} \frac{\partial W}{\partial A_1} + 2\varepsilon_{ij} \frac{\partial W}{\partial A_2}. \quad (2.22)$$

Побудова конкретних представлень для пружного потенціалу Φ – важлива актуальна проблема інженерної механіки та матеріалознавства. Від самого зародження нелінійної теорії пружності в середині минулого століття проводяться дослідження з формулювання таких співвідношень пружності для матеріалів, що демонструють фізично нелінійну поведінку, які б найкраще відповідали наявним експериментальним даним.

Типовим є феноменологічний підхід, коли вибір потенціалу і визначення відповідних пружних сталих для даного матеріалу проводиться на основі результатів натурного експерименту, наприклад, з одновісного

розтягу. Після чого верифікація одержаних даних відбувається при порівнянні з даними при інших геометріях навантаження.

В рамках такого підходу функція пружного потенціалу Φ представляється у вигляді поліноміального ряду за степенями одного з наборів інваріантів тензору деформацій, наприклад

$$\Phi = \sum_{i,j,k} c_{ijk} A_1^i A_2^j A_3^k, \quad c_{ijk} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Обираючи ту чи іншу форму залежності (2.23) побудовано такі пружні потенціали [62, 179, 180, 192, 212, 220, 237, 238]: Трелоара, Муні–Рівліна, Йона, Йео, Блетца-Ко, Огдена-Саундерса, Сіньйоріні, Мернагана та інші.

Використовуючи для нестисливих ізотропних матеріалів систему інваріантів $I_k, k = \overline{1,3}$, функцію пружного потенціалу в достатньо загальній формі можна подати у вигляді

$$\Phi = \sum_{i,j} c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j. \quad (2.24)$$

Якщо в (2.24) обмежитись двома членами, отримаємо пружний потенціал Муні–Рівліна [179]; якщо ж залишити один член отримаємо пружний потенціал Трелоара

$$\Phi = C_{10} (I_1 - 3), \quad W = 2C_{10} A_1 \quad (2.25)$$

Пружний потенціал Трелоара у формі (2.25) описує так званий матеріал неогуківського типу [174, 220]. Потенціал Трелоара широко використовується для моделювання таких еластомерів, як вулканізований сіркою каучук та наповнені етилен-пропиленові каучуки; термопласти; поліуретани; силікони та інші. Еластомери зустрічаються і в біологічних тканинах.

Для конструювання функції Φ можна ефективно використати також іншу систему інваріантів:

$$\begin{aligned}
s_1 &= (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1) \equiv \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \\
s_1 &= (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1) \equiv \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \\
s_1 &= (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1) \equiv \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

де λ_n – коефіцієнт видовження вздовж лінії x_n ; $\delta_n = 1 - \lambda_n$ – відносний коефіцієнт видовження (вважається, що координатні лінії x_n співпадають з головними напрямками тензору деформації Гріна):

$$\Phi = \sum_{i,j,k} c_{ijk} s_1^i s_2^j s_3^k, \quad c_{ijk} = const.
\tag{2.27}$$

Найпростішим з таких потенціалів є потенціал Бартенєва – Хазановича [2] для нестисливого тіла, який має вигляд

$$\Phi = 2\mu s_1.
\tag{2.28}$$

Якщо в (2.27) обмежитись квадратичним наближенням, отримаємо наступне представлення пружного потенціалу для стисливого тіла:

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2.
\tag{2.29}$$

Пружний потенціал для стисливого ізотропного тіла у вигляді (2.29) вперше був представлений в роботі [155] і отримав назву потенціалу гармонічного типу. Матеріал, що описується цим потенціалом, відомий як «напівлінійний матеріал» або «матеріал Джона».

Якщо ж квадратичним наближенням обмежитись в представленні для пружного потенціалу (2.23), то отримаємо квадратичний пружний потенціал

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda A_1^2 + \mu A_2.
\tag{2.30}$$

Легко перевірити, що у випадку малих докритичних деформацій пружні потенціали Трелоара (2.25), Бартенєва–Хазановича (2.28), потенціал

гармонічного типу (2.29) і квадратичний потенціал (2.30) переходять у відповідне представлення для пружного потенціалу класичної лінійної теорії пружності, а сталі λ та μ при цьому, переходять у відповідні параметри Ляме.

Враховуючи (2.8), (2.12), (2.15), після послідовної лінеаризації приходимо до лінеаризованих співвідношень пружності. Для стисливих тіл:

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (2.31)$$

де складові тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \omega_{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left(\delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}, \\ S_0^{i\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0, \\ \Phi^0 &= \Phi(\varepsilon_{11}^0, \dots, \varepsilon_{33}^0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для нестисливих тіл маємо:

$$t_{ij} = \mathfrak{x}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + q^{ij} p, \quad (2.33)$$

де складові тензорів $\tilde{\omega}$ та \tilde{q} визначаються так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{ij\alpha\beta} &= \left(\delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left(\delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 - p^0 (g_{*0}^{i\beta} g_{*0}^{mn} + g_{*0}^{im} g_{*0}^{\beta n}) \right] + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}, \end{aligned}$$

$$q^{ij} = g_{*0}^{im} \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right), \quad (2.34)$$

$$S_0^{i\beta} = p^0 g_{*0}^{i\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0.$$

Співвідношення пружності (2.31) для стисливих тіл і (2.33) для нестисливих тіл разом із рівняннями рівноваги (2.9) та граничними умовами (2.10), (2.11) замикають загальну постановку граничної задачі в межах тривимірної лінеаризованої теорії деформівних тіл.

2.3 Лінеаризовані співвідношення і загальні розв'язки при однорідному докритичному стані

В даному розділі наведено лінеаризовані співвідношення у випадку реалізації в тілі однорідного докритичного напружено-деформованого стану: вирази для тензору деформацій Гріна, співвідношення пружності, а також рівняння рівноваги в переміщеннях для стисливих і нестисливих тіл і загальні представлення їх розв'язків, побудовані операторним методом.

Однорідний докритичний стан реалізується в однорідних тілах при стиску вздовж тріщин в рамках точної математичної постановки відповідних задач [18, 19, 21, 110, 115, 116, 124].

Будемо використовувати лагранжеві координати $x_j \equiv x^j$, $j = \overline{1,3}$, які в природному стані збігаються з декартовими. Однорідний докритичний стан задається виразом для переміщень [12, 21, 113]

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i; \quad \lambda_i = const, \quad (2.35)$$

де λ_i – коефіцієнти укорочень вздовж координатної осі x_i . Недеформованому стану відповідають значення $\lambda_i = 1$, $i = \overline{1,3}$.

Напружений стан, який відповідає стану (2.35), визначається із співвідношень пружності (2.31) для стисливих або (2.33) для нестисливих тіл. Для гіперпружних матеріалів, які розглядаються в межах цього дослідження, цей стан залежить від виду пружного потенціалу, тобто від конкретних представлень для компонентів тензорів четвертого рангу $\tilde{\omega}$ або $\tilde{\alpha}$, одержаних з урахуванням (2.35).

Компоненти тензора деформацій Гріна $\tilde{\varepsilon}^0$ пов'язані з коефіцієнтами укорочень співвідношенням

$$2\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij}(\lambda_j^2 - 1). \quad (2.36)$$

Зв'язок між тензорами напружень \tilde{t} та \tilde{S} з урахуванням (2.12), (2.35) прийме вигляд

$$t_{ij} = \lambda_j S^{ij} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \quad (2.37)$$

(підсумовування по індексу j в (2.37) не відбувається).

Компоненти тензора збурень деформацій $\tilde{\varepsilon}$ визначається наступним чином з урахуванням (2.8), (2.35)

$$2\varepsilon_{ij} = \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.38)$$

Співвідношення пружності для стисливих тіл (2.31) у випадку (2.35) запишуться так

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta},$$

$$\omega_{ij\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_j \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} \right] + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_{\beta\beta}^0. \quad (2.39)$$

Співвідношення пружності для нестисливих тіл (2.33) у випадку (2.35) мають вигляд

$$t_{ij} = \mathfrak{a}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + q^{ij} p$$

$$\mathfrak{a}_{ij\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_j \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} \right] + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_{\beta\beta}^0, \quad (2.40)$$

$$q^{ij} = \delta_{ij} q_j, \quad q_j = \lambda_j^{-1}.$$

Величини $A_{i\beta}$, μ_{ij} , що фігурують в (2.39), (2.40), визначаються видом пружного потенціалу і є функціями коефіцієнтів укорочення $\lambda_i = 1$, $i = \overline{1,3}$.

Використовуючи рівняння рівноваги в напруженнях (2.9), співвідношення пружності (2.39), (2.40), а також формулу (2.37), одержуємо лінеаризовані рівняння рівноваги в переміщеннях:

для стисливих тіл

$$L_{m\alpha} u_\alpha = 0,$$

$$L_{m\alpha} = \omega_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\beta} \quad (m, \alpha, i, \beta = \overline{1,4}); \quad (2.41)$$

для нестисливих тіл

$$N_{m\alpha} u_\alpha = 0,$$

$$N_{m\alpha} = \mathfrak{a}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\beta} (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{\alpha 4}) + \delta_{\alpha 4} (1 - \delta_{m4}) \frac{\partial}{\partial x_m} + \delta_{m4} (1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (2.42)$$

$$(u_4 \equiv p, \quad m, \alpha = \overline{1,4}, \quad i, \beta = \overline{1,3}).$$

В загальному випадку просторової задачі лінеаризовані рівняння рівноваги (2.41), (2.42) являють собою системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. В силу того, що однорідний докритичний стан (2.35) не залежить від координат, коефіцієнти указаних систем є сталими.

Відповідно до операторного методу побудови загальних розв'язків систем лінійних рівнянь, розв'язок систем рівнянь (2.41), (2.42) можна подати у вигляді однієї з наступних формул (або їх лінійної комбінації):

для стисливих тіл

$$u_i^{(j)} = \left[\frac{\partial(\det \|L_{rs}\|)}{\partial(L_{ji})} \right] \Phi^{(j)},$$

$$\left[\det \|L_{rs}\| \right] \Phi^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1,3}) \quad (2.43)$$

для нестисливих тіл

$$u_\alpha^{(m)} = \left[\frac{\partial(\det \|N_{rs}\|)}{\partial(N_{m\alpha})} \right] \Phi^{(m)},$$

$$\left[\det \|N_{rs}\| \right] \Phi^{(m)} = 0 \quad (m = \overline{1,4}). \quad (2.44)$$

Для частинного випадку однорідного докритичного стану (2.35) можливе подальше спрощення представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги. У випадку одновісного стиску в межах просторової задачі указані представлення конкретизуються, наприклад, в монографії [113]. Випадок задачі плоскої деформації розглянуто в наступному параграфі.

2.4 Плоскі задачі

У цьому параграфі дається подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги при одновісному стиску в умовах плоскої деформації в координатах недеформованого стану для *однорідного* тіла. Також для чотирьох пружних потенціалів конкретної структури даються вирази для компонентів тензорів $\tilde{\omega}$ та $\tilde{\alpha}$.

Припускаємо, що дефекти в матеріалі розташовані в площинах $x_2 = const$. В цьому разі [12, 21, 113] $S_{22}^0 = 0$ (надалі для позначення напружень стиску, що відповідають незбуреному стану, будемо використовувати загальноприйняту літеру σ). Реалізований при одновісному стиску вздовж осі x_1 докритичний стан є статично визначеним однорідним і для плоскої деформації визначається співвідношеннями [12, 21, 113]

$$\begin{aligned}\sigma_{ii}^0 &= const, \sigma_{22}^0 = 0, \sigma_{11}^0 \neq 0, \sigma_{33}^0 \neq 0; \\ u_m^0 &= \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i; \\ \lambda_i &= const, \lambda_3 = 1 \quad (i = \overline{1,3}),\end{aligned}\tag{2.45}$$

де λ_i – коефіцієнти укорочення вздовж осей, $\lambda_1 < 1$.

Для збурень переміщень також виконуються умови плоскої деформації у площині $x_1 O x_2$

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3 \equiv 0.\tag{2.46}$$

Нижче окремо для стисливих і нестисливих тіл дається представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь – представлення компонент вектора переміщень \vec{u} і тензора напружень \vec{t} – при докритичних станах (2.45) і виконання умов (2.45).

2.4.1 Загальні представлення розв'язків для стисливих тіл

Для стисливих матеріалів при виконанні умов (2.45), (2.46) загальні розв'язки у переміщеннях можуть бути подані у вигляді [12, 21, 113]

$$u_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \chi, u_2 = \frac{\omega_{1111}}{\omega_{1122} + \omega_{1212}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1111}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi,\tag{2.47}$$

де функція χ визначається з рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_1^p \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_2^p \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi = 0. \quad (2.48)$$

Компоненти тензора $\tilde{\omega}$, що входять до лінеаризованих визначальних рівнянь, визначаються вибором моделі матеріалу (див. (2.39)). Величини n_1 , n_2 – корені характеристичного рівняння, що визначаються співвідношеннями [12, 21, 113]

$$n_{1,2} = c \pm \left(c^2 - \omega_{2222} \omega_{2112} \omega_{1111}^{-1} \omega_{1221}^{-1} \right)^{1/2},$$

$$2c = \frac{\omega_{2222}}{\omega_{1221}} + \frac{\omega_{2112}}{\omega_{1111}} - \frac{(\omega_{1122} + \omega_{1212})^2}{\omega_{1111} \omega_{1221}}. \quad (2.49)$$

Вирази для складових тензора напружень подаються через похідні від переміщень у вигляді

$$t_{11} = \omega_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{1122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$t_{12} = \omega_{1212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{1221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

$$t_{21} = \omega_{2112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_{2121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (2.50)$$

$$t_{22} = \omega_{2211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \omega_{2222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Подальші спрощення виду загальних розв'язків пов'язані з можливістю представлення функції χ , що задовольняє рівняння четвертого порядку (2.48), у вигляді комбінації двох незалежних функцій, що задовольняють рівняння другого порядку. Вигляд такого представлення функції χ істотно залежить від цього, рівними чи ні є корені n_1 та n_2 характеристичного рівняння (2.49).

Рівні корені ($n_1 = n_2$).

Функція χ може бути подана у вигляді

$$\chi = \chi_2 + x_2 \chi_3, \quad (2.51)$$

причому функції χ_2, χ_3 визначаються з рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi_2, \chi_3 = 0. \quad (2.52)$$

При цьому функція χ , як легко перевірити, є розв'язком рівняння (2.48).

Далі послідовність замін функцій

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} &= -\varphi_1, \quad \chi_3 = -\varphi_2, \\ \varphi &= -(\varphi_1 + \varphi_2), \quad F = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}, \quad \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

разом із заміною незалежної змінної

$$z_1 = \left(n_1 \right)^{-1/2} x_2 \quad (2.54)$$

приводять до шуканої форми подання загальних розв'язків. Використовуючи заміни, остаточно отримуємо [12, 21, 113, 185]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ u_2 &= \left(n_1 \right)^{-1/2} \left[\left(m_1 + 1 - m_2 \right) F - m_1 \Phi - m_1 z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right]; \\ t_{21} &= c_{44} \left(n_1 \right)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(d_1 - d_2 \right) F - d_1 \Phi - d_1 z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right], \\ t_{22} &= c_{44} \left[\left(d_1 l_1 - d_2 l_2 \right) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1 l_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \omega_{1111} (\omega_{1122} + \omega_{1212})^{-1} (n_1 - \omega_{2112} \omega_{1111}^{-1}), \quad d_1 = \omega_{2112} \omega_{2121}^{-1} + m_1, \\
 d_2 &= 2\omega_{2112} \omega_{2121}^{-1} + m_2 - 1, \quad l_1 = (-n_1 \omega_{2211} + m_1 \omega_{2222}) (n_1)^{-1} (d_2)^{-1} \omega_{1212}^{-1}, \quad (2.56) \\
 l_2 &= [-n_1 \omega_{2211} + (m_1 + m_2 - 1) \omega_{2222}] (n_1)^{-1} (d_2)^{-1} \omega_{1212}^{-1}, \quad c_{44} = \omega_{1212}.
 \end{aligned}$$

Потенціальні функції F , φ , Φ задовольняють рівняння Лапласа в змінних x_1 , z_1 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) F, \varphi, \Phi = 0. \quad (2.57)$$

Нерівні корені ($n_1 \neq n_2$).

Використовуючи представлення функції χ у вигляді

$$\begin{aligned}
 \chi &= \chi_2 + \chi_3, \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi_2 &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi_3 = 0, \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

заміни функцій

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} = -\varphi_1, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial x_2} = -\varphi_2 \quad (2.59)$$

та незалежної змінної x_2

$$z_i = (n_i)^{-1/2} x_2, \quad i = 1, 2, \quad (2.60)$$

приходимо [12, 21, 113, 185] до представлень загальних розв'язків у формі

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= m_1 (n_1)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2 (n_2)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}; \\
t_{22} &= c_{44} \left(d_1 l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2 l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), \\
t_{21} &= c_{44} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[d_1 (n_1)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + d_2 (n_2)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right];
\end{aligned} \tag{2.61}$$

де

$$\begin{aligned}
c_{44} &= \omega_{1212}; \quad d_j = \omega_{2112} \omega_{1212}^{-1} + m_j, \quad m_j = (\omega_{1111} n_j - \omega_{2112}) (\omega_{1122} + \omega_{1212})^{-1}, \\
l_1 &= (\omega_{2222} m_j - n_j \omega_{2211}) (d_j)^{-1} \omega_{1212}^{-1} (n_j)^{-1} \quad (j = 1, 2).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Потенціали φ_1, φ_2 є гармонічними функціями своїх змінних

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.63}$$

2.4.2 Загальні представлення розв'язків для нестисливих тіл

Для нестисливих матеріалів загальні представлення розв'язків лінеаризованих рівнянь можна подати так [12, 21, 113, 185]:

$$\begin{aligned}
u_1 &= q_{11}^{-1} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
u_2 &= -q_{22}^{-1} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \\
p &= -q_{11}^{-2} \left\{ \left[\mathfrak{a}_{1111} - q_{11} q_{22}^{-1} (\mathfrak{a}_{1212} + \mathfrak{a}_{1122}) \right] \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mathfrak{a}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x_2} \chi; \\
t_{11} &= \mathfrak{a}_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mathfrak{a}_{1122} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + q_{11} p,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
t_{12} &= \mathfrak{a}_{1212} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mathfrak{a}_{1221} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\
t_{21} &= \mathfrak{a}_{2112} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mathfrak{a}_{2121} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\
t_{22} &= \mathfrak{a}_{2211} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mathfrak{a}_{2222} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + q_{22} P,
\end{aligned}$$

функція χ визначається з рівняння (2.48), а корені характеристичного рівняння визначається за формулами

$$\begin{aligned}
n_{1,2} &= c \pm \left(c^2 - q_{22}^2 q_{11}^{-2} \mathfrak{a}_{2112} \mathfrak{a}_{1221}^{-1} \right)^{1/2}, \\
2c \mathfrak{a}_{1221} &= \mathfrak{a}_{2222} + q_{11}^{-2} q_{22}^2 \mathfrak{a}_{1111} - 2q_{11}^{-1} q_{22} (\mathfrak{a}_{1122} + \mathfrak{a}_{1212}). \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Використовуючи процедуру, аналогічну викладеній в попередньому пункті для стисливих тіл, отримуємо для нестисливих тіл подання у вигляді (2.55) для рівних коренів ($n_1 = n_2$) і у вигляді (2.61) для нерівних коренів ($n_1 \neq n_2$).

При цьому у разі рівних коренів [12, 21, 113, 185]

$$\begin{aligned}
m_1 &= q_{11} q_{22}^{-1} n_1, \quad m_2 = 1, \\
l_1 &= \left[m_1 \mathfrak{a}_{2222} + n_1 \left(q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{a}_{1111} - \mathfrak{a}_{1212} - 2\mathfrak{a}_{1122} \right) - q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{a}_{2112} \right] (n_1)^{-1} \times \\
&\quad \times \left(\mathfrak{a}_{2112} \mathfrak{a}_{2121}^{-1} + m_1 \right)^{-1} \mathfrak{a}_{1212}^{-1}, \quad (2.66) \\
l_2 &= \left[m_1 \mathfrak{a}_{2222} + n_1 \left(q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{a}_{1111} - \mathfrak{a}_{1212} - 2\mathfrak{a}_{1122} \right) - 3q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{a}_{2112} \right] (n_1)^{-1} \times \\
&\quad \times \left(2\mathfrak{a}_{2112} \mathfrak{a}_{1212}^{-1} + m_2 - 1 \right)^{-1} \mathfrak{a}_{1212}^{-1},
\end{aligned}$$

нерівних коренів

$$m_i = q_{11} q_{22}^{-1} n_i;$$

$$l_i = \left[m_i \mathfrak{x}_{2222} + n_1 \left(q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{x}_{1111} - 2\mathfrak{x}_{1122} - \mathfrak{x}_{1212} \right) - q_{11}^{-1} q_{22} \mathfrak{x}_{2112} \right] (n_1)^{-1} \times \quad (2.67)$$

$$\times \left(\mathfrak{x}_{2112} \mathfrak{x}_{1212}^{-1} + m_i \right)^{-1} (n_i)^{-1} \mathfrak{x}_{1212}^{-1} \quad (i = 1, 2),$$

а щодо величин c_{44} , d_j , $j = 1, 2$, компоненти тензора $\tilde{\omega}$ замінюються компонентами тензора $\tilde{\mathfrak{x}}$.

Конкретні співвідношення для компонентів цих тензорів у випадку пружних потенціалів, що будуть використовуватись в роботі, даються в наступному підпункті.

2.4.3 Чотири моделі ізотропних гіперпружних тіл

Будемо розглядати лише однорідні ізотропні гіперпружні матеріали.

Як вже зазначалося, компоненти тензорів $\tilde{\omega}$ та $\tilde{\mathfrak{x}}$, що забезпечують зв'язок між напруженнями на похідними від переміщень для стисливих та нестисливих тіл, у разі реалізації однорідного докритичного стану у випадку плоскої задачі залежать від двох параметрів – коефіцієнтів видовження λ_1 і λ_2 ($\lambda_3 = 1$ при одновісному стиску). Указані параметри не є незалежними, а залежність між ними визначається умовою $\sigma_{22}^0 = 0$. Тому надалі будемо вважати, що компоненти зазначених тензорів та, як наслідок, коефіцієнтів лінеаризованих рівнянь рівноваги і загальних представлень їх розв'язків є функціями параметру λ_1 .

Напіваналітичний підхід, що пропонується в межах дисертаційного дослідження, і який пов'язаний з використанням загальних представлень розв'язків рівнянь рівноваги при дослідженні граничних задач про стійкість бішарових систем, дозволяє одержувати розв'язальні рівняння в загальному вигляді для довільної комбінації пружних потенціалів, що описують стисливі або нестисливі компоненти тіла.

Лише на етапі чисельного дослідження одержаних рівнянь, який є фінальним етапом розв'язання задачі, відбувається конкретизація конститутивних моделей матеріалів шляхом підстановки відповідних залежностей для компонентів тензорів $\tilde{\omega}$ чи $\tilde{\alpha}$.

Будемо використовувати чотири види пружних потенціалів різної структури.

Розглядаються стандартний гармонічний потенціал [155, 170] (матеріал Джона; *рівні корені*) і квадратичний потенціал [113] (з відповідними спрощеннями для малих деформацій; *нерівні корені*) для стисливих тіл, а також потенціал Бартенєва–Хазановича [2] (*рівні корені*) і потенціал Трелоара [220] (неогуківський матеріал; *нерівні корені*) для нестисливих тіл.

Двоконстантні гармонічний і квадратичний пружні потенціали характеризуються двома сталими μ і ν , в той час як одноконстантні потенціали Бартенєва-Хазановича і Трелоара можуть бути описані однією пружною сталою μ .

Оскільки у разі малих деформацій всі зазначені потенціали моделюють також і лінійно-пружні тіла, а сталі μ і ν переходять, відповідно в модулі жорсткості і коефіцієнти Пуассона класичної лінійної теорії пружності, домовимося далі називати їх модулем жорсткості і коефіцієнтом Пуассона матеріалів, взявши до уваги зазначене зауваження.

Інші пружні сталі (або їх аналоги) за необхідності можна визначити в стандартний спосіб:

модуль Юнга:

$$E = 2\mu (1 + \nu); \quad (2.68)$$

перший параметр Ляме:

$$\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \quad (2.69)$$

(для нестисливих матеріалів в (2.68) слід покласти $\nu = 0.5$).

Насамкінець наведемо вирази для компонентів відповідних тензорів для означених моделей пружних потенціалів, разом із виразами для коренів характеристичних рівнянь, коефіцієнтів укорочення λ_2 та докритичних напружень стиску σ_{11}^0 .

Потенціал гармонічного типу:

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 1, \lambda_2 = 1 - \nu(1 - \nu)^{-1}(\lambda_1 - 1), \sigma_{11}^0 = 2\mu(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1)^{-1}; \\ \omega_{1111} = \omega_{2222} = 2\nu\mu/(1 - 2\nu) + 2\mu, \omega_{1122} = \omega_{2211} = 2\nu\mu/(1 - 2\nu), \\ \omega_{1212} = \omega_{2121} = 2\mu\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2), \omega_{2112} = \omega_{1221} = 2\mu\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Квадратичний потенціал (малі деформації):

$$\begin{aligned} n_1^{-1} = 1 + \frac{\sigma_{11}^0}{\lambda + 2\mu}, n_1^{-2} = 1 + \frac{\sigma_{11}^0}{\mu}, \lambda_2 = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\nu}(\lambda_1 - 1), \\ \sigma_{11}^0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}(\lambda_1 - 1); \\ \omega_{1111} = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0, \omega_{2222} = \lambda + 2\mu, \omega_{1122} = \omega_{2211} = \lambda, \\ \omega_{1212} = \omega_{2121} = \mu, \omega_{2112} = \omega_{1221} = \mu + \sigma_{11}^0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Потенціал Бартенєва–Хазановича:

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = \lambda_1^2, \lambda_2 = \lambda_1^{-1}, \sigma_{11}^0 = 2\mu(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1)^{-2}; \\ \mathfrak{x}_{1111} = 2\mu\lambda_1^{-2}\lambda_2, \mathfrak{x}_{2222} = 2\mu\lambda_2^{-1}, \\ \mathfrak{x}_{1122} = \mathfrak{x}_{2211} = 0, \mathfrak{x}_{2112} = \mathfrak{x}_{1221} = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\mathfrak{a}_{2121} = \mathfrak{a}_{1212} = 2\mu \lambda_1^{-1} \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}.$$

Потенціал Трелоара:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, \quad n_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^{-2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1}, \quad \sigma_{11}^0 = 2C_{10}(1 - \lambda_1^{-2}), \quad \mu = 2C_{10}; \\ \mathfrak{a}_{1111} &= 2C_{10}(\lambda_1^{-2} \lambda_2 + 1), \quad \mathfrak{a}_{2222} = 4C_{10}, \\ \mathfrak{a}_{1122} &= \mathfrak{a}_{2211} = 0, \quad \mathfrak{a}_{1221} = \mathfrak{a}_{2112} = 2C_{10}, \\ \mathfrak{a}_{2121} &= \mathfrak{a}_{1212} = 2C_{10} \lambda_1^{-2} \lambda_2. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Основні результати та висновки розділу

В розділі викладено необхідні для подальшого основні співвідношення нелінійної теорії пружності, а також відповідні їм лінеаризовані співвідношення, одержані в загальному вигляді із дотриманням принципів лінеаризації, що сформульовані у п. 2.1.

Базуючись на указаних співвідношеннях побудована постановка лінеаризованої задачі в загальному випадку та у випадку, коли докритичний напружено-деформований стан в тілі є однорідним. У разі, коли цей стан реалізується в умовах плоскої деформації, для стисливих і нестисливих тіл даються загальні представлення розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги в термінах потенціальних гармонічних функцій.

Окрема увага приділена побудові лінеаризованих співвідношень пружності для ізотропних гіперпружних матеріалів. Наведено необхідні співвідношення для параметрів, що визначають чотири конкретні конститутивні, які використовуються в подальших розділах дисертації.

РОЗДІЛ 3 СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНИХ БІШАРОВИХ СИСТЕМ ПРИ ЖОРСТКОМУ З'ЄДНАННІ І ГЛАДКОМУ ПРОКОВЗУВАННІ КОМПОНЕНТІВ

Цей розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню стійкості бішарових систем при стиску. Бішар складається з двох різних однорідних гіперпружних матеріалів: напівобмеженої підкладки та плівки покриття. Стиск відбувається вздовж прямолінійної межі поділу середовищ, які жорстко з'єднані між собою або проковзують без тертя одне відносно одного. Відповідно до термінології [18, 19], такі умови контакту відповідають «найсильнішому» та «найслабшому» типам зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла.

Елементи конструкцій з тонким покриттям, які знаходяться в умовах стиску, широко використовуються в таких галузях, як мікроелектроніка [199, 202, 203, 204, 225] (гнучкі датчики, дисплеї тощо), робототехніка [148] та біомедична інженерія [88, 93, 168, 174, 214]. Багато наукових праць присвячено випадку ідеального контакту між підкладкою та плівкою. Випадок, коли вздовж межі поділу реалізується можливість проковзування без тертя, вивчений недостатньо, хоча має важливе прикладне значення [58, 59, 96, 97, 103, 202, 215, 216, 223].

З огляду на механічні характеристики, інтерес становлять як системи, у яких товста податлива підкладка вкрита тонкою жорсткішою плівкою, так і ті, де жорсткість компонентів співставна.

Більшість сучасних теоретичних досліджень стосуються першого типу систем (див., наприклад, [166, 188]), оскільки втрата стійкості там відбувається при малих деформаціях, що робить застосовними наближені моделі [49, 50, 82]. У випадку систем із порівняною жорсткістю компонентів

(див., наприклад, [57, 87]) аналіз ускладнений необхідністю залучення геометрично нелінійних теорій та моделей гіперпружних тіл.

У цьому розділі в межах строгої постановки задачі ТЛТСДТ вперше розглядаються задачі плоскої деформації про стиск кусково-однорідного гіперпружного тіла вздовж межі поділу середовищ за різних умов їх з'єднання. Для кожного випадку з використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.55), (2.61) гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до трансцендентних рівнянь для визначення критичних параметрів навантаження. Розглянуто всі чотири можливі комбінації співвідношень між коренями характеристичних рівнянь (2.49), (2.65).

Одержані в загальному вигляді трансцендентні рівняння для стисливих і нестисливих тіл із довільною структурою пружних потенціалів досліджуються чисельно. Для низки конкретних конститутивних моделей аналізуються залежність критичних значень відносного укорочення та критичних довжин хвиль від механічних характеристик компонентів бішару, а також чутливість цих значень до структури їх пружних потенціалів.

Проводиться порівняння з відомими наближеними балковими моделями та оцінюються межі їх застосовності. У випадку потенціалу Трелоара також здійснюється порівняння з результатами, одержаними методами нелінійного біфуркаційного аналізу. Наведено порівняння з даними експериментів та числових симуляцій.

У завершенні розділу результати критично обговорюються в контексті перспектив подальших досліджень і формулюються висновки.

Результати, представлені в розділі, відображені в публікаціях автора [36, 33, 76, 160, 161].

3.1 Постановка задач

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, що складається з двох компонент: напівобмеженої гіперпружної підкладки «1» ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «2» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ ненавантажена. Таке тіло будемо називати бішаром або бішаровою системою.

Розглядаємо два типи з'єднання компонентів $x_2 \leq 0$ бішарової системи: жорстке з'єднання (рис. 3.1.а) та проковзування без тертя (рис. 3.1.б). Перший тип з'єднання («*perfectly bonded components*») визначається умовами ідеального контакту і забезпечує неперервність компонентів тензору напружень і вектору переміщень вздовж межі поділу. Другий тип («*perfectly lubricated components*») допускає розрив лише дотичного переміщення, а дотичне напруження дорівнює нулю. На рисунках другий тип зв'язку будемо позначати кружечками, як це зроблено на рис. 3.1.б.

Нехай на нескінченності компоненти бішару стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = const, i = 1, 2; \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)} \quad (3.1)$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі Ox_1 для обох компонентів: підкладки та плівки

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = const, \lambda_1 < 1, \quad (3.2)$$

де λ_1^1, λ_1^2 – коефіцієнти укорочення підкладки та плівки, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно.

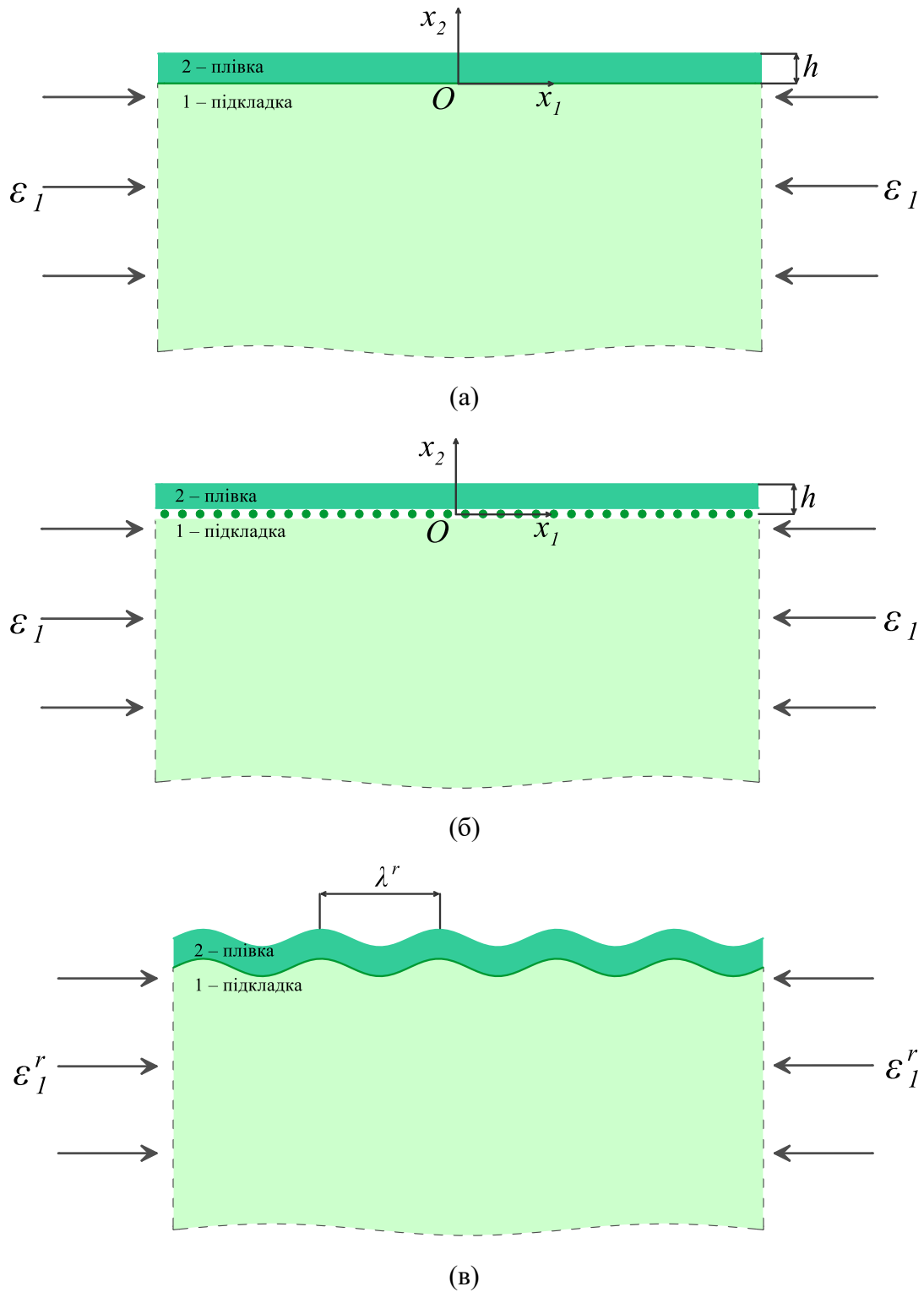


Рис. 3.1 – Бішарова система при стиску: а – за жорсткого з'єднання; б – за гладкого проковзування; в – зморщування плівки покриття при критичних деформаціях.

В (3.1), (3.2) і надалі верхнім індексом «1» (іноді – в дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу підкладки, а верхнім індексом «2» (іноді – в дужках) – матеріалу плівки покриття «2». Верхнім індексом “0”, як і раніше, позначаються величини, що відносяться до докритичного (незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначаються додатковим індексом.

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей «1» і «2» є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень (див. пп. 2.1, 2.4)

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Реалізація однорідного докритичного стану (3.3) є необхідною умовою для використання загальних представлень розв’язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.55), (2.61).

Відносні укорочення, що реалізуються в компонентах бішару, визначаються через коефіцієнт укорочення λ_1 наступним чином

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^2 = 1 - \lambda_1. \quad (3.4)$$

Припущення про однорідність докритичного стану в компонентах кусково-однорідних тіл є типовою для аналітичних підходів в межах ТЛТСДТ (див., наприклад, [18, 110, 116]). При цьому вважається, що стиск на нескінченності відбувається через абсолютно жорсткі диски або, що компоновка бішарової системи відбувається вже після прикладання навантаження до окремих її компонентів. Другий з названих варіантів можна вважати типовим для тонкоплівкових структур, які допускають зморщування плівки, зокрема, внаслідок невідповідності теплового розширення (або звужування) складових або укорочення тонкоплівкового матеріалу після зняття навантаження з попередньо розтягнутої плівки [224], та для

біологічних двошарових тканин, під час росту та розвитку яких, на поверхні утворюється зморшкуватий візерунок, спричинений невідповідністю напружень в обох шарах [88, 214].

Граничні умови сформульованої задачі у випадку *жорсткого з'єднання* (рис. 3.1.а) запишуться наступним чином

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} = 0, t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty). \end{aligned} \quad (3.5)$$

У випадку *гладкого проковзування* компонентів (рис. 3.1.б) граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} t_{22}^{(2)} = 0, t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty). \end{aligned} \quad (3.6)$$

В (3.5), (3.6) $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ є збуреннями компонент несиметричного тензора напружень Піоли–Кірхгофа \tilde{t} (див. (2.2), (2.12), (2.37)).

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукається таке перше значення λ_1 (при його зменшенні починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, яке відповідає недеформованому стану), при якому за неперервного збільшення навантаження стиску, сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 3.1.в) бішарової системи.

Критичне значення відносного укорочення для випадку жорсткого з'єднання позначатимемо ε_1^r , для випадку гладкого проковзування – ε_1^s . Критичні значення довжини хвилі, сформованої на поверхні тіла, будемо

позначати λ^r (рис. 3.1.в) та λ^s , відповідно. Також домовимось надалі називати значення ε_1^r , ε_1^s – критичними деформаціями зморщування або *wrinkling*-деформаціями, як це прийнято в літературі, маючи на увазі значення інженерної деформації (*engineering strain*), а не головного значення тензора деформацій Гріна (2.38) за відповідним напрямком.

Описана ейлерова втрата стійкості тонкого покриття на товстішій підкладці, яка проявляється формуванням на поверхні хвилеподібного візерунка (рис. 3.1.в), відома в літературі під назвою «*wrinkling*» (зморщування). Дослідження контрольованого зморщування тонких плівок використовується насамперед в технологічних та біомедичній галузях для покращення функціональних властивостей елементів конструкцій. У випадках, коли зморщування поверхні не є бажаним явищем, значення ε_1^r , ε_1^s асоціюються з початковим етапом руйнування такого структурно неоднорідного тіла [18, 93, 145]. Більш докладно актуальність цього питання з відповідним оглядом літератури висвітлюється у Розділі 1.

3.2 Граничні задачі для потенціальних гармонічних функцій

Зведемо задачі з граничними умовами (3.5) (жорстке з'єднання, рис. 3.1.а) та (3.6) (гладке проковзування, рис. 3.1.б) до граничних задач, записаних в термінах потенціальних гармонічних функцій.

Коли для пружного потенціалу однієї зі складових компонентів бішару реалізується випадок *рівних коренів* ($n_1^i = n_2^i = n^i$) характеристичного рівняння (2.48), загальні представлення розв'язків (2.55) лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.41) для стисливих тіл або (2.42) для нестисливих тіл у випадку плоскої задачі для однорідного докритичного стану (3.3) зручно подати у вигляді

$$\begin{aligned}
u_1^{(i)} &= -\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} - z_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x_1}; \\
u_2^{(i)} &= p_1^i F^{(i)} + p_2^i \Phi^{(i)} + p_2^i z_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_i}; \\
t_{21}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[k_1^i F^{(i)} + k_2^i \Phi^{(i)} + k_2^i z_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_i} \right]; \\
t_{22}^{(i)} &= k_4^i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial z_i} + k_5^i \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z_i} + k_5^i z_i \frac{\partial^2 F^{(i)}}{\partial z_i^2}, \quad z_i = -\frac{x_2}{\sqrt{n^i}},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

де

$$\begin{aligned}
p_1^i &= (n^i)^{-1/2} (m_1^i + 1 - m_2^i), \quad p_2^i = -(n^i)^{-1/2} m^i; \\
k_1^i &= (n^i)^{-1/2} c_{44}^i (d_1^i - d_2^i), \quad k_2^i = -(n^i)^{-1/2} c_{44}^i d_1^i; \\
k_4^i &= c_{44}^i (d_1^i l_1^i - d_2^i l_2^i), \quad k_5^i = -c_{44}^i d_1^i l_1^i.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

У випадку, коли реалізується випадок *нерівних коренів* ($n_1^i \neq n_2^i$) характеристичного рівняння (2.48), загальні представлення розв'язків (2.61) запишемо так:

$$\begin{aligned}
u_1^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)}); \\
u_2^{(i)} &= p_1^i \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial z_1^{(i)}} + p_2^i \frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{\partial z_2^{(i)}}; \\
t_{21}^{(i)} &= k_1^i \frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(i)}} + k_2^i \frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(i)}}; \\
t_{22}^{(i)} &= k_4^i \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}}{(\partial z_1^{(i)})^2} + k_5^i \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}}{(\partial z_2^{(i)})^2}, \quad z_j^{(i)} = -\frac{x_2}{\sqrt{n_j^i}}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

де

$$\begin{aligned}
p_1^i &= (n_1^i)^{-1/2} m_1^i, \quad p_2^i = (n_2^i)^{-1/2} m_2^i; \\
k_1^i &= (n_1^i)^{-1/2} c_{44}^i d_1^i, \quad k_2^i = (n_2^i)^{-1/2} c_{44}^i d_2^i; \\
k_4^i &= c_{44}^i d_1^i l_1^i, \quad k_5^i = c_{44}^i d_2^i l_2^i.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

В (3.7), (3.9) потенціальні функції $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\varphi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$ є гармонічними функціями своїх аргументів.

Подальший хід розв'язання задачі суттєвим чином залежить від комбінації співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, записаних для пружного потенціалу матеріалу підкладки n_1^1, n_2^1 та матеріалу плівки n_1^2, n_2^2 . Обмежуючись випадком пружних тіл (корені рівнянь дійсні), до розгляду маємо чотири можливі комбінації, кожен з яких необхідно досліджувати окремо:

- i. $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 = n_2^2$ – для обох матеріалів корені характеристичних рівнянь рівні (використовуються представлення (3.7));
- ii. $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$ – для обох матеріалів корені характеристичних рівнянь нерівні (використовуються представлення (3.9));
- iii. $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$ – для матеріалу підкладки корені характеристичних рівнянь рівні (використовуються представлення (3.7)), а для матеріалу плівки – нерівні (використовуються представлення (3.9));
- iv. $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 = n_2^2$ – для матеріалу підкладки корені характеристичних рівнянь нерівні (використовуються представлення (3.9)), а для матеріалу плівки – рівні (використовуються представлення (3.7)).

Надалі процес побудови трансцендентних рівнянь детально викладемо у випадках (i) та (ii). Випадки (iii) і (iv) досліджуються аналогічно.

3.2.1 Жорстке з'єднання

Підставляючи (3.7) або (3.9) в граничні умови (3.5), одержуємо наступні представлення для граничних умов задачі, зображеної на рис. 3.1.a, які записані в термінах потенціальних гармонічних функцій

для випадку (i)

$$\begin{aligned}
 k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2} &= 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2} &= 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} &= k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} &= k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} &= p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}});
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

для випадку (ii)

$$\begin{aligned}
 k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} &= 0, \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} &= 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 k_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(1)}} + k_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(1)}} &= k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
 k_4^1 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + k_5^1 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} &= k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

$$p_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + p_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}} = p_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + p_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1^{(1)} + \varphi_2^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1^{(2)} + \varphi_2^{(2)}) \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_j = \frac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}).$$

3.2.2 Гладке проковзування

Підставляючи (3.7) або (3.9) в граничні умови (3.6), одержуємо наступні представлення для граничних умов задачі, зображеної на рис. 3.1.б, які записані в термінах потенціальних гармонічних функцій

для випадку (i)

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_1} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_1} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (3.13)$$

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad (z_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}});$$

для випадку (ii)

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} = 0, \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} = 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$\begin{aligned}
k_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(1)}} + k_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(1)}} &= k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
k_4^1 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + k_5^1 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} &= k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (3.14) \\
p_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + p_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}} &= p_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + p_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \\
k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} &= 0 \quad (z_j^{(2)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_j = \frac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}).
\end{aligned}$$

3.3 Трансцендентні рівняння для критичних деформацій зморщування

Не обмежуючи загальності та з урахуванням симетрії конфігурації (рис. 3.1.а,б) відносно осі Ox_2 , за аналогією до задач для однорідного тіла [21, 116, 185], представимо невідомі потенціальні функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є [51] з параметром η за координатою x_1 .

Для рівних коренів

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^{\infty} A(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 d\eta, \\
\Phi^{(1)}(x_1, z_1) &= \int_0^{\infty} B(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 d\eta, \\
F^{(2)}(x_1, z_2) &= \int_0^{\infty} [C_1(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + C_2(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\sinh \eta h_1}, \\
\Phi^{(2)}(x_1, z_2) &= \int_0^{\infty} [D_1(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + D_2(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\sinh \eta h_1}, \quad (3.15) \\
\varphi^{(1)}(x_1, z_1) &= - \int_0^{\infty} B(\eta) e^{-\eta z_1} \cos \eta x_1 \frac{d\eta}{\eta},
\end{aligned}$$

$$\varphi^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [D_2(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_2) + D_1(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_2)] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta \sinh \eta h_1};$$

для нерівних коренів

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(x_1, z_1^{(1)}) &= \int_0^{\infty} A(\eta) e^{-\eta z_1^{(1)}} \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta}, \\ \varphi_2^{(1)}(x_1, z_2^{(1)}) &= \int_0^{\infty} B(\eta) e^{-\eta z_2^{(1)}} \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\varphi_1^{(2)}(x_1, z_1^{(2)}) = \int_0^{\infty} [C_1(\eta) \cosh \eta(h_1 + z_1^{(2)}) + C_2(\eta) \sinh \eta(h_1 + z_1^{(2)})] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta \sinh \eta h_1},$$

$$\varphi_2^{(2)}(x_1, z_2^{(2)}) = \int_0^{\infty} [D_1(\eta) \cosh \eta(h_2 + z_2^{(2)}) + D_2(\eta) \sinh \eta(h_2 + z_2^{(2)})] \frac{\cos \eta x_1 d\eta}{\eta \sinh \eta h_2}.$$

Представлення (3.15), (3.16), зокрема, відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1, z_1)$ відносно координати x_1 , тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \geq 0$. Крім того, ці представлення для потенціальних функцій в необмеженій за x_2 області «1» забезпечують згасання напружень і переміщень при $x_2 \rightarrow -\infty$.

3.3.1 Жорстке з'єднання

Підставляючи далі (3.15) або (3.16) в (3.11) або (3.12), відповідно, отримаємо у разі жорсткого з'єднання компонентів бішару наступні системи шести однорідних рівнянь відносно шести невідомих функцій $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$, $D_1(\eta)$, $D_2(\eta)$:

для випадку (i)

$$k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 = 0;$$

$$\mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 = 0;$$

$$\begin{aligned}
k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0; \\
k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0; \\
p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 &= 0; \\
B + D_1 + \coth \mu \cdot D_2 &= 0 \quad (\mu = \eta h_1).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

для випадку (ii)

$$\begin{aligned}
\gamma k_1^2 C_2 + k_2^2 D_2 &= 0, \\
\gamma k_4^2 C_1 + k_5^2 D_1 &= 0, \\
k_1^1 A + k_2^1 B + k_1^2 C_1 + k_1^2 C_2 \coth \mu_1 + k_2^2 D_1 + k_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\
-k_4^1 A - k_5^1 B + k_4^2 C_1 \coth \mu_1 + k_4^2 C_2 + k_5^2 D_1 \coth \mu_2 + k_5^2 D_2 &= 0, \\
p_1^1 A + p_2^1 B + p_1^2 C_1 + p_1^2 C_2 \coth \mu_1 + p_2^2 D_1 + p_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\
-A - B + C_1 \coth \mu_1 + C_2 + D_1 \coth \mu_2 + D_2 &= 0 \quad (\mu_j = \eta h_j, \gamma = \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Значення критичної деформації зморщування ε_1^r визначається таким чином: ε_1 дорівнює першому значенню при збільшенні, починаючи зі значення $\varepsilon_1 = 0$, за якого визначник системи рівнянь (3.17) (у випадку (i)), (3.18) (у випадку (ii)) або аналогічної системи рівнянь для решти двох випадків перетворюється в нуль при деякому значенні $\eta = \eta^r > 0$, тобто коли виконується умова

$$\det M_j^r = 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \tag{3.19}$$

де M_j^r – матриця з коефіцієнтів системи рівнянь, що відповідає випадку j з переліку випадків (i) – (iv).

Критична довжина хвилі у випадку жорсткого з'єднання визначається так:

$$\lambda^r = \frac{2\pi}{\eta^r}. \quad (3.20)$$

3.3.2 Гладке проковзування

Підставляючи далі (3.15) або (3.16) в (3.13) або (3.14), відповідно, отримаємо у разі гладкого проковзування компонентів бішару наступні системи шести однорідних рівнянь відносно шести невідомих функцій $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C_1(\eta)$, $C_2(\eta)$, $D_1(\eta)$, $D_2(\eta)$:

для випадку (i)

$$\begin{aligned} k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0; \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0; \\ k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0; \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0; \\ p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 &= 0; \\ k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 + k_1^2 C_2 + k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 + k_2^2 D_2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.21)$$

для випадку (ii)

$$\begin{aligned} \gamma k_1^2 C_2 + k_2^2 D_2 &= 0, \\ \gamma k_4^2 C_1 + k_5^2 D_1 &= 0, \\ k_1^1 A + k_2^1 B + k_1^2 C_1 + k_1^2 C_2 \coth \mu_1 + k_2^2 D_1 + k_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\ -k_4^1 A - k_5^1 B + k_4^2 C_1 \coth \mu_1 + k_4^2 C_2 + k_5^2 D_1 \coth \mu_2 + k_5^2 D_2 &= 0, \\ p_1^1 A + p_2^1 B + p_1^2 C_1 + p_1^2 C_2 \coth \mu_1 + p_2^2 D_1 + p_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 + k_1^2 C_2 \coth \mu_1 + k_2^2 D_1 + k_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогічно до випадку жорсткого з'єднання компонентів бішару, у разі гладкого проковзування значення критичної деформації зморщування ε_1^s визначається з такого трансцендентного рівняння:

$$\det M_j^s = 0 \quad (j = \overline{1,4}), \quad (3.23)$$

де M_j^s – матриця з коефіцієнтів системи рівнянь, що відповідає випадку j з переліку випадків (i) – (iv). (у випадку (i) це система рівнянь (3.21), у випадку (ii) – система рівнянь (3.22)).

Критична довжина хвилі у випадку гладкого проковзування визначається так:

$$\lambda^s = \frac{2\pi}{\eta^s}. \quad (3.24)$$

Трансцендентні рівняння (3.19), (3.23) одержано в загальному вигляді для довільних структур пружних потенціалів складових компонентів бішарової системи.

Щоб записати необхідне рівняння в явному вигляді, наприклад, в разі жорсткого з'єднання компонентів з потенціалом *гармонічного типу* (стисливий матеріал, рівні корені), слід підставити представлення для компонентів тензора $\tilde{\omega}$ (2.70) як функції $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ в формули (2.56), а одержані вирази – в формули (3.8), визначивши коефіцієнти k_i^j, p_i^j , які фігурують в рівнянні (3.17), як функції ε_1 .

Нижче на прикладі гіперпружних матеріалів з п. 2.4.3 проводиться аналіз залежностей значень критичних деформацій зморщування, отриманих в результаті чисельного розв'язання рівнянь (3.19), (3.23), та критичних довжин хвиль (3.20), (3.24) від механічних характеристик бішару. Також

одержані результати порівнюються з відповідними, одержаними в частинних випадках у межах інших підходів.

3.4 Аналіз результатів за жорсткого з'єднання

Аналіз критичних параметрів навантаження, що відповідають появі зморшок на поверхні бішарової системи при стиску, проводимо на основі чисельного дослідження рівнянь (3.19), (3.23). Спочатку досліджується випадок, коли компоненти тіла жорстко з'єднані (рис. 3.1.а). У разі жорсткого з'єднання проводиться аналіз застосовності наближених балкових підходів, а також наводиться порівняння результатів з результатами експериментальних і числових досліджень. В дослідженні використовуємо *потенціал гармонічного типу* (2.70) для стисливих тіл і *потенціал Бартенєва–Хазановича* (2.72) та *потенціал Трелоара* (2.73) для нестисливих тіл.

3.4.1 Критичні параметри навантаження

На рис. 3.2 – 3.11 представлені результати для бішарової системи у разі жорсткого з'єднання компонентів (рис. 3.1.а), коли її складові описуються одним і тим самим пружним потенціалом.

Для стисливих тіл складові характеристичних рівнянь (3.19) залежать від таких механічних параметрів: відношення жорсткості матеріалу покриття до жорсткості матеріалу підкладки

$$g = \mu_2 / \mu_1 \quad (3.25)$$

та від коефіцієнтів Пуассона матеріалів ν_1 , ν_2 .

Для нестисливих тіл складові характеристичних рівнянь (3.19) залежать тільки від відношення жорсткостей (3.25).

Обмежимо в разі жорсткого з'єднання розглядом випадку, коли $g \geq 1$, тобто коли смуга жорсткіша за підкладку. Природа такого обмеження буде висвітлена нижче.

Рисунки 3.2 – 3.5 відповідають *потенціалу гармонічного типу* (2.70) (стисливі тіла, рівні корені).

Залежності критичних деформацій зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g зображені на рис. 3.2, 3.4. Графік на рис. 3.2 побудований з використання логарифмічної шкали для широкого діапазону зміни відносної жорсткості покриття. Дані графіка на рис. 3.4 ілюструють випадок, коли матеріали тіла співставні за жорсткістю ($1 \leq g \leq 10$).

На рис. 3.3, 3.5 наведені відповідні залежності критичної довжини хвилі, нормованої на товщину плівки (λ^r / h), від параметру g , обраховані за формулою (3.20).

Криві на рисунках побудовані для трьох випадків значень коефіцієнтів Пуассона матеріалів бішару:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.1, 0.3, 0.499. \quad (3.26)$$

Рисунки 3.6 – 3.9 відповідають *потенціалу Бартенєва–Хазановича* (2.72) (нестисливі тіла, рівні корені). Залежності $\varepsilon_1^r(g)$ зображені на рис. 3.6, 3.8; залежності λ^r / h від g – на рис. 3.7, 3.9.

На рис. 3.10, 3.11 суцільними кривими зображені залежності $\varepsilon_1^r(g)$ для випадку матеріалів з *потенціалом Трелоара* (2.73) (нестисливі тіла, нерівні корені) з використанням логарифмічної та лінійної шкал, відповідно.

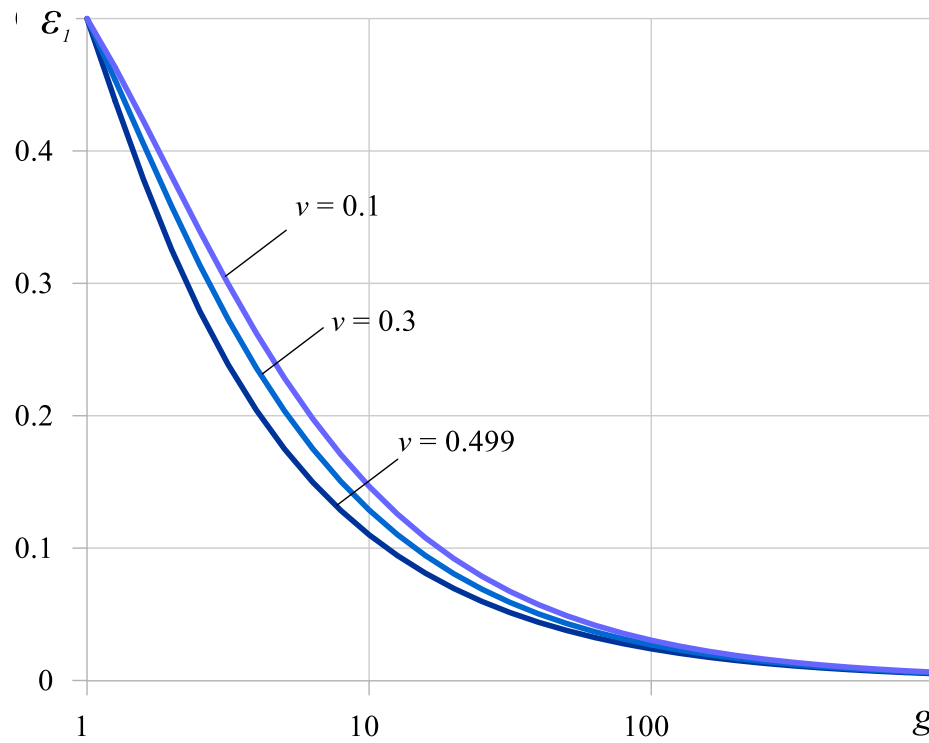


Рис. 3.2 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1' від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

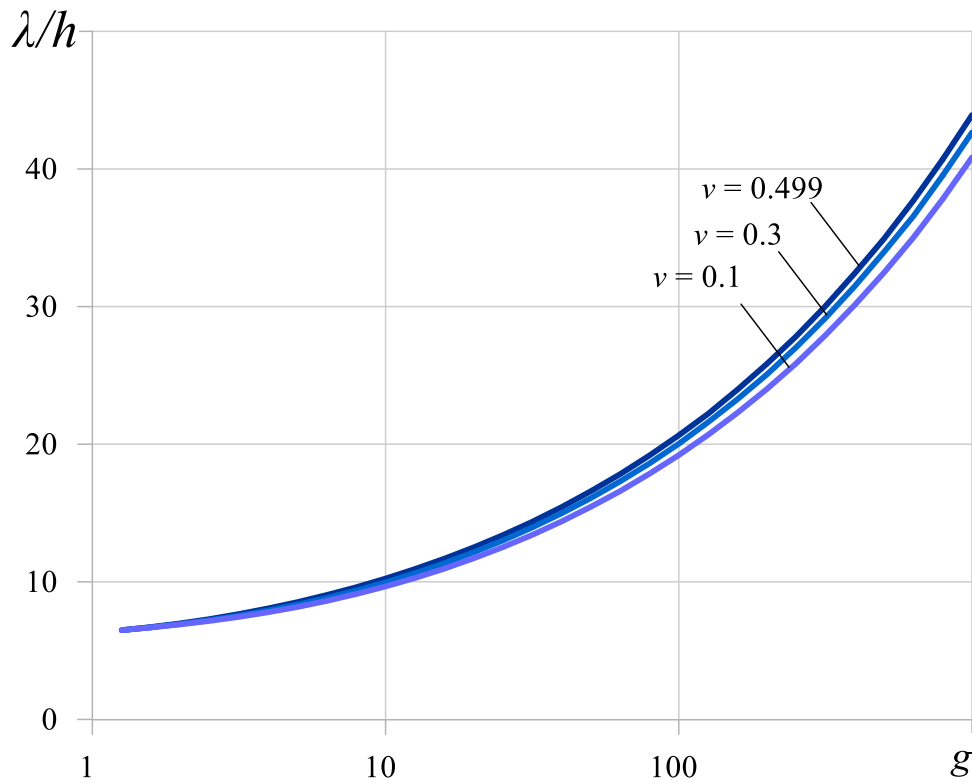


Рис. 3.3 – Залежність критичної довжини хвилі, нормованої на товщину півки (λ' / h) від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

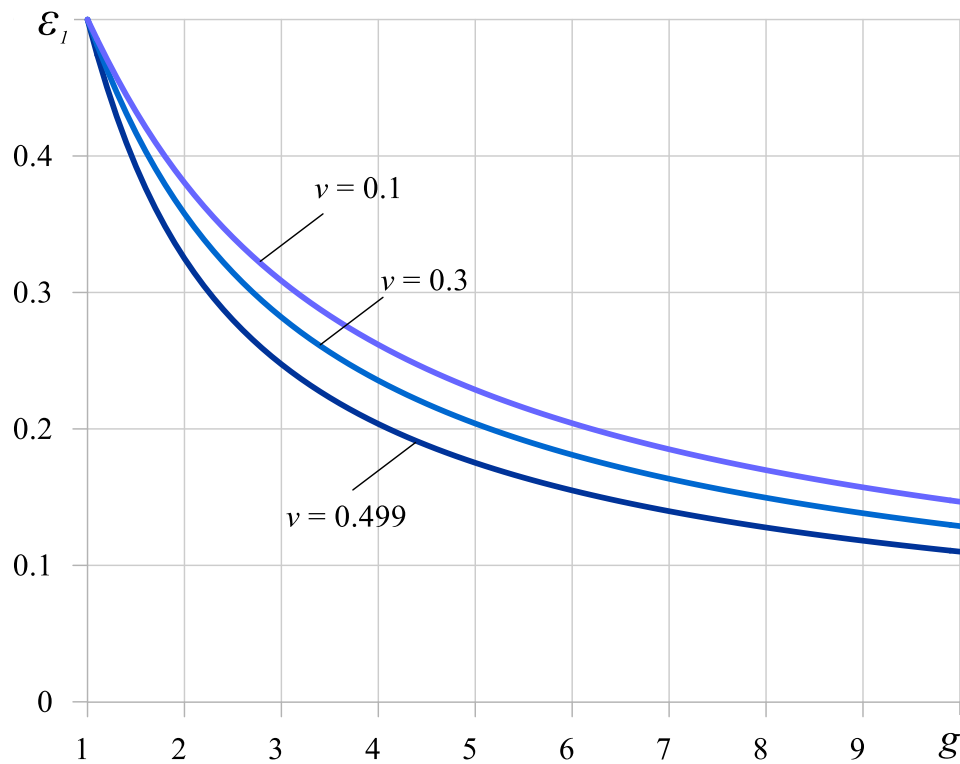


Рис. 3.4 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1' від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

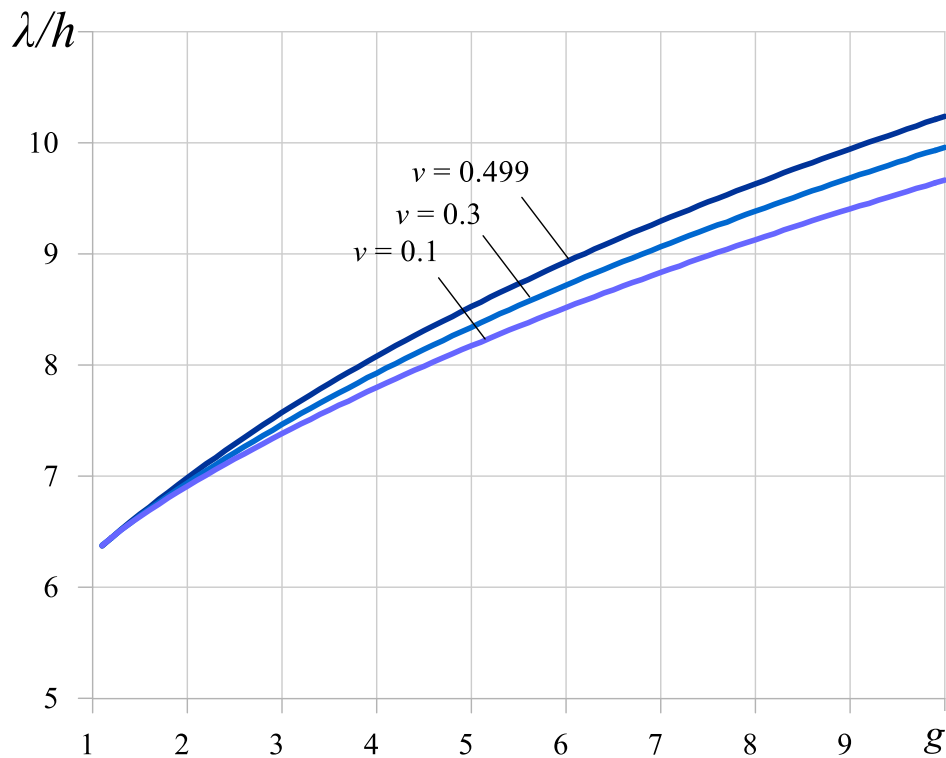


Рис. 3.5 – Залежність критичної довжини хвилі, нормованої на товщину плівки (λ' / h) від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

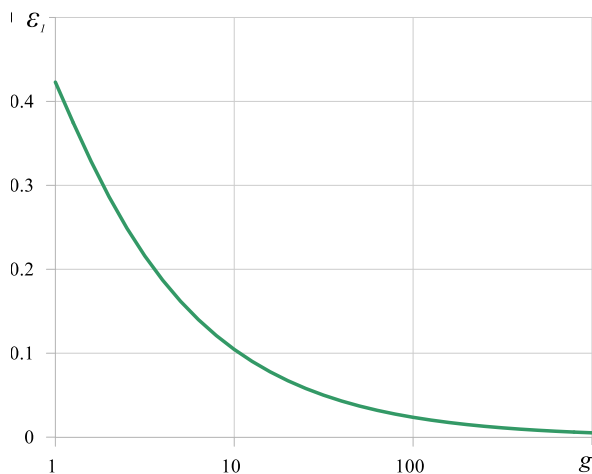


Рис. 3.6 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

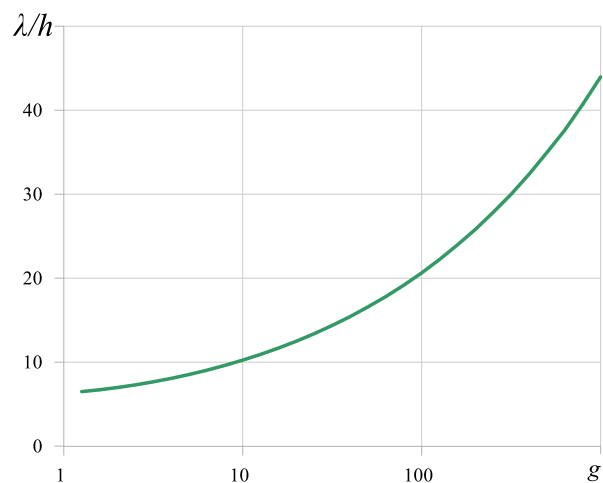


Рис. 3.7 – Залежність критичної довжини хвилі, нормованої на товщину плівки (λ^r / h) від відношення жорсткостей g для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

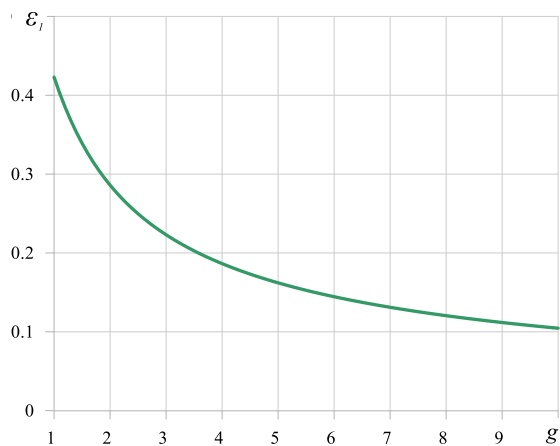


Рис. 3.8 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

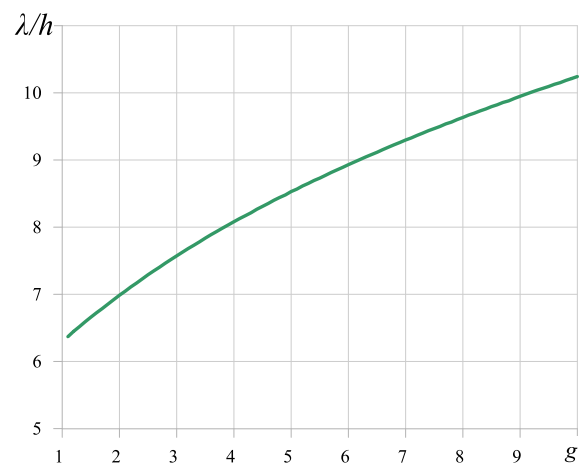


Рис. 3.9 – Залежність критичної довжини хвилі, нормованої на товщину плівки (λ^r / h) від відношення жорсткостей g для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

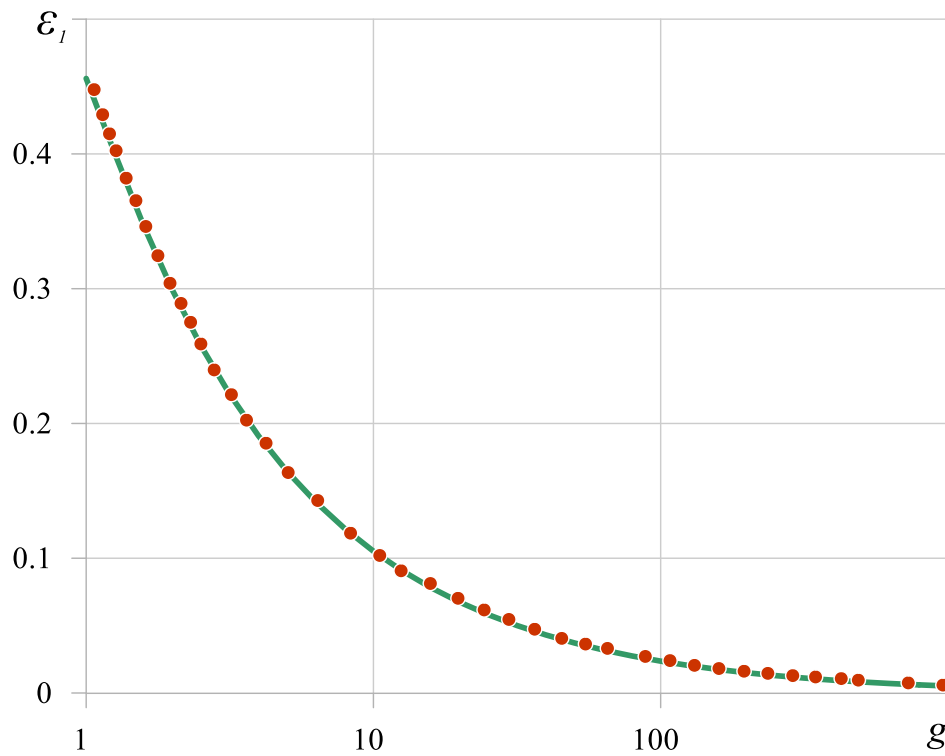


Рис. 3.10 – Залежності критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g для потенціалу Трелоара (неогуківський матеріал).

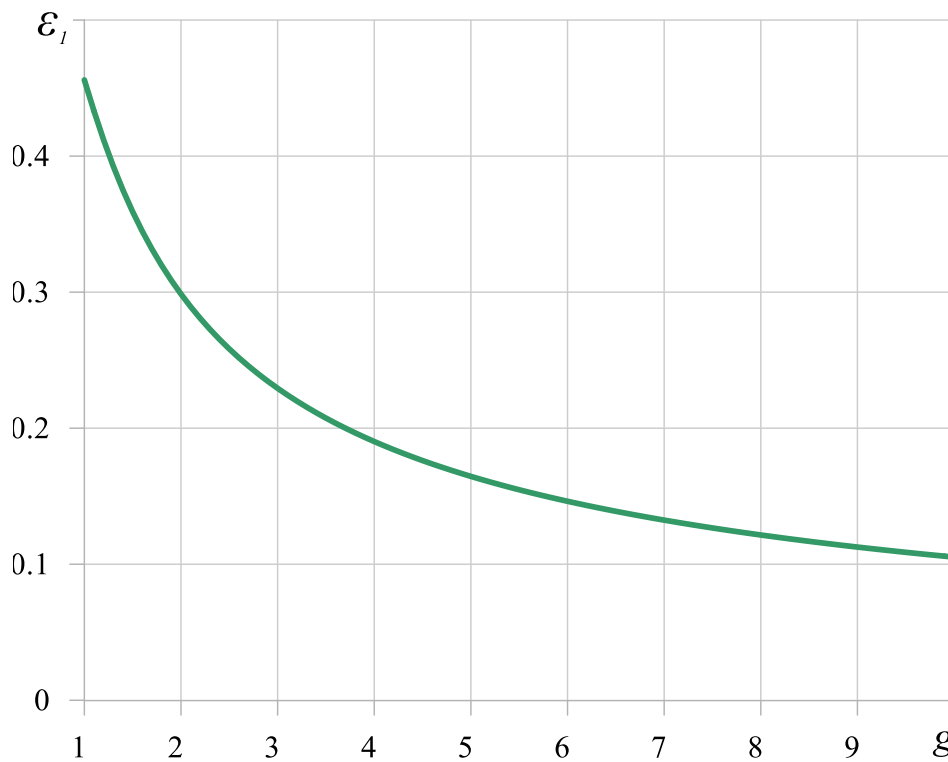


Рис. 3.11 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g для потенціалу Трелоара (неогуківський матеріал).

3.4.2 Задачі для однорідних тіл

Результати для критичних деформацій зморщування, які представлені на наведеній серії рисунків в частинному випадку, а саме, коли механічні характеристики підкладки і покриття є однаковими, повністю збігаються з відомими у літературі значеннями аналогічного параметру для *однорідної* півплощини [61, 87, 113, 115,].

В табл. 3.1. для різних моделей пружних потенціалів наведені відповідні значення критичної деформації ε_1^{hp} , що відповідає поверхневій втраті стійкості однорідної півплощини при стиску. Для випадку потенціалу *гармонічного типу* указане значення не залежить від стисливості матеріалу.

потенціал	ε_1^{hp}
гармонічного типу	0.5
Бартенєва–Хазановича	0.423
Трелоара	0.456

Табл. 3.1 – Критичні деформації поверхневої втрати стійкості однорідної площини при стиску.

У разі, коли підкладка жорсткіша за плівку покриття ($g < 1$), остання не здатна обмежувати прагнення підкладки до деформації, про що свідчать результати досліджень, відповідно до яких $\varepsilon_1^r(g) = \varepsilon_1^{hp}$ при $g < 1$. Це узгоджується з загальними міркуваннями стосовно оцінок критичних параметрів [18, 19].

Тож, коли $g < 1$ втрата стійкості в бішаровій системі відбувається за механізмом, аналогічним до випадку однорідного тіла, і визначається даними табл.3.1.

Сформульований висновок знайде додаткове підтвердження в розділах 4, 5 при дослідженні стиску аналогічного бішару вздовж міжфазних дефектів.

3.4.3 Порівняння результатів: експериментальні дані

Спостерігається досить добра відповідність результатів, отриманих з використанням рівняння (3.19) і формули (3.20), з результатами експериментальних досліджень. Наприклад, у класичній експериментальній роботі [224] було визначено довжину хвилі, що відповідає початку зморщування тонкого платиного покриття товщиною 42 нм, розташованого на каучуковій підкладці (див. рис. 3.12). Підхід полягав у накладанні шара плівки на попередньо натягнуту еластомерну підкладку. Після зняття попереднього розтягнення плівка фактично перебуває під дією стискаючого напруження. Поверхнева нестабільність проявляється, коли стискаюче напруження в плівці перевищить критичне значення; після цього на поверхні формуються зморшки, що зменшують енергію деформації системи.

Для матеріалів було прийнято такі значення пружних параметрів:

для каучуку

$$E_1 = 1.1 \text{ МПа}, \nu_1 = 0.5; \quad (3.27)$$

для платини

$$E_2 = 160 \text{ ГПа}, \nu_2 = 0.36. \quad (3.28)$$

В результаті експерименту на поверхні платинової плівки спостерігався візерунок з відносною довжиною хвилі

$$\lambda/h = 238.1 \quad (3.29)$$

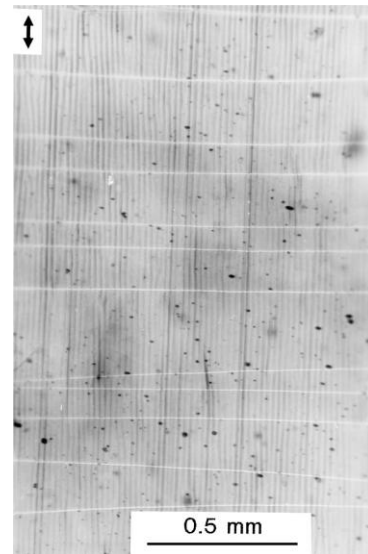


Рис. 3.12 – Зморщування платинової плівки на каучуковій підкладці [224].

Теоретична відносна довжина хвилі, яка визначалась з рівняння (3.19) й формули (3.20) з використанням *потенціалу гармонічного типу* для платини та складала:

коли гумовий матеріал описується *потенціалом гармонічного типу*

$$\lambda^r = 219.498; \quad (3.30)$$

коли гумовий матеріал описується *потенціалом Трелоара*

$$\lambda^r = 219.499. \quad (3.31)$$

Похибка між експериментальним (3.29) і теоретичними (3.30), (3.31) значеннями склала менше 10%, що є цілком прийнятним. Крім того, близькість результатів за моделювання нестисливої підкладки неогуківським і гармонічним матеріалами свідчить про те, що втрата стійкості платинової плівки в даному разі цілком може бути описана в межах підходів лінійної теорії пружності, на що також вказують автори роботи [224].

Критичні деформації зморщування в розглянутому прикладі, визначені з рівняння (3.19), в обох випадках склали $\sim 0.02\%$.

3.4.4 Порівняння результатів: числові симуляції

В роботі [188] вивчалася закритична поведінка хвилеподібного патерна на поверхні бішару скінченної товщини, який складається із силіконової підкладки (матеріал PDMS (полідиметилсилоксан)), яка покрита тонкою полімерною плівкою. В якості плівки виступали матеріали PEDOT:PSS (полі(3,4-етилендіокситіофен): полістиролсульфонат) та P3HT:PCBM (полі(3-гексилтіофен): метиловий ефір феніл-С61 масляної кислоти) [156, 204]. Такі сучасні тонкоплівкові системи використовуються при виробництві гнучких органічних фотоелектричних комірок.

Автори [188] досліджували стиск бішару з наведених матеріалів в умовах узагальненої плоскої деформації («generalized plane strain») із застосуванням скінченно-елементного аналізу в системі ABAQUS у межах геометрично-нелінійної теорії. Для моделювання напівобмеженої підкладки використовували відношення товщини плівки до товщини підкладки 1:10000. Передбачалося, що використання умов узагальненої плоскої деформації

замість стандартних умов плоскої деформації має призвести до незначного збільшення величини критичної деформації зморщування, при тому, що критична довжина хвилі суттєво не зміниться.

Приймалися такі значення пружних параметрів для матеріалу PEDOT:PSS [188]:

$$E_2 = 2000 \text{ МПа}, \nu_2 = 0.35; \quad (3.32)$$

та для матеріалу РЗНТ:PCBM [188]:

$$E_2 = 7300 \text{ МПа}, \nu_2 = 0.35; \quad (3.33)$$

для нестисливого матеріалу PDMS [188]

$$E_1 = 2.97 \text{ МПа}, \nu_2 = 0.495. \quad (3.34)$$

В результаті числового експерименту критичні значення параметрів навантаження були одержані (наводяться результати з числової реконструкції графіків роботи [188]):

для плівки PEDOT:PSS

$$\varepsilon_1^r = 0.0089, \lambda_1^r / h = 37.1; \quad (3.35)$$

для плівки РЗНТ:PCBM

$$\varepsilon_1^r = 0.0037, \lambda_1^r / h = 56.3. \quad (3.36)$$

Використавши рівняння (3.19) разом із формулою (3.20) для потенціалу *гармонічного типу* з пружними характеристиками (3.32) – (3.34) маємо:

для плівки PEDOT:PSS

$$\varepsilon_1^r = 0.0075, \lambda_1^r / h = 36.6; \quad (3.37)$$

для плівки РЗНТ:PCBM

$$\varepsilon_1^r = 0.0032, \lambda_1^r / h = 56.1. \quad (3.38)$$

Порівняння демонструє гарну узгодженість результатів при оцінці критичної довжини хвилі (похибка складає, відповідно, 1.4% і 0.3%). Результати для критичної деформації, як і передбачали автори [188], у разі дослідження задачі в умовах плоскої деформації в рамках підходів ТЛТСДТ виявилися меншими за ті, що отримані в [188] (похибка складає, відповідно, 16% і 14%).

3.4.5 Порівняння результатів: нелінійний біфуркаційний аналіз

Критичні параметри втрати стійкості бішару у випадку, коли той складається з гіперпружних компонентів, вивчалися в літературі лише для окремих випадків конститутивних моделей матеріалів.

В основному розглядалися нестисливі матеріали з пружним потенціалом Трелоара, що відповідає неогуківському матеріалу. У роботі [87] проведено біфуркаційний аналіз зморщування бішару з *неогуківських матеріалів* в умовах плоскої деформації підкладки з попереднім розтягуванням і без нього.

На рис. 3.10 крива, побудована червоними маркерами, є числовою реконструкцією відповідної кривої з рис. 2 роботи [87]. Криві на рис. 3.10 чудово узгоджуються.

В іншій роботі тих самих авторів [86] докладно досліджено вплив геометричних недосконалостей на межі поділу тіл на критичні параметри поверхневої нестійкості в напівобмеженому однорідному тілі з неогуківського матеріалу. Вплив недосконалості в вигляді короткої міжфазної зони проковзування буде досліджено в розділі 5 дисертаційної роботи.

Також вивчалися й інші механізми прояву феномену поверхневої нестійкості в напівобмежених гіперпружних тілах, наприклад, у разі

гармонічного потенціалу [85, 227]. В усіх перелічених роботах компоненти бішарової системи перебували в умовах ідеального контакту.

3.4.6 Вплив стисливості на критичні деформації

Результати, представлені на рис.3.2 – 3.5 для *потенціалу гармонічного типу* в разі однакової стисливості компонентів бішару (3.26), свідчать про те, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона критичні деформації зморщування зменшуються, тоді як критична довжина хвилі – збільшується.

На рис. 3.13 зображена залежність відношення критичних деформацій зморщування, визначених для коефіцієнту Пуассона, що становить 0.001, до значення цих величин, визначених для коефіцієнту Пуассона 0.499, від значення відношення жорсткостей g . Указана величина

$$\delta(g) = \varepsilon_1^r(g) \Big|_{\nu_1=\nu_2=0.001} : \varepsilon_1^r(g) \Big|_{\nu_1=\nu_2=0.499} \quad (3.39)$$

визначалась з (3.19) для потенціалу *гармонічного типу* і демонструє вплив стисливості на критичні деформації, про який йшлося вище.

З наведених даних випливає, що вплив стисливості бішару на критичні деформації для компонентів однакових за жорсткістю ($g = 1$) відсутній; далі зі зростанням жорсткості плівки по відношенню до жорсткості підкладки цей вплив спочатку збільшується, а потім асимптотично зменшується до $\approx 22\%$. Вплив стисливості є максимальним при значенні параметру

$$g_{\max} = 12.1 \quad (3.40)$$

і становить трохи більше 40%.

На рис. 3.14 у випадку *потенціалу гармонічного типу* побудовано криві $\varepsilon_1^r(\nu)$ ($\nu = \nu_1 = \nu_2$) для деяких значень механічного параметра g . На рис. 3.15

наведено значення величини $\bar{\varepsilon}_1$ – значення

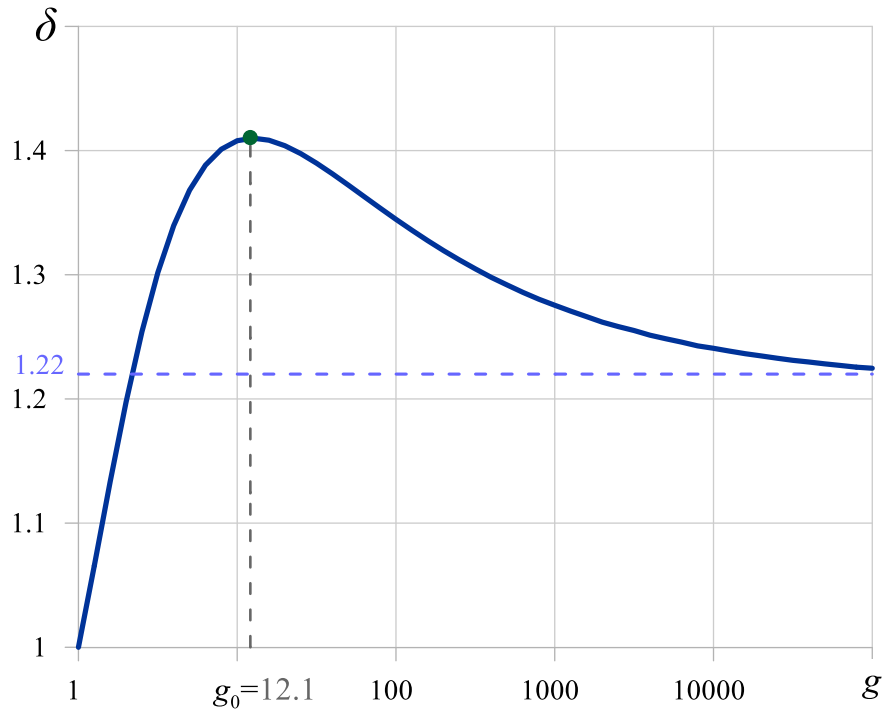


Рис. 3.13 – Залежність $\delta(g)$ для потенціалу гармонічного типу.

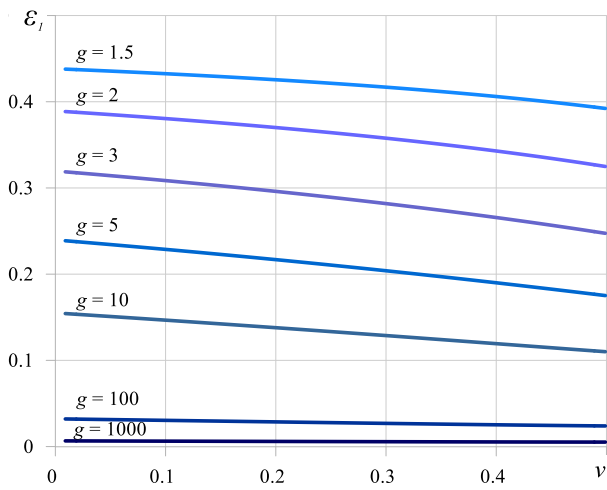


Рис. 3.14 – Залежності $\varepsilon_1^r(v)$ ($v = v_1 = v_2$) для деяких значень параметра g для потенціалу гармонічного типу.

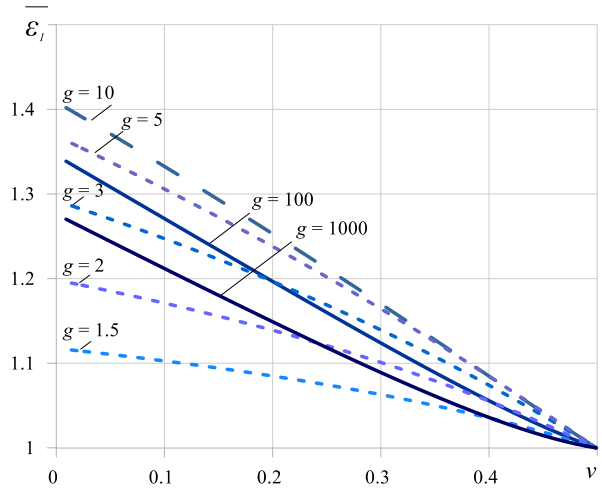


Рис. 3.15 – Залежності $\bar{\varepsilon}_1(v)$ ($v = v_1 = v_2$) для деяких значень параметра g для потенціалу гармонічного типу.

критичних деформацій, нормованих до критичної деформації у випадку нестисливого тіла ($\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.499$) при відповідному g .

Як бачимо, для відносно невеликих значень параметру g залежність $\varepsilon_1^r(\nu)$ не є лінійною, тоді як для великих значень відносної жорсткості плівки ця залежність близька до лінійної.

У роботі [57] досліджується вплив стисливості компонентів бішару на критичні параметри втрати стійкості за допомогою узагальненої моделі інтерфейсу. Складові системи описуються як гіперпружні *стисливі* неогуківські матеріали.

В табл. 3.2 наведено результати порівняння значень критичних деформацій зморщування, одержаних аналітичним методом роботи [57] у випадку, коли когезивна жорсткість прямує до нескінченності (наводяться данні числової реконструкції графіків), з результатами, одержаними з використанням (3.19). Для випадку $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.001$ та $\nu = 1/3$ використовувався пружний *потенціал гармонічного типу*, а для випадку $\nu = 0.487$ – пружний *потенціал Трелоара* (неогуківський *нестисливий* матеріал). Білі комірки в табл. 3.2 відповідають результатам роботи [57], а сірі – результатам цього дисертаційного дослідження.

	$\nu = 0.001$	$\nu = 1/3$	$\nu = 0.487$
$E_2 / E_1 = 2$	0.385	0.345	0.310
	0.389	0.353	0.298
$E_2 / E_1 = 10$	0.155	0.125	0.106
	0.155	0.126	0.106
$E_2 / E_1 = 100$	0.032	0.027	0.024
	0.032	0.026	0.024

Табл. 3.2 – Результати порівняння з даними роботи [57].

Аналіз наведеного порівняння показує гарну узгодженість результатів, які відрізняються не більше ніж на 4%. Зі збільшенням жорсткості покриття по відношенню до жорсткості підкладки ця відмінність зменшується, оскільки зменшується і вплив структури пружних потенціалів на критичні значення параметрів навантаження (див. п. 3.5.1).

На останок зауважимо, що критичні деформації зморщування бішару суттєвим чином залежать від коефіцієнта Пуассона матеріалу підкладки і слабо залежать від цього параметру для матеріалу плівки покриття у випадку відносно малих значень $g > 1$.

3.4.7 Модель підкладки скінченної товщини

Низка сучасних робіт з дослідження зморщування тонких жорстких плівок на податливих підкладках вивчає вплив товщини підкладки на критичні параметри навантаження стиску.

Як приклад проведемо порівняння результатів, одержаних з чисельного розв'язання трансцендентного рівняння (3.19), з результатами роботи [166].

В указаній роботі зморщування бішару скінченної товщини досліджувалось для випадку, коли обидві його компоненти є нестисливими, у два способи: з використанням лінійної теорії балок, яка враховує обмеженість товщини системи, та з використанням методу скінченних елементів для конститутивної моделі неогуківського матеріалу (пружний *потенціал Трелоара*) в пакеті ANSYS.

На рис. 3.16 та 3.17 порівнюються, відповідно, результати з визначення критичних деформацій і критичних безрозмірних дожин хвиль, одержаних із використанням рівняння (3.19) й формули (3.20) з результатами, одержаними авторами [166] з використанням балкового наближення і числової симуляції.

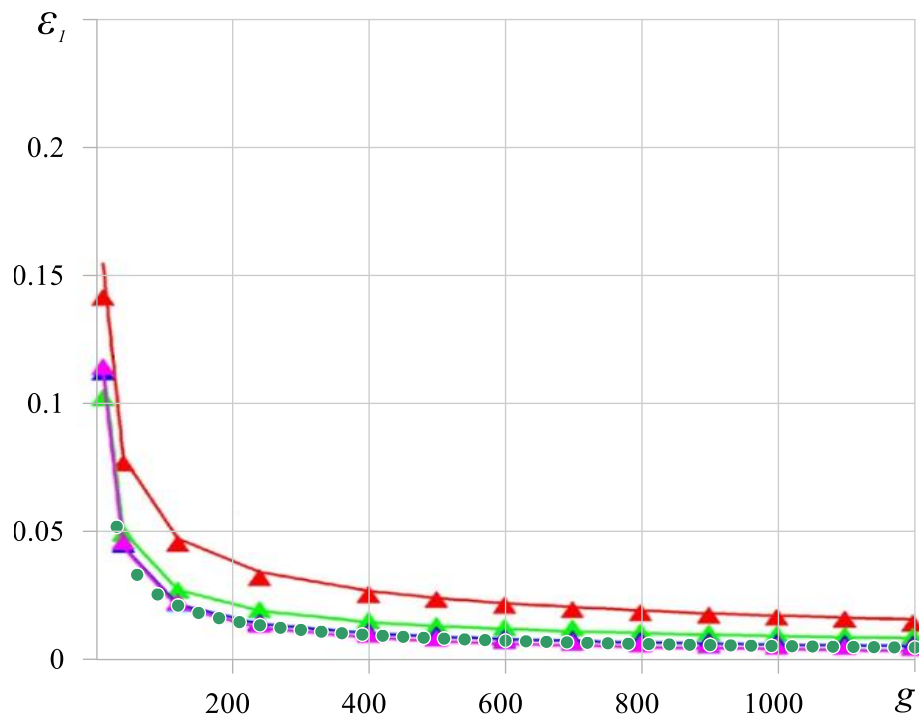


Рис. 3.16 – Критичні деформації зморщування ε_1^r : порівняння з результатами [166].

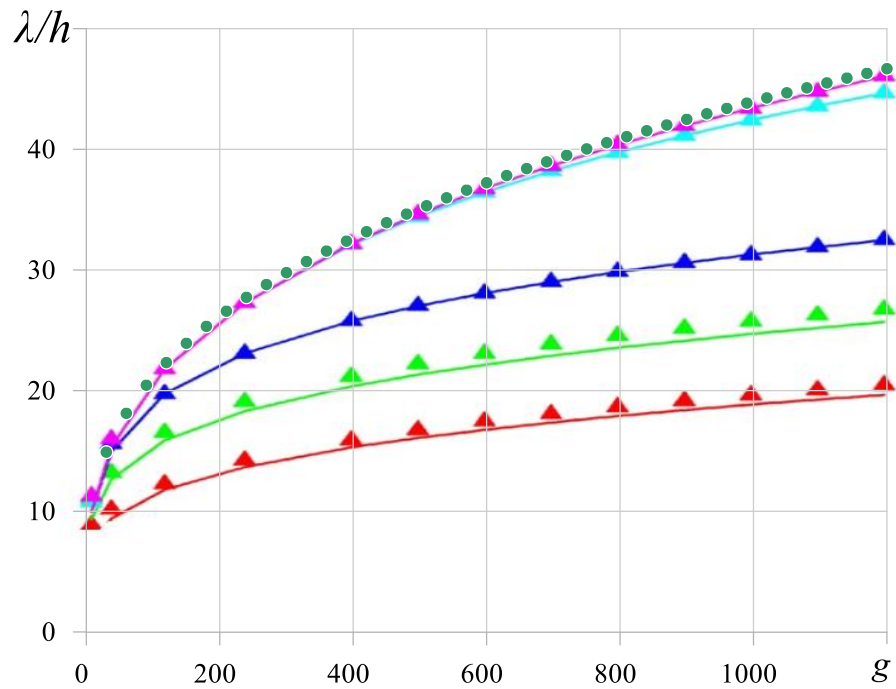


Рис. 3.17 – Критичні безрозмірні довжини хвиль λ_1^r / h : порівняння з результатами [166].

На рисунках трикутними маркерами наведено результати указаної числової симуляції, а кривими того ж кольору – результати для балкового наближення. Червоний, салатовий, синій, блакитний та рожевий кольори визначають випадки, коли плівка тонша за підкладку у 2, 5, 10, 30 та 50 разів, відповідно.

Круглими маркерами побудовано криві, що відповідають *потенціалу Трелоара* та формулам (3.19) і (3.20).

Аналіз показує, що модель напівнескінченної підкладки застосовна для визначення критичних деформацій зморщування у випадку *нестисливих тіл* у разі, коли плівка тонша від неї у 10 та більше разів, а для визначення критичної довжини хвилі – у 30 та більше разів.

Додатково відзначимо, що результати дещо краще узгоджуються з результатами відповідних числових симуляцій, ніж з результатами, одержаними аналітичним методом в роботі [166] з використанням геометрично лінійної теорії балок для лінійно-пружних тіл.

Застосовність балкового наближення до визначення критичних параметрів втрати стійкості тонкої плівки на напівобмеженій підкладці детально проаналізовано в наступному пункті.

3.5 Аналіз застосовності балкового наближення

Для валідації результатів із визначення критичних деформацій і критичних довжин хвиль, отриманих із застосуванням чисельних методів, обов'язковим є їхнє порівняння з відповідними результатами, що отримані в межах теоретичного підходу.

Найбільш застосовною є наступна інженерна формула для визначення критичних деформацій зморщування:

$$\varepsilon_1^c = \frac{1}{4} \left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \right)^{2/3} \quad (3.41)$$

Рівняння (3.41) було отримано різними авторами [56, 60, 224] з використанням балкового наближення та визначає критичну деформацію зморщування лінійно-пружної плівки, розташованої на більш податливій лінійно-пружній напівобмеженій підкладці, в припущенні ідеально зв'язаних шарів та нехтує зсувним зчепленням на межі поділу. У цьому випадку критичну довжину хвилі можна визначити за такою формулою:

$$\lambda^c = 2\pi h \left(\frac{3E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} \right)^{-1/3} \quad (3.42)$$

Суцільні криві на графіку, зображеному на рис. 3.18, представляють залежності критичних деформацій для початку утворення зморшок ε_1^r від значення E_2/E_1 відношення модулів Юнга матеріалів системи, які визначені з рівняння (3.19). Залежності відносної критичної довжини хвилі λ^r/h від цього параметра показано на рисунку 3.19. Для обох складових використовувався *потенціал гармонічного типу* та значення коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.499$.

Криві з круглих маркерів на рис. 3.18, 3.19 відповідають критичним значенням ε_1^c та λ^c відповідно, отриманим за формулами (3.41) та (3.42) для випадку, коли $\nu_1 = \nu_2$.

Отримані результати показують, що інженерні формули (3.41) та (3.42) найкраще описують випадок, коли обидва матеріали бішару є нестисливими ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$). Як і очікувалося, зі збільшенням параметра E_2/E_1 (що відповідає зменшенню критичної деформації зморщування), розбіжність результатів зменшується.

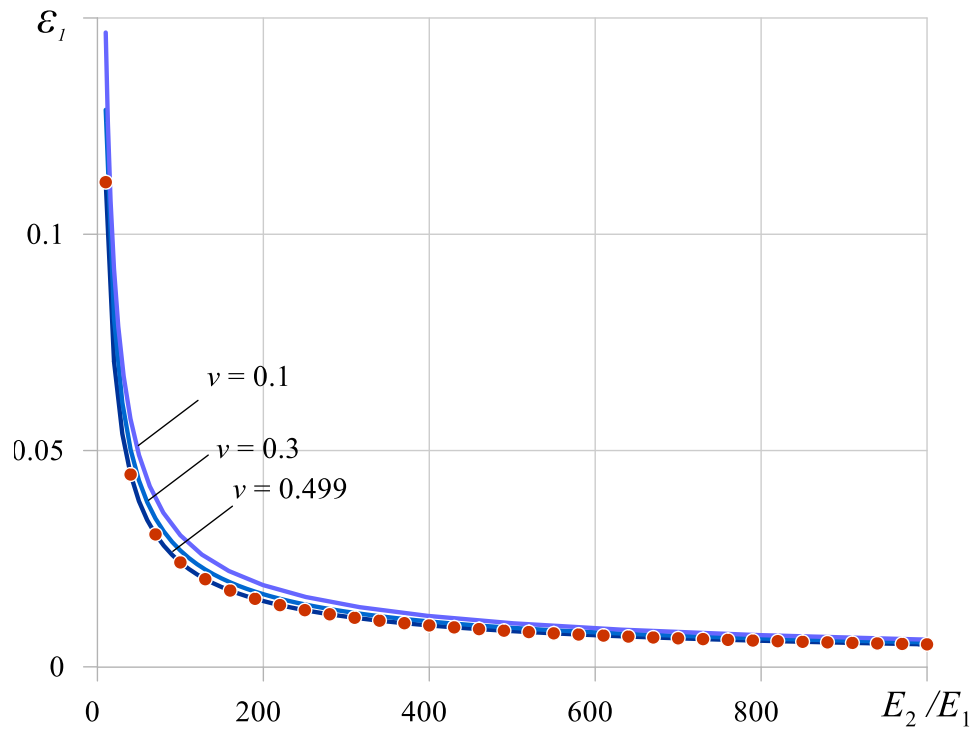


Рис. 3.18 – Залежності ε_1^r (суцільні криві, потенціал гармонічного типу) та ε_1^c (круглі маркери) від відношення модулів Юнга.

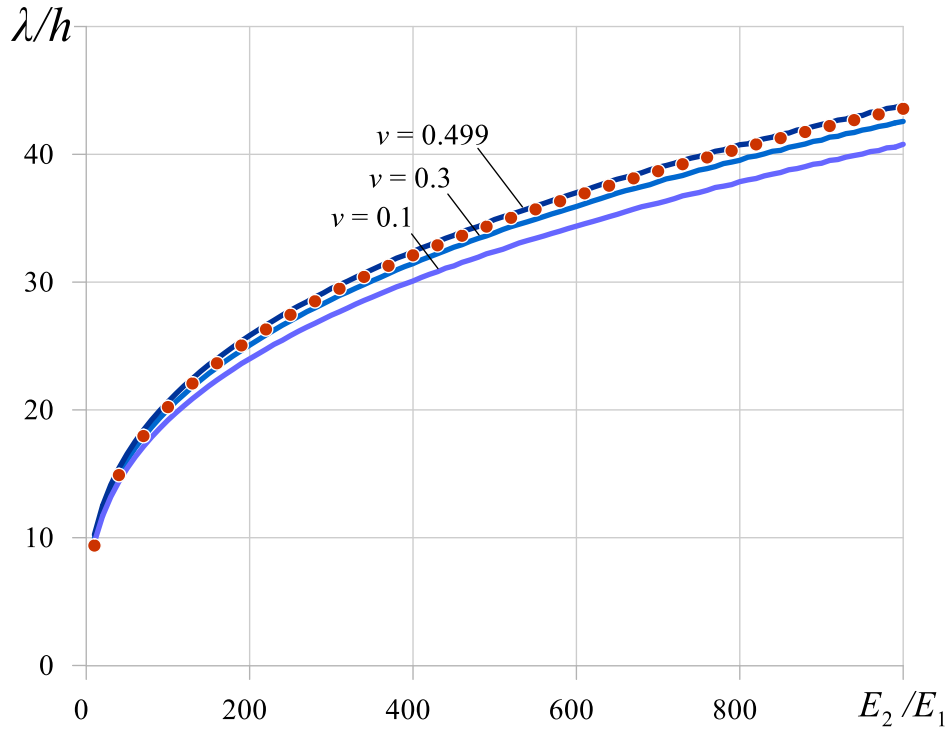


Рис. 3.19 – Залежності λ_1^r (суцільні криві, потенціал гармонічного типу) та λ_1^c (круглі маркери) від відношення модулів Юнга.

Щоб встановити, результати для якої з конститутивних моделей для нестисливих тіл (з тих, що розглядаються в роботі), найкраще апроксимують наведені інженерні формули, розглянемо *потенціал гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$), *потенціал Бартенєва–Хазановича* та *потенціал Трелоара*. Дані рисунка 3.20 встановлюють найкращу відповідність результатів, одержаних з використанням (3.41), з результатами для *гармонічного матеріалу*.

На рис. 3.21 наведено залежності величини $\bar{\lambda} = \lambda_1^r / \lambda_1^c$ від значення відношення модулів Юнга E_2/E_1 для бішарів різної стисливості з *потенціалом гармонічного типу*.

В роботі [173] було запропоновано формули, уточнені відносно формул (3.41) та (3.42), з урахуванням впливу зсувного зусилля на межі поділу системи плівка/підкладка:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - 2\nu_1}{1 - \nu_1} \right)^2 \right]^{-2/3} \quad (3.43)$$

$$\lambda^* = \lambda^c \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - 2\nu_1}{1 - \nu_1} \right)^2 \right]^{1/3} . \quad (3.44)$$

У таблиці 3.3 наведено значення критичної деформації зморщування ε_1^r , отримані з розв'язку рівняння (3.19) для матеріалів з *гармонічним потенціалом*, а також значення

$$\delta_1 = \frac{|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^c|}{\varepsilon_1^c} \cdot 100\%, \quad \delta_2 = \frac{|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^*|}{\varepsilon_1^*} \cdot 100\%, \quad (3.45)$$

що демонструють відносну розбіжність цих значень від значень, отриманих за допомогою наближених формул (3.41) та (3.43).

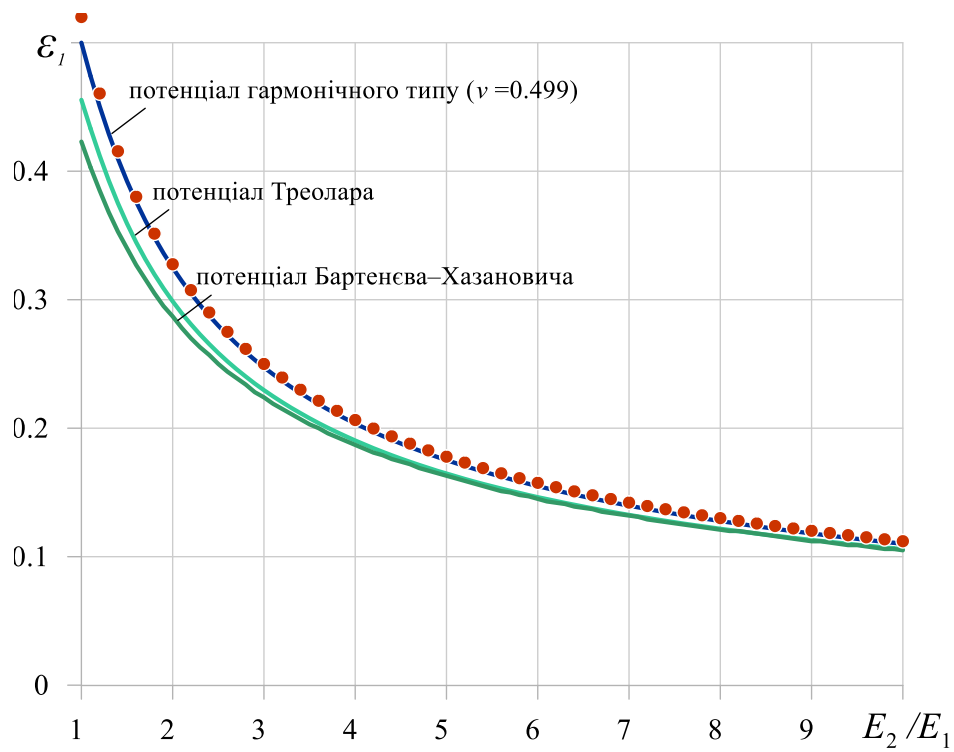


Рис. 3.20 – Залежності ε_1^r (суцільні криві) та ε_1^c (круглі маркери) від відношення модулів Юнга.

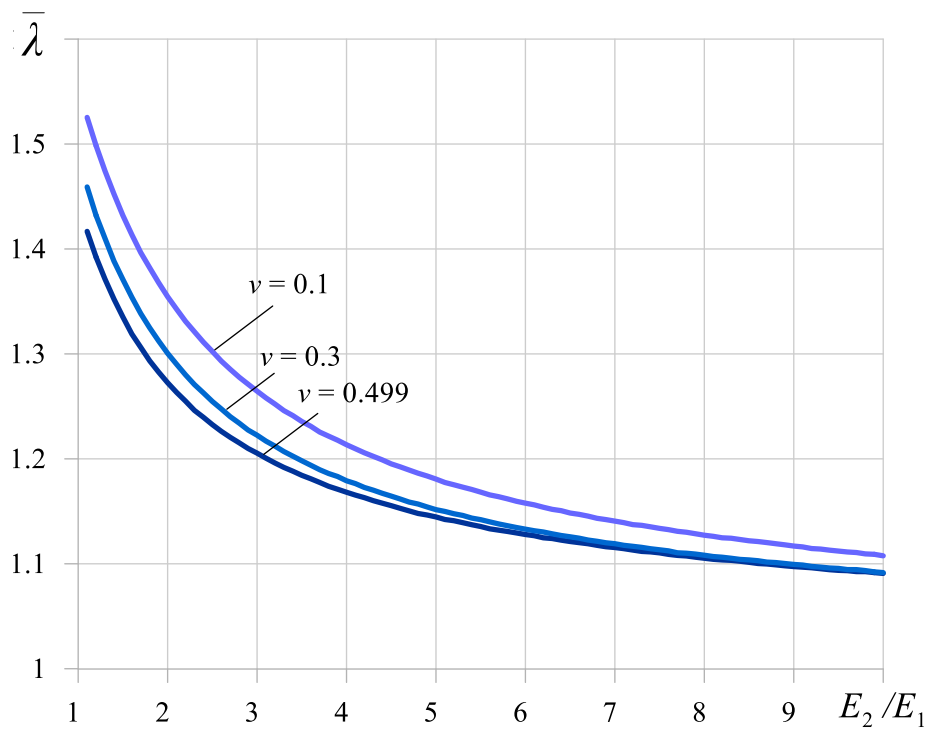


Рис. 3.21 – Залежності $\bar{\lambda} = \lambda_1^r / \lambda_1^c$ від відношення модулів Юнга для потенціалу гармонічного типу.

g	$\nu_1 = \nu_2 = 0.1$			$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$			$\nu_1 = \nu_2 = 0.499$		
	ε_1^r	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	ε_1^r	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	ε_1^r	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$
10	0.146642	30.89	13.03	0.128766	14.93	8.59	0.110050	1.77	1.77
100	0.030404	25.96	8.77	0.026888	11.40	5.25	0.023923	0.89	0.89
500	0.010082	22.13	5.47	0.009023	9.31	3.27	0.008225	0.37	0.37
1000	0.006287	20,90	4.40	0.005650	8.64	2.64	0.005188	0.24	0.24
10000	0.001325	18.23	2.10	0.001201	7.19	1.27	0.001120	0.05	0.05

Таблиця 3.3 – Порівняння результатів.

Порівняння результатів, отриманих за допомогою рівняння (3.19), з результатами, отриманими за формулами (3.41) та (3.43), також показано на рис. 3.22 – 3.24.

На рис. 3.22 суцільні криві відповідають залежності від відношення модулів Юнга E_2/E_1 критичної деформації зморщування ε_1^r , нормованої до значень ε_1^c (формула (3.41)), а штрихова крива – до значень ε_1^* (формула (3.43)). Сині криві побудовані для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$ та $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), фіолетова крива – для квадратичного потенціалу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Рисунок 3.23 презентує залежності від параметра E_2/E_1 критичної деформація зморщування ε_1^r , нормованої до значень ε_1^* (формула (3.43)), для матеріалів з гармонічним потенціалом при різних значеннях коефіцієнтів Пуассона матеріалів бішару.

Залежності значення критичної деформації зморщування ε_1^r , нормованої до значень ε_1^* (формула (3.43)), від відношення модулів Юнга для випадку нестисливої напівобмеженої підкладки, покритої тонкою плівкою, показано на рис. 3.24. Матеріал плівки моделюється пружним потенціалом гармонічного типу з коефіцієнтом Пуассона $\nu_2 = 0.3$, а нестислива підкладка

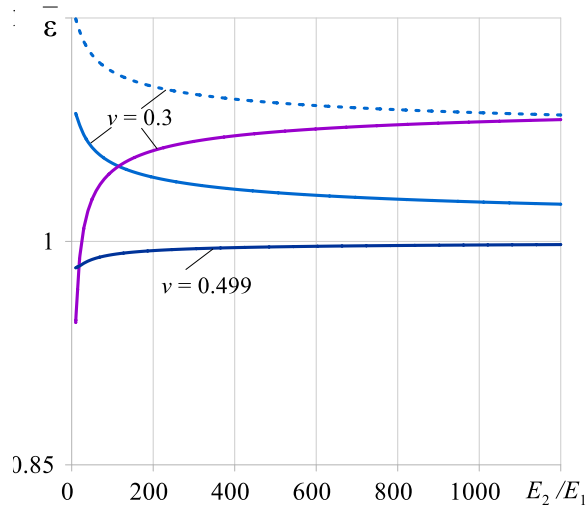


Рис. 3.22 – Залежності $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^r / \varepsilon_1^c$ (штрихована крива) $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^r / \varepsilon_1^*$ (суцільні криві) від E_2/E_1

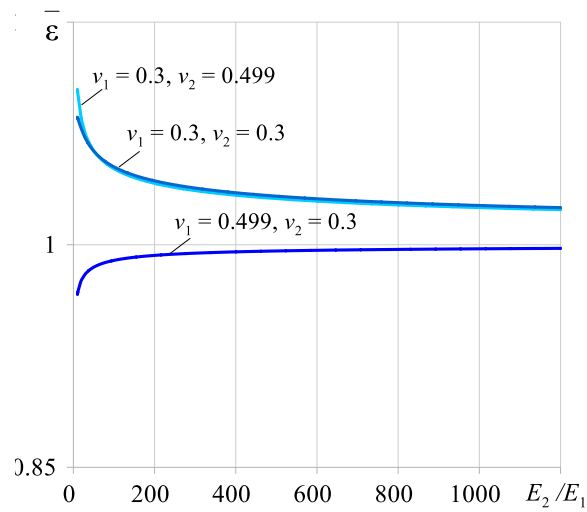


Рис. 3.23 – Залежності $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^r / \varepsilon_1^*$ від E_2/E_1 .

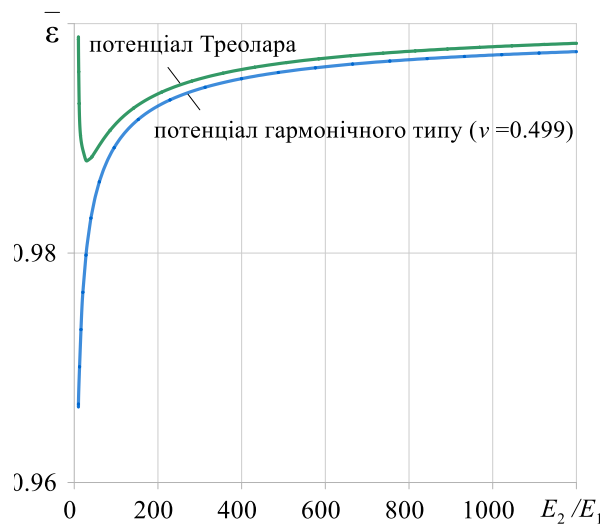


Рис. 3.24 – Залежності $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1^r / \varepsilon_1^*$ від E_2/E_1 .

моделюється пружним *потенціалом Трелоара* або *гармонічним потенціалом* з коефіцієнтом Пуассона $\nu_1 = 0.499$.

З наведених даних робимо висновок, що формула (3.43) працює тим краще, чим менш стисливим є матеріал підкладки бішарової системи.

На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що наближені формули, отримані за допомогою геометрично лінійної теорії балок для лінійно-пружних тіл, у випадку бішарів із достатньо стисливими компонентами можуть бути застосовані із задовільною точністю для критичних деформацій, що не перевищують 10%.

У випадку, коли складові бішарової системи слабко стисливі і можуть бути описані потенціалом *гармонічного типу*, наближені формули зберігають хорошу точність навіть для більших деформацій.

І все ж при деформаціях, що перевищують вказаний поріг у 10%, застосування наближених лінійних підходів видається небажаним при інженерних розрахунках бішарових систем на поверхневу стійкість при стиску. Сумарна похибка, закладена в наближених підходах, формується зі спрощеного моделювання плівки іншим геометричним об'єктом – балкою та спроби описати процес, який для великих деформацій зазнає суттєвого впливу нелінійності, закладеної у структурі пружних потенціалів, за допомогою лінійного підходу.

Указаний вплив структури пружних потенціалів на значення критичних параметрів втрати стійкості досліджено в п. 3.7 даного розділу та в пп. 4.8, 5.9 у випадку задач для тіл з міжфазними дефектами.

3.6 Аналіз результатів за гладкого проковзування

В цьому пункті наводяться результати з визначення критичних параметрів втрати стійкості бішару при стиску у випадку, коли його

компоненти проковзують один відносно одного без тертя (рис. 3.1.б). Критичні деформації зморщування визначаються на основі чисельного дослідження трансцендентного рівняння (3.23); критичні довжини хвиль – з формули (3.24). Розглядаються випадки, коли обидва матеріали бішару описуються одним і тим самим пружним потенціалом.

На рис. 3.25 наведено залежність критичних деформацій зморщування ε_1^s від значення відношення жорсткості матеріалу плівки покриття до жорсткості матеріалу підкладки $g = \mu_2 / \mu_1$. З використанням логарифмічної шкали досліджується широкий діапазон зміни параметра g , який включає як випадок, коли плівка жорсткіша за підкладку, так і випадок, коли жорсткішим матеріалом є підкладка.

Криві на рис. 3.25 побудовано для таких значень коефіцієнтів Пуассона матеріалів бішарової системи: $\nu_1 = 0.001$, $\nu_2 = 0.499$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.499$, $\nu_2 = 0.001$. Використовувався *пружний потенціал гармонічного типу*.

Дані рис. 3.25 свідчать про те, що при $g \rightarrow 0$ (жорсткість матеріалу підкладки необмежено зростає по відношенню до жорсткості матеріалу покриття) за будь-яких значень коефіцієнтів Пуассона матеріалів, значення критичної деформації, що відповідає приповерхневій нестійкості *кусково-однорідної* півплощини (бішару), прямує до значення, що відповідає приповерхневій нестійкості *однорідної* півплощини, виготовленої з матеріалу із аналогічним пружним потенціалом (див. табл. 3.1):

$$\varepsilon_1^s \rightarrow \varepsilon_1^{hp} \text{ при } g \rightarrow 0. \quad (3.46)$$

Аналіз чисельних результатів показує, що значення критичної деформації зморщування бішару, на відміну від варіанту жорсткого закріплення, залежать як від стисливості підкладки, так і від стисливості

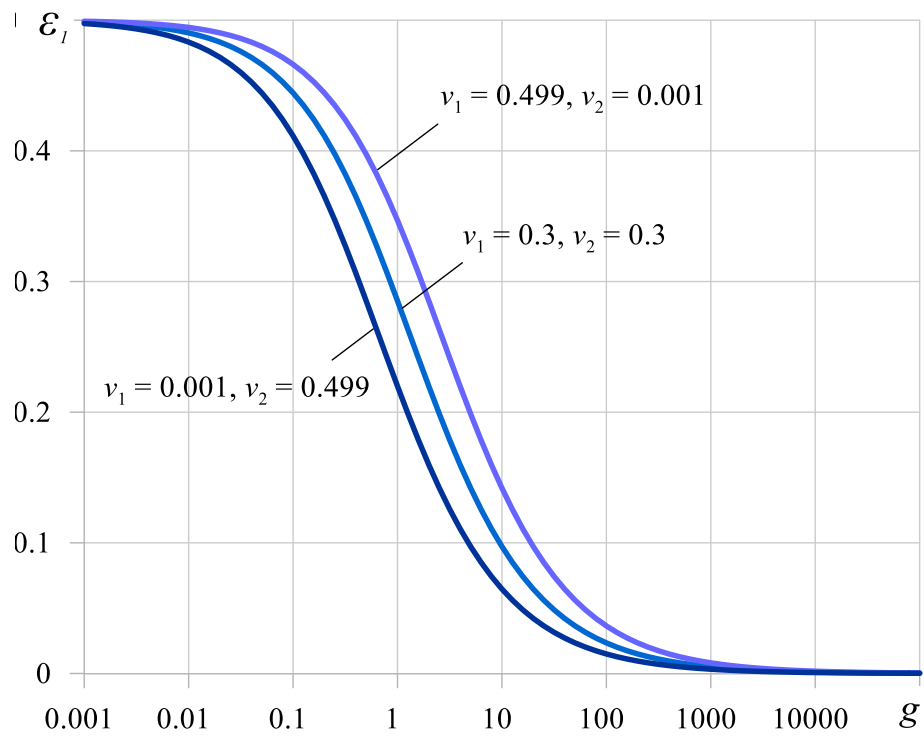


Рис. 3.25 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^s від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

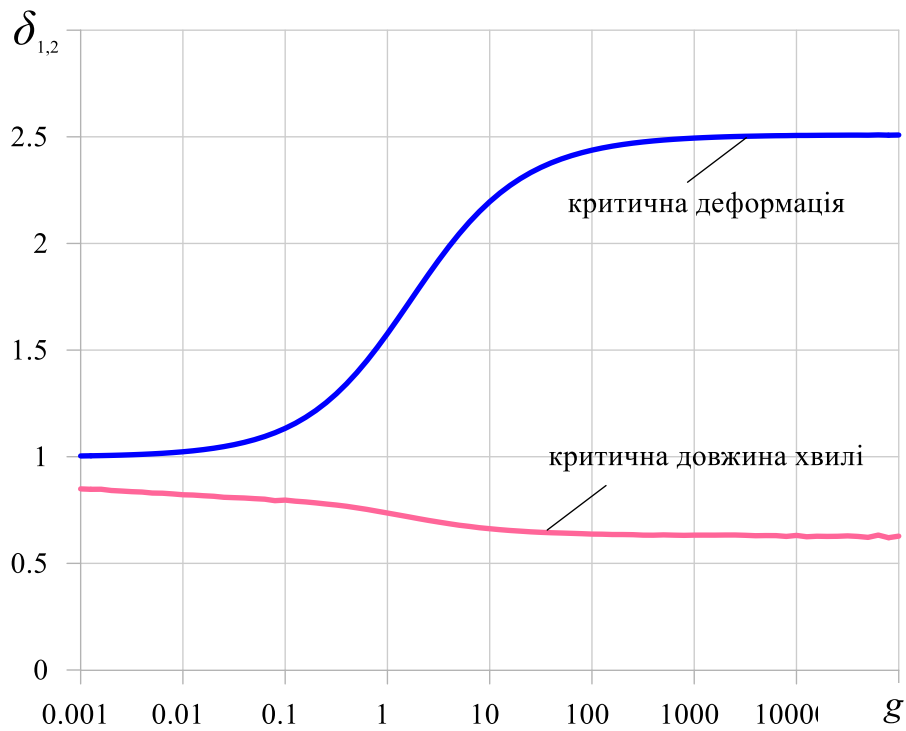


Рис. 3.26 – Залежність величин δ_1, δ_2 від відношення жорсткостей g для потенціалу гармонічного типу.

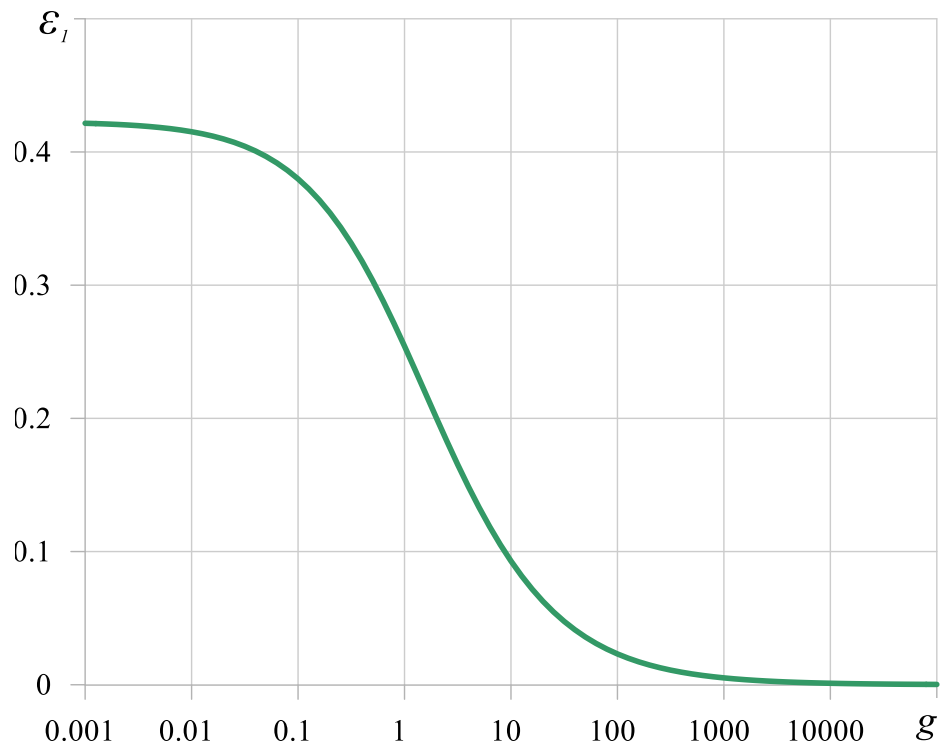


Рис. 3.27 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^s від відношення жорсткостей g для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

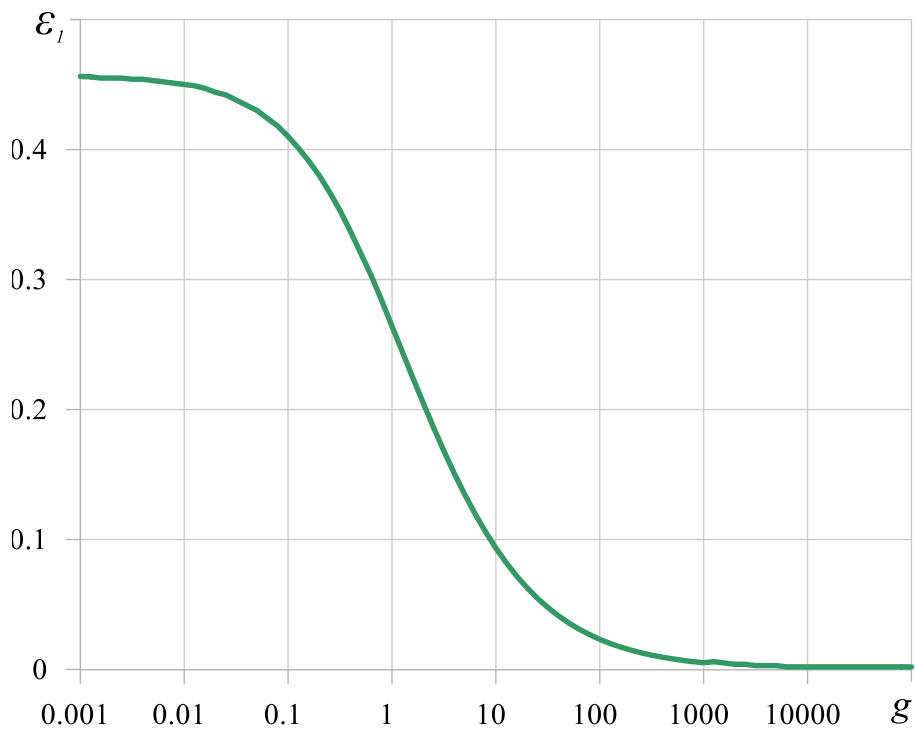


Рис. 3.28 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^s від відношення жорсткостей g для потенціалу Трелоара.

матеріалу покриття. При цьому ε_1^s зменшується зі збільшенням ν_2 при фіксованих значеннях ν_1 і g та збільшується зі збільшенням ν_1 при фіксованих значеннях ν_2 і g . Критичні деформації зморщування у випадку, коли компоненти бішару мають однакову стисливість, збігаються.

Як приклад у табл. 3.4 наведено значення критичної деформації ε_1^s для різних пар значень коефіцієнтів Пуассона при $g = 10$. У випадку однакої стисливості складових ($\nu_1 = \nu_2$) значення критичної деформації становить $\varepsilon_1^s = 0.0972$.

		ν_2								
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
ν_1	0.05	0.0972	0.0942	0.0912	0.0880	0.0847	0.0814	0.0779	0.0743	0.0705
	0.1	0.1002	0.0972	0.0940	0.0908	0.0875	0.0840	0.0804	0.0767	0.0728
	0.15	0.1035	0.1004	0.0972	0.0939	0.0904	0.0869	0.0832	0.0793	0.0753
	0.2	0.1071	0.1039	0.1006	0.0972	0.0936	0.0900	0.0862	0.0822	0.0781
	0.25	0.1111	0.1078	0.1043	0.1008	0.0972	0.0934	0.0895	0.0854	0.0811
	0.3	0.1154	0.1120	0.1085	0.1048	0.1011	0.0972	0.0931	0.0889	0.0845
	0.35	0.1202	0.1167	0.1131	0.1093	0.1054	0.1014	0.0972	0.0928	0.0882
	0.4	0.1255	0.1219	0.1182	0.1143	0.1102	0.1061	0.1017	0.0972	0.0924
	0.45	0.1316	0.1278	0.1239	0.1199	0.1157	0.1114	0.1068	0.1021	0.0972

Таблиця 3.4 – Критичні деформації ε_1^s при $g = 10$ для різних значень ν_1, ν_2 (потенціал гармонічного типу).

Графік на рис. 3.26 показує залежності

$$\begin{aligned} \delta_1(g) &= \varepsilon_1^s(g) \Big|_{\nu_1=0.499, \nu_2=0.001} : \varepsilon_1^s(g) \Big|_{\nu_1=0.001, \nu_2=0.499}, \\ \delta_2(g) &= \lambda^s(g) \Big|_{\nu_1=0.499, \nu_2=0.001} : \lambda^s(g) \Big|_{\nu_1=0.001, \nu_2=0.499}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Дані рис. 3.26 дають змогу оцінити максимальний вплив стисливості на критичні параметри втрати стійкості.

Вплив стисливості матеріалів, що характеризується коефіцієнтом Пуассона, на критичні значення ε_1^s збільшується зі збільшенням жорсткості покриття по відношенню до жорсткості підкладки і сягає 250%. В той же час критична довжина хвилі зазнає значно меншого впливу, який не перевищує 30%.

На рис. 3.27, 3.28 наведено залежність критичних деформацій зморщування ε_1^s від значення параметра $g = \mu_2 / \mu_1$ для випадку нестисливих тіл. Рисунок 3.27 відповідає пружному потенціалу *Бартенєва–Хазановича*, а рис. 3.28 – потенціалу *Трелоара*.

Для указаних потенціалів висновок, що дається формулою (3.46), також залишається справедливим.

3.7 Оцінка впливу типу зв'язку між компонентами на величини критичних деформацій

В даному пункті, виходячи з порівняння результатів, отриманих для бішарів з жорстко з'єднаними компонентами (п. 3.4), з результатами для бішарів, компоненти яких проковзують без тертя (п. 3.6), дається стислий аналіз впливу послаблення адгезії між складовими системи на величини критичних параметрів навантаження.

Як уже зазначалося, «найслабший» тип зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла моделюється умовами гладкого проковзування на межі поділу середовищ.

На рис. 3.29 – 3.31 штрихові криві відповідають значенням критичної деформації ε_1^r для нестабільності плівки у випадку ідеального контакту між поверхнею плівки та підкладкою (рівняння (3.19)), а суцільні криві – значенням ε_1^s у випадку проковзування без тертя (рівняння (3.23)). Рис. 3.29 відповідає випадку матеріалів, що описуються *гармонічним потенціалом* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), рис. 3.30 – *потенціалом Трелоара*, а рис. 3.31 – *потенціалом Бартенєва–Хазановича*.

У разі ослаблення адгезійного зв'язку між компонентами двошарового матеріалу, які спочатку були жорстко з'єднані один з одним, на деяких ділянках межі поділу може виникнути розрив з утворенням зон ковзання (з тертям або без нього). У цьому випадку критичні значення ε_1 для поверхневої нестійкості цієї системи мають бути такими, щоб відповідні точки на графіках рис. 3.29 – 3.31 потрапляли в сірі області, розташовані між «верхньою» штриховою та «нижньою» суцільною кривими. Подібні питання для випадку шаруватого необмеженого композиту розглядалися, наприклад, у [145].

Як приклад, на рис. 3.30 показано криву, що відповідає розв'язку задачі про визначення критичних деформацій втрати стійкості бішару, що стискається вздовж міжфазної зони гладкого проковзування, у випадку, коли довжина зони в чотири рази перевищує товщину плівки, а матеріали описуються *потенціалом Трелоара*. Зазначена задача детально вивчена в розділі 5.

Результати показують, що в досліджених випадках вплив наявності зон проковзування на межі поділу зменшується зі збільшенням жорсткості плівки відносно жорсткості підкладки. Однак, при відносно малих значеннях $g = \mu_2 / \mu_1$ ослаблення зв'язку між компонентами тіла може призвести до значного зниження міцності на стиск.

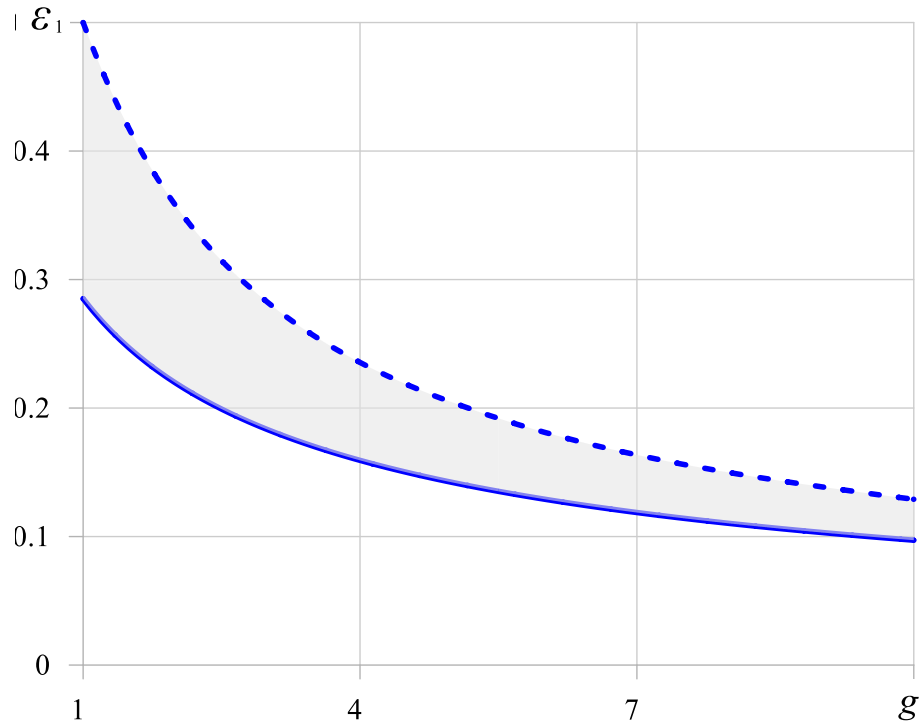


Рис. 3.29 – Залежності $\varepsilon_1^s(g)$ (суцільна крива) та $\varepsilon_1^r(g)$ (штрихова крива) для потенціалу гармонічного типу.

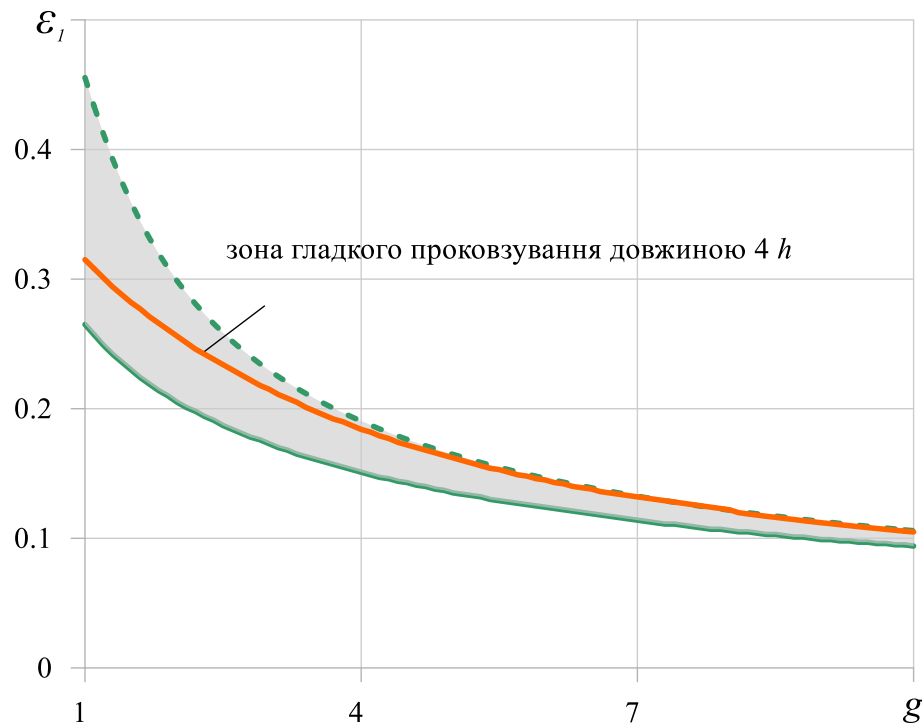


Рис. 3.30 – Залежності $\varepsilon_1^s(g)$ (суцільна крива) та $\varepsilon_1^r(g)$ (штрихова крива) для потенціалу Трелоара.

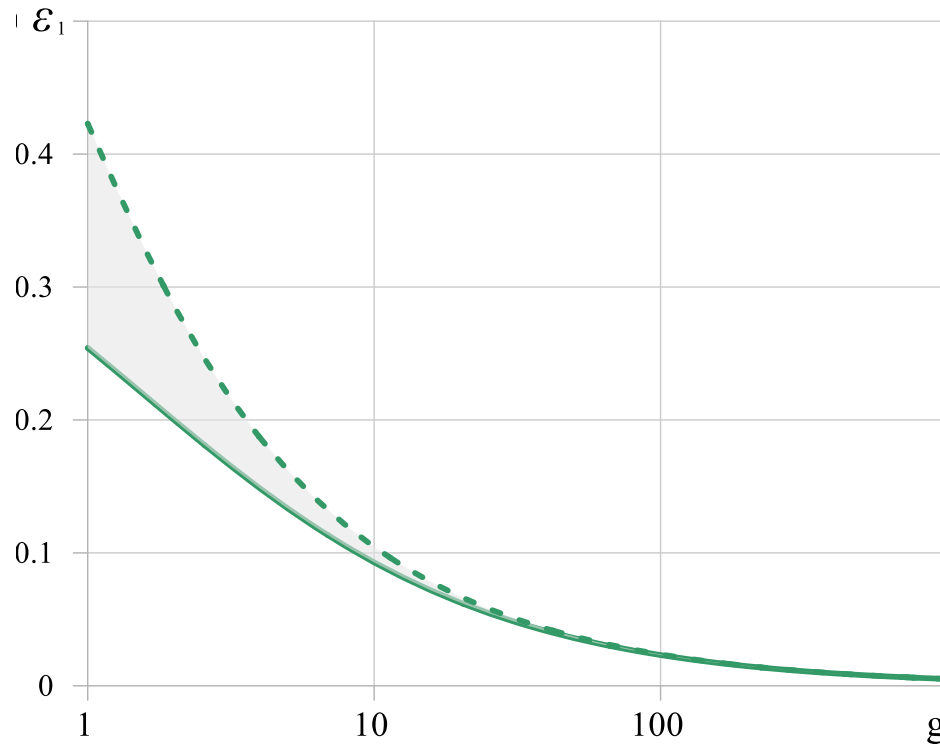


Рис. 3.31 – Залежності $\varepsilon_1^s(g)$ (суцільна крива) та $\varepsilon_1^r(g)$ (штрихова крива) для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

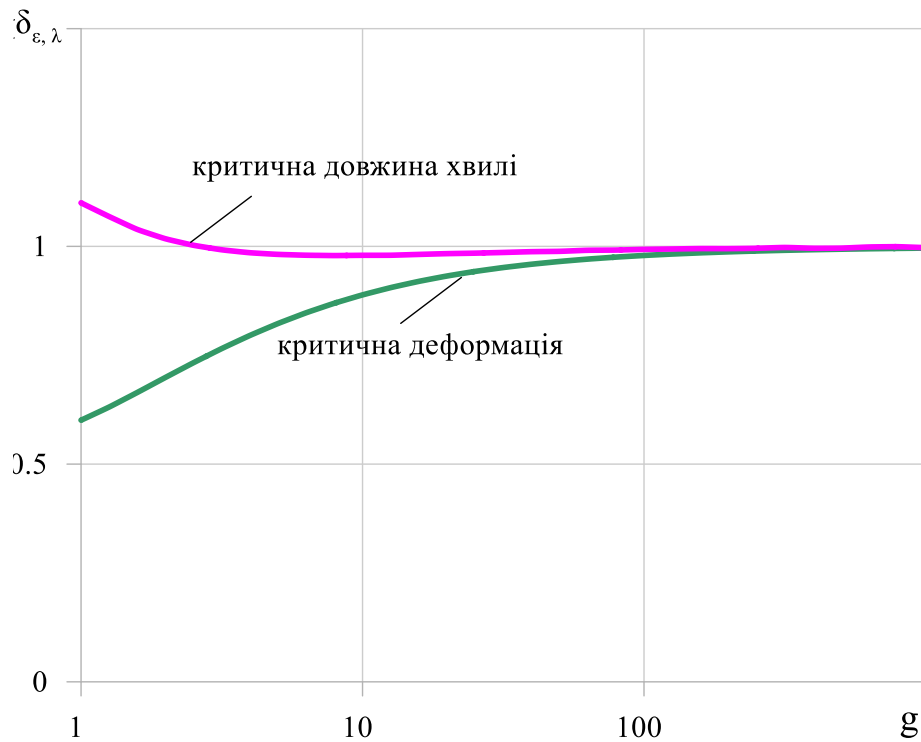


Рис. 3.32 – Залежності $\delta_\varepsilon(g)$ та $\delta_\lambda(g)$ для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

На графіку, зображеному на рис. 3.32, з використанням логарифмічної шкали представлено залежності критичної деформації зморщування та критичної довжини хвилі для бішару з компонентами, що проковзують без тертя, нормованих на відповідні значення для бішару з ідеальним контактом компонентів

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon_1^s / \varepsilon_1^r; \delta_\lambda = \lambda^s / \lambda^r,$$

від відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2 / \mu_1$. Криві побудовані для випадку пружного потенціалу *Бартенєва–Хазановича*.

Дані на рис. 3.32 вказують на те, що для нестисливих тіл у випадку жорстких плівок на податливих підкладках, який є актуальним для широкого кола прикладних задач, наявність зон послаблення зв'язку на межі поділу не приводить до значного зменшення критичної деформації та критичної довжини хвилі. Наприклад, у разі, коли плівка жорсткіша за підкладку у 100 разів, критичні деформації зморщування для проковзуючих компонентів зменшуються на ~2% у порівнянні з жорстко закріпленими компонентами. Коли ж плівка жорсткіша за підкладку у 1000 разів, ця величина становить вже менше 0.5%.

3.8 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій зморщування

Результати п. 3.5 показали, що у випадку, коли плівка покриття суттєво жорсткіша за підкладку, критичні параметри навантаження в задачі про стиск бішару вздовж межі поділу двох жорстко з'єднаних середовищ можуть бути з достатньо великою точністю визначені за допомогою наближених формул (3.41) – (3.44). В цьому разі критичні деформації втрати стійкості є малими і, очевидно, не зазнають суттєвого впливу при зміні конститутивних моделей, якими описуються компоненти бішарової системи.

Інша картина спостерігається у випадку, коли компоненти бішару співставні за жорсткістю, або коли жорсткішим з двох матеріалів є матеріал підкладки (див. рис. 3.20): якщо критичні деформації зморщування є великими, лінійні моделі не застосовні, а вплив структури пружних потенціалів складових тіл є значним.

Дослідимо як приклад випадок, коли компоненти бішарової системи за ідеального контакту виконані з нестисливих матеріалів, які описуються одним із двох пружних потенціалів: *потенціалом Бартенєва–Хазановича* або *потенціалом Трелоара*.

На рис. 3.33 зображені залежності $\varepsilon_1^r(g)$ для різних комбінацій означених пружних потенціалів. Розглянуто всі чотири можливі випадки; відповідні позначення для кривих на рис. 3.33 наведено у табл. 3.5. Червона крива на рисунку відповідає наближеній формулі (3.43).

Крива	Пружний потенціал підкладки	Пружний потенціал плівки
«1»	Трелоара	Трелоара
«2»	Бартенєва–Хазановича	Трелоара
«3»	Трелоара	Бартенєва–Хазановича
«4»	Бартенєва–Хазановича	Бартенєва–Хазановича

Таблиця 3.5 – Позначення для кривих на рис. 3.33.

Аналіз даних показує, що нелінійність, яка закладена в структуру пружного потенціалу, достатньо суттєво може впливати на величини критичних деформацій. Так, у випадку, коли плівка і підкладка мають однакову жорсткість ($g = 1$), цей вплив становить 8%; коли плівка в п'ять разів жорсткіша за підкладку ($g = 5$) – 2.5%. При подальшому зменшенні величини критичних деформацій, вплив структури пружного потенціалу теж зменшується: при $g = 10$, значення, що відповідають кривим «1» – «4» на рис.

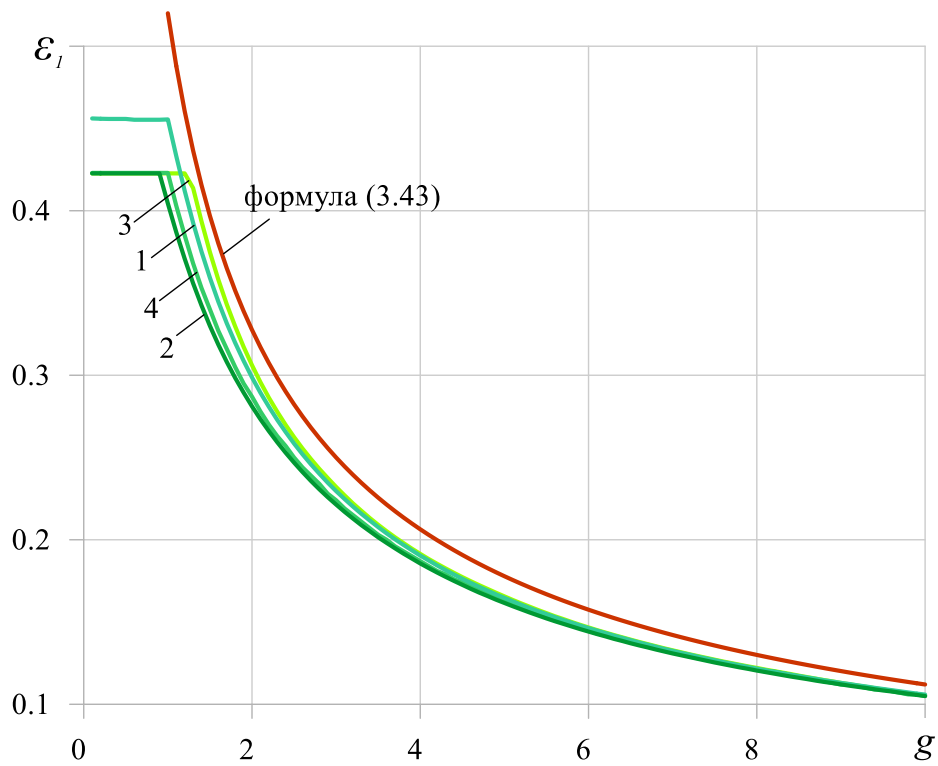


Рис. 3.33 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^r від відношення жорсткостей g для різних моделей нестисливих тіл. Випадок жорсткого з'єднання.

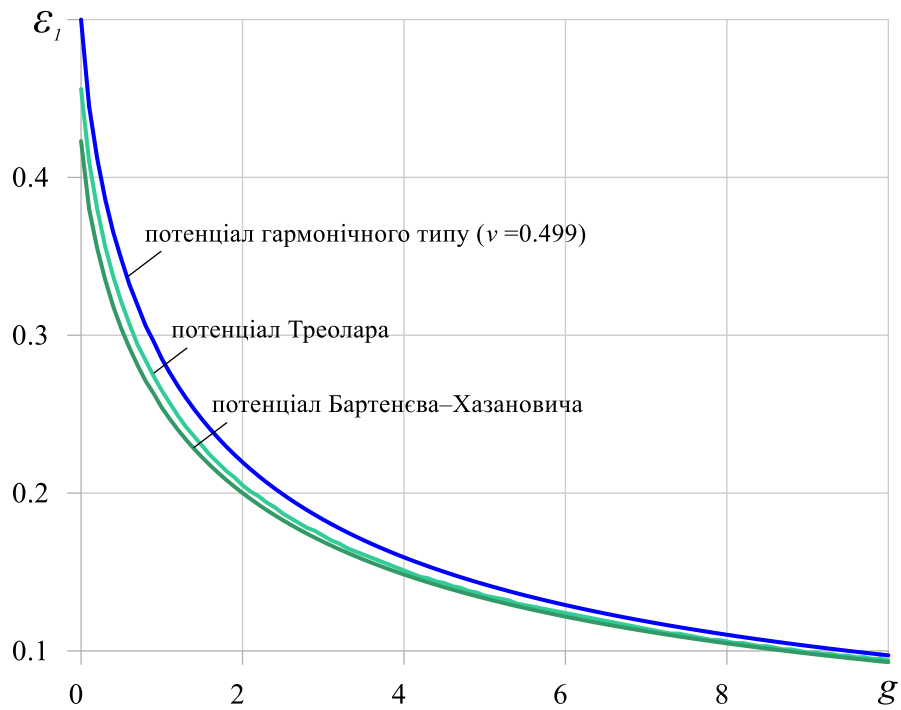


Рис. 3.34 – Залежність критичної деформації зморщування ε_1^s від відношення жорсткостей g для різних моделей нестисливих тіл. Випадок гладкого проковзування.

3.33 відрізняються не більше ніж на 1%. Найбільший вплив структури пружного потенціалу сягає більше 15% і спостерігається за значення $g \approx 1.3$.

Крім того можна стверджувати, що величина критичних деформацій зморщування більшою мірою визначається структурою напівобмеженого матеріалу підкладки.

Перехід від криволінійної до прямолінійної ділянки на кривих «1» – «4» відповідає зміні механізму втрати стійкості при відповідному значенні параметру g (див. п. 3.4.2). Якщо матеріали складових бішару описуються одним і тим самим пружним потенціалом, ця зміна відбувається, коли жорсткості складових зрівнюються ($g_0 = 1$). Якщо ж пружні потенціали для компонентів різні, то відповідне значення параметра g_0 є близьким, але не дорівнює одиниці. Коли $g \leq g_0$, значення критичної деформації втрати стійкості збігається з меншим із значень, що відповідають поверхневій втраті стійкості однорідної півплощини при стиску (див. табл. 3.1), яка виконана з матеріалу покриття або з матеріалу підкладки.

Графік на рис. 3.34 показує залежність значення ε_1^s від значення параметра g для бішарів у випадку великих деформацій. Розглянуто приклад комбінації двох нестисливих гіперпружних матеріалів, які описуються гармонічним потенціалом ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$), потенціалом Трелоара та потенціалом Бартенєва–Хазановича.

У цьому випадку вплив структури пружного потенціалу на значення ε_1^s може перевищувати 10%, що демонструє надзвичайну важливість правильного вибору моделі пружного потенціалу для двошарових матеріалів навіть у випадку нестисливих компонентів.

Основні результати та висновки розділу

В даному розділі дисертаційної роботи в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості презентовано напіваналітичний підхід до визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості бішарової системи при стиску.

З використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій – складових загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги, зведено до трансцендентних рівнянь для визначення критичних деформацій, що відповідають початку зморщування тонкої плівки покриття, розташованої на більш товстій підкладці. При цьому розглядалися два типи з'єднання плівки з підкладкою: жорстке з'єднання та проковзування без тертя.

Трансцендентні рівняння одержано в загальному вигляді для бішарів із стисливих або нестисливих гіперпружних компонентів, пружні потенціали яких є довільними. Числові результати, які були представлені для низки конкретних одно- та двопараметричних конститутивних моделей, показали гарне узгодження з результатами, одержаними іншими авторами в частинних випадках задачі, що розглядається. Зокрема, було проведено порівняння з результатами натурних експериментів, числових симуляцій, виконаних з використанням методу скінченних елементів в різних розрахункових пакетах, та з результатами нелінійного біфуркаційного аналізу.

Окремо було вивчено питання застосовності наближених інженерних формул для визначення критичних параметрів зморщування, отриманих із застосуванням балкової апроксимації для бішарів із лінійно-пружких матеріалів у межах геометрично лінійної моделі.

Аналіз одержаних результатів дозволяє сформулювати наступні

висновки:

1. У випадку жорсткого з'єднання зморщування бішарів із плівками, які менш жорсткі за підкладку, втрата стійкості відбувається за механізмом, аналогічним тому, що має місце для однорідної півплощини; відповідні критичні значення деформації зморщування збігаються зі значеннями, що відповідають поверхневій нестійкості однорідної півплощини.
2. У випадку гладкого проковзування значення критичних деформацій зморщування прямують до значень, що відповідають поверхневій нестійкості однорідної півплощини, коли жорсткість підкладки необмежено зростає по відношенню до жорсткості плівки.
3. У випадку жорсткого з'єднання значення критичних деформацій зморщування майже не залежать від стисливості підкладки при малих значеннях параметру g . Для випадку гладкого проковзування цього ефекту не спостерігається.
4. Модель напівобмеженої підкладки при визначенні критичних деформацій зморщування бішарів із жорстко з'єднаними компонентами застосовна для випадків, коли плівка тонша за підкладку у 10 та більше разів.
5. Формули, одержані в рамках балкових наближень, найкраще описують випадок бішару із нестисливих компонентів з потенціалом гармонічного типу. В усіх інших випадках формули можуть бути застосовними лише для достатньо податливих підкладок, коли критичні деформації менші 10%.
6. У випадку нестисливих компонентів вплив послаблення зв'язку між ними зменшується зі збільшенням жорсткості плівки по відношенню до жорсткості підкладки. Коли компоненти стисливі – цей вплив залишається значним навіть для великих значень параметра g , передусім через чутливість критичних деформацій зморщування до параметрів стисливості бішару.

7. Вплив нелінійності, яка закладена в структури пружних потенціалів, у випадку великих критичних деформацій може сягати 15% для нестисливих бішарів.

Використання співвідношень ТЛТСДТ у поєднанні зі строгою постановкою задач в межах цієї теорії виявилось ефективною методикою до дослідження класу задач, пов'язаних з визначенням критичних параметрів втрати стійкості у тонкоплівкових структурах. Автор вважає доцільним подальше розширення сфери застосування лінеаризованої теорії до дослідження задач для обмежених областей у вигляді кусково-однорідної смуги та задач про стійкість структур з двошаровими покриттями, вивчення зморщування яких представляє великий практичний інтерес.

Одержані результати надалі будуть використані в роботі при вивченні задач про стиск бішарів вздовж міжфазних дефектів. При цьому, задачі, що розглядалися в Розділі 3, слугуватимуть граничними випадками задач для тіл з дефектами «нульової довжини» та «нескінченно довгими» дефектами.

РОЗДІЛ 4 СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНИХ БІШАРОВИХ СИСТЕМ З ЖОРСТКО З'ЄДНАНИМИ КОМПОНЕНТАМИ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Даний розділ роботи присвячено дослідженню стійкості бішарових систем при їх стиску вздовж міжфазної тріщини (відшарування). Розглядається випадок, коли компоненти системи поза тріщиною жорстко з'єднані між собою; випадок, коли ці компоненти проковзують без тертя, розглянуто в розділі 6 дисертації.

Натепер в науковій літературі не представлено єдиного теоретичного підходу, який дозволяв би визначити критичні параметри навантаження, що відповідають втраті стійкості бішарів при їх стиску вздовж міжфазного відшарування, незалежно від довжини відшарування. Навіть у межах фізично лінійних моделей наявні наближені підходи застосовні лише до окремих випадків – достатньо довгих та достатньо коротких відшарувань [240], – які враховують лише один з двох механізмів втрати стійкості, що може реалізовуватись в напівобмеженому бішарі, але не їхню взаємодію [107, 173, 189, 218].

Якщо довжина наявного на межі поділу дефекту досить мала порівняно з товщиною плівки покриття, його наявністю нехтують, розглядаючи дефект як недосконалість інтерфейсу [188], який не впливає суттєвим чином на значення критичних параметрів навантаження. В такому разі до розгляду беруть задачу про стиск бішару вздовж межі поділу жорстко з'єднаних середовищ (без дефектів). Означена задача досліджена в розділі 3, там же проведено аналіз існуючих наближених підходів до вивчення відповідного механізму втрати стійкості – зморщування (рис. 3.1.в).



Рис. 4.1 – Випучування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці.

Зі збільшенням довжини міжфазної тріщини критичні навантаження зменшуються і за певного значення довжини наближені підходи, які враховують лише зморщування поверхні тіла, стають незастосовними.

Якщо довжина тріщин достатньо велика, домінуючим механізмом втрати стійкості є «*buckling*» (з англ. «випучування», див. рис. 4.1). Приблизна оцінка критичних *buckling*-деформацій може бути надана за допомогою «балкового наближення», у межах якого відшарована частина плівки розглядається як балка (чи смуга) з відповідними граничними умовами на торцях [240]. При цьому таке «балкове наближення» має низку очевидних недоліків. По-перше, його можна застосовувати лише при суттєвих значення відношення довжини тріщини (відшарування) до товщини шару покриття (тобто коли можна застосовувати модель «тонкої» балки чи смуги). По-друге, значення критичних стискаючих навантажень при такому підході суттєво залежить від вибраних ідеалізованих граничних умов на торцях балки (смуги); при цьому зміна граничних умов від жорсткого защемлення до вільного опирання призводить до зміни значень критичних параметрів в 4 рази для смуги при її одноосному стиску [133].

Взаємодія ж між двома механізмами – зморщуванням та випучуванням, яка спостерігається в натурних і числових експериментах, досі взагалі не знаходила теоретичного обґрунтування, а єдиного способу визначення

критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості бішарів з міжфазними тріщинами, не представлено.

В даному розділі пропонується напіваналітичний підхід до визначення критичних деформацій втрати стійкості гіперпружної бішарової системи при стиску вздовж міжфазної тріщини. Дослідження проводиться в межах строгої постановки граничної задачі плоскої деформації ТЛТСДТ. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.55), (2.61) гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповненої додатковою умовою.

Ця система одержується в загальному вигляді для стисливих і нестисливих компонентів бішару у разі всіх можливих випадків співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, що відповідають пружним потенціалам складових бішару (див. п. 3.2). Проводиться строге дослідження неперервності ядер інтегральних рівнянь та даються фізичні пояснення математичних обмежень.

Числове дослідження задачі на власні значення виконується із застосуванням методу Бубнова – Гальоркіна. Аналізується характер практичної збіжності та описуються підходи до ефективного інтегрування невластних інтегралів – складових ядер інтегральних рівнянь. Перший етап валідації результатів відбувається шляхом їх порівняння з аналогічними результатами в задачах для однорідних тіл.

Критичні параметри навантаження визначаються для низки конкретних пружних потенціалів для стисливих і нестисливих тіл. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних та геометричних параметрів, вивчається вплив структури пружних потенціалів на критичні деформації.

Далі увага приділяється порівнянню результатів з результатами, одержаними в межах наближених підходів, окремо для відносно довгих і коротких тріщин. Визначаються умови застосовності наближених формул. Також результати порівнюються з результатами числових симуляцій, виконаних іншими дослідниками.

У завершенні розділу результати критично обговорюються в контексті перспектив подальших досліджень і формулюються висновки.

Результати, представлені в розділі, відображені в публікаціях автора [3, 34, 38, 71, 75, 76, 78, 159].

4.1 Постановка задачі

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянемо напівобмежене кусково-однорідне тіло, що складається з двох компонент: напівобмеженої гіперпружної підкладки «1» ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «2» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ є ненавантаженою.

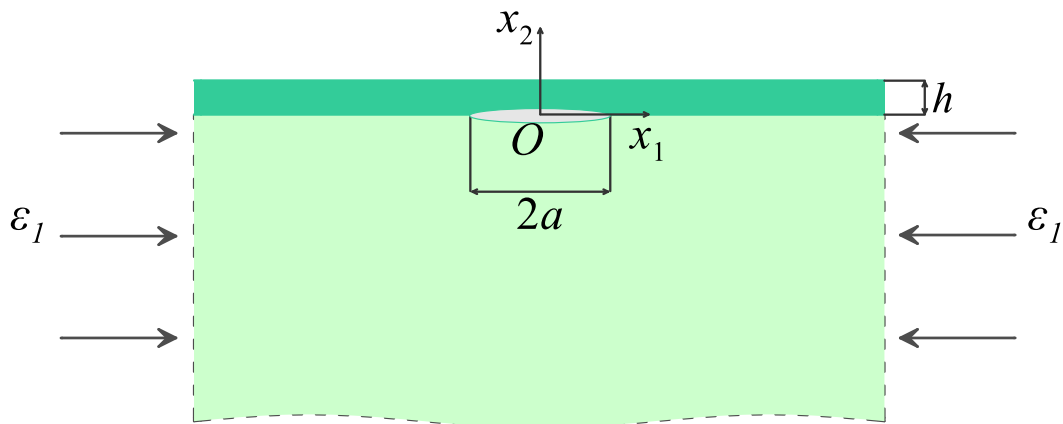


Рис. 4.2 – Бішарова система підкладка/плівка при стиску вздовж міжфазної тріщини.

Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну ненавантажено тріщину (відшарування) довжини $2a$ (рис. 4.2); поза тріщиною матеріали жорстко з'єднані між собою.

Нехай на нескінченності бішарова система стискається таким чином, що докритичний напружено-деформований стан, який реалізується в тілі, є статично визначеним, однорідним і описується виразами (3.1) – (3.4).

Граничні умови сформульованої задачі запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{21}^{(2)} = 0, \quad t_{22}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\
 u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукається таке перше значення λ_1 (при його зменшенні починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, яке відповідає недеформованому стану), при якому за неперервного збільшення навантаження стиску, сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 4.2) бішарової системи.

Відповідно до критерію руйнування [5, 6], розробленого у межах ТЛТСДТ, величина критичного стискаючого навантаження, що відповідає значенню відносного укорочення ε_1 , яке визначене із указаної умови, являє собою теоретичну межу міцності бішарової системи на стиск. Інакше кажучи, початковий етап руйнування тонкоплівкової системи (рис. 4.2) асоціюється з втратою її стійкості.

4.2 Граничні задачі для потенціальних гармонічних функцій

Зведемо задачу з граничними умовами (4.1) до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій – складових

представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.41), (2.42).

Оскільки компоненти бішарової системи (рис. 4.2) є гіперпружними стисливими або нестисливими матеріалами з довільною формою пружного потенціалу, до розгляду маємо чотири окремі випадки, які визначаються можливими комбінаціями співвідношень між коренями характеристичних рівнянь (2.48), записаних для кожного з матеріалів тіла (див. п. 3.2).

Якщо для пружного потенціалу матеріалу бішару реалізується випадок рівних коренів ($n_1^i = n_2^i = n^i$), то необхідно користуватися представленнями (3.7) загальних розв'язків.

Якщо для пружного потенціалу матеріалу бішару реалізується випадок нерівних коренів ($n_1^i \neq n_2^i$), то необхідно користуватися представленнями (3.9) загальних розв'язків.

Як і для задачі про стиск тіла без дефекту (Розділ 3), проілюструємо хід розв'язання у випадках (i) та (ii), тобто коли для обох матеріалів тіла реалізуються випадки рівних коренів $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 = n_2^2$ або нерівних коренів $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$, відповідно. Випадки (iii) і (iv) досліджуються аналогічно.

Підставляючи представлення (3.7) у випадку рівних коренів або (3.9) у випадку нерівних коренів в перші два рядки крайових умов (4.1), одержуємо наскрізні граничні умови задачі, подані в термінах потенціальних гармонічних функцій:

для випадку «i»

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j=0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (4.2)$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j=0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}};$$

для випадку «ii»

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} = 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} = 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(1)}} + k_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(1)}} = k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}}, \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (4.3)$$

$$k_4^1 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + k_5^1 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} = k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2}, \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (h_j = \frac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}).$$

Аналогічно, для третього рядка (4.1), інтегруючи першу з умов по x_1 , приходимо до граничних умов «на тріщині»:

для випадку «i»

$$k_1^2 F^{(2)} + k_2^2 \Phi^{(2)} = \text{const} \quad (z_2=0, |x_1| \leq a),$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} = 0 \quad (z_2=0, |x_1| \leq a); \quad (4.4)$$

для випадку «ii»

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} = \text{const} \quad (z_j^{(2)} = 0, |x_1| \leq a),$$

$$k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} = 0 \quad (z_j^{(2)} = 0, |x_1| \leq a), \quad (4.5)$$

а для четвертого рядка (4.1) після деяких перетворень [21, 185] – до граничних умов «поза тріщиною»:

для випадку «i»

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j = 0, |x_1| > a) \quad (z_j = 0, |x_1| > a),$$

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^1 F^{(2)} + p_2^1 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, |x_1| > a); \quad (4.6)$$

для випадку «ii»

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \quad (z_j^{(i)} = 0, |x_1| > a),$$

$$p_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + p_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}} = p_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + p_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, |x_1| > a) \quad (4.7)$$

та додаткової умови:

для випадку «i»

$$\int_0^a \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} dx_1 = \int_0^a \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} dx_1 \quad (4.8)$$

для випадку «ii»

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} \right) \Big|_{z_j^{(1)}=0} dx_1 = \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \right) \Big|_{z_j^{(2)}=0} dx_1, \quad (4.9)$$

записаних у термінах потенціальних гармонічних функцій.

4.3 Система інтегральних рівнянь задачі

Представимо невідомі потенціальні гармонічні функції $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\varphi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$ у вигляді косинус-розкладів Фур'є з параметром

λ за координатою x_1 , зберігши форму представлень (3.15), (3.16) у випадку «і» та «ii», відповідно.

Задовольняючи спочатку наскрізні граничні умови (4.2) ((4.3)), приходимо до наступної системи рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$:

для випадку «і»

$$\begin{aligned} k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0, \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0, \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0 \quad (\mu = \lambda h_1); \end{aligned} \quad (4.10)$$

для випадку «ii»

$$\begin{aligned} \gamma k_1^2 C_2 + k_2^2 D_2 &= 0, \\ \gamma k_4^2 C_1 + k_5^2 D_1 &= 0, \\ k_1^1 A + k_2^1 B + k_1^2 C_1 + k_1^2 C_2 \coth \mu_1 + k_2^2 D_1 + k_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\ -k_4^1 A - k_5^1 B + k_4^2 C_1 \coth \mu_1 + k_4^2 C_2 + k_5^2 D_1 \coth \mu_2 + k_5^2 D_2 &= 0 \quad (\mu_j = \lambda h_j, \gamma = \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Визначаючи $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ і $D_2(\lambda)$ через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, отримаємо:

для випадку «і»

$$\begin{aligned} A &= -\Delta^{-1} \left[(s_1 + \mu s_2 + \mu \coth \mu \cdot s_3) C_1 + (s_4 + \mu s_5 + \mu \coth \mu \cdot s_6) C_2 \right], \\ B &= \Delta^{-1} \left[(r_1 + \mu r_2 + \mu \coth \mu \cdot r_3) C_1 + (r_4 + \mu r_5 + \mu \coth \mu \cdot r_6) C_2 \right], \\ D_1 &= -\frac{k_1^2}{k_2^2} C_1 + \mu C_2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$D_2 = \mu C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} C_2,$$

$$\Delta = k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1,$$

$$s_1 = (k_2^1 k_4^2 k_2^2 - k_2^1 k_5^2 k_1^2) / k_2^2, \quad s_2 = k_5^1 k_2^2, \quad s_3 = k_2^1 k_5^2, \quad s_4 = (k_5^1 k_5^2 k_1^2 - k_5^1 k_2^2 k_4^2) / k_5^2,$$

$$s_5 = s_3, \quad s_6 = s_2, \quad r_1 = (k_1^1 k_4^2 k_2^2 - k_1^1 k_5^2 k_1^2) / k_2^2, \quad r_2 = k_4^1 k_2^2,$$

$$r_3 = k_1^1 k_5^2, \quad r_4 = (k_4^1 k_5^2 k_1^2 - k_4^1 k_2^2 k_4^2) / k_5^2, \quad r_5 = r_3, \quad r_6 = r_2;$$

для випадку «ii»

$$A = -\Delta^{-1} \left[(k_2^1 k_4^2 l - k_5^1 m) C_1 + (k_5^1 k_1^2 l - k_2^1 n) C_2 \right],$$

$$B = -\Delta^{-1} \left[(-k_1^1 k_4^2 l + k_4^1 m) C_1 + (-k_4^1 k_1^2 l + k_1^1 n) C_2 \right],$$

$$D_1 = -\frac{k_4^2}{k_5^2} \gamma C_1, \tag{4.13}$$

$$D_2 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} \gamma C_2,$$

$$l = \gamma \coth \mu_2 - \coth \mu_1, \quad m = k_1^2 - \gamma \frac{k_2^2 k_4^2}{k_5^2}, \quad n = k_4^2 - \gamma \frac{k_1^2 k_5^2}{k_2^2}.$$

Підставляючи (3.15), (3.16) в (4.4), (4.5) з урахуванням (4.12) ((4.13)), умови «на тріщині» приймуть наступний вигляд:

для випадку «i»

$$\int_0^{\infty} \left[\mu C_1(\lambda) + (-k + \mu \coth \mu) C_2(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = \text{const} \quad (|x_1| \leq a),$$

$$\int_0^{\infty} \lambda \left[(k + \mu \coth \mu) C_1(\lambda) + \mu C_2(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| \leq a); \tag{4.14}$$

для випадку «ii»

$$\int_0^{\infty} [mC_1(\lambda) - k_1^2 l C_2(\lambda)] \cos \lambda x_1 d\lambda = const \quad (|x_1| \leq a),$$

$$\int_0^{\infty} \lambda [-k_4^2 l C_1(\lambda) + n C_2(\lambda)] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| \leq a). \quad (4.15)$$

Аналогічно, умови «поза тріщиною» (4.6), (4.7) запишуться так:

$$\int_0^{\infty} Y_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda Y_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| > a), \quad (4.16)$$

$$Y_1(\lambda) = \alpha_1 C_1(\lambda) + \alpha_2 C_2(\lambda), \quad Y_2(\lambda) = \beta_1 C_1(\lambda) + \beta_2 C_2(\lambda),$$

де для випадку «i»

$$\alpha_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \coth x + a_3 x \coth x,$$

$$\alpha_2(x) = b_0 + a_3 x + a_1 x \coth x,$$

$$\beta_1(x) = c_0 + d_3 x + d_1 x \coth x,$$

$$\beta_2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 \coth x + d_3 x \coth x; \quad (4.17)$$

$$k = \frac{k_4^2 k_2^2 - k_5^2 k_1^2}{k_2^2 k_5^2}, \quad a_0 = \frac{r_1 p_2^1 - s_1 p_1^1}{\Delta}, \quad a_1 = -p_2^2 + \frac{r_2 p_2^1 - s_2 p_1^1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{k_1^2}{k_2^2} p_2^2 - p_1^2,$$

$$a_3 = \frac{r_3 p_2^1 - s_3 p_1^1}{\Delta}, \quad b_0 = -p_1^2 + \frac{k_4^2}{k_5^2} p_2^2 + \frac{r_4 p_2^1 - s_4 p_1^1}{\Delta}, \quad c_0 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} + \frac{r_1}{\Delta},$$

$$d_0 = \frac{r_4}{\Delta}, \quad d_1 = 1 + \frac{r_5}{\Delta}, \quad d_2 = -\frac{k_4^2}{k_5^2}, \quad d_3 = \frac{r_6}{\Delta};$$

для випадку «ii»

$$\alpha_1 = k_4^2 \frac{-p_1^1 k_2^1 + p_2^1 k_1^1}{\Delta} l + \frac{-p_2^1 k_4^1 + p_1^1 k_5^1}{\Delta} m + p_1^2 - p_2^2 \gamma \frac{k_4^2}{k_5^2},$$

$$\alpha_2 = k_1^2 \frac{-p_1^1 k_5^1 + p_2^1 k_4^1}{\Delta} l + \frac{-p_2^1 k_1^1 + p_1^1 k_2^1}{\Delta} m + p_1^2 \coth \mu_1 - p_2^2 \gamma \frac{k_1^2}{k_2^2} \coth \mu_2,$$

$$\beta_1 = k_4^2 \frac{-k_2^1 + k_1^1}{\Delta} l + \frac{-k_4^1 + k_5^1}{\Delta} m - \coth \mu_1 + \gamma \frac{k_4^2}{k_5^2} \coth \mu_1, \quad (4.18)$$

$$\beta_2 = k_1^2 \frac{-k_5^1 + k_4^1}{\Delta} l + \frac{-k_1^1 + k_2^1}{\Delta} m - 1 + \gamma \frac{k_1^2}{k_2^2}.$$

Додаткова умова (4.8), (4.9) в обох випадках «i» та «ii» прийме вигляд

$$\int_0^{\infty} Y_2(\lambda) \sin \lambda a d\lambda = 0. \quad (4.19)$$

Наступний крок полягає у тому, щоб вибрати функції $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ таким чином [52], щоб задовольнити рівняння (4.16) тотожно. Виберемо ці функції у наступному вигляді:

$$Y_1 = \lambda^{-2} \int_0^a \varphi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \quad Y_2 = -h_1 \lambda^{-3} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \quad (4.20)$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – нові невідомі функції, неперервно-диференційовні на $[0, a]$.

Покажемо, наприклад, що вибір функції $Y_2(\lambda)$ у вигляді (4.20) задовольняє друге рівняння в (4.16).

Використаємо відоме значення [47, 48] інтеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px \cos qx}{x} dx = \begin{cases} \pi / 2, & 0 \leq q < p \\ \pi / 4, & q = p \\ 0, & q > p \geq 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Підставляючи (4.20) в (4.16) і враховуючи (4.21), одержуємо

$$\begin{aligned}
& -h_1 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt \cos \lambda x_1 d\lambda = \\
& -h_1 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} \left[\Psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) \Big|_0^a - \int_0^a \Psi(t) (-\lambda \sin \lambda t) dt \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = \\
& = -h_1 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} \left[\Psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) \Big|_0^a - \int_0^a \Psi(t) (-\lambda \sin \lambda t) dt \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = \\
& = -h_1 \int_0^a \Psi(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t \cos \lambda x_1 d\lambda}{\lambda} dt = 0, \quad x_1 > a \geq t,
\end{aligned}$$

де $\Psi(t) = \int_0^t \psi(t) dt$, $\Psi(0) = 0$.

Скориставшись значенням іншого інтегралу [47, 48]

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3} dx &= \frac{\pi}{16} \left[(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 - (a-b+c)^2 + \varepsilon(a-b-c)^2 \right], \\
\varepsilon &= \operatorname{sgn}(a-b-c); \quad \varepsilon = 0, \text{ якщо } a=b+c,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

для додаткової умови (4.19) маємо

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{h_1} \int_0^\infty Y_2(\lambda) \sin \lambda a d\lambda &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^3} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt \sin \lambda a d\lambda = \\
&= \int_0^a \psi(t) \left[\int_0^\infty \frac{(\cos \lambda t - \cos \lambda a) \sin \lambda a}{\lambda^3} d\lambda \right] dt = \\
&= \int_0^a 2\psi(t) \left[\int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \sin \lambda \frac{a+t}{2} \sin \lambda \frac{a-t}{2}}{\lambda^3} d\lambda \right] dt = \\
&= \frac{\pi}{8} \int_0^a 2\psi(t) \left[(2a)^2 - (a+t)^2 - (a-t)^2 \right] dt = \frac{\pi}{4} \int_0^a \psi(t) (a^2 - t^2) dt = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Отже, додаткова умова (4.19), враховуючи (4.23), може бути записана так

$$-h_1 \int_0^a \psi(t)(a^2 - t^2) dt = 0. \quad (4.24)$$

Виразивши далі з (4.16) $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ через $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \delta^{-1}(\lambda)(\beta_2 Y_1 - \alpha_2 Y_2), \\ C_2 &= \delta^{-1}(\lambda)(-\beta_1 Y_1 + \alpha_1 Y_2) \quad (\delta(\lambda) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \end{aligned} \quad (4.25)$$

та підставивши отримані вирази в (4.14), (4.16) для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1$, $\eta \equiv a^{-1}t$ приходимо до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_{1j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^\infty P_{2j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = 0, \\ & \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_{1j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_{2j}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta - const = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad j = \overline{1, 4}$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi)$, $g(\xi) \equiv a \psi(a\xi)$ та невідомої константи $const$, яка пов'язана з додатковою умовою (4.24). Остання ж, своєю чергою, подається так:

$$\int_0^1 g(\eta)(1 - \eta^2) d\eta = 0. \quad (4.27)$$

Функції $P_{1j}, P_{2j}, Q_{1j}, Q_{2j}$ в ядрах інтегральних рівнянь (4.26) – відомі функції, а індекс $j = \overline{1,4}$ визначається відповідним випадком (i) – (iv).

Для випадку «i»

$$\begin{aligned}
 P_{11}(x) &= \frac{\left(k + (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \coth(n^{(2)})^{-1/2} \beta x\right) \cdot \tilde{\beta}_2(x) - (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \tilde{\beta}_1(x)}{\delta(x)}, \\
 P_{21}(x) &= \frac{\left(-k - (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \coth(n^{(2)})^{-1/2} \beta x\right) \cdot \tilde{\alpha}_2(x) + (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \tilde{\alpha}_1(x)}{\delta(x)}, \\
 Q_{11}(x) &= \frac{(n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \tilde{\beta}_2(x) + \left(k - (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \coth(n^{(2)})^{-1/2} \beta x\right) \cdot \tilde{\beta}_1(x)}{\delta(x)}, \quad (4.28) \\
 Q_{21}(x) &= \frac{(n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \tilde{\alpha}_2(x) + \left(-k + (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \coth(n^{(2)})^{-1/2} \beta x\right) \cdot \tilde{\alpha}_1(x)}{\delta(x)};
 \end{aligned}$$

для випадку «ii»

$$\begin{aligned}
 P_{12}(x) &= \frac{-k_4^2 l(x) \tilde{\beta}_2(x) - n(x) \tilde{\beta}_1(x)}{\delta(x)}, \quad P_{22}(x) = \frac{n(x) \tilde{\alpha}_1(x) + k_4^2 l(x) \tilde{\alpha}_2(x)}{\delta(x)}, \\
 Q_{12}(x) &= \frac{m(x) \tilde{\beta}_2(x) + k_1^2 l(x) \tilde{\beta}_1(x)}{\delta(x)}, \quad Q_{22}(x) = \frac{-k_1^2 l(x) \tilde{\alpha}_1(x) - m(x) \tilde{\alpha}_2(x)}{\delta(x)}, \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

де функції, які позначені «тильдою» згори, збігаються з аналогічними функціями без «тильди», в усіх складових яких замість μ, μ_1, μ_2 покладено, відповідно, $(n^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda, (n_1^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda$ або $(n_2^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda$, де $\beta = h/a$.

Аналогічно є і структура інтегральних рівнянь в решті двох випадках («iii» та «iv») співвідношення між коренями характеристичних рівнянь для

пружних потенціалів складових матеріалів тіла. При цьому, коли для матеріалу підкладки має місце випадок рівних, а для матеріалу покриття – нерівних коренів (випадок «iii», $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$), структура ядер інтегральних рівнянь є аналогічною до структури ядер інтегральних рівнянь (4.29) у випадку «ii», а в останньому з можливих випадків (випадок «iv», $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 = n_2^2$) – до структури ядер інтегральних рівнянь (4.28) у випадку «i». Враховуючи громіздкість указаних рівнянь, їх явний вигляд у тексті роботи не наводиться.

Беручи до уваги сказане вище, резюмуємо, що задача про стискання кусково-однорідної півплощини, що утворена жорстким з'єднанням двох стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів, – напівобмеженої підкладки і плівки покриття – вздовж міжфазної тріщини була зведена до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповненої певною додатковою умовою, *в загальному вигляді при довільній структурі пружних потенціалів складових компонентів тіла*. Конкретизація моделей матеріалів тіла відбувається лише на етапі чисельного дослідження системи інтегральних рівнянь на власні значення, який є фінальним етапом визначення критичних значень параметрів навантаження.

Таким чином, проблема зводиться до задачі (4.26), (4.27) на власні значення відносно параметра $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 < 1$ (або критичної деформації $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$). Параметр λ_1 (коефіцієнт укорочення вздовж осі Ox_1) характеризує докритичний стан та складним нелінійним чином входить до ядер інтегральних рівнянь (4.26).

4.4 Дослідження ядер інтегральних рівнянь

Неперервність ядер інтегральних рівнянь (4.26) порушується лише у таких двох випадках:

1) коли виконується умова

$$\Delta \equiv k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1 = 0 \quad (4.30)$$

У цьому разі з систем рівнянь типу (4.10), (4.11) коефіцієнти $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ виражаються через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ неєдиним чином.

Значення ε_1^{hp} , яке отримується з (4.30), є критичним значенням, що відповідає поверхневій нестійкості півплощини (з матеріалу «1» або «2») без тріщини (див. табл. 3.1) та визначається видом пружного потенціалу. З фізичних міркувань очевидно, що критичні значення параметра ε_1 задачі, що досліджується, лежать в області

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^{hp}, \quad (4.31)$$

у якій рівність (4.30) не виконується.

2) коли виконується умова

$$\delta(x) \equiv \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x) = 0 \quad (x > 0) \quad (4.32)$$

В цьому випадку знаменники функцій P_{1j} , P_{2j} , Q_{1j} , Q_{2j} , що входять до ядер інтегральних рівнянь, перетворюються на нуль.

Досліджувати трансцендентне рівняння (4.32), яке містить степеневі та гіперболічні (або показникові) функції та складним чином залежить від сталих обох матеріалів бішару, необхідно окремо для кожної конкретної комбінації пружних потенціалів.

Дослідження показує, що у випадку одноконстантних потенціалів (2.72), (2.73), які використовують у роботі, члени рівняння (4.32) не залежать окремо від жорсткостей μ_1 та μ_2 матеріалів, а залежать тільки від їхнього відношення $g = \mu_2/\mu_1$. У випадку потенціалу двоконстантних потенціалів

(2.70), (2.71) члени рівняння (3.2) залежать від відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1$ та від коефіцієнтів Пуассона матеріалів ν_1 та ν_2 .

Для обох типів потенціалів можна сформулювати спільний висновок стосовно рівняння (4.32):

якщо $g \leq 1$, тобто матеріал підкладки «1» є жорсткішим за матеріал покриття «2» (або жорсткості обох матеріалів однакові), то рівняння не має додатних коренів для всіх значень параметра ε_1 з області (4.31);

якщо $g > 1$, тобто матеріал покриття «2» є жорсткішим за матеріал підкладки «1», то рівняння має додатні корені при деяких значеннях параметра ε_1 з області (4.31) для кожного фіксованого значення g . При цьому найперше значення ε_1 при збільшенні, починаючи з $\varepsilon_1 = 0$, при якому рівняння (4.32) має додатний корінь, збігається зі значенням ε_1^r , яке визначає критичні деформації зморщування бішарової системи при стиску вздовж межі поділу двох жорстко з'єднаних середовищ (див. Розділ 3) для того самого фіксованого значення g .

З фізичних міркувань очевидно, що наявність тріщини на межі поділу середовищ, що по-суті еквівалентно втраті в'язі на частині області контакту, приводить до зменшення критичних параметрів навантаження, таких як критична деформація [18], по відношенню до випадку, коли компоненти бішару з'єднані уздовж всієї лінії поділу.

Таким чином, приходимо до висновку, що математичні обмеження у вигляді (4.30), (4.32) мають чітке фізичне тлумачення, і шукане критичне значення ε_1 лежить в області

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^r, \quad (4.33)$$

у якій для всіх досліджуваних значень параметрів задачі функції $P_{1j}, P_{2j}, Q_{1j}, Q_{2j}$, що входять до ядер інтегральних рівнянь (4.26), є неперервними.

У випадку «i» справедливі наступні асимптотики указаних функцій:

$$\begin{aligned}
 &P_1(x), P_2(x), Q_1(x), Q_2(x) \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow 0; \\
 &P_1(x) \rightarrow \frac{k(d_0 + d_2)}{a_0d_0 + a_2d_0 + a_0d_2 + a_2d_2 - b_0c_0}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \\
 &P_2(x) \rightarrow \frac{-kb_0}{a_0d_0 + a_2d_0 + a_0d_2 + a_2d_2 - b_0c_0}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \\
 &Q_1(x) \rightarrow \frac{kc_0}{a_0d_0 + a_2d_0 + a_0d_2 + a_2d_2 - b_0c_0}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \\
 &Q_2(x) \rightarrow \frac{-k(a_0 + a_2)}{a_0d_0 + a_2d_0 + a_0d_2 + a_2d_2 - b_0c_0}, \text{ при } x \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Виходячи з асимптотик (4.34), неважко переконатися, що всі невідомі інтеграли (від 0 до ∞) у (4.26), які є ядрами відповідних інтегральних рівнянь, є збіжними для всіх допустимих значень змінних ξ, η і значень параметрів $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1'$. Випадки «ii» – «iv» вивчаються аналогічно.

4.5 Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь

Нижче коротко викладається методика чисельного дослідження задач на власні значення для систем інтегральних однорідних рівнянь першого і другого роду, коли шуканий параметр складним чином входить до ядра інтегральних рівнянь .

Отже, нехай $\{\xi_i(\xi)\}$ – довільна повна на $[0, 1]$ система лінійно-незалежних координатних функцій. Згідно з методом Бубнова–Гальоркіна

[44, 176], невідомі функції апроксимуються у вигляді лінійної комбінації кінцевого числа координатних функцій – перших N функцій системи:

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^N a_i \xi_i(\xi), \quad (4.35)$$

де $f(\xi)$ – шукана функція, a_i – невідомі коефіцієнти. Записуючи умови ортогональності лівих частин однорідних інтегральних рівнянь координатним функціям $\xi_i(\xi)$, отримуємо системи лінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів a_i . Нехай маємо, наприклад, інтегральне рівняння

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta = 0. \quad (4.36)$$

Тоді коефіцієнти a_i апроксимації (4.35) шуканої функції першими N координатними функціями визначаються з рівняння

$$\sum_{i=1}^N (K_{\xi_i, \xi_j}) \cdot a_i = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (4.37)$$

де прийнято позначення

$$(K_{\xi_i, \xi_j}) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(\xi, \eta) \xi_i(\eta) d\eta \right) \xi_j(\xi) d\xi.$$

Зауважимо, що зазначена процедура може бути застосована як до інтегральних рівнянь першого, так і другого роду. Дослідження задачі на власні значення для системи лінійних рівнянь типу (4.37), до якої зводиться вихідна задача, полягає у знаходженні першого значення $\varepsilon_1 < 0$ (при зменшенні ε_1 , починаючи зі значення 0), при якому вказана система має не єдиний розв'язок. Тобто визначається значення ε_1 при якому визначник системи лінійних рівнянь типу (4.37) обертається в нуль. У програмі

обчислень реалізовано покрокове збільшення параметра ε_1 на величину $\Delta\varepsilon_1$ з фіксацією зміни знака визначника системи лінійних рівнянь. Уточнення критичного значення ε_1 проводиться послідовним поділом інтервалу, у якому визначник змінює знак, навпіл до досягнення заданої точності обчислення критичного значення. Критична величина ε_1 обчислюється для послідовно зростаючого на одиницю числа N координатних функцій; процес припиняється при досягненні практичної збіжності.

4.5.1 Задача на власні значення

Апроксимуючи невідомі функції $f(\xi)$, $g(\xi)$ в (4.26), (4.27) у вигляді лінійної комбінації перших N координатних функцій повної на $[0,1]$ системи функцій $1, \xi, \xi^2, \dots$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^N f_j \xi^{j-1}, \quad g(\xi) = \sum_{j=1}^N g_j \xi^{j-1},$$

у відповідності до описаної вище процедури, приходимо до наступної системи однорідних лінійних рівнянь розмірності $(2N + 1) \times (2N + 1)$ відносно невідомих коефіцієнтів розкладів f_j, g_j та деякої невідомої сталої c :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f_{ijm}^{(1)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ijm}^{(1)} g_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^N f_{ijm}^{(2)} f_j + \sum_{j=1}^N g_{ijm}^{(2)} g_j + c_{im} \cdot c &= 0, \\ \sum_{j=1}^N g_{jm}^{(3)} g_j &= 0 \quad (i = \overline{1, N}, m = \overline{1, 4}). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Коефіцієнти системи (4.38) мають наступний вигляд:

$$f_{ijm}^{(1)} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty P_{1m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \Big\} \xi^{i-1} d\xi;$$

$$\begin{aligned}
g_{ijm}^{(1)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty P_{2m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\} \xi^{i-1} d\xi; \\
f_{ijm}^{(2)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty Q_{1m}(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\} \xi^{i-1} d\xi; \\
g_{ijm}^{(2)} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \int_0^\infty \frac{Q_{2m}(\lambda)}{\lambda} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right\} \eta^{j-1} d\eta \left\} \xi^{i-1} d\xi; \\
c_{im} &= \frac{1}{i}, \quad g_{jm}^{(3)} = \frac{2}{j(j+2)} \quad (i, j = \overline{1, N}, m = \overline{1, 4}).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Для наочності наведемо вигляд системи (4.38) ще й у матричній формі

$$\begin{pmatrix}
f_{11}^{(1)} & \cdot & \cdot & f_{1N}^{(1)} & g_{11}^{(1)} & \cdot & \cdot & g_{1N}^{(1)} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_{N1}^{(1)} & \cdot & \cdot & f_{NN}^{(1)} & g_{N1}^{(1)} & \cdot & \cdot & g_{NN}^{(1)} & 0 \\
f_{11}^{(2)} & \cdot & \cdot & f_{1N}^{(2)} & g_{11}^{(2)} & \cdot & \cdot & g_{1N}^{(2)} & c_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_{N1}^{(2)} & \cdot & \cdot & f_{NN}^{(2)} & g_{N1}^{(2)} & \cdot & \cdot & g_{NN}^{(2)} & c_N \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & g_{11}^{(3)} & \cdot & \cdot & g_{1N}^{(3)} & 0
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \\ g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_N \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найскладнішим етапом чисельного дослідження системи рівнянь (4.38) є ефективна реалізація обчислення інтегралів у коефіцієнтах (4.39) системи. Деякі аспекти процедури цього інтегрування обговорюються нижче.

4.5.2 Методика чисельно-аналітичного визначення коефіцієнтів системи рівнянь

Визначення коефіцієнтів $k_{ij} = f_{ijm}^{(n)}, g_{ijm}^{(n)}$ системи однорідних лінійних рівнянь (4.38) за формулами (4.39) приводить до необхідності обчислення невластних інтегралів вигляду

$$\int_0^{\infty} P(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^j} d\lambda, \quad j = 1 \text{ або } 2,$$

які можуть бути подані у наступній формі:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} P(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^j} d\lambda = \\ & = \int_0^{\varepsilon} (P(\lambda) - P_{\infty}) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^j} d\lambda + P_{\infty} I_j(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$I_j(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^j} d\lambda, \quad j = 1, 2.$$

В (4.40) ε – таке додатне число, для якого значення функції $P(\varepsilon)$ відрізняється від значення її скінченної границі (див. (4.34))

$$P(\lambda) \rightarrow P_{\infty} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty$$

не більше ніж на задану малу величину.

Використовуючи відомі інтеграли

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{|a-b|} \quad (a \neq b);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \min(a, b),$$

одержуємо вирази для інтегралів I_j , $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} I_1(\xi, \eta) &= \int_0^{\infty} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda(1+\eta+2\xi)}{2} \sin \frac{\lambda(1-\eta)}{2}}{\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\lambda(1+\eta-2\xi)}{2} \sin \frac{\lambda(1-\eta)}{2}}{\lambda} d\lambda = (4.41) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\xi}{\eta+\xi} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\xi}{\eta-\xi} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\xi^2}{\eta^2-\xi^2} \right|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(\xi, \eta) &= \int_0^\infty \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda = \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin \frac{\lambda(1+\eta+2\xi)}{2} \sin \frac{\lambda(1-\eta)}{2}}{\lambda^2} d\lambda + \int_0^\infty \frac{\sin \frac{\lambda(1+\eta-2\xi)}{2} \sin \frac{\lambda(1-\eta)}{2}}{\lambda^2} d\lambda = (4.42) \\
&= \frac{\pi}{2} \min \left[\frac{1+\eta+2\xi}{2}, \frac{1-\eta}{2} \right] + \frac{\pi}{2} \min \left[\frac{1+\eta-2\xi}{2}, \frac{1-\eta}{2} \right] = \\
&= \frac{\pi}{4} \left[1-\eta + \min(1+\eta-2\xi; 1-\eta) \right].
\end{aligned}$$

Змінивши порядок інтегрування в (4.39), з використанням (4.40) – (4.42) коефіцієнти системи (4.38) можна подати так

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= \int_0^\varepsilon \frac{P(\lambda) - P_\infty}{\lambda^n} \left[\left(\int_0^1 \eta^{j-1} \cos \lambda \eta d\eta - \frac{1}{j} \cos \lambda \right) \int_0^1 \xi^{i-1} \cos \lambda \xi d\xi \right] d\lambda + \\
&+ P_\infty \int_0^1 \left[\int_0^1 I_n(\xi, \mu) \eta^{j-1} d\eta \right] \xi^{i-1} d\xi, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad n = 1, 2 \quad (4.43)
\end{aligned}$$

У випадку $n=1$ інтеграл у другому доданку в (4.43), що містить інтегровану логарифмічну особливість, зводиться до обчислення інтегралів типу $\int_0^\infty f(x) \ln x dx$, які ефективно обчислюються за квадратурними формулами інтегрування функцій із зазначеною логарифмічною особливістю [47, 48], та інтегралів без особливості.

У випадку $n=2$ інтеграл в другому доданку в (4.43) можна обчислити аналітично:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 I_2(\xi, \mu) \eta^{j-1} d\eta \right] \xi^{i-1} d\xi = \frac{\pi}{2ij(i+j+1)}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Інтеграли від 0 до 1, які містить перший доданок в (4.43), також можна обчислити аналітично, взявши до уваги формулу

$$\int t^i \cos \lambda t dt = \frac{i!}{\lambda} \left[\sin \lambda t \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k \frac{1}{\lambda^{2k}} \frac{t^{i-2k}}{(i-2k)!} + \cos \lambda t \sum_{k=0}^{[(i-1)/2]} (-1)^k \frac{1}{\lambda^{2k+1}} \frac{t^{i-2k-1}}{(i-2k-1)!} \right]$$

($[x]$ – ціла частина числа x).

Чисельне інтегрування решти визначених інтегралів, що входять до складу коефіцієнтів системи (4.38), проводиться за квадратурними формулами Гаусса

$$\int_a^b f(y) dy = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f(y_i) + R_n,$$

де n – число вузлів, $y_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right)$ – вузли квадратурної формули,

x_i – i -тий нуль многочлена Лежандра $P_n(x)$ на $[-1, 1]$, $\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$

– вагові коефіцієнти, R_n – залишковий член (величини x_i , ω_i для різного числа вузлів n наведено, наприклад, у таблицях [54]). При цьому проміжок інтегрування $[a, b]$ (зазвичай це проміжок $[0, 1]$ або $[0, \varepsilon]$, див. (4.43)) розбивається на необхідну для забезпечення заданої точності кількість проміжків меншої довжини.

4.5.3 Аналіз практичної збіжності

Характер збіжності описаного в пп. 4.5.1, 4.5.2 методу чисельного дослідження залежно від кількості N використовуваних координатних функцій ілюструється даними, наведеними в таблицях 4.1 – 4.3.

У таблицях наведені критичні значення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ для різних значень відносної товщини плівки покриття $\beta = h/a$. Таблиця 4.1 відповідає випадку, коли компоненти бішару описуються пружним *потенціалом гармонічного типу*, табл. 4.2 – *потенціалом Бартенєва–Хазановича*, табл. 4.3 – *потенціалом*

β	N				
	1	2	3	4	5
0.05	0.013	0.003	0.003	0.002	0.002
0.1	0.015	0.008	0.008	0.007	0.007
0.15	0.019	0.014	0.016	0.014	0.014
0.2	0.024	0.022	0.024	0.022	0.022
0.25	0.030	0.031	0.033	0.032	0.032
0.3	0.036	0.040	0.043	0.041	0.041
0.35	0.043	0.049	0.052	0.051	0.051
0.4	0.051	0.058	0.062	0.061	0.061
0.45	0.058	0.067	0.071	0.071	0.071
0.5	0.066	0.076	0.080	0.080	0.080
0.55	0.074	0.085	0.089	0.089	0.089
0.6	0.081	0.093	0.097	0.097	0.097
0.65	0.089	0.101	0.105	0.106	0.106
0.7	0.096	0.108	0.113	0.113	0.113
0.75	0.103	0.115	0.119	0.120	0.120
0.8	0.109	0.121	0.126	0.127	0.127

Таблиця 4.1 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу гармонічного типу ($g = 5, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

β	N				
	1	2	3	4	5
0.1	0.015	0.008	0.009	0.007	0.007
0.2	0.024	0.022	0.024	0.023	0.023
0.3	0.037	0.041	0.044	0.042	0.042
0.4	0.052	0.060	0.063	0.063	0.063
0.5	0.068	0.078	0.082	0.081	0.081
0.6	0.084	0.094	0.098	0.098	0.098
0.7	0.098	0.108	0.111	0.111	0.111
0.8	0.110	0.119	0.122	0.122	0.122

Таблиця 4.2 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу Бартенєва–Хазановича ($g = 5$).

β	N				
	1	2	3	4	5
0.1	0.012	0.008	0.009	0.007	0.007
0.2	0.024	0.022	0.024	0.023	0.023
0.3	0.037	0.041	0.044	0.042	0.042
0.4	0.052	0.060	0.063	0.063	0.063
0.5	0.069	0.078	0.082	0.082	0.082
0.6	0.084	0.095	0.098	0.099	0.099
0.7	0.098	0.108	0.112	0.112	0.112
0.8	0.110	0.120	0.123	0.124	0.124

Таблиця 4.3 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу Трелоара ($g = 5$).

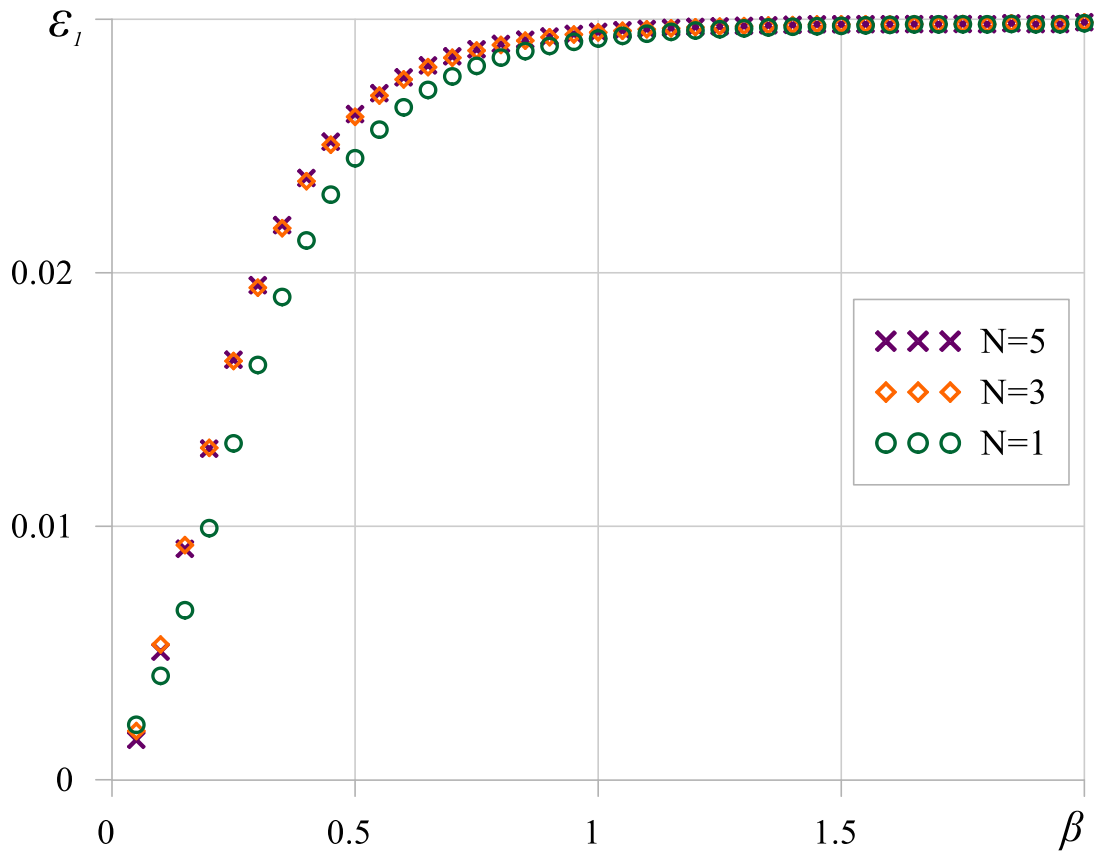


Рис. 4.4 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ при $g = 100$; для матеріалу підкладки використовувався потенціал Трелоара, для матеріалу плівки – потенціал гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Трелоара. Значення критичних деформацій ε_1 у цьому прикладі визначалися з точністю до трьох значущих цифр; відношення жорсткостей матеріалів бішару було прийнято $g = \mu_2 / \mu_1 = 5$; коефіцієнти Пуассона матеріалів у разі потенціалу гармонічного типу становили $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

На графіку, зображеному на рис. 4.3, побудовано криві $\varepsilon_1(\beta)$ при значенні параметру $g = 100$ при використанні різної кількості координатних функцій. Для матеріалу підкладки використовувався потенціал Трелоара, для матеріалу покриття – потенціал гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Аналіз даних табл. 4.1 – 4.3 та рис. 4.3 вказує на те, що для забезпечення точності в три значущі цифри в більшості випадків достатнім є використання $N = 4$ або $N = 5$ координатних функцій при визначенні критичних параметрів втрати стійкості бішару при стиску вздовж міжфазної тріщини. Зауважимо, що автори робіт [21, 110, 116, 185] з дослідження аналогічних задач для *однорідних тіл* вказували на необхідність утримання $N = 3$ або $N = 4$ координатних функцій для забезпечення такої ж точності при використанні методу Бубнова – Гальоркіна.

4.6 Аналіз числових результатів

У цьому параграфі представлено результати числового дослідження задачі на власні значення (4.26), (4.27) відносно критичного параметра ε_1 – значення критичного відносного укорочення, яке відповідає втраті стійкості тонкої плівки покриття на більш товстій підкладці при стиску вздовж міжфазної тріщини (відшарування). Для розв’язання задачі на власні значення використовується метод Бубнова – Гальоркіна у спосіб, який описано в п.4.5.

Перший етап валідації результатів відбувається шляхом їх порівняння в граничному випадку з результатами аналогічної задачі для однорідного тіла.

Далі для низки пружних потенціалів конкретної структури – потенціалу гармонічного типу та квадратичного потенціалу для стисливих тіл, а також потенціалу Бартенєва–Хазановича та потенціалу Трелоара для нестисливих тіл – аналізуються залежності критичних параметрів навантаження від механічних та геометричних параметрів бішару.

4.6.1 Задачі для однорідних тіл

В працях [21, 110, 116, 185] у межах ТЛТСДТ досліджувалися задачі плоскої деформації про стиск гіперпружної півплощини вздовж приповерхневої тріщини.

Порівняння результатів, одержаних авторами указаних робіт, з результатами числового дослідження системи інтегральних рівнянь (4.26), (4.27) у випадку, коли механічні характеристики плівки та підкладки однакові, представлено на рис. 4.4 – 4.6.

Суцільні криві $\varepsilon_1(\beta)$, які демонструють залежність критичних деформацій втрати стійкості від значення геометричного параметра $\beta = h/a$ – відносної товщини плівки покриття (відносної відстані від тріщини до поверхні тіла, віднесеної до половини довжини тріщини) на рисунках відповідають розв'язку задачі (4.26), (4.27), а криві з круглих маркерів – результатам досліджень інших авторів задачі для однорідного тіла.

Порівняння результатів демонструє їх відмінну узгодженість.

При збільшенні геометричного параметра $\beta = h/a$, що відповідає зменшенню довжини дефекту, значення критичної деформації втрати стійкості ε_1 асимптотично прямують до значень, які відповідають поверхневій втраті стійкості однорідної півплощини із відповідного матеріалу (див. табл. 3.1)

$$\varepsilon_1(\beta) \rightarrow \varepsilon_1^{hp} \text{ при } \beta \rightarrow \infty, \quad (4.44)$$

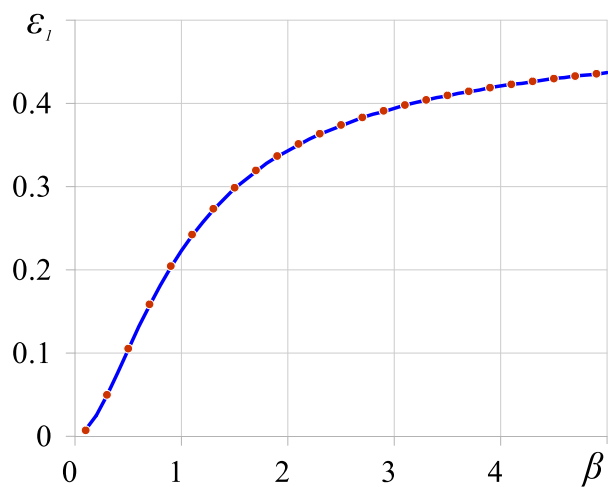


Рис. 4.4 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку однорідного тіла з *потенціалом гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

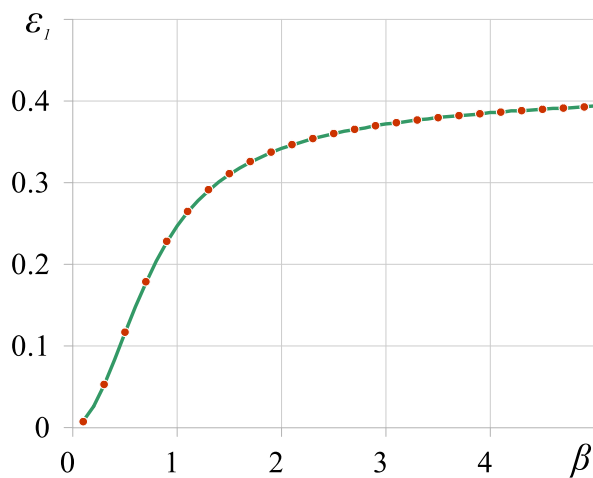


Рис. 4.5 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку однорідного тіла з *потенціалом Бартенєва–Хазановича*.

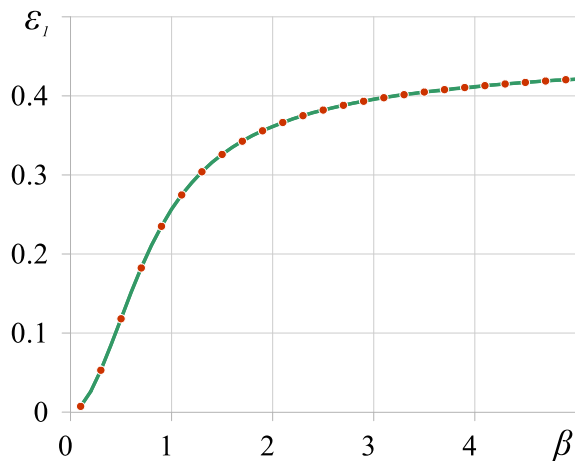


Рис. 4.6 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку однорідного тіла з *потенціалом Трелоара*.

тобто до значень, які відповідають розв'язку аналогічної задачі для тіла без дефекту.

Зауважимо, що в задачі про стиск необмеженої площини вздовж внутрішньої тріщини [15, 21, 113] та в задачі про стиск кусково-однорідної площини вздовж міжфазної тріщини [119, 121, 122, 123] критичне значення ε_1 також дорівнює значенню ε_1^{hp} (у випадку однорідної півплощини) або меншому із значень ε_1^{hp} для складових (у випадку кусково-однорідної півплощини).

4.6.2 Критичні параметри навантаження: потенціал гармонічного типу

Результати чисельного дослідження задачі на власні значення (4.38) представлено на графіках, зображених на рис. 4.7 – 4.10 для випадку, коли обидва матеріали бішарової системи описуються *потенціалом гармонічного типу* (2.70) з коефіцієнтами Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

Виходячи з різного характеру поведінки функцій (4.32) у знаменниках підінтегральних виразів (4.28) в залежності від того, який з двох складових матеріалів бішару – плівка або підкладка – має вищу жорсткість, результати з визначення критичних деформацій ε_1 задачі для наочності подано окремо для випадків $g \leq 1$ та $g > 1$.

На рис. 4.7 у разі, коли матеріал підкладки жорсткіший за матеріал плівки покриття, зображено залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної товщини покриття $\beta = h/a$ при деяких різних значеннях параметра $g \leq 1$ – відношення жорсткості матеріалу підкладки до жорсткості матеріалу покриття.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням жорсткості покриття по відношенню до жорсткості підкладки (тобто зі збільшенням значення

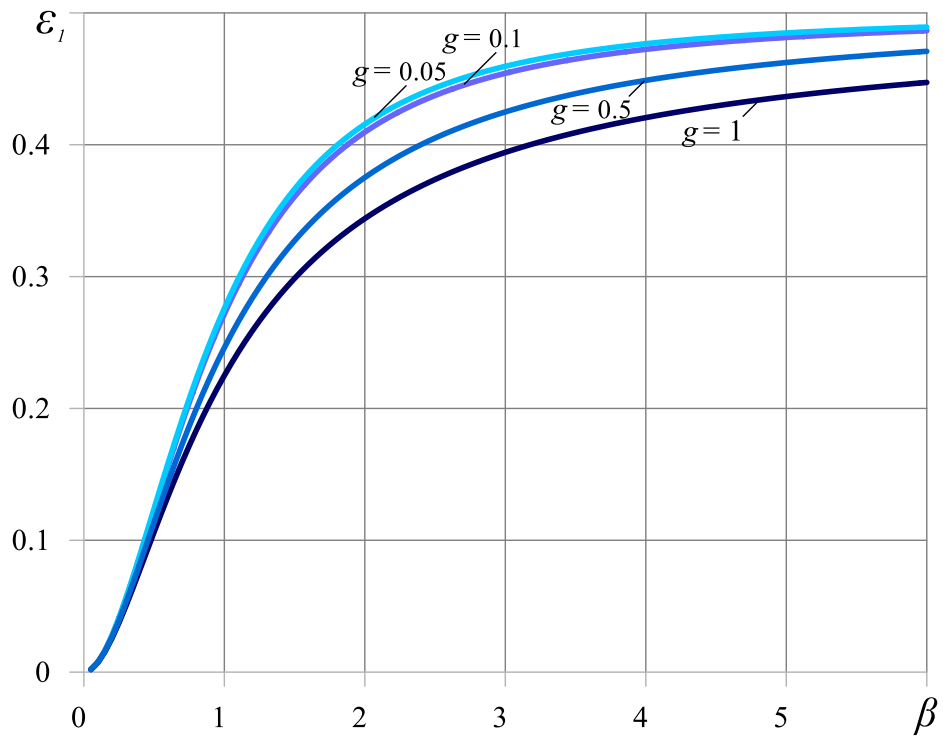


Рис. 4.7 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $g \leq 1$.

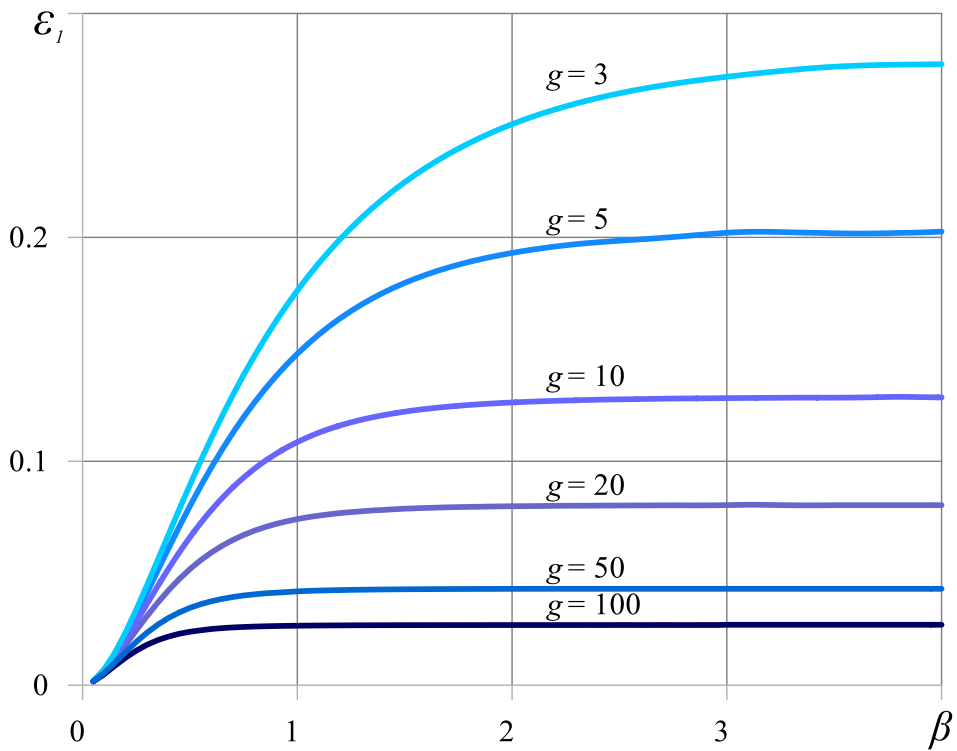


Рис. 4.8 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $g > 1$.

параметра g) значення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, зменшуються.

Зі збільшенням геометричного параметра $\beta = h/a$ (що еквівалентно зменшенню довжини тріщини по відношенню до фіксованої товщини плівки або збільшенню товщини плівки по відношенню до фіксованої довжини тріщини) критичні значення ε_1 також збільшуються. При цьому має місце асимптотика (4.44), аналогічна до випадку однорідного тіла ($g = 1$)

$$\varepsilon_1(\beta) \rightarrow \varepsilon_1^{hp} = 0.5 \text{ при } \beta \rightarrow \infty,$$

що свідчить про спільний механізм втрати стійкості у випадку достатньо товстих плівок покриття. В такому разі втрата стійкості бішару в першу чергу ініціюється поверхневою втратою стійкості однієї з його складових. Докладніше взаємодія різних механізмів втрати стійкості, які реалізуються в напівобмежених кусково-однорідних тілах, вивчається п. 4.7.

Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку, коли плівка покриття жорсткіша за підкладку ($g > 1$) представлені на рис. 4.8. Розглядається випадок пружного потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

В цьому разі справедлива наступна асимптотика для достатньо коротких тріщин:

$$\varepsilon_1(\beta) \rightarrow \varepsilon_1^r \text{ при } \beta \rightarrow \infty, \quad (4.45)$$

де ε_1^r – значення критичної деформації зморщування бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами при відповідному значенні відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = \mu_2 / \mu_1 > 1$, яке визначається з рівняння (3.19).

Граничний перехід (4.45) свідчить про узгодженість між собою одержаних розв'язків таких двох задач: про стиск бішару з жорстко з'єднаними компонентами вздовж межі поділу середовищ у випадках

відсутності на ній дефектів і в разі наявності дефекту типу відшарування. При цьому перша з цих задач, яка розв'язана в розділі 3 роботи, може розглядатися як граничний випадок задачі про «тріщину нульової довжини».

Як і у випадку $g \leq 1$, у випадку $g > 1$ критичні значення ε_1 зменшуються зі збільшенням відносної жорсткості плівки. Так, наприклад, у разі, коли довжина тріщини становить дві товщини покриття ($\beta = h/a = 1$), збільшення жорсткості покриття вдвічі (за фіксованої жорсткості підкладки) з $g = 5$ до $g = 10$ призводить до зменшення критичної деформації у 1.36 рази. При аналогічному збільшенні жорсткості плівки з $g = 10$ до $g = 20$ критична деформація зменшується в 1.46 рази, а з $g = 50$ до $g = 100$ – у 1.58 рази.

Виходячи з (4.45), можна заключити, що для достатньо коротких міжфазних тріщин у випадку, коли матеріал покриття є жорсткішим ніж матеріал підкладки, такий дефект на межі поділу середовищ може розглядатися як недосконалість інтерфейсу, яка суттєвим чином не впливає на значення критичних параметрів, обрахованих для тіла без дефекту.

Таким чином, задавши певну достатню точність дослідження, для кожного фіксованого значення $g_0 = \mu_2/\mu_1 > 1$ можна визначити таке значення $\beta_0(g_0)$, що для всіх значень $\beta \geq \beta_0(g_0)$ наявність міжфазної тріщини в межі поділу середовищ можна не враховувати (з прийнятною для інженерних розрахунків точністю) при дослідженні задачі про стиск кусково-однорідного тіла вздовж цієї межі. Таким чином, можна вважати, що при $\beta < \beta_0(g_0)$ визначальним при дослідженні механізму втрати стійкості бішару є наявність міжфазної тріщини, а при $\beta \geq \beta_0(g_0)$ – структурна особливість конструкційного матеріалу, що досліджується (наявність плівки покриття). В таблиці 4.4 наведено значення $\beta_0(g_0)$, $g_0 = \mu_2/\mu_1 > 1$ при заданій точності $|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1|/\varepsilon_1^r < 1\%$ для бішару з потенціалом гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

g_0	2	5	10	20	50	100
$\beta_0(g_0)$	3.3	2.3	1.9	1.7	1.3	1

Таблиця 4.4 – Мінімальні значення геометричного параметра β_0 .

Сформульований висновок можна подати і з іншого ракурсу, якщо збільшення параметру $\beta = h/a = 1$ асоціювати зі збільшенням товщини покриття, коли довжина дефекту є сталою.

Так, наприклад, для $g = 20$ збільшення товщини покриття утричі з $\beta = 0.1$ до $\beta = 0.3$ призводить до збільшення ε_1 у 5.1 рази. При наступному збільшенні товщини в 3 рази – до $\beta = 0.9$ – критичні деформації збільшуються ще в 2.3 рази. Подальше збільшення товщини плівки покриття не має інженерного сенсу з точки зору зміцнення такого бішару на стиск: збільшення β з 0.9 до 2.7 призводить до збільшення ε_1 менше ніж у 1.1 рази.

На графіку, наведеному на рис. 4.9, зображено залежності безрозмірного критичного напруження стиску (2.70) $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення відносної товщини плівки $\beta = h/a$. Розглядається випадок пружного потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Характер наведених залежностей є аналогічним характеру залежності $\varepsilon_1(\beta)$. Суцільні криві на рис. 4.10 демонструють залежності значення критичної деформації ε_1 від значення відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1 > 1$ при деяких фіксованих значеннях геометричного параметра $\beta = h/a$. Штрихова крива на цьому рисунку відповідає залежності критичної деформації зморщування ε_1^r від параметра g .

Наведені на рис. 4.10 дані підтверджують узгодженість задач для тіла з дефектом та без нього, а також висновки, що відображені у формулі (4.45) та табл. 4.4.

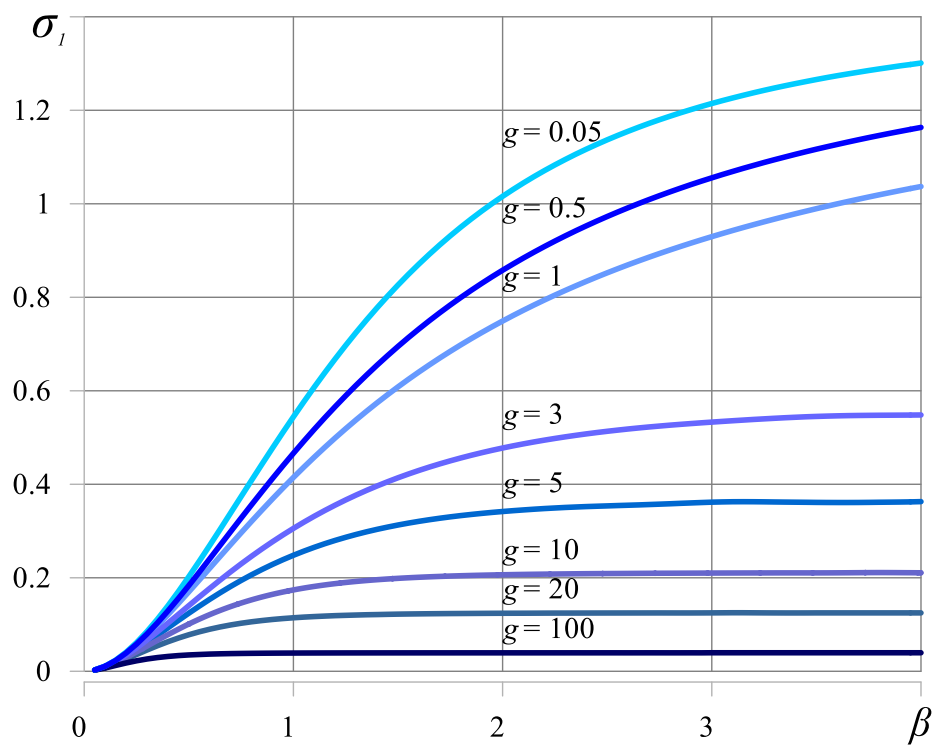


Рис. 4.9 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях g .

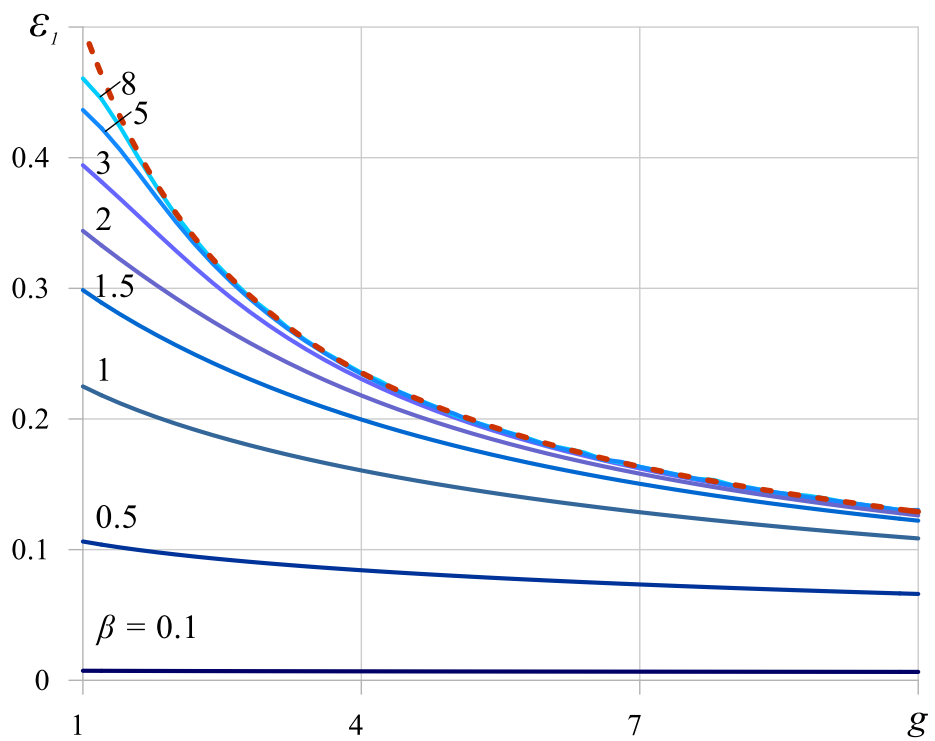


Рис. 4.10 – Залежності $\epsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях β .

4.6.3 Критичні параметри навантаження: потенціал Бартенєва–Хазановича

Результати чисельного дослідження задачі на власні значення (4.38) представлено на графіках, зображених на рис. 4.11, 4.12 для випадку, коли обидва матеріали бішарової системи описуються *потенціалом Бартенєва–Хазановича* (2.72) для нестисливих тіл.

На рис. 4.11 зображено залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної товщини покриття $\beta = h/a$ при деяких значеннях параметра g .

Аналіз даних, наведених на рис. 4.11, показує, що характер наведених залежностей є аналогічним випадку пружного потенціалу гармонічного типу (п. 4.6.1). Так, при збільшенні відносної товщини плівки покриття, має місце наступна асимптотика

$$\varepsilon_1(\beta, g) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1^{hp} = 0.423, & g \leq 1 \\ \varepsilon_1^r(g), & g > 1 \end{cases} \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \quad (4.46)$$

На графіку, наведеному на рис. 4.12, зображено залежності безрозмірного критичного напруження стиску (2.72) $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$ від значення відносної товщини плівки $\beta = h/a$.

Для *потенціалу Бартенєва–Хазановича* залишаються справедливими всі якісні висновки, сформульовані для потенціалу гармонічного типу.

У таблиці 4.5 наведено значення $\beta_0(g_0)$, $g_0 = \mu_2/\mu_1 > 1$ (див. п. 4.6.2) при заданій точності 1% для бішару з *потенціалом Бартенєва–Хазановича*.

g_0	2	3	5	10	20	100
$\beta_0(g_0)$	3.1	2.5	2.2	1.8	1.5	1

Таблиця 4.5 – Мінімальні значення геометричного параметру β_0 .

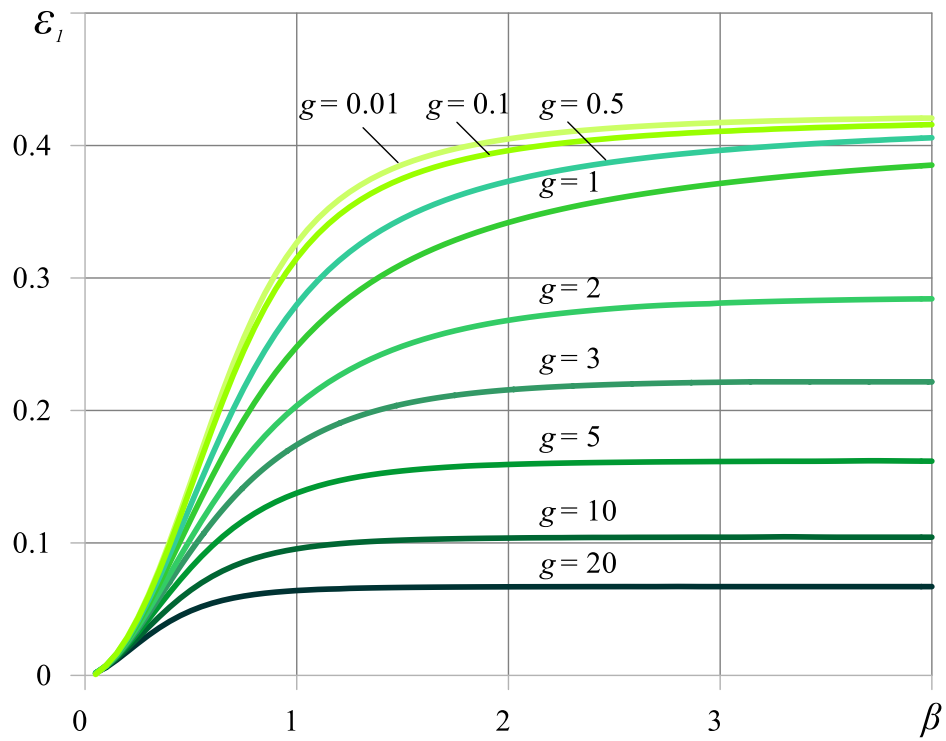


Рис. 4.11 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича при різних значеннях g .

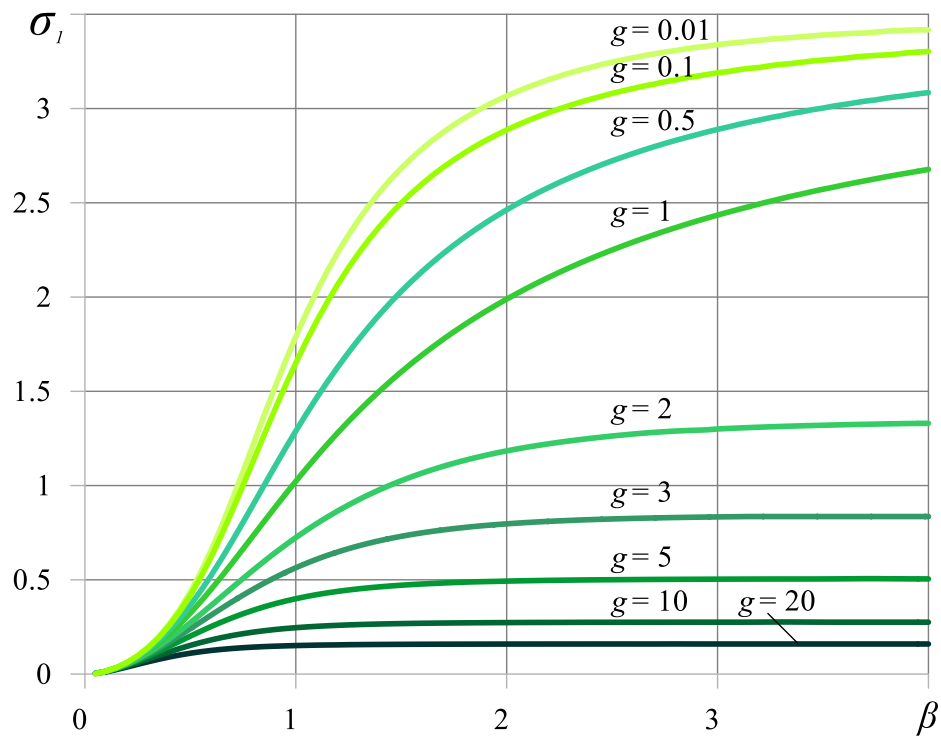


Рис. 4.12 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича при різних значеннях g .

4.6.4 Критичні параметри навантаження: потенціал Трелоара

Результати чисельного дослідження задачі на власні значення (4.38) представлено на графіках, зображених на рис. 4.13 – 4.16, для випадку, коли обидва матеріали бішарової системи описуються *потенціалом Трелоара* (2.73) для нестисливих тіл.

Для пружного *потенціалу Трелоара* залишаються справедливими всі якісні висновки, сформульовані для інших конститутивних моделей гіперпружних тіл (див. пп. 4.6.2, 4.6.3).

На графіках, зображеному на рис. 4.13, побудовано криві залежностей $\varepsilon_1(\beta)$ при різних значеннях відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки g .

Для кривих на рисунку залишається справедливою асимптотика (4.46), при цьому значення деформації, що відповідає втраті стійкості однорідної півплощини з *потенціалу Трелоара* становить [87]

$$\varepsilon_1^{hp} = 0.456. \quad (4.47)$$

На рис. 4.14, 4.15 представлено залежності критичного значення деформації ε_1 від значення параметра g при деяких різних значеннях геометричного параметра β . Штрихова крива на графіку рис. 4.15, який побудовано з використанням логарифмічної шкали, відповідає залежності $\varepsilon_1^r(g)$ – критичної деформації зморщування бішару зі складових з *потенціалом Трелоара*, визначеної в результаті розв'язання трансцендентного рівняння (3.19).

На графіку, наведеному на рис. 4.16, зображено залежності безрозмірного критичного напруження стиску (2.73) $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення $\beta = h/a$.

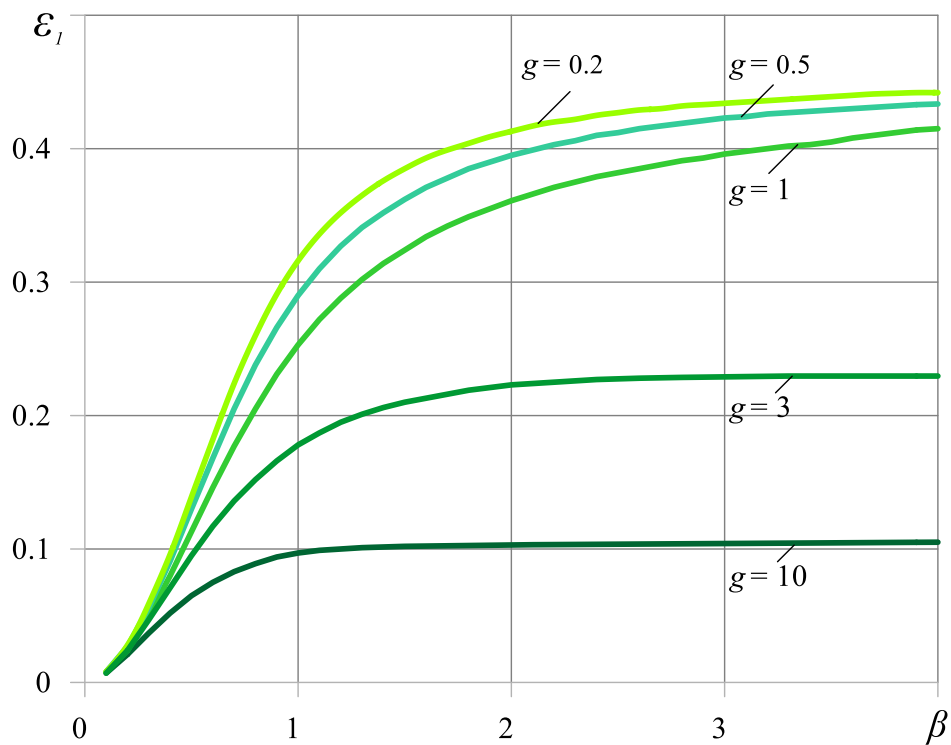


Рис. 4.13 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Трелоара при різних значеннях g .

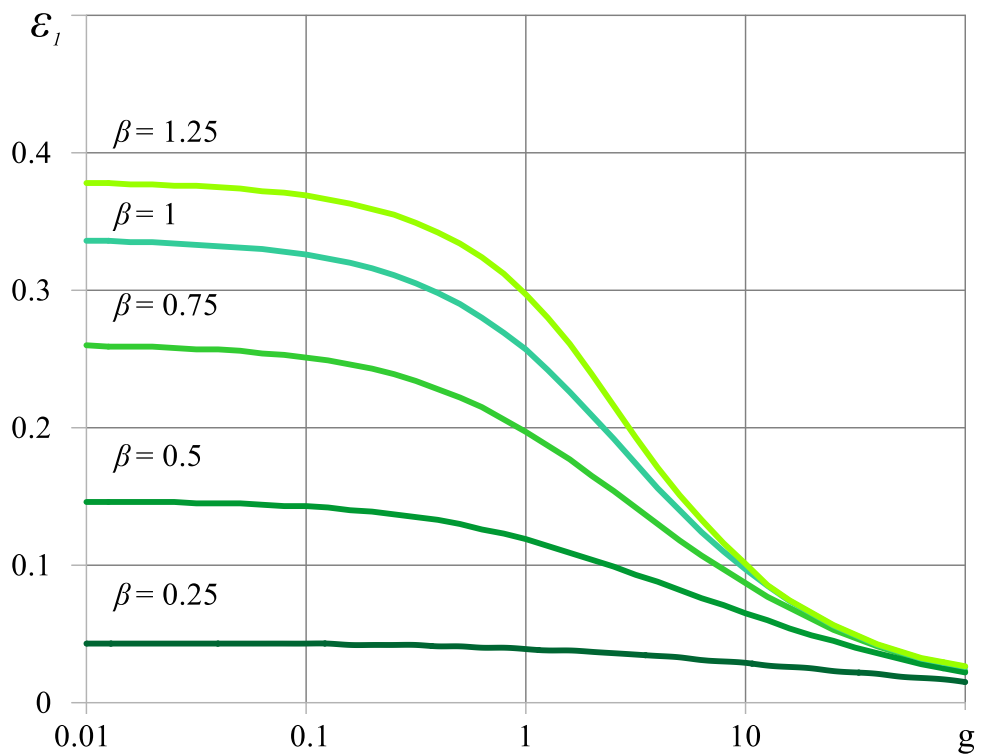


Рис. 4.14 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу Трелоара при різних значеннях β .

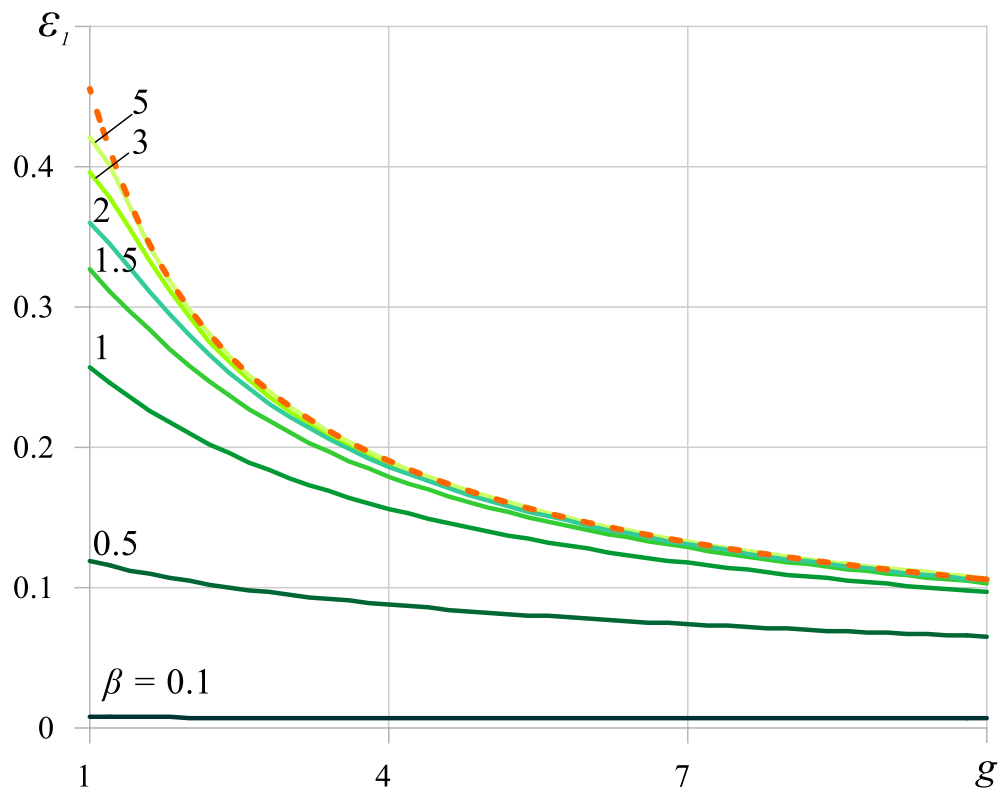


Рис. 4.15 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу Трелоара при різних значеннях β .

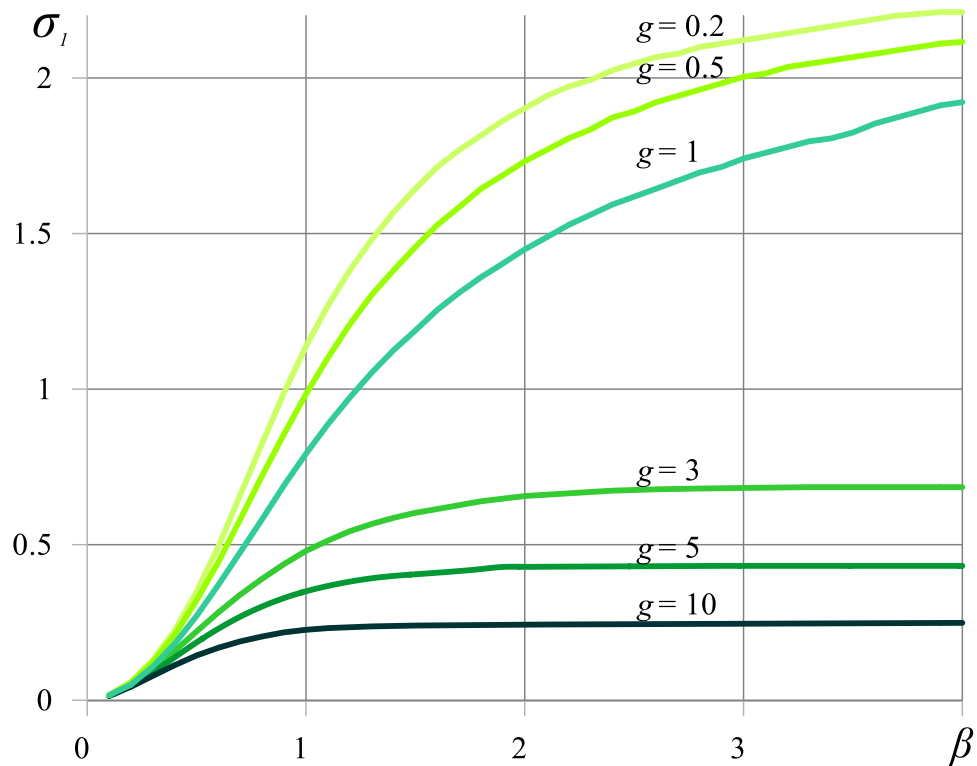


Рис. 4.16 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу Трелоара при різних значеннях g .

4.6.5 Критичні параметри навантаження: квадратичний потенціал

Результати чисельного дослідження задачі на власні значення (4.38) представлено на графіках, зображених на рис. 4.17, 4.18, для випадку, коли обидва матеріали бішарової системи описуються *квадратичним потенціалом* (2.71) у разі малих докритичних деформацій.

Для цього пружного потенціалу також залишаються справедливими всі якісні висновки, сформульовані для інших конститутивних моделей гіперпружних тіл (див. пп. 4.6.2 – 4.6.4).

Рисунок 4.17 презентує залежності $\varepsilon_1(\beta)$ при різних значеннях відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки g для значень коефіцієнтів Пуассона складових бішару $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

На графіку, зображеному на рис. 4.18 побудовано криві $\varepsilon_1(\beta)$ при значенні параметра $g = 2$ для таких різних значень $\nu = \nu_1 = \nu_2$: $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

Дані рис. 4.18 свідчать про те, що критичні деформації, що відповідають втраті стійкості бішарової системи при стиску вздовж міжфазної тріщини, можуть суттєво залежати від стисливості компонентів. У випадку, що розглядаються, указана залежність сягає 20%.

Як видно з графіків, зі збільшенням стисливості складових матеріалів бішару (зі зменшенням значення коефіцієнта Пуассона ν), значення критичних деформацій ε_1 зменшуються.

В наступному пункті на прикладі потенціалу *гармонічного типу* детальніше вивчається залежність критичних параметрів від здатності бішарової системи до стисливості.

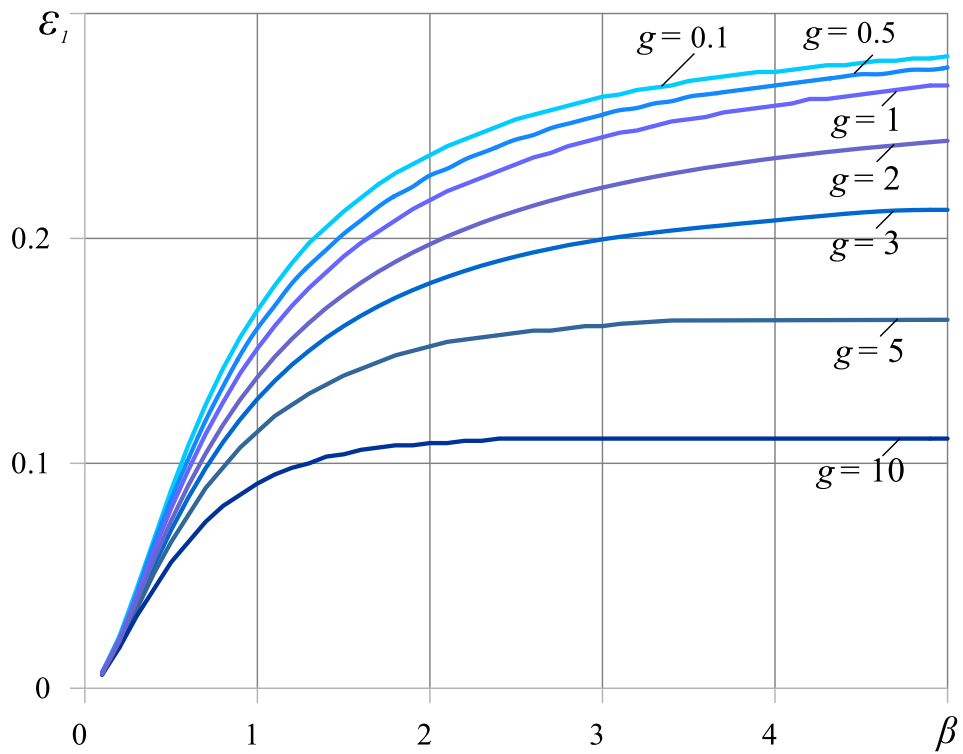


Рис. 4.17 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку квадратичного потенціалу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях g .

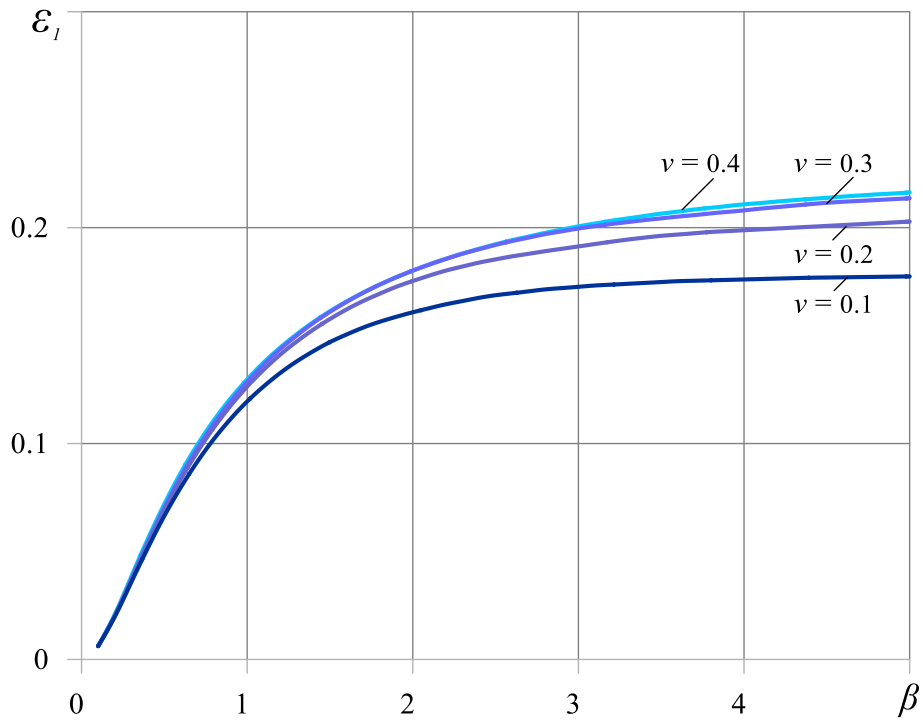


Рис. 4.18 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку квадратичного потенціалу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 3$.

4.6.6 Вплив стисливості на критичні деформації

Дослідимо вплив стисливості бішарової системи на значення критичних параметрів навантаження. Обмежимося розглядом випадку, коли обидва компоненти описуються *потенціалом гармонічного типу* і мають однакову здатність до стисливості, тобто, коли

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu. \quad (4.48)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли жорсткість плівки менша за жорсткість підкладки ($g = \mu_2 / \mu_1 < 1$). Як було показано вище, в цьому разі характер втрати стійкості в бішаровій системі є аналогічним випадку однорідного тіла [21, 116, 185]. Указана аналогія поширюється і на залежність критичних деформацій ε_1 від значення коефіцієнта Пуассона ν при фіксованому значенні параметру жорсткості g .

Як показують дані графіка на рис. 4.19, який презентує залежності $\varepsilon_1(\beta)$ при значенні $g = 0.5$ для різних значень ν , критичні деформації, як і в задачі для однорідного тіла, не залежать від стисливості складових бішару.

Водночас залежність від коефіцієнта ν іншого критичного параметру навантаження – безрозмірного критичного напруження стиску (2.70) $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, – є суттєвою. Відповідні залежності $\sigma_1(\beta)$ представлено на рис. 4.20 для того ж значення відношення жорсткостей $g = 0.5$.

Наведені дані свідчать про те, що зі збільшенням стисливості тіла, величина критичного напруження стиску теж збільшується. У випадку, що розглядається, критичні значення σ_1 , обчислені для значення $\nu = 0.499$, перевищують аналогічні значення для $\nu = 0.001$ в 2 рази для всіх значень відносної товщини покриття $\beta = h / a$.

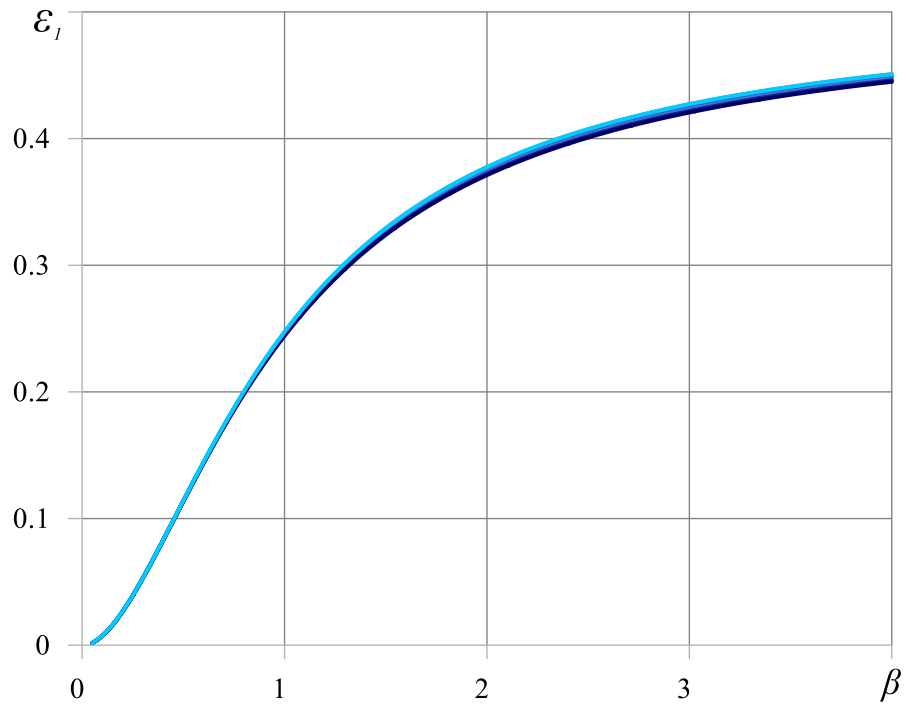


Рис. 4.19 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 0.5$.

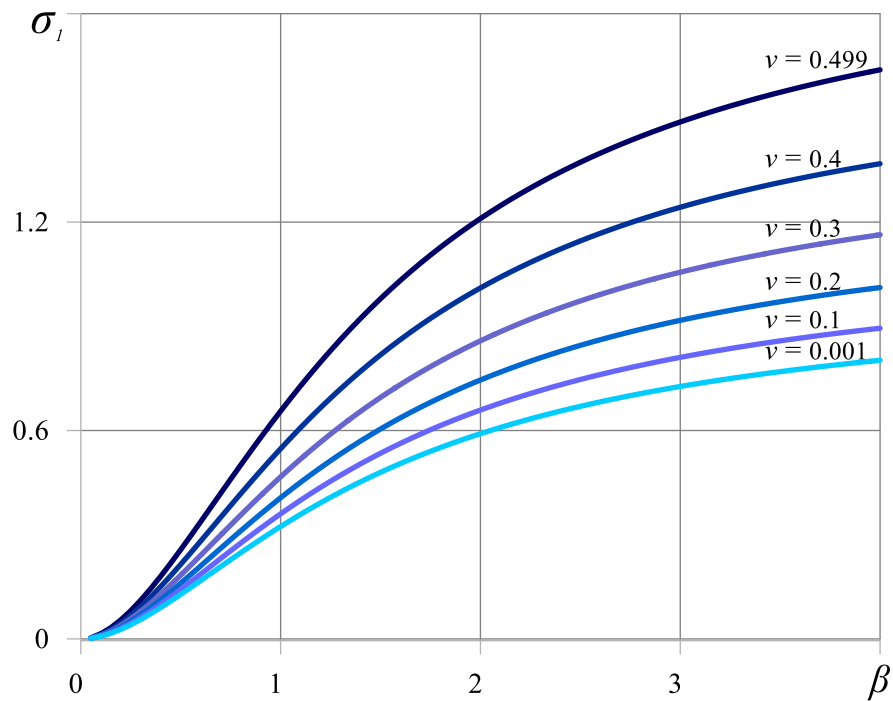


Рис. 4.20 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 0.5$.

Тепер розглянемо випадок, коли жорсткість плівки більша за жорсткість підкладки ($g = \mu_2 / \mu_1 > 1$).

На графіках, зображених на рис. 4.21 – 4.23, побудовано криві $\varepsilon_1(\beta)$ для значень коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.499$ при фіксованих значеннях параметра $g = 2, g = 5$ й $g = 10$, відповідно.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням стисливості матеріалів тіла (зі зменшенням значення ν), значення критичних деформацій збільшуються. Подібний ефект спостерігається і для інших споріднених задач про визначення критичних параметрів втрати стійкості тіл при стиску вздовж тріщин. Наприклад, аналогічна залежність для *потенціалу гармонічного типу* має місце у випадку просторової задачі про стиск півпростору вздовж приповерхневої тріщини [21, 68, 116] або задач про стиск необмеженого тіла вздовж двох паралельних тріщин [21, 116, 137].

На рис. 4.24, 4.25 подано залежності $\varepsilon_1(\nu)$ при різних значеннях геометричного параметра β за фіксованого значення відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = 2$ та $g = 50$, відповідно.

Графік, зображений на рис. 4.26, дає змогу оцінити зміну впливу стисливості бішарової системи на значення критичних деформацій системи зі зміною відносної товщини плівки покриття β . На цьому рисунку для різних значень ν і значення $g = 2$ побудовано криві залежності

$$\delta(\beta) = \varepsilon_1(\beta) \Big|_{\nu_1=\nu_2=\nu} : \varepsilon_1(\beta) \Big|_{\nu_1=\nu_2=0.499} \quad (4.49)$$

критичних значень ε_1 , нормованих на значення цього ж параметра для випадку нестисливого тіла при аналогічних значеннях β і g .

Дані рис. 4.26 свідчать: що більша товщина плівки покриття по відношенню до довжини тріщини, то більший вплив на критичні значення

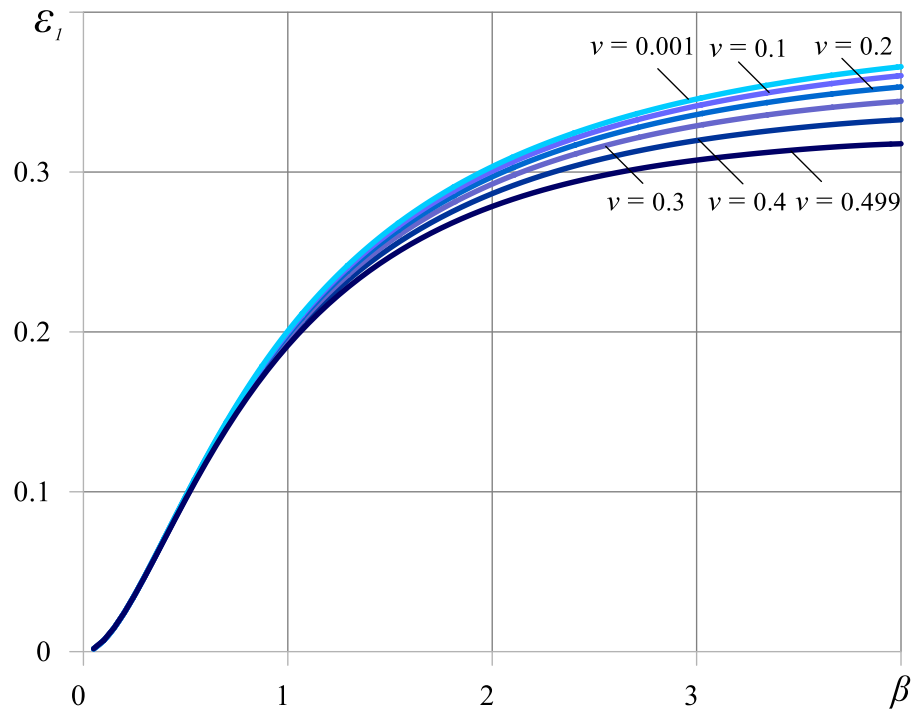


Рис. 4.21 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 2$.

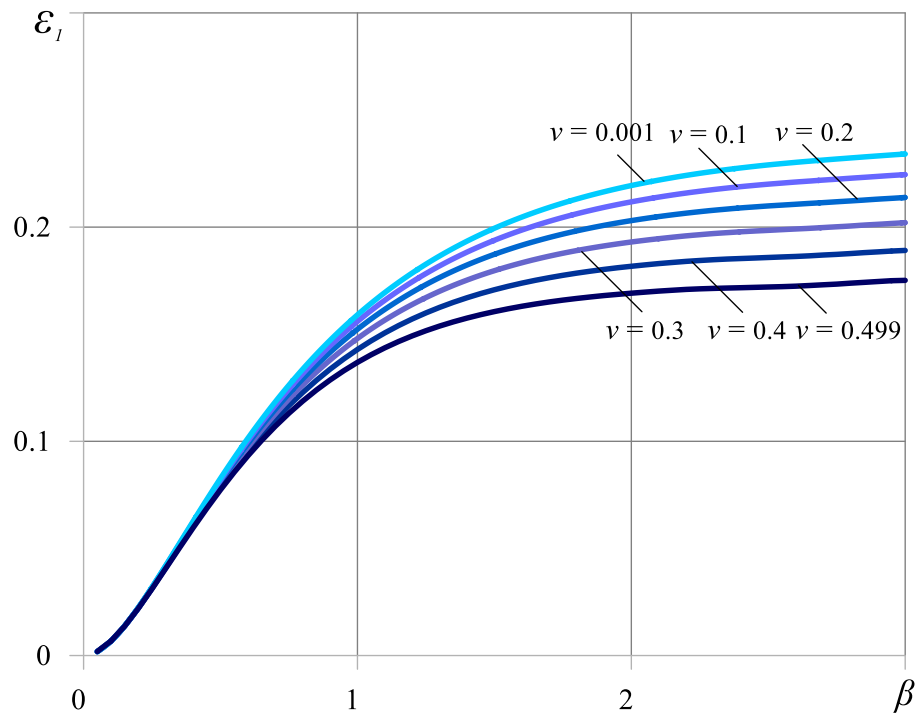


Рис. 4.22 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 5$.

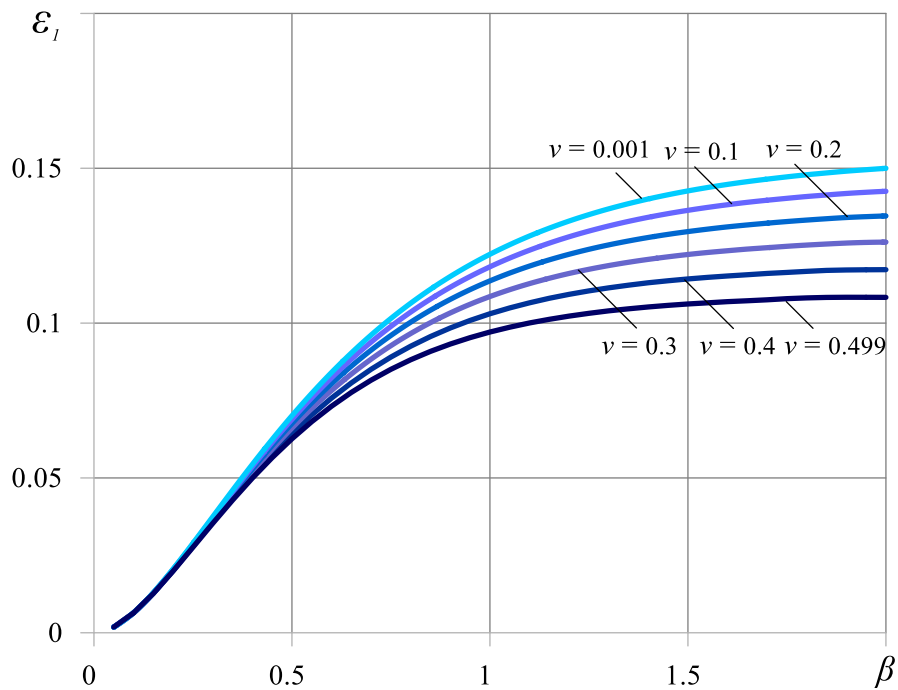


Рис. 4.23 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 10$.

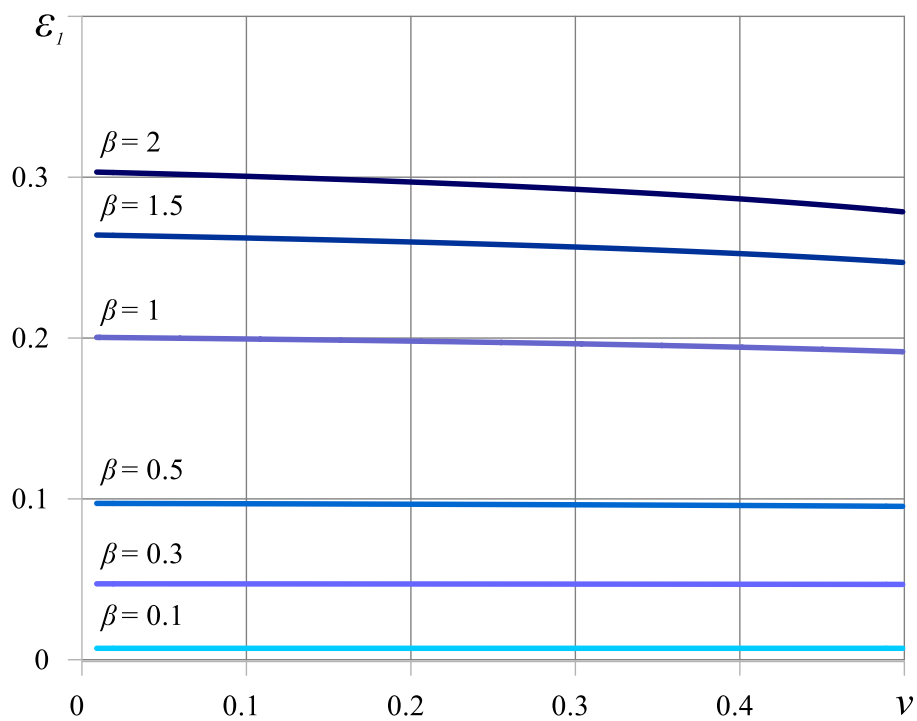


Рис. 4.24 – Залежності $\varepsilon_1(\nu)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних β при $g = 2$.

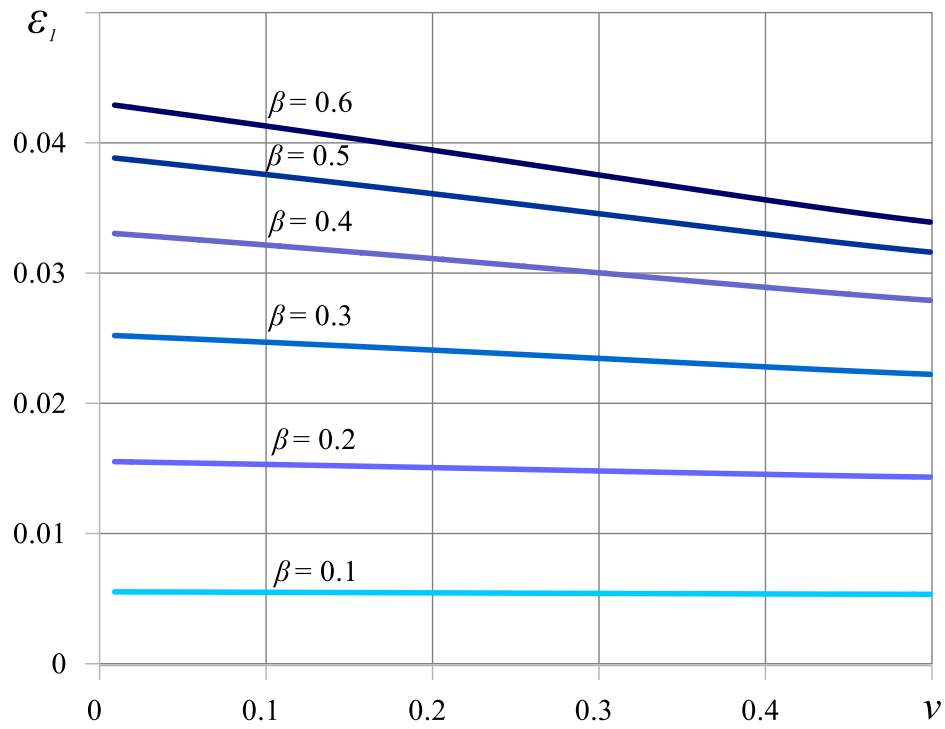


Рис. 4.25 – Залежності $\varepsilon_1(\nu)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних β при $g = 50$.

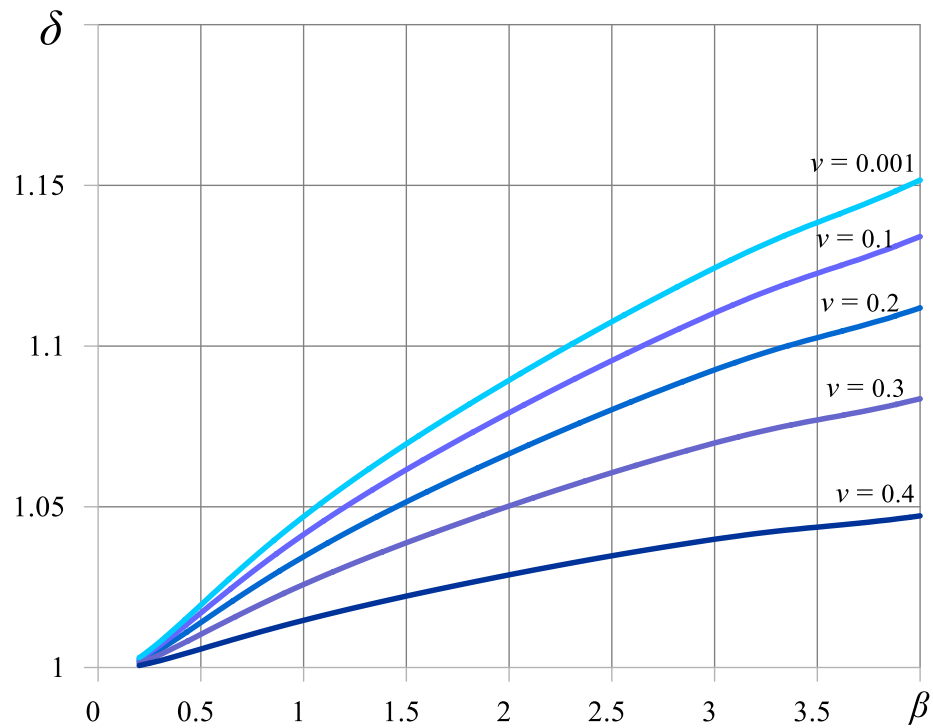


Рис. 4.26 – Залежності $\delta(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 2$.

параметра навантаження ε_1 має стисливість бішарової системи.

Враховуючи сказане, а також асимптотичну поведінку (4.45), приходимо до висновку, що максимальний вплив стисливості на критичні значення ε_1 можна оцінити, користуючись даними рис. 3.13 (п. 3.4.6.).

4.6.7 Втрата стійкості P3HT:PCBM та PEDOT:PSS плівок покриття на PDMS підкладці

На прикладі двох конкретних кусково-однорідних конструкційних матеріалів з покриттям продемонструємо ефективність представленого підходу до визначення критичних деформацій стиску, що відповідають втраті стійкості тонкої плівки на нестисливій підкладці.

Розглянемо випадок, коли нестислива PDMS підкладка вкрита тонкими плівками з матеріалів PEDOT:PSS або P3HT:PCBM. Пружні константи відповідних матеріалів наведено в (3.32) – (3.34) (див. п. 3.4.4).

Нестисливий матеріал підкладки будемо моделювати пружним потенціалом *Трелоара*, а матеріали плівок – *потенціалом гармонічного типу*.

Залежності критичних деформацій ε_1 від значення геометричного параметра $\lg \beta$ зображено суцільними кривими на рис. 4.27, 4.28. При цьому рисунок 4.27 відповідає плівці PEDOT:PSS, а рис. 4.28 – плівці P3HT:PCBM.

Штрихові прямі на рисунках відповідають критичним деформаціям зморщування ε_1^r тонкої плівки, жорстко з'єднаної з напівобмеженою підкладкою, у випадку відсутності дефекту і визначаються з рівняння (3.19).

У випадку значень пружних параметрів (3.32) – (3.34) для комбінації пружних потенціалів, що використовується, значення критичної деформації зморщування для плівки з PEDOT:PSS становить

$$\varepsilon_1^r = 0.007488, \quad (4.50)$$

а для плівки з РЗНТ:PCBM це значення становить

$$\varepsilon_1^r = 0.003165 \quad (4.51)$$

(порівняти з (3.37), (3.38) у випадку використання для обох компонентів пружного потенціалу гармонічного типу).

Як зазначалося у п. 3.5, наближену оцінку значень критичних деформацій зморщування ε_1^* (за відсутності дефекту) можна дати з використанням наближеної формули (3.43). Поклавши для нестисливого матеріалу PDMS $\nu_1 = 0.5$, для плівки PEDOT:PSS з (3.43) отримуємо

$$\varepsilon_1^* = 0.007516, \quad (4.52)$$

а для плівки з РЗНТ:PCBM маємо

$$\varepsilon_1^* = 0.003170. \quad (4.53)$$

Значенням ε_1^* на рис. 4.27 і рис. 4.28 відповідають штрих-пунктирні прямі.

Результати дослідження впливу наявності міжфазного відшарування на значення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості плівки, представлено в таблиці 4.6, де наведено значення

$$\delta = \frac{|\varepsilon_1^r - \varepsilon_1|}{\varepsilon_1^r}$$

для обох комбінацій матеріалів при деяких значеннях параметра $\beta = h/a$.

матеріал плівки	β						
	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
PEDOT:PSS	0.991	0.576	0.202	0.076	0.028	0.013	0.0008
РЗНТ:PCBM	0.978	0.333	0.091	0.019	0.006	0.002	0.0007

Таблиця 4.6 – Кцінка впливу міжфазного відшарування на критичні деформації втрати стійкості плівки для різних значень її відносної товщини.

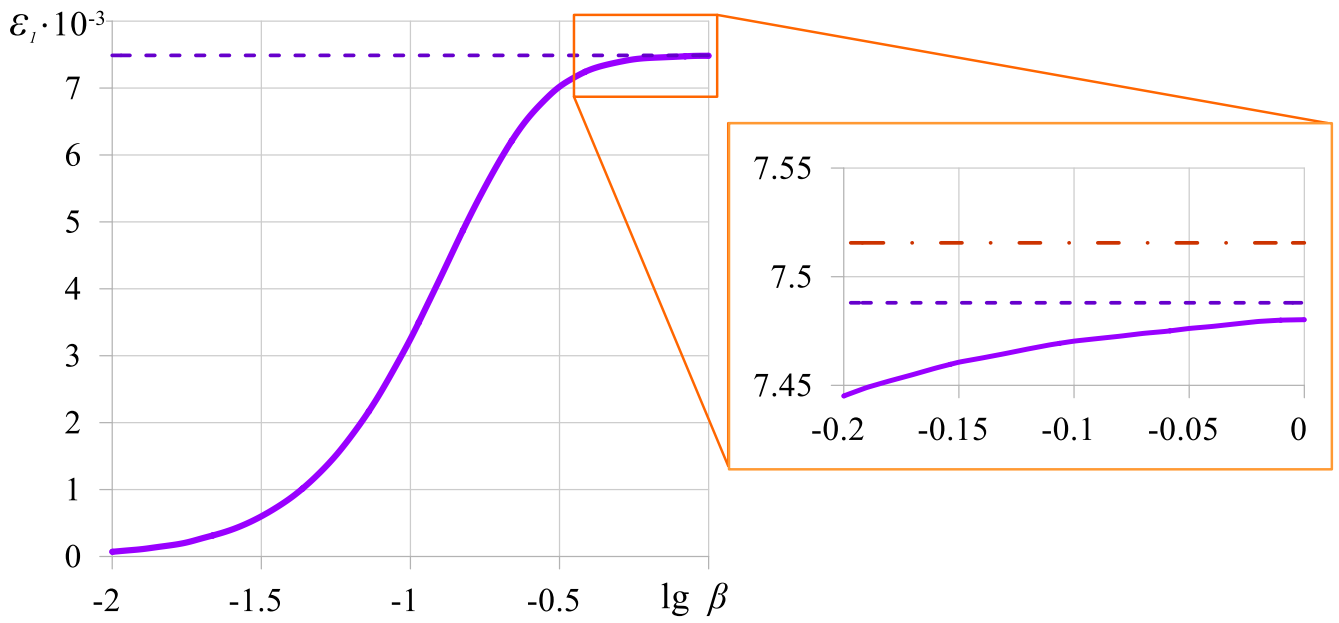


Рис. 4.27 – Критичні деформації втрати стійкості: плівки PEDOT:PSS на підкладці PDMS.

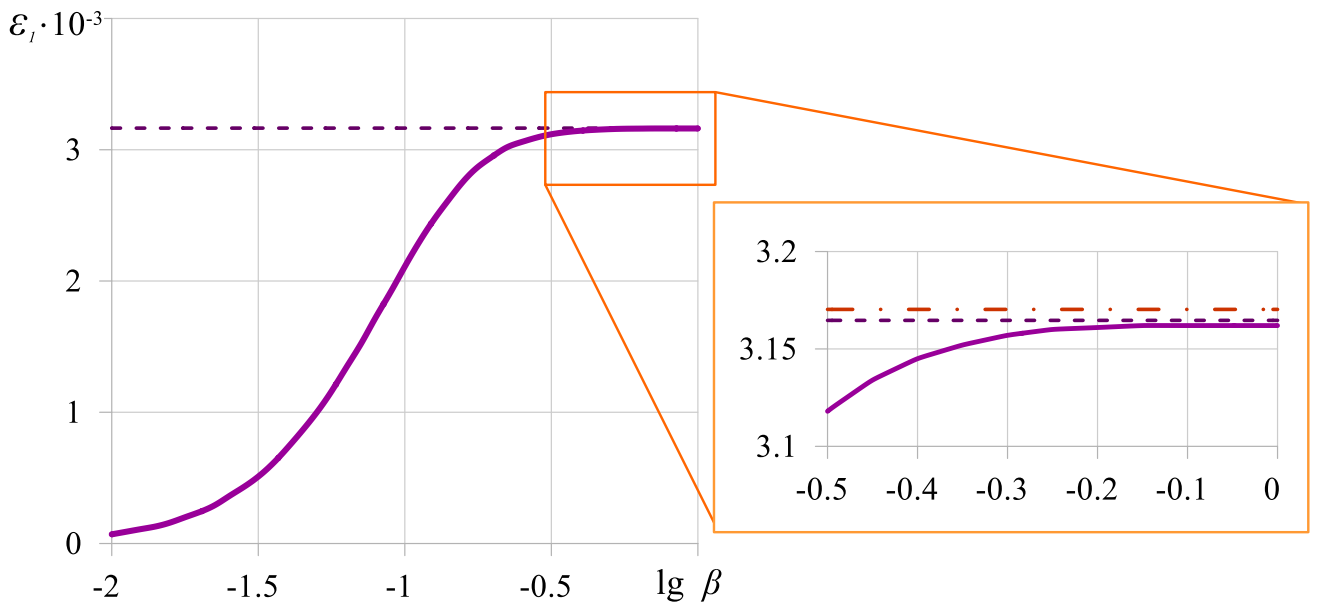


Рис. 4.28 – Критичні деформації втрати стійкості: плівки P3HT:PCBM на підкладці PDMS.

4.7 Взаємодія *wrinkling*- і *buckling*-механізмів втрати стійкості

В цьому параграфі досліджується взаємодія двох різних механізмів втрати стійкості тонкої плівки покриття на більш податливій напівобмеженій підкладці у випадку, коли така система стискається вздовж міжфазної тріщини.

Перший з них відомий в літературі як *wrinkling* («зморщування», рис. 3.1.в). Як вже зазначалося, *wrinkling*-механізм, який проявляється утворенням на поверхні зразка хвилеподібного візерунка, реалізується в першу чергу для бішарових систем без дефектів на межі поділу. Також слід очікувати, що указаний механізм буде домінуючим при втраті стійкості тіла з відносно короткими міжфазними дефектами. В розділі 3 дисертації детально розглянуто питання зморщування бішарів без дефектів, а також представлено аналіз застосовності наближених формул для визначення критичних параметрів втрати стійкості таких кусково-однорідних тіл.

При стиску бішарових систем з достатньо довгими дефектами слід очікувати, що домінуючим механізмом втрати стійкості буде *buckling* («випучування», рис. 4.1).

Нижче, базуючись на результатах чисельного дослідження задачі на власні значення (4.26), (4.27), представлено аналіз застосовності двох наближених підходів з визначення критичних *buckling*-деформацій, а також комплексного теоретичного підходу з визначення критичних деформацій зморщування плівки. Буде показано, що у випадку тріщин (відшарувань) «проміжної» довжини критичні значення деформацій у бішарі є істотно нижчим, ніж це передбачається в рамках комплексного підходу. При цьому отримані результати добре узгоджуються з даними чисельного моделювання, представленими в дослідженнях інших авторів.

4.7.1 «Короткі» відшарування

Залежність значень критичного параметра навантаження ε_1 від геометричного параметра задачі $\beta = h/a$, визначена в результаті чисельного розв'язання задачі (4.26), (4.27) на власні значення у разі матеріалів з *потенціалом гармонічного типу*, подано на рис. 4.29 кривою «1».

Відповідні значення пружних сталих матеріалів системи підкладка/плівка для даних на рис 4.29 є такими:

$$E_2 = 2E_1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3. \quad (4.54)$$

Як свідчать результати, зі збільшенням відносної товщини плівки $\beta = h/a$ (що відповідає зменшенню довжини міжфазного відшарування) вплив дефекту на значення критичних деформацій зменшується.

Суцільна пряма «2» на рис. 4.29 відповідає розв'язку аналогічної задачі без міжфазного дефекту (див. рис. 3.1.а).

Так, в результаті розв'язання трансцендентного рівняння (3.19) для матеріалів з *гармонічним потенціалом* та значенні пружних параметрів (4.54), значення критичної відносного укорочення зморщування становило

$$\varepsilon_1^r = 0.3577.$$

Зауважимо, що в цьому випадку значення критичної деформації, отримане на основі наближеної формули (3.43), становить

$$\varepsilon_1^* = 0.3467$$

і відповідає штриховій прямій «3» на рис. 4.29.

Ще один приклад залежності $\varepsilon_1(\beta)$ представлено кривою «1» на рис 4.30. Значення пружних сталих, відповідних даним рис. 4.30, є наступними:

$$E_2 = 3E_1, \nu_1 = \nu_2 = 0.499. \quad (4.55)$$

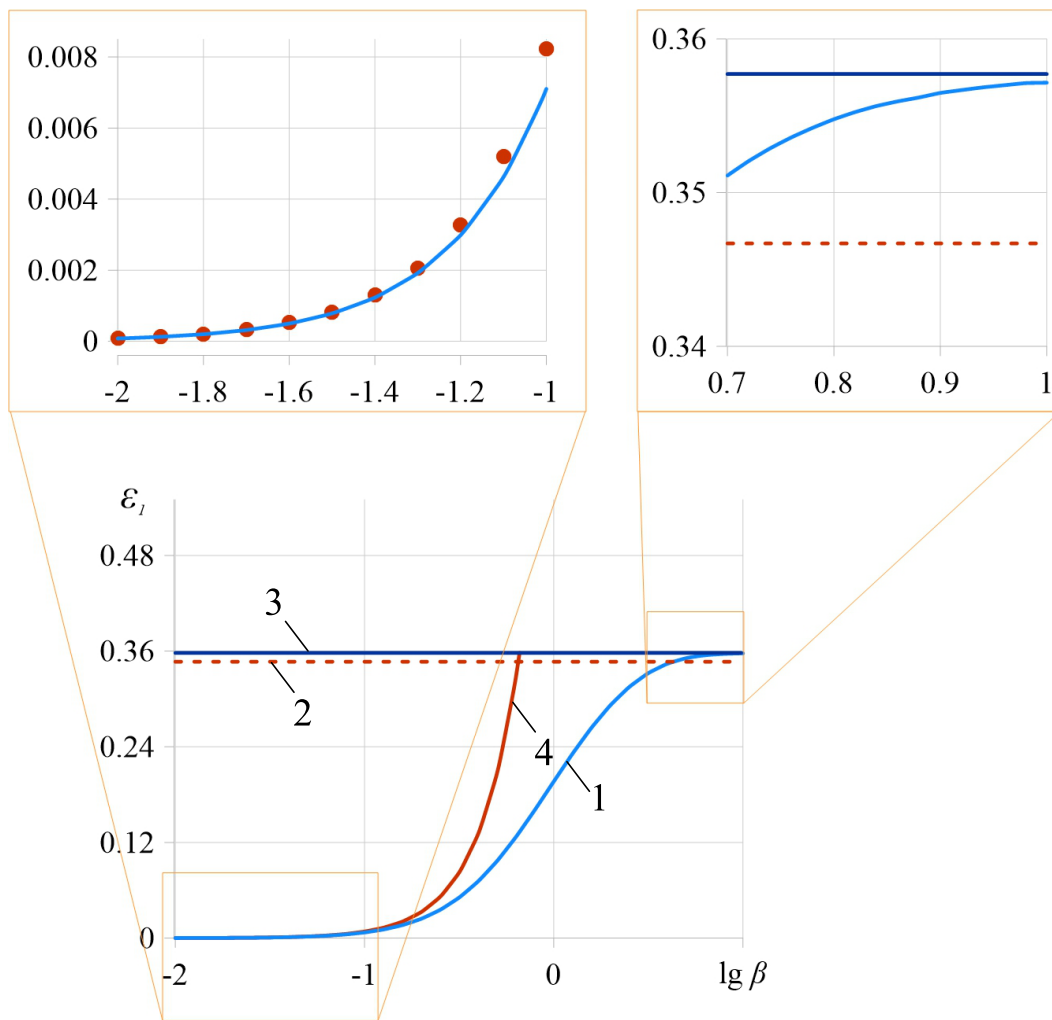


Рис. 4.29 – Критичні деформації втрати стійкості при значенні пружних сталей (4.54).

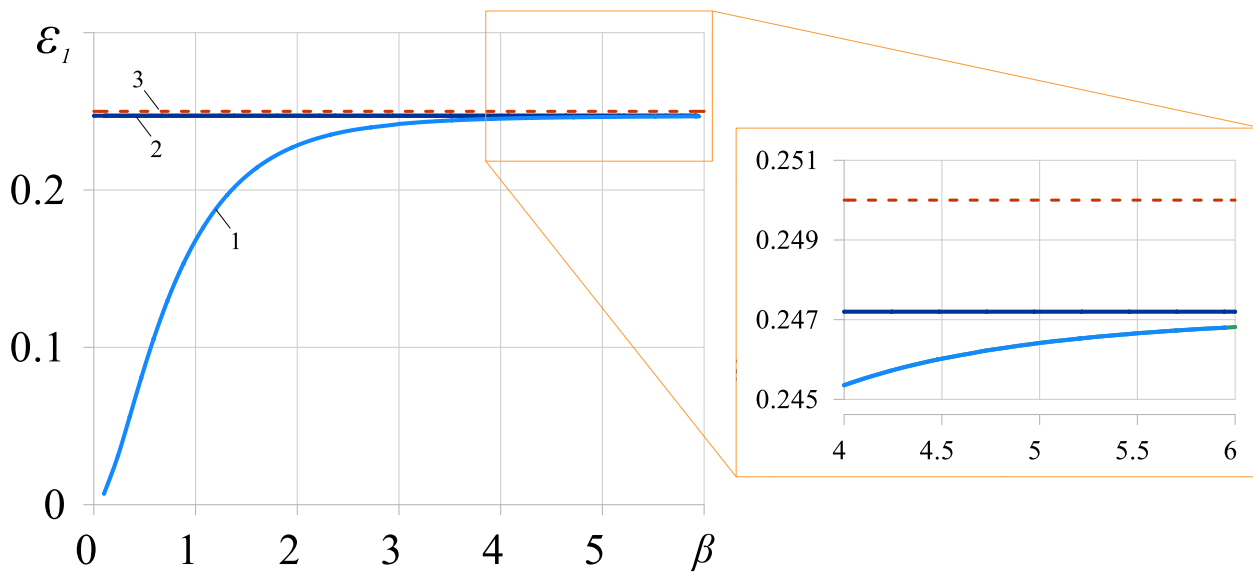


Рис. 4.30 – Критичні деформації втрати стійкості при значенні пружних сталей (4.55).

Суцільна пряма «2» відповідає деформаціям початку зморщування плівки на напівобмеженій підкладці

$$\varepsilon_1^r = 0.2472,$$

а пунктирна пряма «3» – критичним деформаціям, обчисленим за наближеною формулою (3.43)

$$\varepsilon_1^* = 0.25.$$

На рис. 4.31 наведено залежності критичного параметра ε_1 , нормованого до його значень, що відповідають початку зморщування ε_1^r , отриманим на основі розв'язку рівняння (3.43), від значень параметра g для деяких значень геометричного параметра $\beta = h/a$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Використана логарифмічна шкала. Зауважимо, що у разі, коли матеріали бішару мають однакові коефіцієнти Пуассона, значення відношення модулів Юнга та відношення модулів жорсткості цих матеріалів збігаються.

Як свідчать результати, у разі, наприклад, коли плівка жорсткіша за підкладку, значення деформацій початку зморщування перевищують значення критичних деформацій у задачі для тіла з тріщиною не більше ніж на 3% для відшарувань, довжина яких менше становить 0.2 товщини плівки.

Зі сказаного вище випливає, що для *відносно коротких відшарувань* при досягненні деформаціями свого критичного значення домінуючим механізмом поверхневої втрати стійкості системи підкладки/тонка плівка є «зморщування» (рис 3.1.в).

4.7.2 «Довгі» відшарування

Розглянемо тепер відносно довгі розшарування.

У роботах [92, 240] з використанням балкового наближення отримано таку формулу для визначення критичних *buckling*-деформацій початку

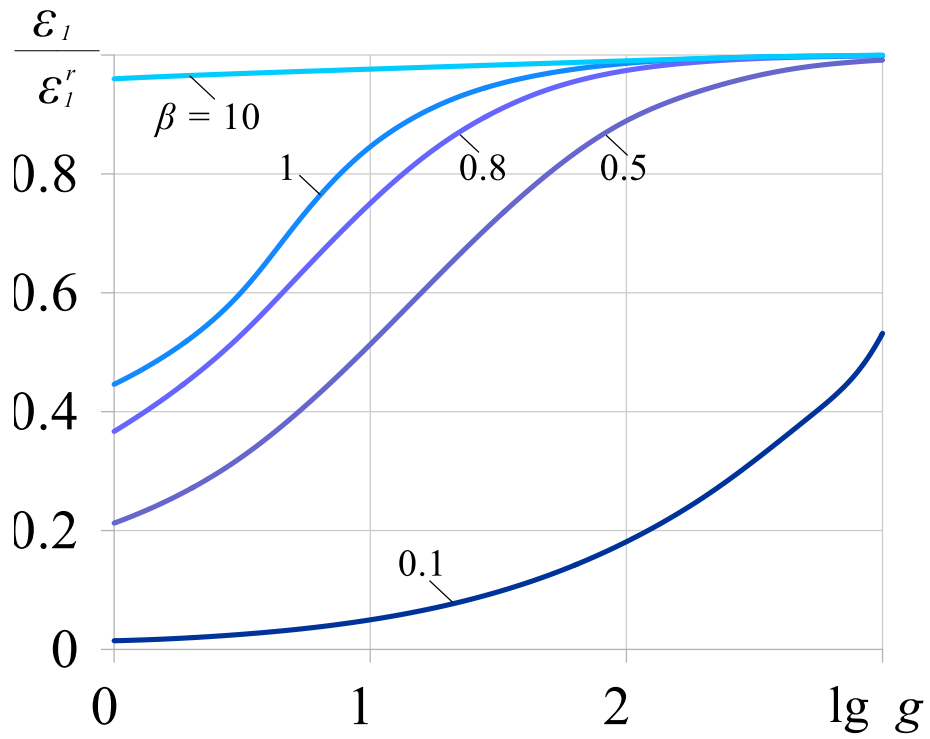


Рис. 4.31 – Залежності $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^r$ від значення параметру g для потенціалу гармонічного типу
($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

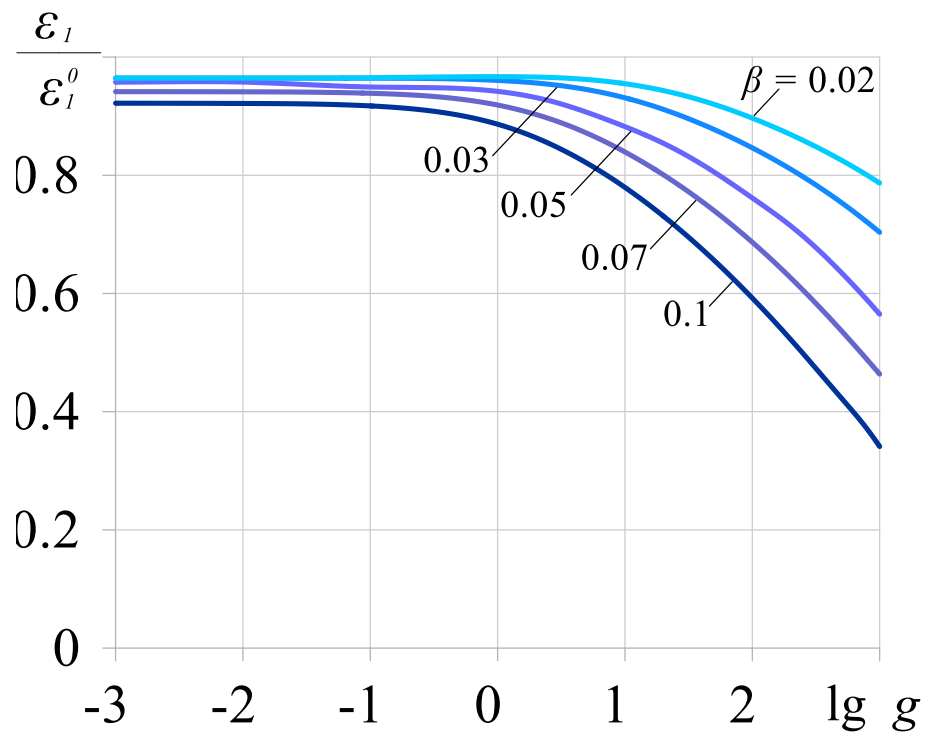


Рис. 4.32 – Залежності $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^0$ від значення параметру g для потенціалу гармонічного типу
($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

випучування частини матеріалу в області над тріщиною:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\pi^2}{12} \beta^2, \quad \beta = \frac{h}{a}. \quad (4.56)$$

Формула (4.56) одержана для лінійно-пружного матеріалу плівки. Частина матеріалу плівки в області відшарування моделювалася балкою, на торцях якої задані умови жорсткого защемлення, а деформацією підкладки нехтували. У зв'язку з останнім припущенням отримані значення критичних деформацій з використанням виразу (4.56) не залежать від пружних параметрів матеріалів системи підкладка/плівка.

На рис. 4.29 червона суцільна крива «4» та круглі маркери відповідають значенням деформацій початку випучування ε_1^0 , отриманим на основі формули (4.56).

Так, для значень відносної товщини плівки $\beta = h/a < 0.1$ результати для значень критичних деформацій, отримані на підставі дослідження системи інтегральних рівнянь (4.26), (4.27), та результати, отримані за допомогою формули (4.56), відрізняються не більше ніж на 10%.

Для значень $\beta = h/a < 0.01$ ця відмінність становить менше 1%. Такі ж значення для оцінки застосування формул балкового наближення у разі стиснення однорідного напівобмеженого тіла вздовж приповерхневої дископодібної тріщини отримано в [79, 110].

Зі сказаного вище робимо висновок, що для *відносно довгих відшарувань* при досягненні деформацій своїх критичних значень домінуючим механізмом поверхневої нестійкості системи підкладка/тонка плівка є «випучування».

Вивчимо межі застосування наближеної формули (4.56), для відшарування з геометричним параметром $\beta \leq 0.1$.

На рис. 4.32 подано залежності критичних значень ε_1 , нормованих до значень деформацій початку випучування ε_1^0 , отриманих на основі формули (4.56), від значень параметра g . Розглянуто випадки $\beta = 0.02; 0.03; 0.05; 0.07; 0.1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Результати показують, що формула (4.56) працює тим краще, чим довшим є розшарування і чим жорсткішою є підкладка щодо плівки покриття. Крім того, коли підкладка істотно жорсткіша за плівку ($g \leq 0.1$), то критичні значення ε_1 (як і значення ε_1^0) практично не залежать від відношення модулів Юнга, що підтверджується результатами роботи [240].

Також у роботі [240] як граничне значення відношення модулів Юнга, при якому наближена формула (4.56) застосовна, вказується значення $g = 3$. Інакше кажучи, передбачається, що за відношення модулів Юнга $g < 3$ деформацією підкладки при визначенні критичних значень *buckling*-деформацій можна знехтувати. Цей факт підтверджується і даними рис. 4.32, згідно з якими критичні значення ε_1 відрізняються від значень ε_1^0 для відшарування $\beta \leq 0.1$ не більше ніж на 15%, коли $g < 3$.

На графіку, поданому на рис. 4.33, у разі відносно довгих відшарувань ($\beta \leq 0.05$) представлено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для деяких значень відношення модулів Юнга $g \leq 2$.

Криві на графіку представлено для випадку потенціалу *гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Обчислення для інших пружних потенціалів показують, що для зазначених довжин відшарування при таких малих деформаціях, значення критичного параметра ε_1 практично не залежать ні від стисливості компонентів, ні від виду їхньої конститутивної моделі. Пунктирна крива на

цьому рисунку відповідає значенням критичних деформацій випучування ε_1^0 , отриманим за формулою (4.56).

У таблиці 4.7 у разі, коли геометричний параметр набуває значення $\beta = 0.03$, для низки значень відношення модулів Юнга $g = E_2/E_1$ подано величини

$$\delta = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0|}{\varepsilon_1^0} \cdot 100\%,$$

які визначають відносну розбіжність критичних значень параметра ε_1 , визначених з (4.26), (4.27), та значення $\varepsilon_1^0 = 7.0481 \cdot 10^{-4}$, отриманого з використанням формули (4.56).

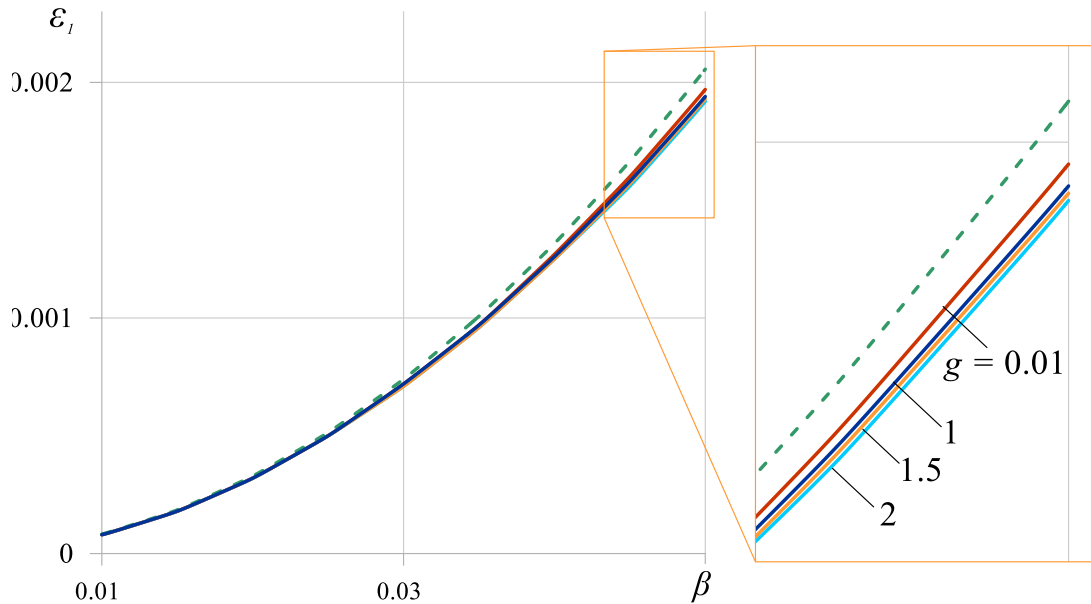


Рис. 4.33 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях параметру g (суцільні криві) та залежність $\varepsilon_1^0(\beta)$ (штрихова крива).

$g = E_2/E_1$	0.001	0.01	0.1	1	3	10	50
$\delta, \%$	3.55	3.56	3.58	3.95	4.78	6.90	12.25

Таблиця 4.7 – Оцінка точності формули (4.56) при $\beta = 0.03$.

4.7.3 Взаємодія механізмів втрати стійкості

У разі міжфазних *відшарувань* «середньої» (проміжної) довжини жодна з наближених формул (3.43), (4.56) не дає задовільної оцінки критичних відносних укорочень в бішаровій системі, які відповідають втраті стійкості при стиску. У випадку значення пружних параметрів (4.54) (рис. 4.28) під розшаруваннями «середньої» довжини можна розуміти ті, для яких $0.1 \leq \beta \leq 5$. Можна припустити, що для таких розшарувань механізм втрати стійкості не має характеру чистого *buckling* або *wrinkling*, але є результатом їхньої взаємодії. Про можливість «співіснування» цих механізмів втрати стійкості також повідомлялося і в літературі [172, 173, 189, 218].

Проаналізуємо застосовність наближених підходів з метою оцінки критичних деформацій задачі, що розглядається, у разі значень пружних параметрів, що даються виразами (4.55), на підставі результатів роботи [107].

У [240] із застосуванням *геометрично* нелінійної теорії пластин von Kármán було отримано наступне трансцендентне рівняння для визначення критичних *buckling*-деформацій ε_b , що дозволяє, на відміну від формули (4.56), враховувати податливість підкладки:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_b}} \tan \left(\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_1^0}} \right) = \frac{\pi}{12} \beta \left(\frac{A_{12}^2}{A_{11} + 1} - A_{22} \right). \quad (4.57)$$

У рівнянні (4.57) ε_1^0 визначається з рівняння (4.56); коефіцієнти A_{11} , A_{12} , A_{22} визначаються з чисельного розв'язання деяких інтегральних рівнянь і залежать від параметрів пружної невідповідності α_D , β_D (параметри Дундурса) [107]

$$\alpha_D = \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_1}{\bar{E}_2 + \bar{E}_1}, \quad \beta_D = \frac{\bar{E}_2(1 - \nu_2)(1 - 2\nu_1) - \bar{E}_2(1 - \nu_1)(1 - 2\nu_2)}{2 \left[\bar{E}_2(1 - \nu_2)(1 - 2\nu_1) + \bar{E}_2(1 - \nu_1)(1 - 2\nu_2) \right]}, \quad \bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \nu_{1,2}^2}$$

та геометричного параметра $\beta = h/a$.

У згаданій роботі [107] та ряді інших сучасних публікацій (див., наприклад, [173]) пропонується наступний комплексний теоретичний підхід для визначення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості тонкої плівки, жорстко з'єднаної з напівобмеженою підкладкою, за наявності тріщини (розшарування) на межі поділу середовищ.

Для відносно довгих відшарувань критичні деформації визначаються з рівняння (4.57), поки при зменшенні довжини відшарування, що відповідає збільшенню критичних деформацій, ці деформації не досягнуть значень критичних деформацій зморщування, які обчислюються за наближеними формулами (3.41) або (3.43) при деякому значенні $\beta = \beta_T$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_1^* \text{ при } \beta = \beta_T. \quad (4.58)$$

За подальшого зменшення довжини відшарування користуються формулами (3.41) або (3.43).

Зазначений підхід був застосований у [107] для наступних значень параметрів Дундурса:

$$\alpha_D = 0.5, \beta_D = 0,$$

що практично відповідає досліджуваному випадку (4.55).

На рис. 4.34 представлено такі дані для зазначеного випадку. Червона суцільна пряма «1» відповідає значенням критичних деформацій зморщування (ε_1^*), отриманим за формулою (3.43). Червона штрихова крива «2» відповідає значенням критичних деформацій випучування (ε_b), отриманим з рівняння (4.57) при зазначених значеннях параметрів пружної невідповідності. Ця крива побудована в результаті числової реконструкції даних роботи [107] (рис. 4.a цієї публікації).

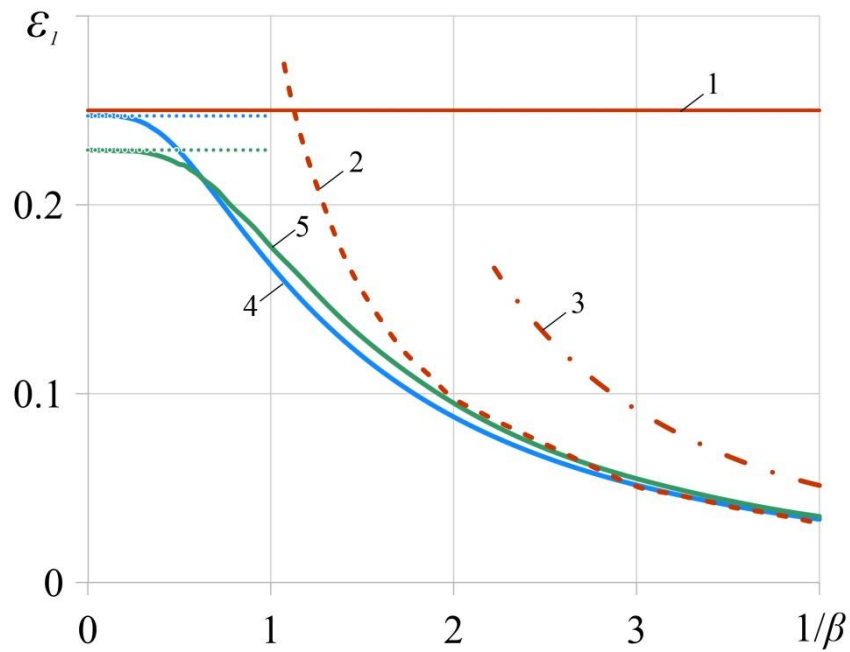


Рис. 4.34 – Порівняння з результатами комплексного наближеного підходу для $g = 3, \nu_1 = \nu_2 = 0.5$.

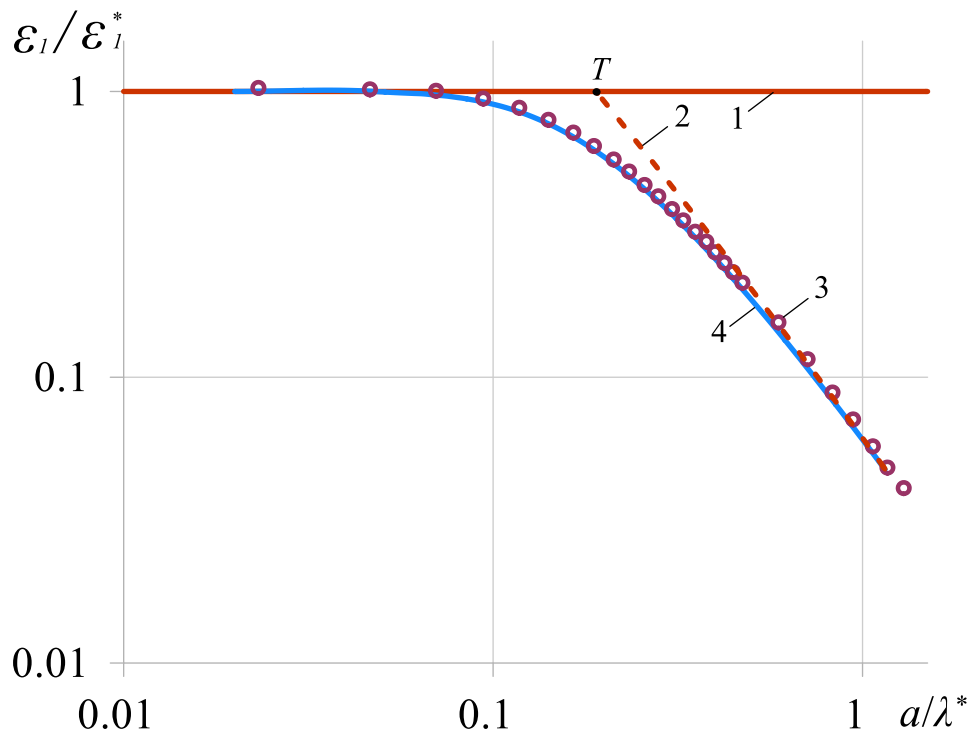


Рис. 4.35 – Порівняння з результатами комплексного наближеного підходу для $g = 1000, \nu_1 = \nu_2 = 1/3$.

Червона штрих-пунктирна крива «3» на рис. 4.34 відповідає значенням деформацій ε_1^0 , отриманим за наближеною формулою (4.56).

Блакитна крива «4» на рис. 4.34 відповідає критичним значенням ε_1 , отриманим з розв'язання задачі на власні значення (4.26), (4.27) у випадку (4.55) для бішару з компонентами пружного потенціалу гармонічного типу і відповідає кривій «1» на рис. 4.28.

Зелена крива «5» на рис. 4.34 відповідає бішару із двох нестисливих неогуківських матеріалів (пружний потенціал Трелоара) з аналогічним відношенням жорсткостей. У разі комбінації двох таких матеріалів критичне значення ε_1 , що відповідає початку утворення зморшок, визначене з рівняння (3.19), становить

$$\varepsilon_1^r = 0.229.$$

Значення, що відповідають величинам ε_1^r , для кожного варіанту бішару подано на 4.34 фрагментами точкових кривих.

Точка T на графіці відповідає формулі (4.58).

Отримані результати свідчать про те, що сформульований вище комплексний теоретичний підхід не дає хорошої оцінки для відшарувань середньої довжини, для яких втрата стійкості при стисканні відбувається, очевидно, за змішаним механізмом. Наприклад, при значенні $\beta = 1$, тобто коли довжина відшарування становить дві товщини плівки покриття, значення ε_1 , отримані в дисертаційній роботі для компонентів з гармонічного матеріалу, на 33% менше значень, отриманих в межах наближеного підходу. Для бішару з неогуківських компонент це відмінність становить 29%.

При цьому для «довгих» відшарувань значення критичних деформацій, отримані з рівняння (4.57), безумовно, дають набагато кращу оцінку критичних значень, отриманих з задачі (4.26), (4.27) ніж значення (4.56).

4.7.4 Малі деформації

У класичній теорії пружності деформації (в інженерному розумінні) прийнято вважати малими, якщо вони не перевищують значень $\sim 1-2\%$. Для широкого класу матеріалів у разі таких деформацій для дослідження різних аспектів деформування твердого тіла застосовується лінійно-пружна модель, яка ґрунтується на законі Гука. Усі наближені формули, згадані у цій роботі, а саме (3.41) – (3.44), (4.56), (4.57), отримані для таких фізично лінійних тіл.

При перевищенні цього порога деформації відносять до скінченних (великих) і застосування моделі лінійно-пружного тіла вже не завжди є виправданим. Зокрема, великі деформації можуть виникати при втраті стійкості тонкої плівки на товстій підкладці, особливо якщо матеріали такого бішару мають порівняну жорсткість ($g \lesssim 10$), а відшарування на інтерфейсі або коротке, або відсутнє.

Попри це, формули (3.41) – (3.44) для визначення критичних деформацій початку зморщування в деяких випадках [87], в першу чергу для нестисливих і слабо стисливих тонкоплівкових систем, можуть давати досить хорошу оцінку цих значень, отриманих із застосуванням моделі нелінійно-пружного тіла, навіть у разі великих критичних деформацій.

Наближена формула (4.56), як було показано, застосовна лише для «довгих» відшарувань, яким відповідають малі значення критичних деформацій (див. рис. 4.32). Отже, похибки, що виникають при її використанні, зумовлені переважно спрощеннями, пов'язаними з геометрично лінійною постановкою задачі на основі теорії балок та нехтуванням податливістю підкладки.

Рівняння (4.57) також отримано в рамках балкового наближення, але вже із залученням геометрично нелінійної теорії без зазначеного припущення.

При тому, що компоненти тіла, як і раніше, вважаються лінійно-пружними, із рис. 4.34 видно, що навіть за значення геометричного параметра $\beta = 0.5$, якому відповідають критичні деформації порядку 10% ($\varepsilon_b = 0.098$, $\varepsilon_1 = 0.095; 0.088$), рівняння (4.57) дає прийнятну оцінку критичних значень ε_1 . Однак при подальшому збільшенні β точність викладеного вище теоретичного підходу знижується, і для $0.6 \leq \beta \leq 5$ цей підхід, як і рівняння (4.57) зокрема, стають непридатними. Питання про те, пов'язана ця похибка зі спрощеннями балкової моделі чи з обмеженнями лінійної пружності, залишається відкритим.

У роботі [173] критичні значення параметрів нестійкості плівки на податливій підкладці визначалися для випадку

$$E_2/E_1 = 1000, \nu_1 = \nu_2 = 1/3 \quad (4.59)$$

із застосуванням скінченно-елементного аналізу. Використана модель лінійно-пружних матеріалів для складових бішарової системи у даному разі повністю виправдана, враховуючи величину критичних деформацій початку зморщування за формулою (3.43)

$$\varepsilon_1^* = 0.00543. \quad (4.60)$$

При цьому аналогічне значення, обчислене методами роботи з використанням рівняння (3.19) для комбінації матеріалів з пружним потенціалом гармонічного типу становило

$$\varepsilon_1^r = 0.00555.$$

На рис. 4.35 (обидві логарифмічні шкали) представлено залежності критичного значення ε_1 від півдовжини відшарування a для випадку (4.59), нормовані, відповідно, до значень критичної деформації зморщування (4.60) і

до критичної довжини хвилі (утвореного на поверхні тіла патерну), що визначається за формулою (3.44).

Червона суцільна пряма «1» на рис 4.35 відповідає значенням критичних деформацій зморщування (ε_1^*). Червона штрихова крива «2» відповідає значенням критичних деформацій випучування (ε_b), отриманим з рівняння (4.57) у випадку (4.59). Круглі маркери задають криву «3», побудовану авторами [173] із застосуванням методу скінченних елементів (подано числову реконструкцію даних роботи [173] (рис. 8 цієї публікації)). Зрештою, блакитна суцільна крива «4» побудована в результаті розв'язання задачі на власні значення (4.26), (4.27) для бішару зі складових із пружним потенціалом гармонічного типу.

Дані графіка рис. 4.35 свідчать про хорошу узгодженість із результатами чисельного експерименту [173]. Відмінність же результатів від наближеного теоретичного підходу для відшарування «середньої довжини» (такими в даному випадку можна вважати відшарування для яких $0.06 \leq \beta \leq 0.25$) залишається суттєвим і, наприклад, для $\beta = 0.1$ складає 30%.

Укладаємо, що не тільки при великих, але і при малих деформаціях існує область значень відносної довжини міжфазного дефекту, при яких ні формула описані наближені підходи не забезпечують прийнятної точності. Тому, для відшарувань такої проміжної довжини не можна нехтувати як внеском механізму *buckling*, так і внеском механізму *wrinkling* при визначенні критичних параметрів навантаження.

4.8 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій втрати стійкості

З рис. 4.34 видно, що тип пружних потенціалів, якими описуються складові компоненти бішарової системи, може істотно впливати на значення

критичних параметрів навантаження. Цей вплив слід очікувати тим більшим, що вищі критичні значення деформацій.

На рис. 4.36 – 4.39 зображено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для різних варіантів комбінацій пружних потенціалів.

На рис. 4.36, 4.37 наведено результати дослідження для випадку, коли компоненти бішару є нестисливими і описуються *потенціалом Трелоара* чи *потенціалом Бартенєва–Хазановича*. Розглянуто всі чотири можливі випадки комбінацій цих пружних потенціалів.

Рис. 4.36 відповідає випадку $g = 1.5$, рис. 4.37 – випадку $g = 4$. Позначення для кривих на рисунках наведено в табл. 3.5.

Результати дослідження демонструють, що у разі більш жорстких плівок покриття, залежність ε_1 від геометричного параметра β більшою мірою визначається структурою пружного потенціалу напівобмеженого матеріалу підкладки. При цьому при значенні параметра $g = 1.5$ вплив структури потенціалу становить близько 13%, а при $g = 4$ – не перевищує 3%.

На рис. 4.38 у випадках $g = 20; 50; 100$ порівняно результати дослідження для стисливих бішарів ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), коли обидва матеріали тіла описуються *квадратичним потенціалом* (сині криві) або *потенціалом гармонічного типу* (блакитні криві).

Рис. 4.39 присвячений випадку, коли нестислива підкладка покрита стисливою плівкою. Відношення жорсткостей становить $g = 2.5$. Плівка описується пружним *потенціалом гармонічного типу* ($\nu_2 = 0.3$), а підкладка – *потенціалом Трелоара* (крива «1»), *потенціалом Бартенєва – Хазановича*

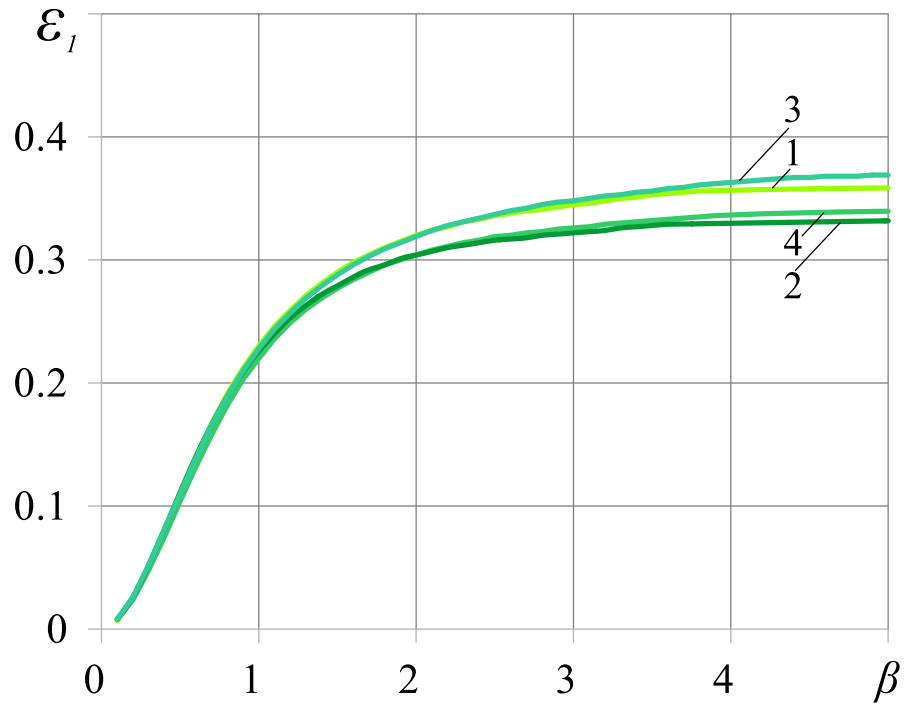


Рис. 4.36 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β при $g = 1.5$ для різних моделей нестисливих тіл.

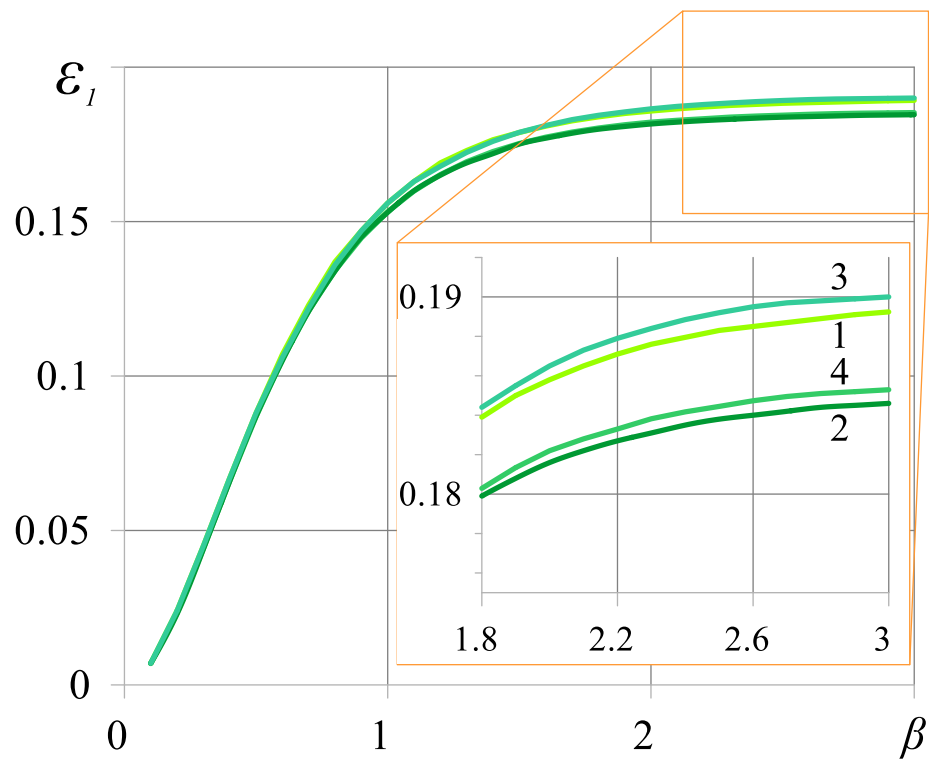


Рис. 4.37 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β при $g = 4$ для різних моделей нестисливих тіл.

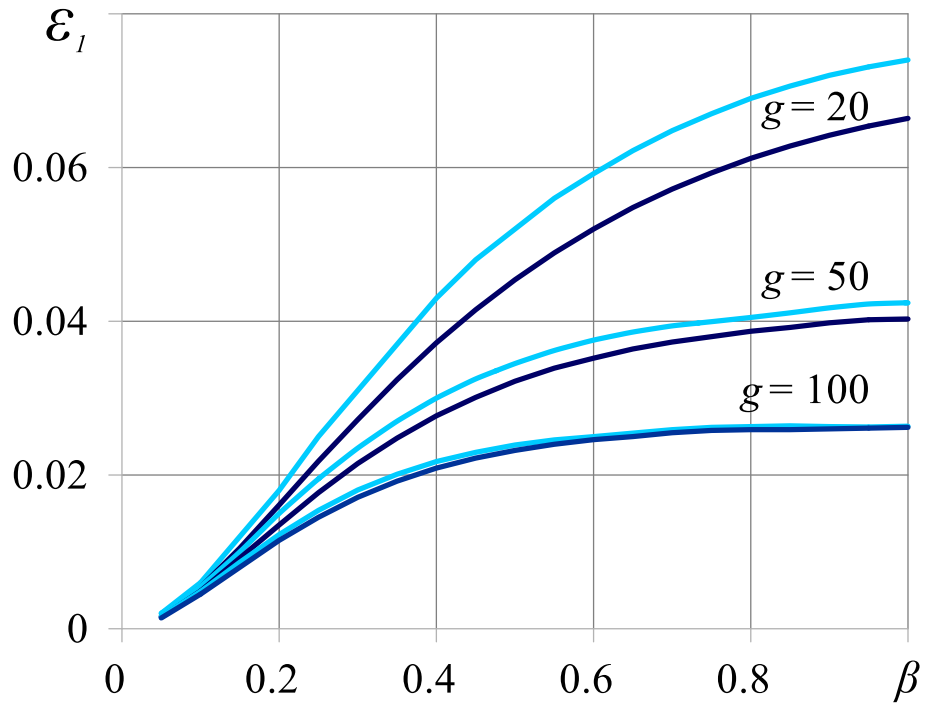


Рис. 4.38 – залежність критичної деформації ε_1 від параметру β для двох моделей стисливих тіл ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

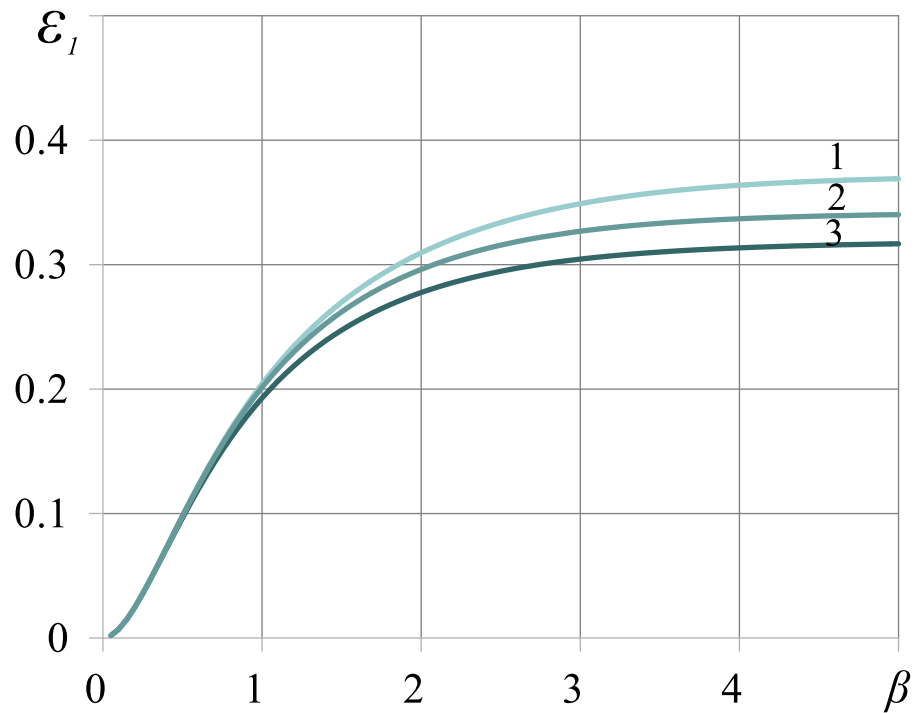


Рис. 4.39 – залежність критичної деформації ε_1 від параметру β для стислової плівки ($\nu_2 = 0.3$) на нестисливій підкладці.

(крива «2») чи *гармонічним потенціалом* з коефіцієнтом Пуассона $\nu_1 = 0.499$ (крива «3»).

Як видно з графіків на рис. 4.36 – 4.39, навіть для найпростіших однопараметричних моделей при порівнянних жорсткостях матеріалів [150] фізична нелінійність, закладена в структуру пружних потенціалів, може помітно впливати на результат: система демонструє високу чутливість до вибору конститутивної моделі. Іншими словами, у разі великих деформацій для досить коротких тріщин (досить товстих покриттів) знання лише параметрів жорсткості недостатньо для точного визначення критичних параметрів втрати стійкості. Без адекватних матеріальних моделей прогноз стійкості втрачає надійність навіть на інженерному рівні. Цей факт робить чутливість до форми потенціалу істотним чинником при виборі матеріалів покриттів для гнучких конструкцій. Коли ж тріщина досить довга (покриття досить тонке), вплив структури пружного потенціалу менш істотний.

Основні результати та висновки розділу

У даному розділі дисертаційної роботи в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості представлено напіваналітичний підхід до визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи, компоненти якої жорстко з'єднані, при стиску вздовж міжфазної тріщини (відшарування).

Граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням інтегрального перетворення Фур'є зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповненої додатковою умовою. При цьому розглянуто всі чотири можливі випадки комбінацій співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, записаних для пружних потенціалів складових матеріалів тіла. Це дозволяє

стверджувати, що поставлену задачу з визначення критичних параметрів навантаження, які згідно з положеннями ТЛТСДТ асоціюються з початком (стартом) руйнування тіла, розв'язано в загальному вигляді для довільної комбінації пружних потенціалів стисливих або нестисливих компонентів бішарової системи.

Для одержаної системи інтегральних рівнянь проведено дослідження неперервності їхніх ядер. Показано, що математичні обмеження на області неперервності мають строге фізичне пояснення, яке полягає у відмінності характеру втрати стійкості бішарової системи в залежності від співвідношення жорсткостей її складових.

Реалізація чисельного дослідження системи інтегральних рівнянь задачі проведена з використанням методу Бубнова – Гальоркіна, відповідно до якого указана система зведена до задачі на власні значення для системи однорідних лінійних рівнянь відносно параметра критичного відносного укорочення, який нелінійним чином входить до складу її коефіцієнтів.

Представлена методика ефективного обчислення коефіцієнтів систем лінійних рівнянь, яка полягає у зведенні відповідних невластних інтегралів першого роду до інтегралів Рімана на скінченному проміжку та невластних інтегралів на нескінченному проміжку, які можна обчислити аналітично.

Аналіз практичної збіжності запропонованого числового методу розв'язання задачі на власні значення показав, що в більшості випадків для досягнення точності в три значущі цифри при визначенні критичної деформації, достатнім є утримання 5-ти координатних функцій при реалізації методу Бубнова–Гальоркіна.

Чисельні результати з визначення критичних параметрів навантаження представлені для двох моделей стисливих і двох моделей нестисливих гіперпружних матеріалів. Валідація результатів відбувається шляхом

порівняння з граничними випадками: задачами для однорідних тіл, які були досліджені іншими авторами, а також задачею для тріщини «нульової довжини» яка досліджена в розділі 3 даної роботи.

Окремо для відносно коротких та відносно довгих тріщин проведено аналіз застосовності сучасних наближених геометрично лінійних та нелінійних балкових моделей, які враховують лише один з двох можливих механізмів втрати стійкості, що реалізується при стиску бішару. В цьому ж параграфі проведено порівняння результатів з результатами скінченно-елементного аналізу у випадку лінійно-пружного бішару, представленого в роботі інших авторів.

Наостанок досліджено питання чутливості критичних значень параметрів навантаження до вибору конститутивних моделей плівки та підкладки.

Аналіз одержаних результатів дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. Для досліджуваних однопараметричних моделей нестисливих тіл критичні параметри навантаження в аспекті механічних характеристик залежать тільки від відношення жорсткостей матеріалів тіла; для двопараметричних моделей стисливих тіл – від відношення жорсткостей та від коефіцієнтів Пуассона.
2. Критичні значення параметрів навантаження зменшуються зі збільшенням жорсткості плівки по відношенню до жорсткості підкладки за фіксованої довжини тріщини.
3. Критичні значення параметрів навантаження збільшуються зі зменшенням відносної довжини тріщини (збільшенням відносної товщини плівки) за фіксованого значення відношення жорсткостей тіла.

4. Для достатньо довгих тріщин (достатньо тонких покриттів) втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом випучування частини плівки в області над відшаруванням (рис. 4.1). При цьому

а. Якщо жорсткішим з двох матеріалів є матеріал підкладки, то характер залежності критичних деформацій від довжини тріщини є близьким до квадратичного, а відповідні значення критичних деформацій слабо залежать від механічних характеристик тіла.

б. Геометрично лінійна балкова модель дає максимальну похибку у 15% для таких значень параметрів: $g < 3$, $\beta \leq 0.1$. Зі зменшенням цих параметрів точність моделі підвищується.

с. Трансцендентне рівняння для критичної деформації випучування, одержане із застосуванням геометрично нелінійної балкової моделі, дає кращу оцінку цього параметра, ніж лінійна модель, та застосовна навіть до відносно жорстких покриттів. Проте і ця модель застосовна тільки для достатньо довгих тріщин, оскільки не враховує вплив механізму зморщування на значення критичних параметрів навантаження.

5. Для достатньо коротких тріщин (достатньо товстих покриттів) втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом зморщування вільної поверхні зразка (рис. 3.1.а). При цьому

а. Якщо жорсткішим з двох матеріалів є матеріал підкладки, то зі збільшенням відносної товщини покриття, критичні деформації асимптотично прямують до меншого з двох значень, які відповідають поверхневій втраті стійкості однорідної півплощини, виконаної з матеріалу плівки або підкладки.

б. Якщо жорсткішим з двох матеріалів є матеріал плівки, то зі збільшенням відносної товщини покриття, критичні деформації

асимптотично прямують до значення критичних деформацій зморщування аналогічного бішару без дефекту, одержаних в розділі 3.

с. Для значень параметрів $g > 1$, $\beta \geq 10$ критичні деформації, обраховані у разі тіла без дефекту, перевищують аналогічні значення для тіла з міжфазною тріщиною не більше ніж на 3%.

d. Максимальна довжина тріщини, наявність якої можна не враховувати при визначенні критичних параметрів міцності бішару на стиск, збільшується зі збільшенням відносної жорсткості плівки.

6. Для тріщин проміжної довжини жоден з наближених підходів, який враховує лише один з механізмів втрати стійкості, не є застосовним, а при визначенні критичних параметрів навантаження необхідним є врахування взаємодії механізмів випучування та зморщування. При цьому для лінійно-пружних матеріалів в разі малих критичних деформацій результати, одержані в роботі, добре узгоджуються з результатами чисельного дослідження інших авторів.

7. У разі використання потенціалу гармонічного типу для обох складових бішару у випадку їх однакової стисливості

a. Якщо жорсткішим з двох матеріалів є матеріал підкладки, то значення критичних деформацій не залежать від стисливості компонентів тіла. Значення критичних напружень при цьому суттєво залежать від указаної характеристики.

b. Якщо жорсткішим з двох матеріалів є матеріал плівки, то значення критичних деформацій зменшуються зі збільшенням відповідного коефіцієнта Пуассона. При цьому вплив стисливості збільшується зі збільшенням товщини покриття, а максимальна величина впливу сягає 40%.

8. У разі достатньо великих критичних деформацій тонкоплівкова система демонструє чутливість до вибору конститутивної моделі при визначенні критичних параметрів втрати стійкості, що свідчить про суттєвий вплив нелінійності, закладеної в структуру пружних потенціалів. При зміні конститутивних моделей для складових матеріалів тіла одержані значення критичних деформацій можуть відрізнятись на десятки відсотків при незмінних механічних параметрах бішару.

Сукупний аналіз результатів, представлених в розділах 3 і 4, свідчить про ефективність наступного комплексного підходу при визначенні критичних параметрів втрати стійкості при стиску кусково-однорідних тіл вздовж міжфазних тріщин. Спочатку досліджується задача про стиск тіла без дефекту за методом, представленим в розділі 3. Одержані результати потім інтерпретуються як результати для тіла з міжфазним дефектом «нульової довжини» при дослідженні стиску такого ж тіла, послабленого міжфазною тріщиною. Така інтерпретація дозволяє провести порівняння результатів і слугує першим етапом їх валідації.

Автор вбачає доцільним подальший розвиток запропонованого в межах ТЛТСДТ підходу до дослідження задач про стиск вздовж міжфазної тріщини кусково-однорідних смуг, які моделюють також тонкоплівкові матеріали з підкладкою скінченної товщини.

Нижче описаний комплексний підхід буде вперше використано до дослідження стиску бішарової системи підкладка/плівка вздовж дефекту іншого типу – зони гладкого проковзування. Зазначимо, що в цьому разі задачі для дефекту «нульової довжини» відповідає та сама, що і для тріщини, задача про стиск бішару з жорстко з'єднаними компонентами. Задачі ж для

«нескінченно довгого» дефекту відповідає задача про стиск бішару з компонентами, що проковзуються без тертя, яка теж досліджена в Розділі 3 дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 5 СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНИХ БІШАРОВИХ СИСТЕМ З ЖОРСТКО З'ЄДНАНИМИ КОМПОНЕНТАМИ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ЗОНИ ГЛАДКОГО ПРОКОВЗУВАННЯ

Цей розділ роботи присвячено дослідженню критичних параметрів втрати стійкості гіперпружних бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами при їх стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування.

Як уже зазначалося, у практичних випадках припущення про ідеальне зчеплення між плівкою та підкладкою вздовж усієї межі поділу не завжди відповідає дійсності через різні недосконалості міжфазної адгезії. Розглядаючи бішарову систему з такими дефектами, важко визначити набір дефектів та його вплив на значення критичних параметрів навантаження.

Крім того, у багатьох тонкоплівкових системах гнучкої електроніки або біомедичних інтерфейсах відносно змащення на коротких ділянках межі поділу підкладки і функціональної плівки є допустимим явищем [202].

Отже, для бішарових систем, в яких адгезія між компонентами послаблена, можна запропонувати наступну таку оцінку критичної деформації ε_1 втрати стійкості [145]:

$$\varepsilon_1^s \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^r, \quad (5.1)$$

де ε_1^s , ε_1^r – значення критичної деформації зморщування бішару без дефектів, відповідно, у разі проковзуючих без тертя та жорстко з'єднаних компонентів (див. Розділ 3).

Оцінка (5.1) особливо підходять для так званих «дефектів зі з'єднаними берегами». Ці модельні дефекти є ідеалізацією для випадку, коли відбувається зміна природи міжшарового контакту. В цьому разі взаємодія

шарів реалізується таким чином, що допускається нескінченно мале ковзання, але між шарами все ще немає зазорів (наприклад, молекулярні ланцюги в деяких видах клейового з'єднання тощо). Для дефектів зі з'єднаними берегами неперервність на межі поділу зберігається лише для нормальних компонентів збурень напружень та переміщень.

В дисертаційній роботі розглянуто такий вид дефекту зі з'єднаними берегами, який моделює найслабший зв'язок між компонентами тіла, – зону гладкого проковзування – на берегах якої збурення дотичних напружень дорівнюють нулю.

У разі подальшого послаблення адгезії між берегами дефекту, можливою є втрата зв'язку з відривом плівки від підкладки та утворенням, в решті, тріщини (відшарування) в цій області (див. Розділ 4).

В даному розділі пропонується напіваналітичний підхід до визначення критичних деформацій втрати стійкості гіперпружної бішарової системи при стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. Дослідження проводиться в межах строгої постановки граничної задачі плоскої деформації ТЛТСДТ. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.55), (2.61), гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до задачі на власні значення інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненої додатковою умовою.

Указане інтегральне рівняння отримане в загальному вигляді для стисливих і нестисливих компонентів бішару у разі всіх можливих випадків співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, що відповідають пружним потенціалам складових бішару (див. п. 3.2).

Проводиться дослідження неперервності ядер інтегральних рівнянь та даються фізичні пояснення математичних обмежень. Числове дослідження

задачі на власні значення виконується із застосуванням методу Бубнова – Гальоркіна.

Критичні параметри навантаження визначаються для низки конкретних пружних потенціалів для стисливих і не стисливих тіл. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних та геометричних параметрів бiшару, вивчається вплив структури пружних потенціалів на значення критичних деформацій.

Окремо вивчається вплив наявності на межі поділу плівки та підкладки недосконалості у вигляді короткої зони проковзування на значення критичних параметрів навантаження.

В контексті порівняння результатів з результатами Розділу 4, досліджується вплив втрати зв'язку між берегами дефекту на зменшення критичних параметрів втрати стійкості.

На завершення розділу результати критично обговорюються в контексті перспектив подальших досліджень і формулюються висновки.

Результати, представлені в розділі, відображено в публікаціях автора [35, 74, 77].

5.1 Постановка задачі

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, що складається з двох компонентів: напівобмеженої гіперпружної підкладки «1» ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «2» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ ненавантажена. Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить зону гладкого проковзування довжини $2a$ (рис. 5.1), поза якою матеріали жорстко з'єднані між собою.

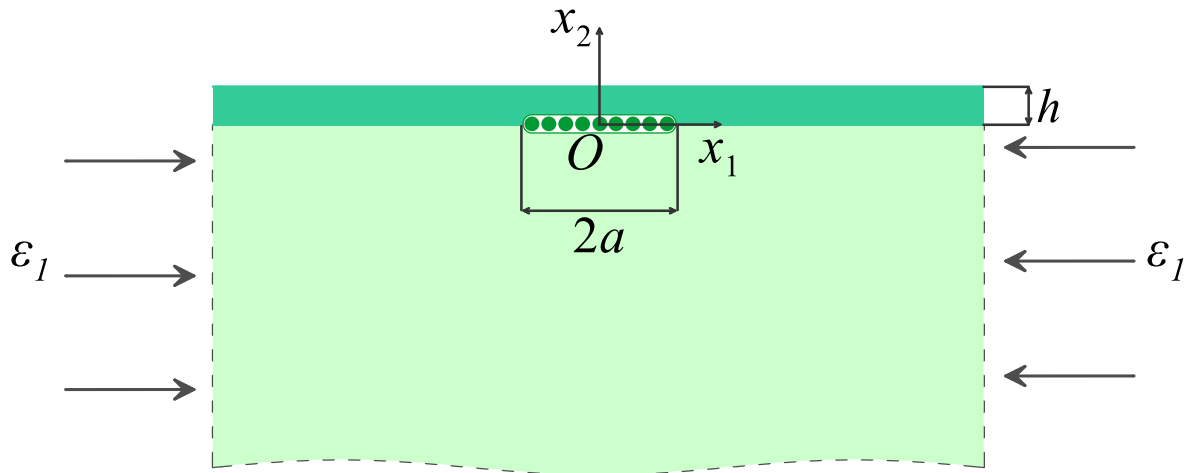


Рис. 5.1 – Бішарова система підкладка/плівка при стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування.

Нехай на нескінченності бішарова система стискається таким чином, що докритичний напружено-деформований стан, який реалізується в тілі, є статично визначеним, однорідним і описується виразами (3.1) – (3.4).

Граничні умови сформульованої задачі запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\
 u_1^{(1)} = u_1^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукається таке перше значення λ_1 (при його зменшенні починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, яке відповідає недеформованому стану), при якому за неперервного збільшення навантаження стиску, сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 5.1) бішарової системи.

5.2 Граничні задачі для гармонічних потенціальних функцій

За аналогією з тим, як це було зроблено в Розділі 4 (п. 4.2), зведемо задачу з граничними умовами (5.2) до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій – складових представлення загальних розв’язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.41), (2.42).

Нагадаємо, що у разі, якщо для пружного потенціалу матеріалу компоненти бішару реалізується випадок рівних коренів ($n_1^i = n_2^i = n^i$), необхідно користуватися представленнями (3.7) загальних розв’язків. Якщо ж для пружного потенціалу матеріалу компоненти бішару реалізується випадок нерівних коренів ($n_1^i \neq n_2^i$), то необхідно користуватися представленнями (3.9) загальних розв’язків.

Як і в Розділах 3 та 4 проілюструємо хід розв’язання у випадках (i) та (ii), тобто коли для обох матеріалів тіла реалізуються випадки рівних коренів $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 = n_2^2$ або нерівних коренів $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$, відповідно. Випадки (iii) і (iv) досліджуються аналогічно.

Підставляючи представлення (3.7) у випадку рівних коренів або (3.9) у випадку нерівних коренів в крайові умови (5.2), одержуємо граничні умови задачі, подані в термінах потенціальних гармонічних функцій

для випадку «i»

$$k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2} = 0 \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j=0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (5.3)$$

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_j = 0, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^2 F^{(2)} + k_2^2 \Phi^{(2)} = \text{const} \quad (z_2=0, |x_1| \leq a);$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_j = 0, |x_1| > a) \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt{n^{(2)}}}$$

та додаткову умову

$$\int_0^a \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} dx_1 = \int_0^a \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} dx_1; \quad (5.4)$$

для випадку «ii»

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} = 0, \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} = 0 \quad (z_j^{(2)} = -h_j, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(1)}} + k_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(1)}} = k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

$$k_4^1 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + k_5^1 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} = k_4^2 \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + k_5^2 \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty), \quad (5.5)$$

$$p_1^1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}} + p_2^1 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}} = p_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + p_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \quad (z_j^{(i)} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^2 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}} + k_2^2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} = \text{const}, \quad (z_j^{(2)} = 0, |x_1| \leq a);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2}, \quad (z_j^{(i)} = 0, |x_1| > a) \quad h_j = \frac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}$$

та додаткову умову

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2} \right) \Big|_{z_j^{(1)}=0} dx_1 = \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2} \right) \Big|_{z_j^{(2)}=0} dx_1 \quad (5.6).$$

5.3 Інтегральні рівняння задачі

Представимо невідомі потенціальні гармонічні функції $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\varphi_j^{(i)}$, $i, j=1,2$ у вигляді косинус-розкладів Фур'є з параметром λ за координатою x_1 , зберігши форму представлень (3.15), (3.16) у випадку «і» та «ii», відповідно.

Задовольняючи спочатку наскрізні граничні умови – перші п'ять умов в (5.3) ((5.5)), приходимо до наступної системи рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$:

для випадку «і»

$$\begin{aligned} k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - k_2^2 D_2 &= 0, \\ k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 &= 0, \\ \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$p_1^1 A + p_2^1 B - p_1^2 \coth \mu \cdot C_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 \coth \mu \cdot D_1 - p_2^2 D_2 = 0 \quad (\mu = \lambda h_1);$$

для випадку «ii»

$$\begin{aligned} \gamma k_1^2 C_2 + k_2^2 D_2 &= 0, \\ \gamma k_4^2 C_1 + k_5^2 D_1 &= 0, \\ k_1^1 A + k_2^1 B + k_1^2 C_1 + k_1^2 C_2 \coth \mu_1 + k_2^2 D_1 + k_2^2 D_2 \coth \mu_2 &= 0, \\ -k_4^1 A - k_5^1 B + k_4^2 C_1 \coth \mu_1 + k_4^2 C_2 + k_5^2 D_1 \coth \mu_2 + k_5^2 D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$p_1^1 A + p_2^1 B + p_1^2 C_1 + p_1^2 C_2 \coth \mu_1 + p_2^2 D_1 + p_2^2 D_2 \coth \mu_2 = 0 \quad (\mu_j = \lambda h_j, \gamma = \frac{\sinh \mu_2}{\sinh \mu_1}).$$

Визначимо спочатку $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ та $D_2(\lambda)$ через функції $C_1(\lambda)$, $C_2(\mu)$, використавши перші чотири рівняння в (5.7) ((5.8)). Маємо

для випадку «i»

$$A = -\Delta^{-1} (s_{c_1} C_1 + s_{c_2} C_2), \quad s_{c_1} = s_1 + \mu s_2 + \mu \coth \mu \cdot s_3, \quad s_{c_2} = s_4 + \mu s_5 + \mu \coth \mu \cdot s_6,$$

$$B = \Delta^{-1} (r_{c_1} C_1 + r_{c_2} C_2), \quad r_{c_1} = r_1 + \mu r_2 + \mu \coth \mu \cdot r_3, \quad r_{c_2} = r_4 + \mu r_5 + \mu \coth \mu \cdot r_6, \quad (5.9)$$

$$D_1 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} C_1 + \mu C_2,$$

$$D_2 = \mu C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} C_2,$$

де

$$\Delta = k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1,$$

$$s_1 = (k_2^1 k_4^2 k_2^2 - k_2^1 k_5^2 k_1^2) / k_2^2, \quad s_2 = k_5^1 k_2^2, \quad s_3 = k_2^1 k_5^2, \quad s_4 = (k_5^1 k_5^2 k_1^2 - k_5^1 k_2^2 k_4^2) / k_5^2,$$

$$s_5 = s_3, \quad s_6 = s_2, \quad r_1 = (k_1^1 k_4^2 k_2^2 - k_1^1 k_5^2 k_1^2) / k_2^2, \quad r_2 = k_4^1 k_2^2,$$

$$r_3 = k_1^1 k_5^2, \quad r_4 = (k_4^1 k_5^2 k_1^2 - k_4^1 k_2^2 k_4^2) / k_5^2, \quad r_5 = r_3, \quad r_6 = r_2;$$

для випадку «ii»

$$A = -\Delta^{-1} \left[(k_2^1 k_4^2 l - k_5^1 m) C_1 + (k_5^1 k_1^2 l - k_2^1 n) C_2 \right],$$

$$B = -\Delta^{-1} \left[(-k_1^1 k_4^2 l + k_4^1 m) C_1 + (-k_4^1 k_1^2 l + k_1^1 n) C_2 \right],$$

$$D_1 = -\frac{k_4^2}{k_5^2} \gamma C_1, \quad (5.10)$$

$$D_2 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} \gamma C_2,$$

де

$$l = \gamma \coth \mu_2 - \coth \mu_1, \quad m = k_1^2 - \gamma \frac{k_2^2 k_4^2}{k_5^2}, \quad n = k_4^2 - \gamma \frac{k_1^2 k_5^2}{k_2^2}.$$

Далі, з останнього рівняння (5.7) ((5.8)), використовуючи (5.9) ((5.10)), одержуємо співвідношення між $C_1(\mu)$ і $C_2(\mu)$ у вигляді:

для випадку «i»

$$C_1(\lambda) = q(\lambda)C_2(\lambda), \quad q(\lambda) = q_2(\lambda)/q_1(\lambda),$$

$$q_1(\lambda) = -p_1^1 s_{c_1} + p_2^1 r_{c_1} - p_2^2 \mu \Delta + \left(\frac{p_2^2 k_1^2 - p_1^2 k_2^2}{k_2^2} \right) \coth \mu \cdot \Delta, \quad (5.11)$$

$$q_2(\lambda) = p_1^1 s_{c_2} - p_2^1 r_{c_2} + \left(\frac{p_1^2 k_5^2 - p_2^2 k_4^2}{k_5^2} \right) \Delta + p_2^2 \mu \coth \mu \cdot \Delta;$$

для випадку «ii»

$$C_1(\lambda) = q(\lambda)C_2(\lambda), \quad q(\lambda) = q_2(\lambda)/q_1(\lambda),$$

$$q_1(\lambda) = k_4^2 \frac{p_1^1 k_2^1 - p_2^1 k_1^1}{\Delta} l + \frac{p_2^1 k_4^1 - p_1^1 k_5^1}{\Delta} m - p_1^2 + p_2^2 \gamma \frac{k_4^2}{k_5^2}, \quad (5.12)$$

$$q_2(\lambda) = k_1^2 \frac{-p_1^1 k_5^1 + p_2^1 k_4^1}{\Delta} l + \frac{-p_2^1 k_1^1 + p_1^1 k_2^1}{\Delta} m + p_1^2 \coth \mu_1 - p_2^2 \gamma \frac{k_1^2}{k_2^2} \coth \mu_2.$$

Останні дві умови в (5.3) ((5.5)) з урахуванням (5.9), (5.11) ((5.10)), (5.12)) приводять до парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty r(\lambda) C_2(\lambda) \cdot \cos \lambda x_1 d\lambda = \text{const} \quad (|x_1| \leq a); \quad (5.13)$$

$$\int_0^\infty \lambda [q(\lambda)v(\lambda) + w(\lambda)] C_2(\lambda) \cdot \cos \lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a), \quad (5.14)$$

де:

для випадку «i»

$$r = \mu q(\lambda) + \mu \coth \mu - k, \quad k = \frac{k_4^2 k_2^2 - k_5^2 k_1^2}{k_2^2 k_5^2},$$

$$v = \frac{r_{c_1}}{\Delta} - \frac{k_1^2}{k_2^2} + \mu \coth \mu, \quad (5.15)$$

$$w = \frac{r_{c_2}}{\Delta} + \mu - \frac{k_4^2}{k_5^2} \coth \mu;$$

для випадку «ii»

$$r = mq(\lambda) - k_1^2 l,$$

$$v(\lambda) = k_4^2 \frac{k_2^1 - k_1^1}{\Delta} l + \frac{k_4^1 - k_5^1}{\Delta} m - \coth \mu_1 + \gamma \frac{k_4^2}{k_5^2} \coth \mu_1, \quad (5.16)$$

$$w(\lambda) = k_1^2 \frac{k_5^1 - k_4^1}{\Delta} l + \frac{k_1^1 - k_2^1}{\Delta} m - 1 + \gamma \frac{k_1^2}{k_2^2}.$$

Додаткова умова (5.4), (5.6) запишеться наступним чином

$$\int_0^{\infty} \lambda [q(\lambda)v(\lambda) + w(\lambda)] C_2(\lambda) \sin \lambda a d\lambda = 0. \quad (5.17)$$

Подальший процес розв'язання задачі полягає у зведенні парних інтегральних рівнянь (5.13), (5.14) до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, записаного на одиничному проміжку. Для цього покладемо в рівнянні (5.14)

$$[q(\lambda)v(\lambda) + w(\lambda)] C_2(\lambda) = -h_1 \lambda^{-3} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \quad (5.18)$$

де $\psi(t)$ – невідома неперервно диференційована функція на інтервалі $[0, a]$.

Представлення (5.18) дозволяє автоматично задовольнити рівняння (5.14) «поза зоною проковзування» (див. п. 4.3), тоді як рівняння «на зоні проковзування» (5.13) приводить до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) g(\eta) d\eta = const, \quad (5.19)$$

$$\beta = h/a, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

для безрозмірних змінних

$$\xi \equiv a^{-1}x_1, \quad \eta \equiv a^{-1}t$$

відносно невідомої безрозмірної функції

$$g(\xi) \equiv a \psi(a\xi),$$

та невідомої константи $const$, яка пов'язана з додатковою умовою (5.17).

Остання, своєю чергою, представляється наступним чином:

$$\int_0^1 g(\eta)(1-\eta^2)d\eta = 0. \quad (5.20)$$

Ядро $K(\xi, \eta)$ інтегрального рівняння (5.19) має такий вигляд:

$$K(\xi, \eta) = \int_0^\infty H_j(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \quad (j = \overline{1, 4}), \quad (5.21)$$

де індекс $j = \overline{1, 4}$ визначається відповідним випадком (i) – (iv). Так,

для випадку «i»

$$H_1(x) = \frac{-k + (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \tilde{q}(x) + (n^{(2)})^{-1/2} \beta x \cdot \coth(n^{(2)})^{-1/2} \beta x}{q(\tilde{x})v(\tilde{x}) + w(\tilde{x})}; \quad (5.22)$$

для випадку «ii»

$$H_2(x) = \frac{\tilde{m}q(\tilde{x}) - k_1^2 \tilde{l}}{q(\tilde{x})v(\tilde{x}) + w(\tilde{x})}. \quad (5.23)$$

В (5.22), (5.23) функції, які позначені «тильдою» згори, збігаються з аналогічними функціями без «тильди», в усіх складових яких замість μ , μ_1 , μ_2 покладено, відповідно, $(n^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda$, $(n_1^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda$ або $(n_2^{(2)})^{-1/2} \beta \lambda$, де $\beta = h/a$.

Аналогічною є і структура інтегральних рівнянь в решті двох випадках («iii» та «iv») співвідношення між коренями характеристичних рівнянь для пружних потенціалів складових матеріалів тіла. При цьому, як і у разі задачі про міжфазну тріщину, коли для матеріалу підкладки має місце випадок рівних, а для матеріалу покриття – нерівних коренів (випадок «iii», $n_1^1 = n_2^1, n_1^2 \neq n_2^2$), структура функції $H_3(x)$ є аналогічною до структури функції $H_2(x)$ у випадку «ii», а в останньому з можливих випадків (випадок «iv», $n_1^1 \neq n_2^1, n_1^2 = n_2^2$) – до структури функції $H_1(x)$ у випадку «i». Враховуючи громіздкість указаних рівнянь, їх явний вигляд в тексті роботи не наводиться.

Беручи до уваги сказане вище, резюмуємо, що задачу про стискання кусково-однорідної півплощини, що утворена жорстким з'єднанням двох стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів, – напівобмеженої підкладки і плівки покриття – вздовж міжфазної зони гладкого проковзування було зведено до задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненого певною додатковою умовою, в загальному вигляді при довільній структурі пружних потенціалів складових компонентів тіла. Конкретизація моделей матеріалів тіла відбувається лише на етапі чисельного дослідження, який є фінальним етапом визначення критичних значень параметрів навантаження в задачі, що досліджується.

Таким чином, проблема зводиться до задачі (5.19), (5.20) на власні значення відносно параметра $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 < 1$ (або критичної деформації $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$). Параметр λ_1 (коефіцієнт укорочення вздовж осі Ox_1)

характеризує докритичний стан та складним нелінійним чином входить до ядра (5.21) інтегрального рівняння (5.19).

5.4 Дослідження ядер інтегральних рівнянь

Важливим етапом на шляху до розв'язання задачі є вивчення неперервності ядра (5.21) інтегрального рівняння (5.19). Дослідження проводиться за аналогією із задачею про стиск бішару вздовж міжфазної тріщини (див. п. 4.4).

Можна показати, що у разі пружних потенціалів, що використовуються в роботі (2.70) – (2.73), якщо матеріал покриття жорсткіший за матеріал підкладки то, функція $H_j(x)$, що входить до ядра (5.21), є неперервною для $x > 0$, а відповідний невластий інтеграл збіжний для всіх допустимих значень змінних ξ, η , коли виконується наступна умова (5.1).

Якщо матеріал покриття менш жорсткий, ніж матеріал підкладки, то функція $H(x)$, що входить до ядра (5.21), є неперервним для $x > 0$, а відповідний невластий інтеграл у (5.21) збіжний для всіх допустимих значень змінних ξ, η коли виконується така умова :

$$\varepsilon_1^s < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^{hp} \quad (5.24)$$

Сформульовані математичні обмеження мають строге фізичне пояснення (див. Розділ 3, де вводяться величини $\varepsilon_1^{hp}, \varepsilon_1^s, \varepsilon_1^r$ та вступ до Розділу 5). Дійсно, задачі, представлені на рисунках 3.1.а та 3.1.б, можна розглядати як граничні випадки задачі, представленої на рисунку 5.1, для зони проковзування «нульової довжини» та зони ковзання «нескінченної довжини», відповідно.

5.5 Чисельне дослідження інтегрального рівняння. Аналіз практичної збіжності.

Чисельне дослідження задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду (5.19) разом з умовою (5.20) реалізоване з використанням методу Бубнова – Гальоркіна за аналогією з тим, як це було зроблено в п. 4.5 для задачі про стиск бішару вздовж міжфазної тріщини.

Невідома функція $g(\xi)$ апроксимується у вигляді лінійної комбінації перших N координатних функцій повного набору системи лінійно незалежних в інтервалі $[0,1]$ степеневих функцій $1, \xi, \xi^2, \dots$

$$g(\xi) = \sum_{j=1}^N g_j \xi^{j-1}. \quad (5.25)$$

Підставляючи (5.25) у (5.19), (5.20) та записуючи умови ортогональності лівих частин рівнянь до координатних функцій, отримуємо наступну систему однорідних лінійних рівнянь розмірності $(N+1) \times (N+1)$ відносно невідомих коефіцієнтів g_j та деякої невідомої константи c :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(1)} g_j + c_i \cdot c &= 0, \\ \sum_{j=1}^N g_j^{(2)} g_j &= 0, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Коефіцієнти цієї системи задані визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(1)} &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(\xi, \eta) \eta^{j-1} d\eta \right] \xi^{i-1} d\xi; \\ c_i &= \frac{1}{i}, \quad g_j^{(2)} = \frac{2}{j(j+2)}, \quad i, j = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Дослідження задачі на власні значення для системи лінійних рівнянь (5.26), до якої зводиться вихідна задача, полягає у знаходженні першого значення параметра $\varepsilon_1 > 0$ (за збільшення, починаючи зі значення $\varepsilon_1 = 0$), при якому ця система має нетривіальний розв'язок. Тобто знаходиться значення ε_1 , при якому визначник системи лінійних рівнянь (5.26) обертається в нуль. Визначене таким чином значення ε_1 є критичним значенням деформації, за якого бішарова система підкладка/тонка плівка втрачає стійкість при стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування.

Характер збіжності використаного методу чисельного дослідження залежно від кількості N використовуваних координатних функцій ілюструється даними в таблицях 5.1 та 5.2. Значення параметрів критичного навантаження визначалися з точністю не менше трьох значущих цифр.

У таблицях наведено критичні значення ε_1 для різних значень відносної товщини плівки покриття $\beta = h/a$ при значенні відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = 2$. Таблиця 5.1 відповідає випадку, коли компоненти бішару описуються пружним потенціалом гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), табл. 5.2 – потенціалом Бартенєва – Хазановича.

На графіку, зображеному на рис. 5.2, у випадку потенціалу Трелоара побудовано криві $\varepsilon_1(\beta)$ при значенні параметра $g = 1.5$ при використанні різної кількості координатних функцій.

Для того ж бішару на рис. 5.3 показано поведінку збіжності при обчисленні однієї точки на графіку рис. 5.2 для кількох значень геометричного параметра β . У всіх протестованих випадках використання $N = 10$ координатних функцій забезпечувало точність до п'яти значущих цифр. Для забезпечення точності 3–4 цифри в більшості випадків було достатньо використання від чотирьох до шести координатних функцій.

β	N					
	2	3	4	5	6	7
0.1	0.297	0.240	0.238	0.223	0.223	0.223
0.15	0.286	0.230	0.228	0.224	0.224	0.224
0.2	0.276	0.229	0.228	0.228	0.229	0.229
0.25	0.266	0.231	0.231	0.231	0.231	0.231
0.3	0.256	0.231	0.232	0.232	0.232	0.232
0.35	0.246	0.234	0.235	0.235	0.235	0.235
0.4	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240	0.240
0.45	0.247	0.246	0.247	0.247	0.246	0.246
0.5	0.256	0.254	0.255	0.255	0.254	0.254
0.55	0.266	0.263	0.263	0.263	0.262	0.262
0.6	0.275	0.272	0.272	0.271	0.270	0.270
0.65	0.284	0.280	0.280	0.280	0.279	0.279
0.7	0.294	0.289	0.289	0.288	0.287	0.287
0.75	0.302	0.297	0.297	0.296	0.295	0.295
0.8	0.310	0.305	0.304	0.303	0.302	0.302

Таблиця 5.1 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу гармонічного типу ($g = 2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

β	N					
	2	3	4	5	6	7
0.1	0.241	0.207	0.207	0.204	0.203	0.203
0.2	0.230	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209
0.3	0.220	0.214	0.214	0.215	0.214	0.214
0.4	0.231	0.229	0.229	0.229	0.228	0.228
0.5	0.251	0.247	0.247	0.247	0.246	0.246
0.6	0.268	0.264	0.263	0.263	0.262	0.262
0.7	0.278	0.275	0.275	0.274	0.274	0.274
0.8	0.286	0.284	0.284	0.283	0.283	0.283

Таблиця 5.2 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу Бартенєва–Хазановича ($g = 2$).

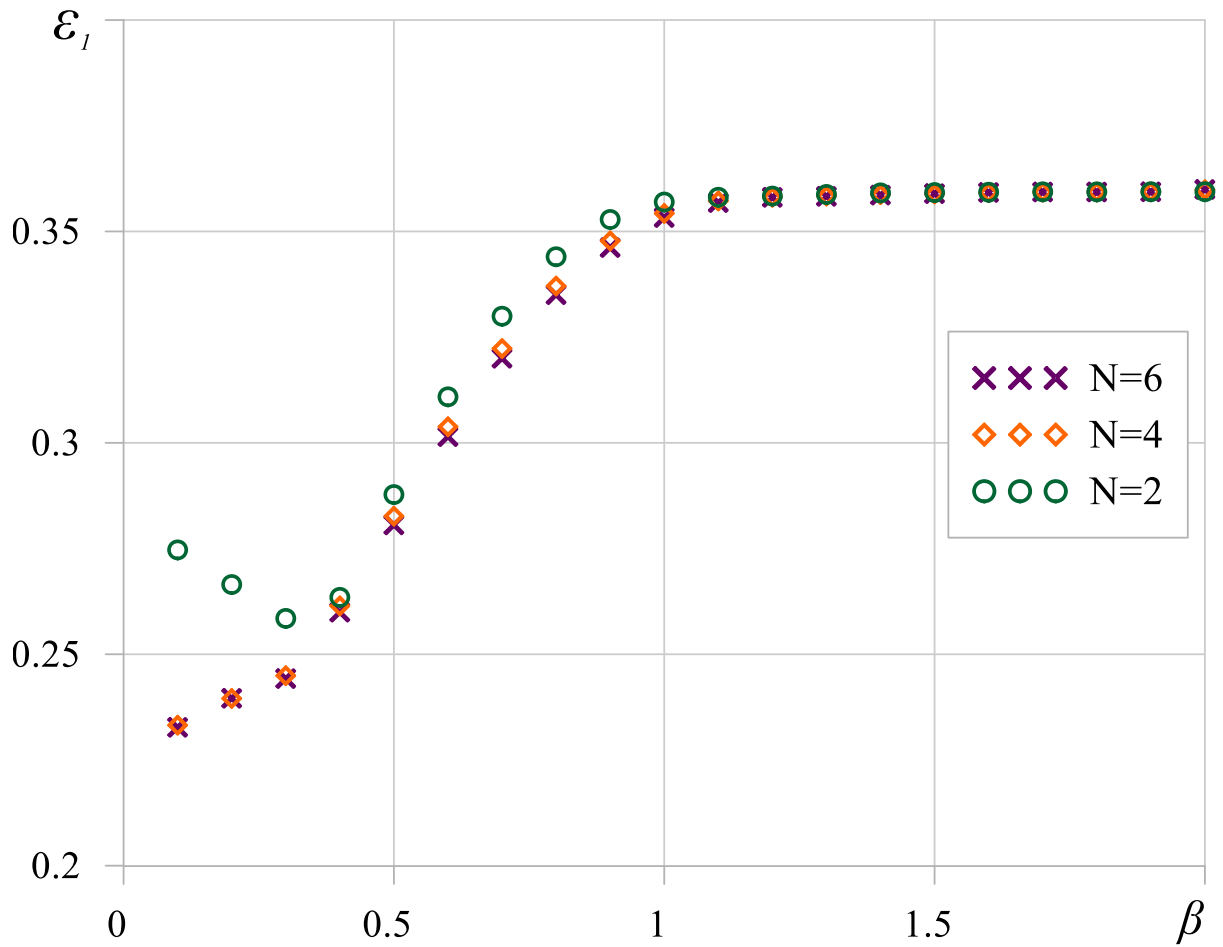


Рис. 5.2 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ при $g = 1.5$ для потенціалу Трелоара.

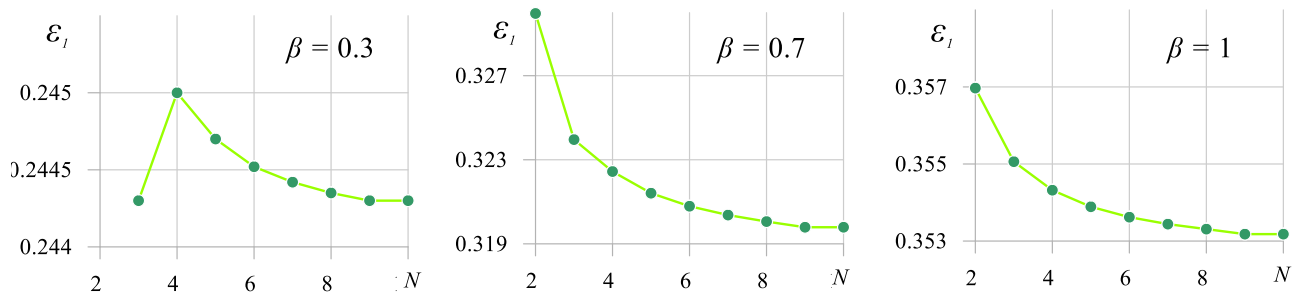


Рис. 5.3 – Залежності $\varepsilon_1(N)$ при $g = 1.5$ для потенціалу Трелоара для деяких значень геометричного параметра β .

5.6 Аналіз числових результатів

У цьому параграфі представлено результати числового дослідження задачі на власні значення (5.26) відносно критичного параметра ε_1 – значення критичного відносного укорочення, яке відповідає втраті стійкості тонкої плівки покриття на більш товстій підкладці при стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування.

Для низки пружних потенціалів конкретної структури – потенціалу гармонічного типу для стисливих тіл, а також потенціалу Бартенєва – Хазановича та потенціалу Трелоара для нестисливих тіл – аналізуються залежності критичних параметрів навантаження від механічних характеристик матеріалів та геометричного параметра бішару.

5.6.1 Критичні параметри навантаження: потенціал гармонічного типу

Результати чисельного дослідження задачі на власні значення представлено на графіках, зображених на рис. 5.4 – 5.9 для випадку, коли обидва матеріали бішару описуються *потенціалом гармонічного типу* (2.70).

На рис. 5.4, 5.5 зображено залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної товщини плівки покриття $\beta = h/a$ при деяких різних значеннях відношення жорсткостей матеріалів тіла при значенні коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

Відповідні залежності безрозмірного критичного напруження стиску (2.70) $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення геометричного параметра β подані на рис. 5.6, 5.7.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням жорсткості покриття по відношенню до жорсткості підкладки значення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, зменшуються.

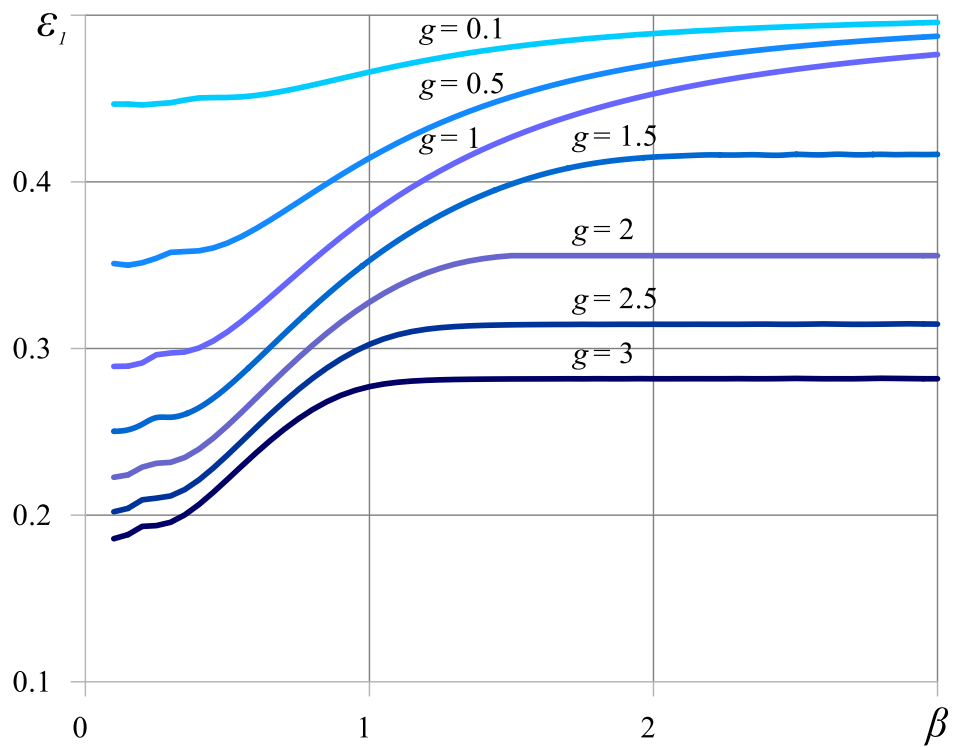


Рис. 5.4 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $0.1 \leq g \leq 3$.

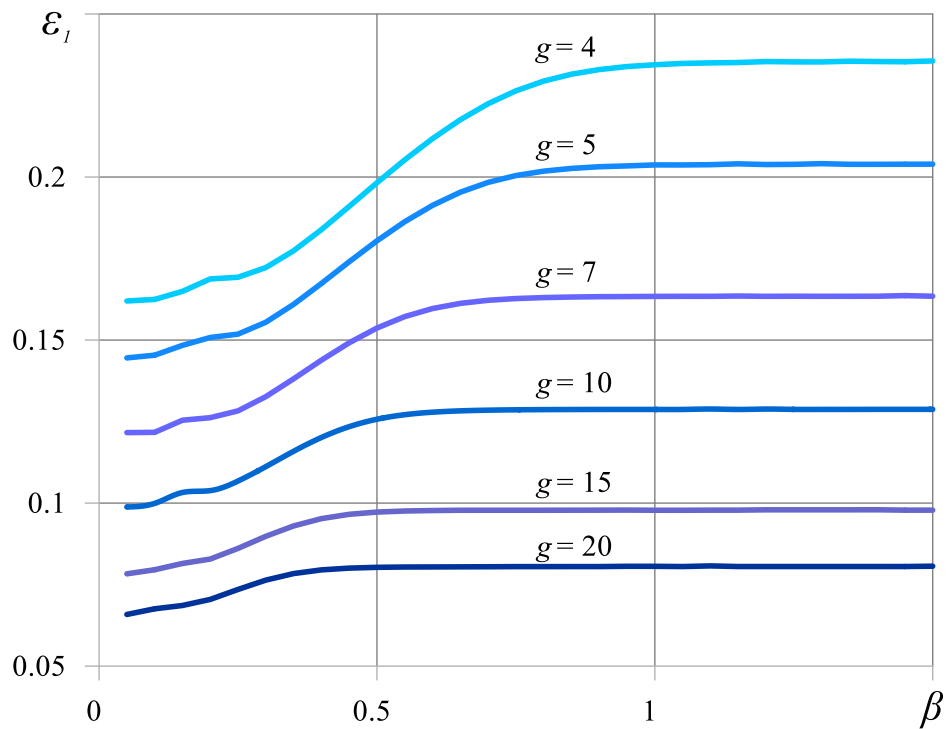


Рис. 5.5 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $4 \leq g \leq 20$.

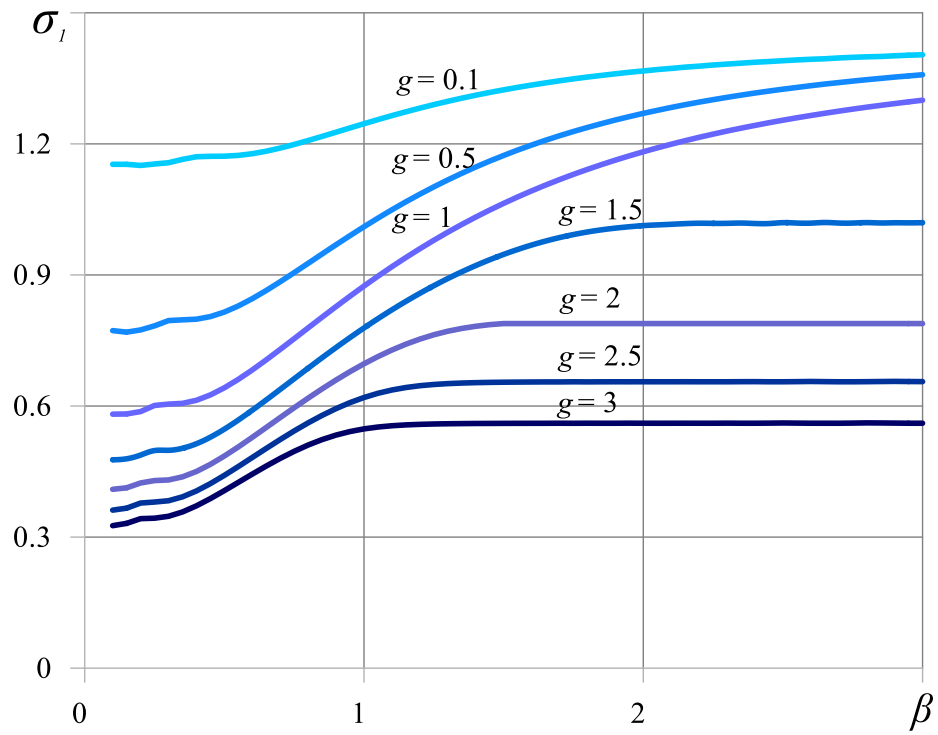


Рис. 5.6 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $0.1 \leq g \leq 3$.

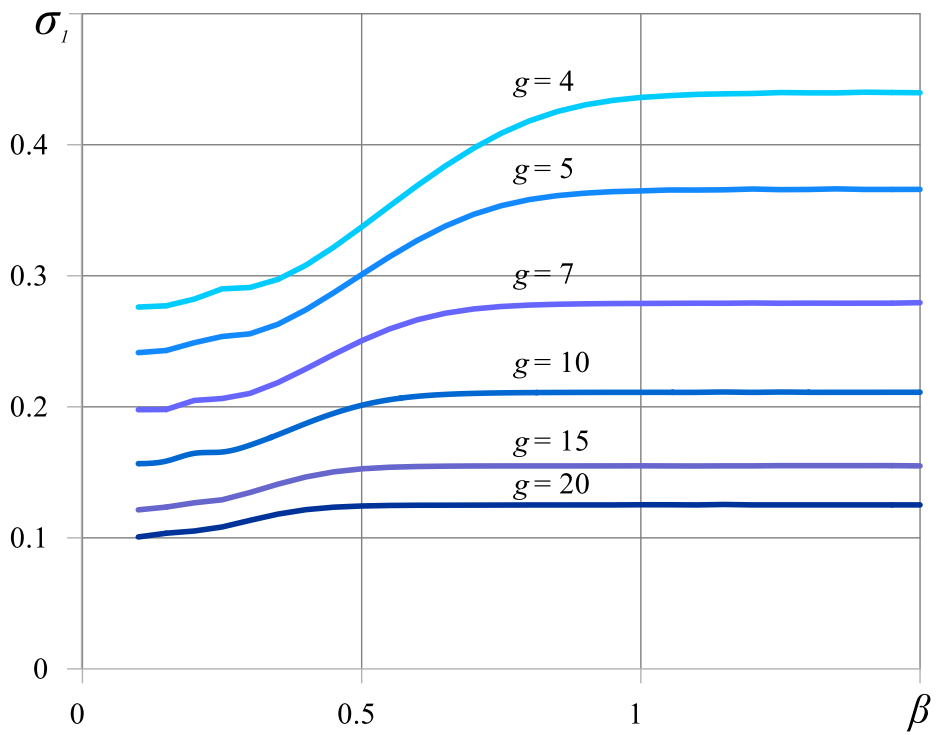


Рис. 5.7 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях $4 \leq g \leq 20$.

Зі збільшенням геометричного параметру $\beta = h/a$ (що еквівалентно зменшенню довжини тріщини по відношенню до фіксованої товщини плівки або збільшенню товщини плівки по відношенню до фіксованої довжини тріщини) критичні значення ε_1 також збільшуються.

Для залежностей $\varepsilon_1(\beta)$ справедливі наступні асимптотики

$$\varepsilon_1(\beta, g) \rightarrow \varepsilon_1^s(g) \text{ при } \beta \rightarrow 0; \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_1(\beta, g) \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1^{hp} = 0.5, & g \leq 1 \\ \varepsilon_1^r(g), & g > 1 \end{cases} \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \quad (5.29)$$

В (5.28), (5.29) ε_1^r , ε_1^s – значення критичної деформації зморщування бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами або копмонентами, що проковзують без тертя, відповідно, які визначаються методом, представленим в розділі 3.

Асимптотична залежність (5.28) свідчить про те, що за необмеженого зростання довжини міжфазного дефекту з проковзуючими берегами по відношенню до товщини покриття, значення критичних параметрів навантаження в задачі про стиск бішару вздовж цього дефекту (рис. 5.1) прямують до аналогічних значень в задачі про стиск такого ж бішару без дефекту з проковзуючими без тертя компонентами (рис. 3.1.б). Так, наприклад, при значеннях $g = 1.5$ та $\beta = 0.1$ значення ε_1 в задачі для тіла з зоною проковзування перевищує значення ε_1^s менше ніж на 5%.

Залежність (5.29) також демонструє узгодженість розв'язків задач для тіла з зоною проковзування та без неї, яка мала місце і у випадку задачі про міжфазну тріщину (Розділ 4). В даному разі задача з геометричною схемою рис. 3.1.а являє собою граничний випадок задачі зі схемою рис. 5.1 для зони проковзування «нульової довжини». При цьому залишаються справедливими висновки про характер втрати стійкості в залежності від значення відношення

жорсткостей матеріалів, сформульовані в п. 4.6.2 для $\beta \rightarrow \infty$. Так, наприклад, при значеннях $g = 1.5$ та $\beta = 3$ значення ε_1 в задачі для тіла з зоною проковзування відрізняється від значення ε_1^r менше ніж на 1%. Докладно вплив малих зон проковзування на критичні параметри втрати стійкості бішарових систем розглянуто в п. 5.7.

Аналогічні висновки справедливі також і для критичного навантаження σ_1 .

Наочно характер асимптотичних залежностей (5.28), (5.29) демонструють графіки, зображені на рис. 5.8, 5.9.

Графік на рис. 5.8 побудовано для бішару з *потенціалом гармонічного типу* та значенням параметрів стисливості $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Графік на рис. 5.9 побудовано з використанням логарифмічної шкали для того ж пружного потенціалу з параметрами $\nu_1 = \nu_2 = 0.499$.

Суцільними кривими на цих рисунках зображено залежності $\varepsilon_1(g)$ при значеннях параметру $\beta = 0.2; 0.5; 1$. Пунктирні криві на рисунках відповідають залежностям від параметру $g = \mu_2 / \mu_1$ критичних деформацій зморщування ε_1^r (жорстко з'єднані компоненти; верхні криві) та ε_1^s (компоненти, що проковзують без тертя; нижні криві).

Горизонтальні ділянки кривих $\varepsilon_1^r(g) = \varepsilon_1^{hp} = 0.5$ відповідають випадку, коли підкладка жорсткіша за покриття ($g < 1$), а втрата стійкості відбувається за механізмом аналогічним випадку однорідного тіла (див. пп. 3.4.2, 4.6.1, 4.6.2).

Крива з червоних круглих маркерів на рис. 5.9 відповідає критичним деформаціям зморщування бішару з жорстко з'єднаними компонентами, обчисленим на основі наближеної формули (3.41) для випадку нестисливого тіла.

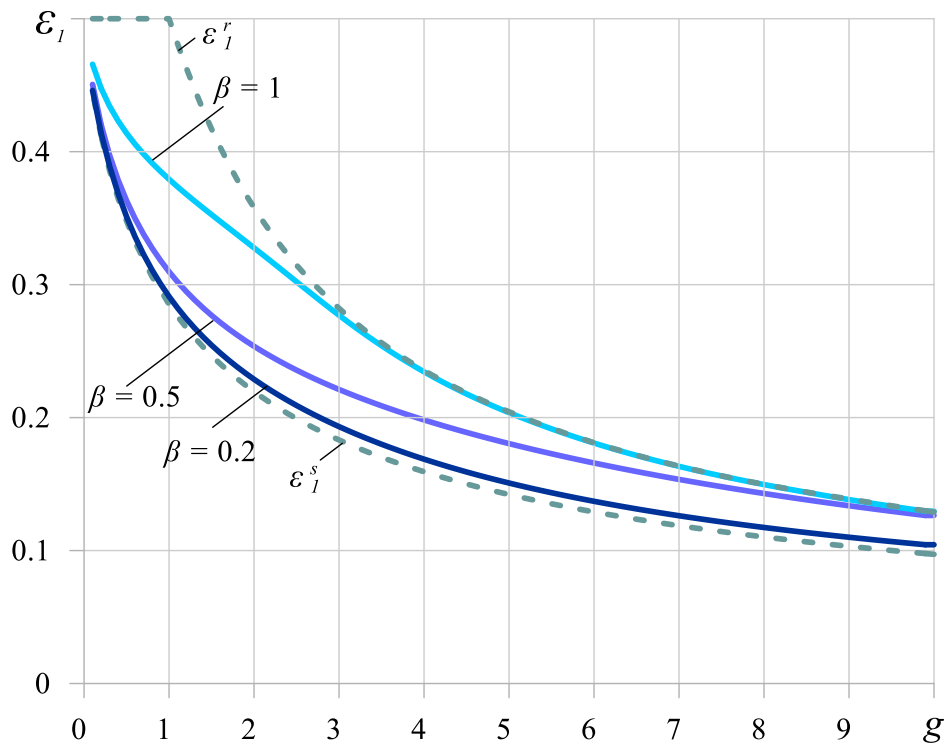


Рис. 5.8 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях β .

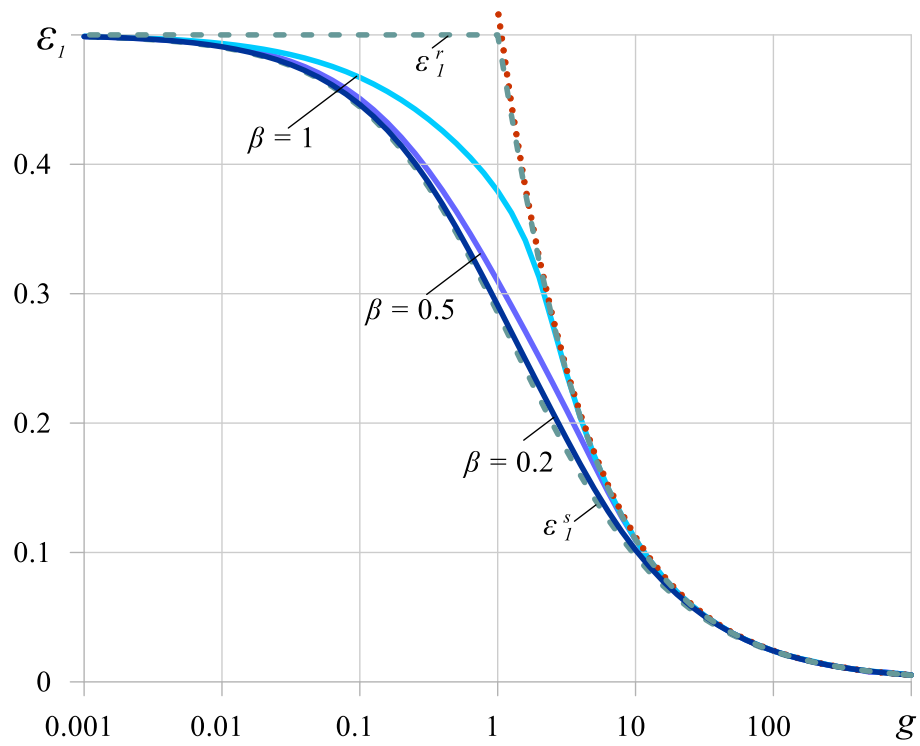


Рис. 5.9 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$) при різних значеннях β .

5.6.2 Критичні параметри навантаження: потенціал Бартенєва–Хазановича і потенціал Трелоара

На рисунках 5.10 – 5.13 представлені результати дослідження критичних параметрів навантаження для нестисливих тіл.

Графіки на рис. 5.10, 5.11 відповідають випадку, коли компоненти бішарової системи описуються пружним *потенціалом Бартенєва–Хазановича* (2.72). На рис. 5.10 зображено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для деяких різних значень відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = \mu_2 / \mu_1$. На рис. 5.11 представлено залежності $\varepsilon_1(g)$ для деяких значень безрозмірного геометричного параметра $\beta = h / a$.

Аналогічні криві для випадку, коли компоненти системи описуються пружним *потенціалом Трелоара*, зображено на рис. 5.12, 5.13.

Верхні пунктирні криві $\varepsilon_1^r(g)$ на рис. 5.11, 5.13 відповідають задачі про стиск бішару без дефекту вздовж межі поділу двох жорстко з'єднаних компонентів, а нижні пунктирні криві $\varepsilon_1^s(g)$ – задачі про стиск бішару без дефекту вздовж межі поділу компонентів, які проковзують без тертя. Як і у випадку *потенціалу гармонічного типу* спостерігається гарна узгодженість між результатами задачі для тіла з дефектом у вигляді зони проковзування і задач для тіла без дефектів.

Крива з круглих маркерів на рис. 5.13 є числовою реконструкцією кривої з роботи [87] (див. п. 3.4.5).

Характер залежності критичної деформації від механічного і геометричного параметрів бішару для розглянутих потенціалів аналогічні випадку *потенціалу гармонічного типу* (див. п. 5.6.1).

Обговоримо тепер деякі механічні ефекти детальніше на прикладі бішарів з компонентами з пружним *потенціалом Трелоара* (рис. 5.12, 5.13).

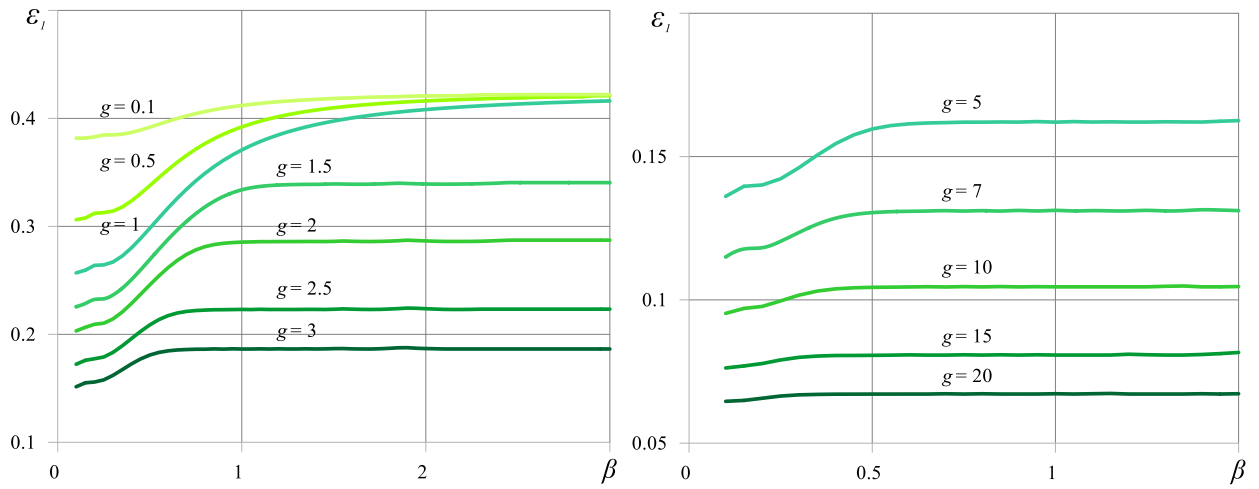


Рис. 5.10 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича.

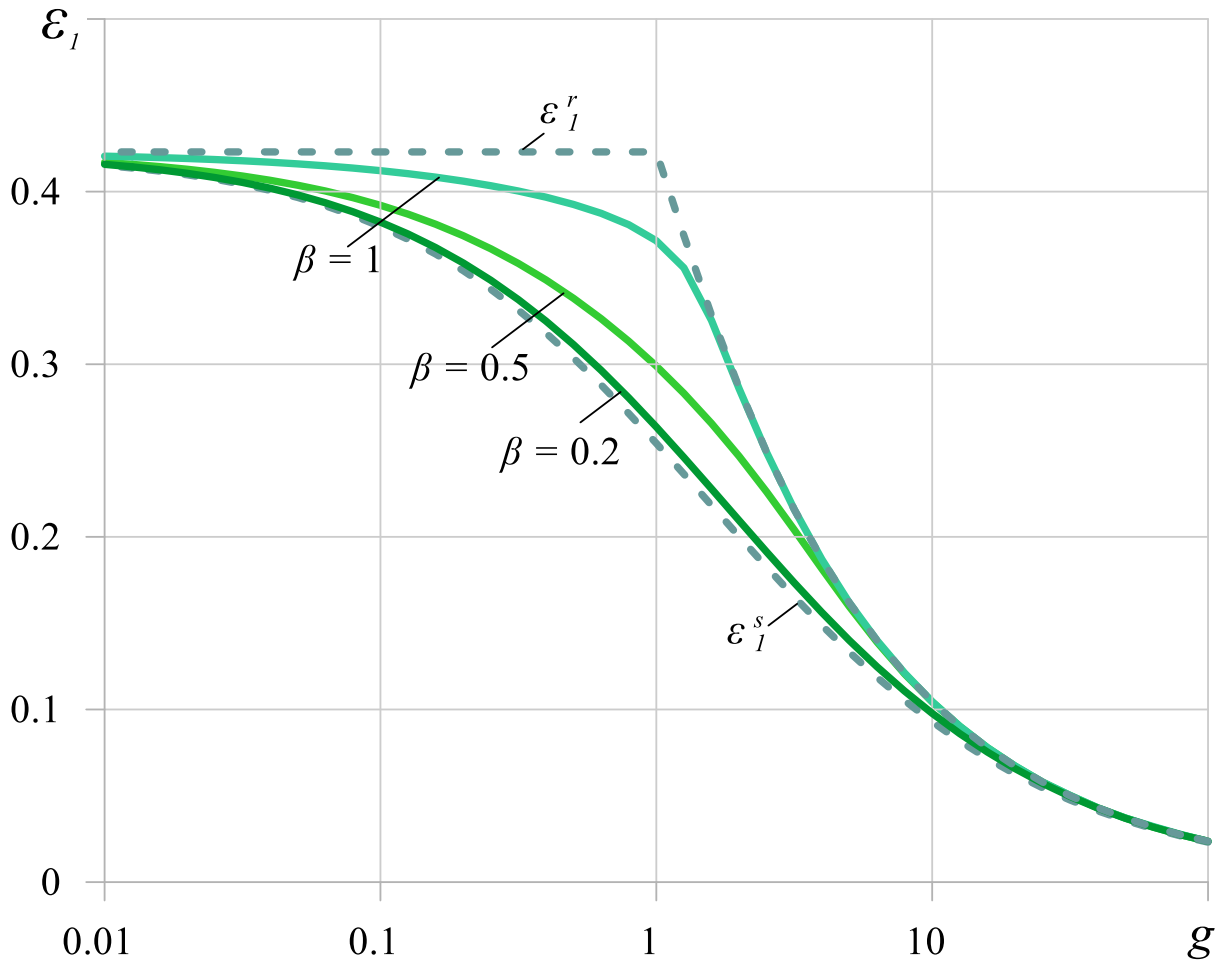


Рис. 5.11 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича.

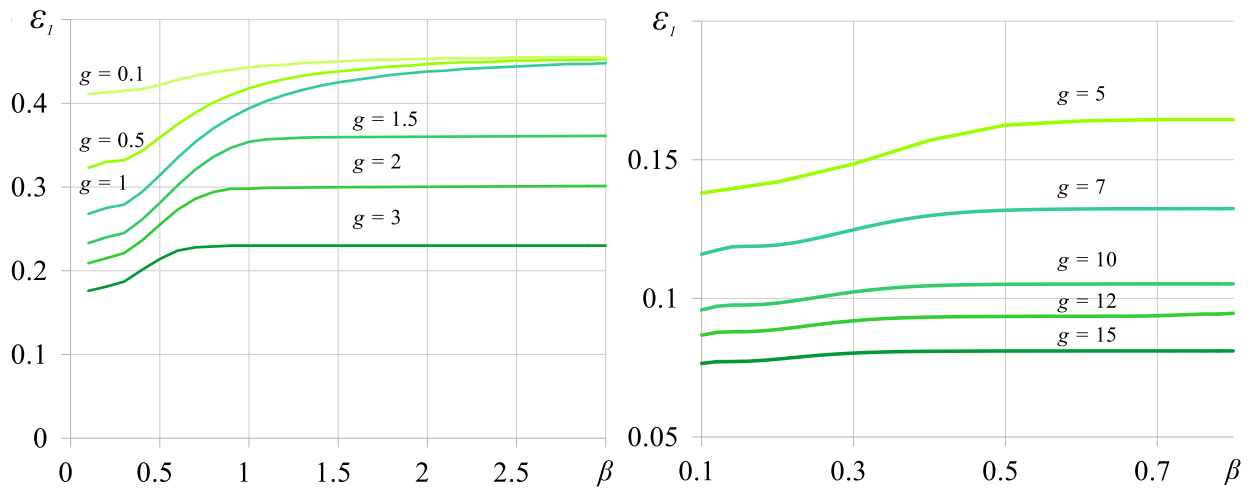


Рис. 5.12 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Трелоара.

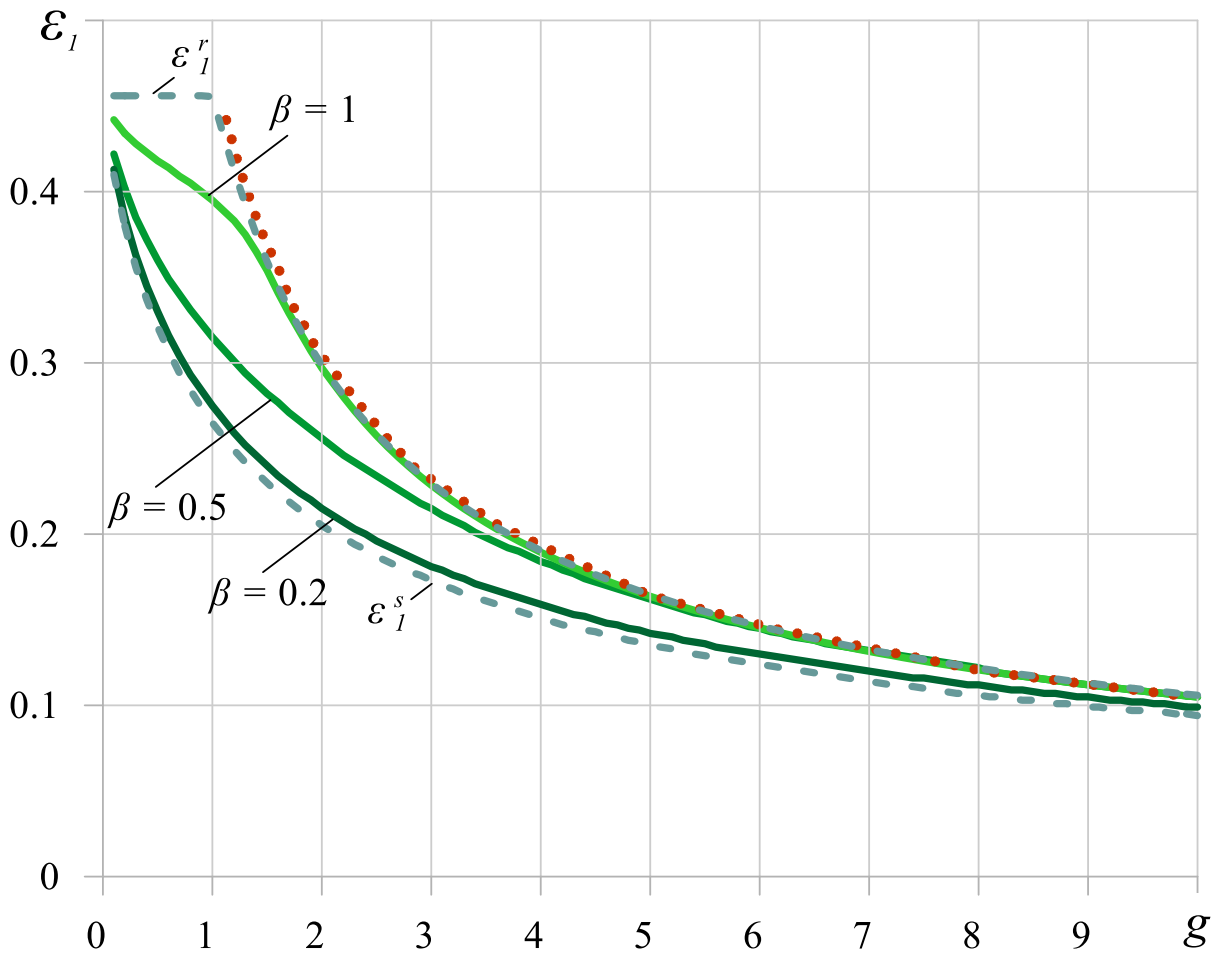


Рис. 5.13 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу Трелоара.

Як і очікувалося, критичні значення відносного стиснення збільшуються зі зростанням відносної товщини покриття. Цей ефект найбільш виражений для тонких плівок, які м'якші за підкладку або порівнянні з нею за жорсткістю. Наприклад, якщо $g = 2$, то при потовщенні покриття втричі — від $\beta = h/a = 0.3$ до $\beta = 0.9$ — критичні значення ε_1 збільшуються на 35%. Однак при аналогічному збільшенні — від $\beta = 0.9$ до $\beta = 2.7$ — зростання становить менше 1%. Подальше потовщення покриття з метою запобігання структурному руйнуванню через наявність зони проковзування на межі поділу втрачає інженерний сенс, оскільки критичні параметри стабілізуються і не демонструють значного зростання.

З рис. 5.12 видно, що зі збільшенням податливості підкладки критичні значення параметрів навантаження, що відповідають втраті стійкості, зменшуються. Це зниження більш виражене, якщо плівка жорсткіша за підкладку — подібна поведінка спостерігається і для випадку дефекту у вигляді міжфазної тріщини (див. Розділ 4). Наприклад, у випадку, коли товщина плівки становить одну чверть від довжини дефекту ($\beta = 0.5$), критичні значення ε_1 зменшуються на 18% при збільшенні параметра $g = \mu_2 / \mu_1$ вдвічі з $g = 0.5$ до $g = 1$, тоді як аналогічне збільшення з $g = 1.5$ до $g = 3$ дає вже зменшення на 24%.

Однак, для достатньо довгих дефектів (тобто достатньо тонких плівок), механічні параметри двошарових матеріалів (як у випадку жорсткішої, так і м'якшої плівки) суттєво впливають на критичні параметри — ефект, який не спостерігається в задачах з тріщинами, особливо для матеріалів з подібною жорсткістю (див. п. 4.7.2).

Цікаво, що для представленого пружного потенціалу, коли жорсткість плівки значно перевищує жорсткість підкладки, крива майже «вирівнюється». Це вказує на слабку чутливість критичних параметрів втрати стійкості до

умов контакту на межі розділу (зокрема, до наявності зони ковзання), за умови збереження загальної цілісності з'єднання. У таких випадках, коли стійкість втрачається при малих деформаціях, для оцінки критичних значень із задовільною точністю можна використовувати наближену формулу для зморщування двошарових матеріалів (див. Розділ 3). Розрахунки показують, що вже при $g = 5$ ослаблення зв'язків на межі поділу середовищ, що виражається у появі зон ковзання, призводить до зменшення критичних деформацій ε_1 не більше ніж в 1.2 раза порівняно з випадком ідеального контакту.

Описаний вище ефект, імовірно, має місце для будь-якої конститутивної моделі нестисливих тіл. Якщо ж компоненти бішару виконані зі стисливих матеріалів, указане ослаблення зв'язків може призводити до суттєвого зменшення критичних значень ε_1 навіть для достатньо жорстких плівок. Причиною цього слугує висока чутливість значень ε_1 до значень параметрів стисливості бішару ν_1, ν_2 (див. рис. 3.26 п. 3.6).

5.6.3 Вплив стисливості на критичні деформації

Дослідимо вплив стисливості бішарової системи на значення критичних параметрів навантаження. Як і у разі міжфазної тріщини (див. п. 4.6.6), обмежимося розглядом випадку, коли обидва компоненти описуються *потенціалом гармонічного типу* і мають однакову здатність до стисливості, тобто, коли виконується рівність (4.48)

На графіках, зображених на рис. 5.14 – 5.16, побудовано криві $\varepsilon_1(\beta)$ для значень коефіцієнта Пуассона $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.499$ при фіксованих значеннях параметру $g = 2, g = 12$ та $g = 100$, відповідно.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням стисливості матеріалів тіла (зі зменшенням значення ν) значення критичних деформацій

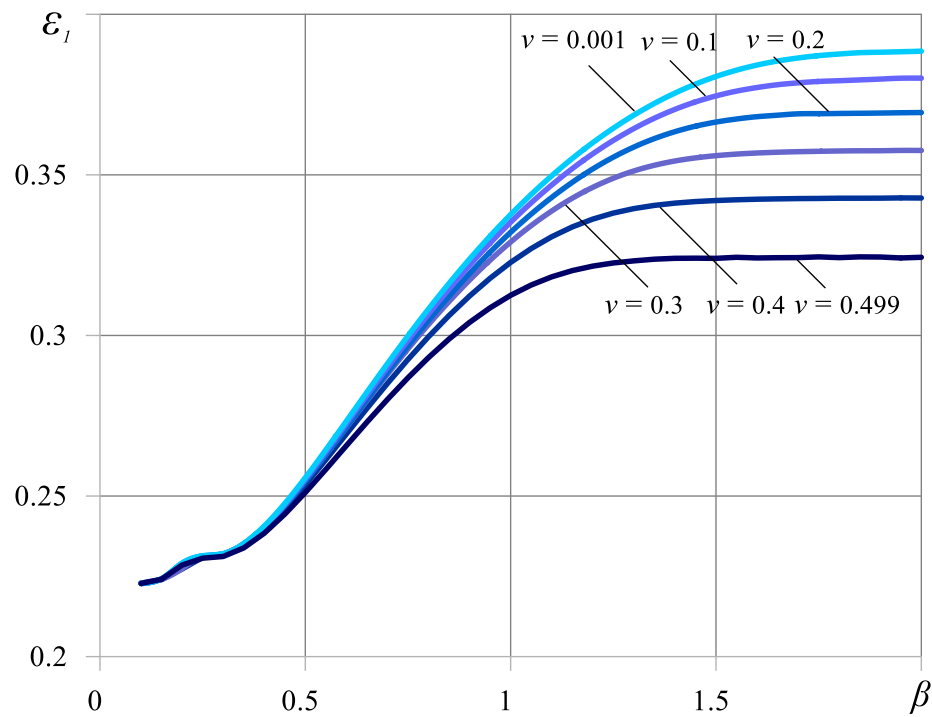


Рис. 5.14 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 2$.

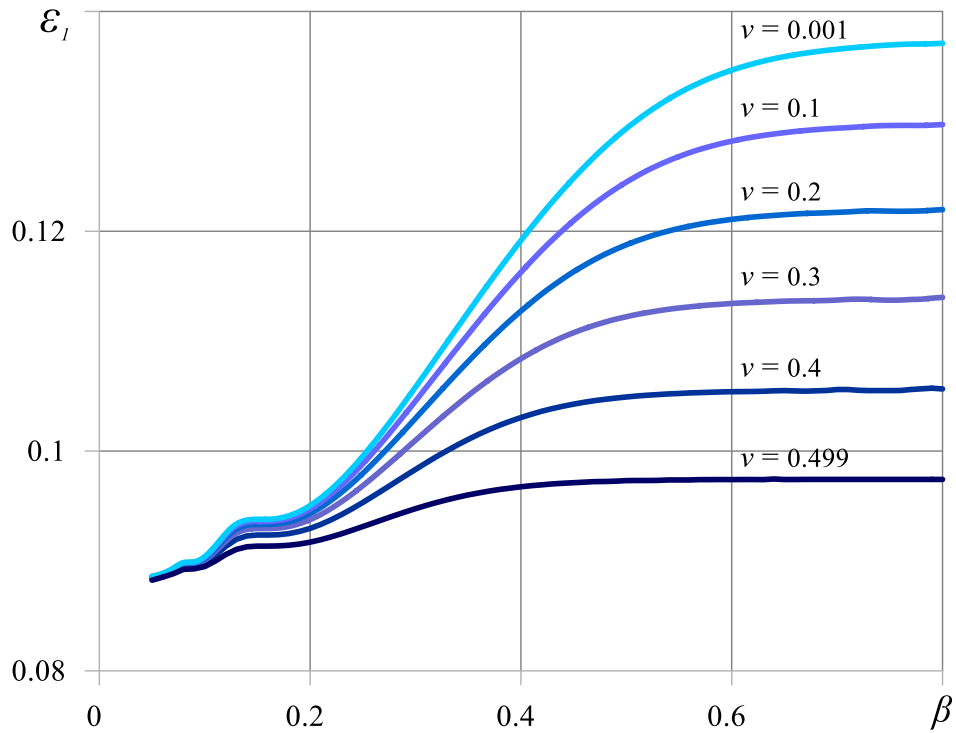


Рис. 5.15 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 12$.

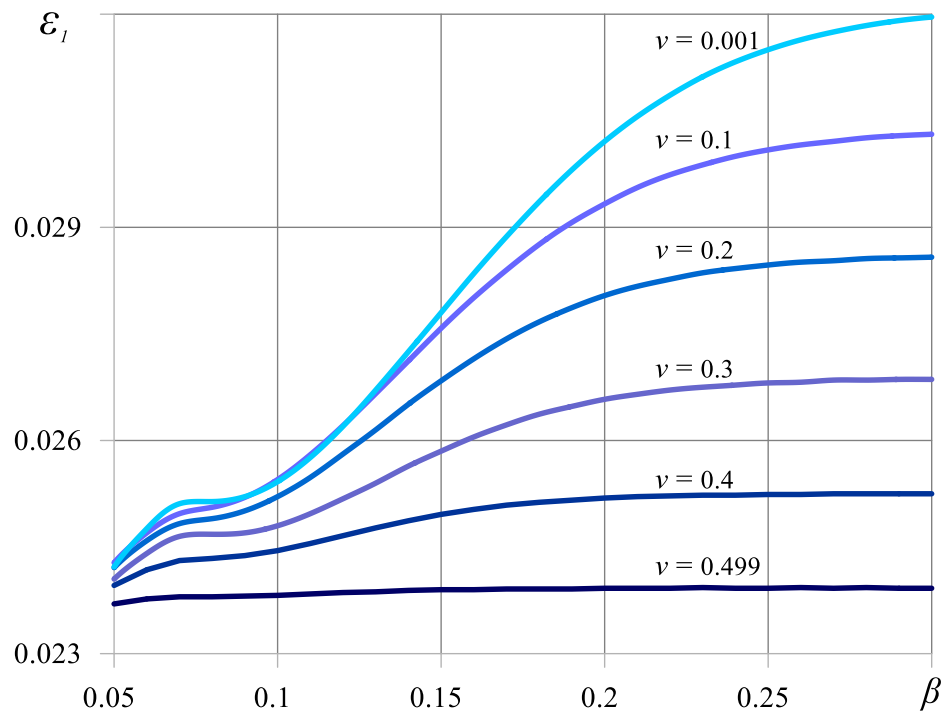


Рис. 5.16 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 100$.

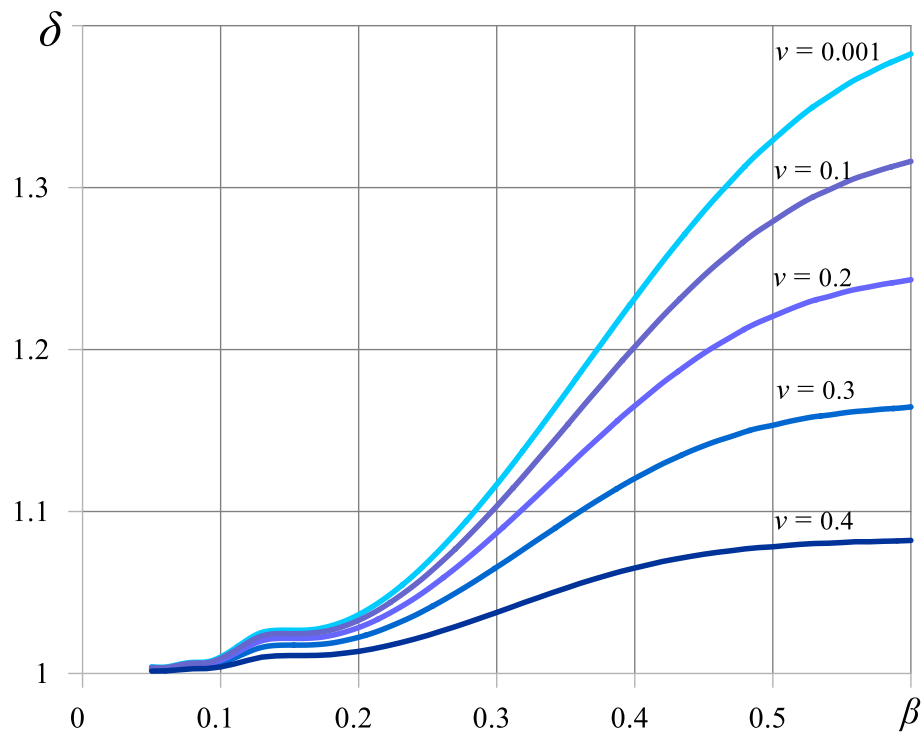


Рис. 5.17 – Залежності $\delta(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 12$.

збільшуються. При цьому для достатньо коротких міжфазних зон проковзування (достатньо великих значень β) характер впливу стисливості на критичні параметри навантаження є аналогічним випадку міжфазної тріщини і визначається розв'язком задачі для тіла без дефекту (див. п. 3.4.6).

У разі, коли довжина наявного дефекту достатньо велика (плівка покриття достатньо тонка), зміна значення параметра ν практично не впливає на величину критичного навантаження. Так, наприклад, у випадку коли плівка вдвічі жорсткіша за підкладку ($g = 2$) вплив указанного параметра на критичне значення ε_1 не перевищує 2% при значенні $\beta = 0.5$.

Графік, зображений на рис. 5.17, дає змогу оцінити зміну впливу стисливості бішару на значення критичних деформацій системи зі зміною відносної товщини плівки покриття β . На цьому рисунку для різних значень ν і значення $g = 12$ побудовано криві залежності

$$\delta(\beta) = \varepsilon_1(\beta) \Big|_{\nu_1=\nu_2=\nu} : \varepsilon_1(\beta) \Big|_{\nu_1=\nu_2=0.499}$$

критичних значень ε_1 , нормованих на значення цього ж параметра для випадку нестисливого тіла при аналогічних значеннях β і g .

5.7 Вплив міжфазної недосконалості на критичні параметри зморщування бішару

У цьому параграфі зосереджено увагу на випадку, коли довжина міжфазної зони проковзування без тертя мала. Такий дефект розглядається як недосконалість межі поділу середовищ, а його вплив на параметри втрати стійкості аналізується порівняно з випадком ідеального контакту між компонентами (тобто, коли дефект відсутній, див. розділ 3).

Відомо, що недосконалості в напівобмеженому тілі можуть впливати на критичні параметри навантаження, за яких відбувається поверхнева втрата

стійкості при стиску. Втрата стійкості з утворенням зморшок та чутливість до геометричних і фізичних недосконалостей в однорідних напівобмежених тілах [86], а також вплив фізичної нелінійності бішарових систем, виготовлених з різних матеріалів [87], в першу чергу проявляються у випадках, коли тіло зазнає великих деформацій. Це особливо актуально для систем підкладка/плівка, коли компоненти мають порівнянну жорсткість (наприклад, у [86] наведено значення $g \lesssim 5$).

Підхід на основі вбудованих недосконалостей також використовується для ініціювання втрати стійкості (див., наприклад, [188]) при реалізації скінченно-елементних схем. Вбудовані недосконалості – це вибрані регулярні скінченні елементи безпосередньо під межею поділу середовищ бішару. У таких випадках впливом недосконалості на критичні параметри зазвичай нехтують через її малий розмір.

З графіків на рис. 5.8, 5.9, 5.11, 5.13 видно, що чим менша жорсткість плівки по відношенню до жорсткості підкладки, тим коротша довжина зони проковзування, якою можна знехтувати при визначенні критичних деформацій, користуючись цими значеннями, визначеними для тіла без дефекту. Наприклад, у випадку *потенціалу Трелоара*, при $g = 6$ та $\beta = 0.2$; 0.5 ; 1 , критичне значення ε_1 відрізняється від ідеального випадку не більше ніж у 1.13 ; 1.002 ; та 1.001 разів, відповідно. При $g = 2$ ці коефіцієнти зростають до 1.389 ; 1.162 ; та 1.003 , відповідно.

Розглянемо тепер конкретний приклад, що демонструє, як у випадку компонентів з порівнянною жорсткістю наявність короткої зони ковзання впливає на критичні параметри зморщування бішару. Деформації зморщування розраховуються трьома способами: методом, запропонованим в розділі 3 (ε_1^r), методом з роботи [87] для нестисливого неогуківського бішару

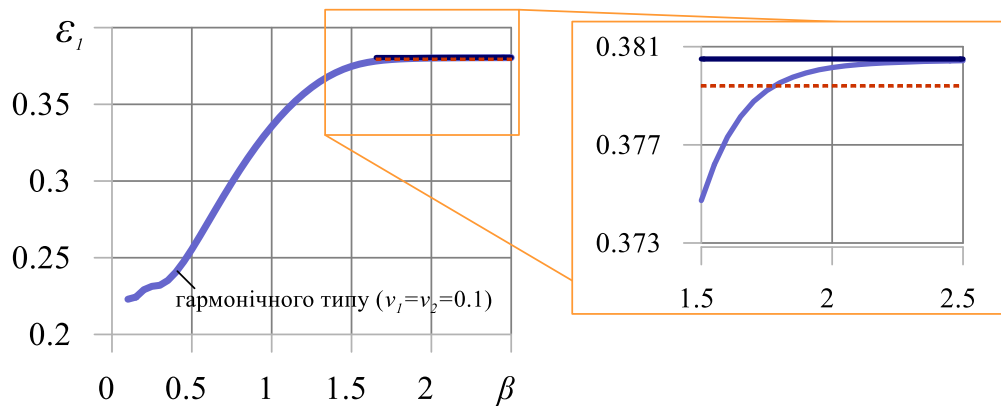
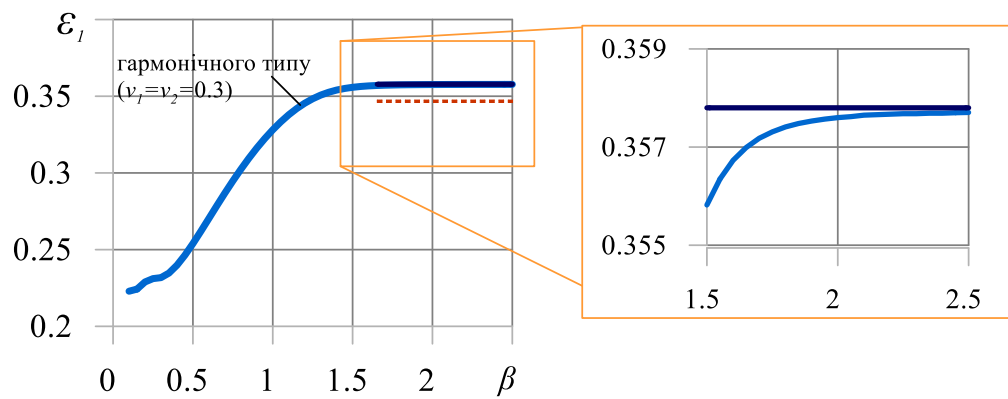
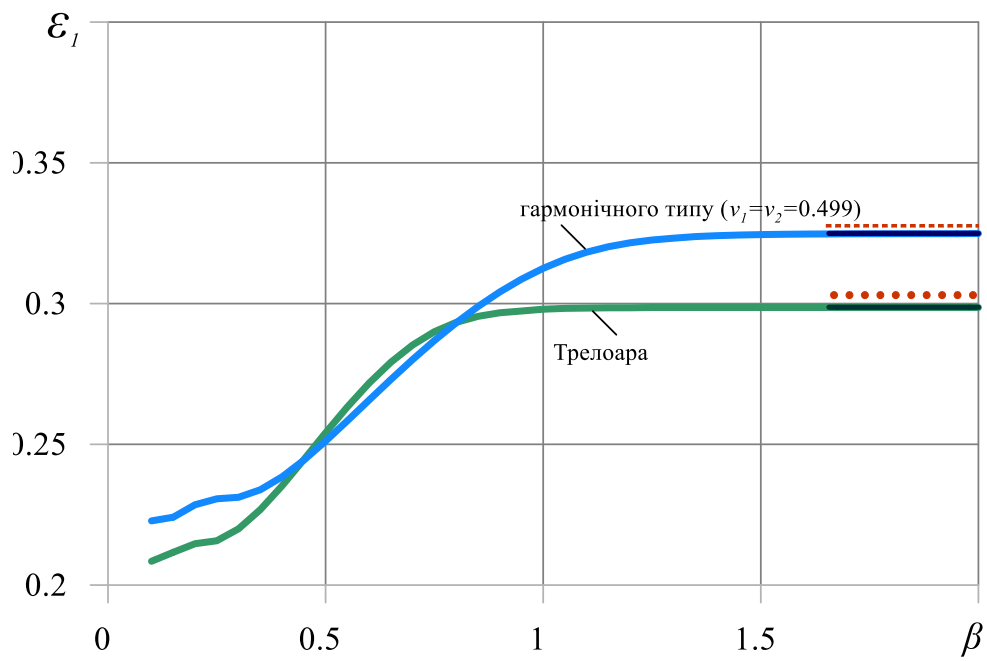


Рис. 5.18 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ при $g = 2$ для різних конститутивних моделей, а також значення критичних деформацій зморщування ε_1^r , ε_1^w , ε_1^* .

(ε_1^w) та з використанням наближеної формули (3.43), отриманої з теорії лінійних балок (ε_1^*).

Дані на рис. 5.18 представлено для випадку, коли матеріал плівки вдвічі жорсткіший за матеріал підкладки ($g = 2$). Розглянуто чотири випадки:

- два нестисливі бішари, змодельовані *пружним потенціалом гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.499$) та *потенціалом Трелоара*, що відповідає неогуківському матеріалу;
- два стисливі бішари з *потенціалом гармонічного типу* при значеннях $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

На рис. 5.18 відрізки суцільних прямих відповідають значенням ε_1^r (3.19), точкових – значенням ε_1^* , відрізки прямих з круглих маркерів – значенням ε_1^w .

Якщо припустити, що вплив зони проковзування можна вважати незначним, коли зменшення критичної деформації не перевищує 5% порівняно з випадком ідеального контакту, то допустима («інженерно безпечна») довжина дефекту (при $g = 2$) становить:

- $\sim 2.1h$ для нестисливих неогуківських та нестисливих гармонічних матеріалів, відповідно;
- $\sim 1.78h$ та $\sim 1.66h$ для стисливого гармонічного матеріалу з $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ та $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$, відповідно, де h – товщина плівки.

5.8 Вплив умов контакту між берегами міжфазного дефекту на значення критичних параметрів навантаження

У цьому параграфі стисло викладено аналіз впливу втрати зв'язку між берегами дефекту на межі поділу компонентів бішарової системи на критичні деформації та напруження стиску.

Аналіз ґрунтується на порівнянні результатів дослідження задачі на власні значення (4.38) у випадку міжфазної тріщини з результатами задачі на власні значення (5.26) для міжфазної зони гладкого проковзування.

На графіках, зображених на рис. 5.19 для випадку *потенціалу гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), та на рис. 5.20 – для випадку *потенціалу Бартенєва–Хазановича*, представлено залежності безрозмірного критичного напруження стиску $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення геометричного параметра $\beta = h/a$ для двох значень відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки: $g = 0.5$ та $g = 5$. Суцільні криві на рисунках відповідають випадку міжфазної зони проковзування, а штрихові криві – випадку міжфазної тріщини.

Коли зв'язок між берегами дефекту втрачається лише на окремих ділянках, то критичні значення ε_1 мають бути такими, щоб відповідні точки на графіках рис. 5.19, 5.20 потрапляли в затемнені області, розташовані між «верхньою» суцільною та «нижньою» штриховою кривими.

Результати дослідження для нестисливих бішарів з пружним *потенціалом Трелоара* наведено на графіках рис. 5.21, 5.22.

Криві $\varepsilon_1(\beta)$ на рис. 5.21 побудовано для значень $g = 0.5; 3; 5$. Як і раніше, суцільні криві відповідають випадку міжфазної зони гладкого проковзування, штрихові криві – випадку міжфазної тріщини.

Зменшення впливу зв'язку між берегами дефекту на значення критичних параметрів навантаження зі збільшенням геометричного параметра β та механічного параметра $g = \mu_2 / \mu_1$ демонструється даними рисунка 5.22. На ньому для $g = 0.5; 3$ та 5 зображено залежності δ – відношення критичної деформації у випадку міжфазної тріщини до критичної

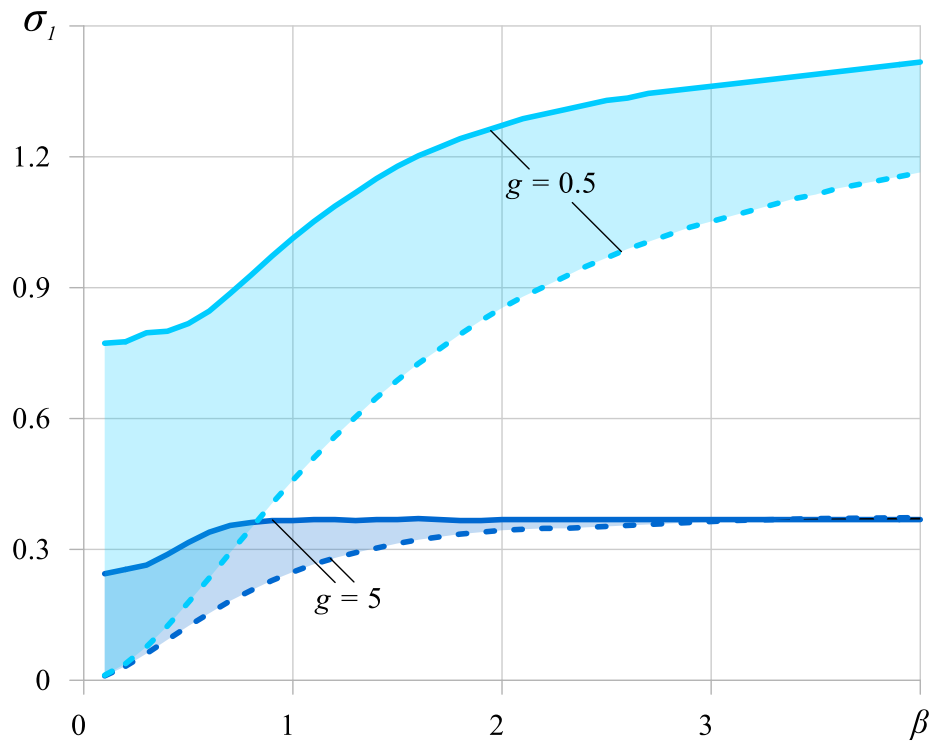


Рис. 5.19 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для міжфазної зони проковзування і міжфазної тріщини.

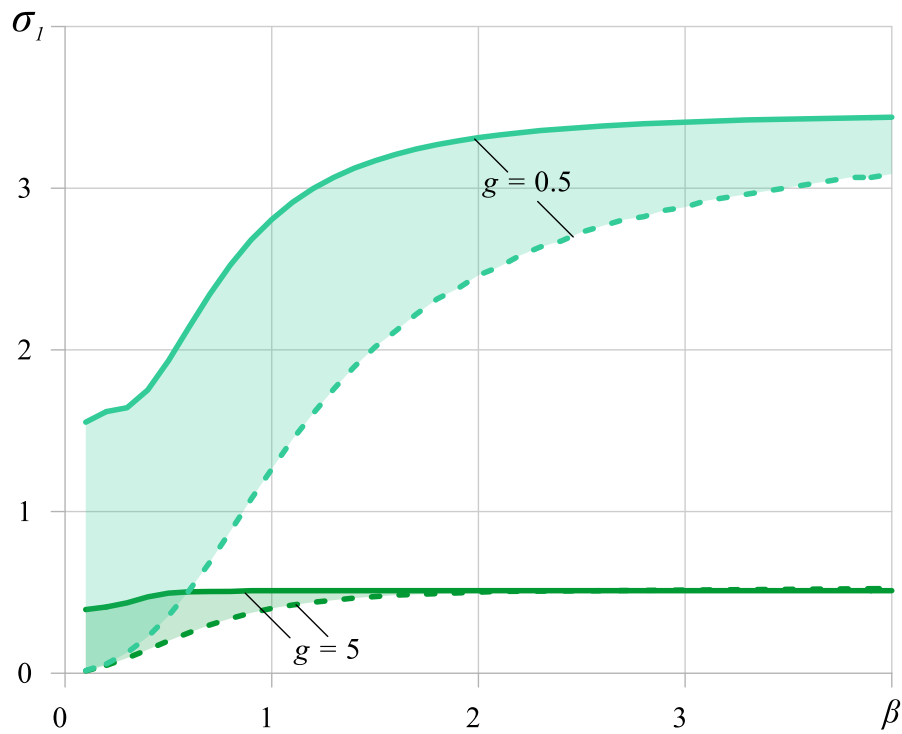


Рис. 5.20 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича для міжфазної зони проковзування і міжфазної тріщини.

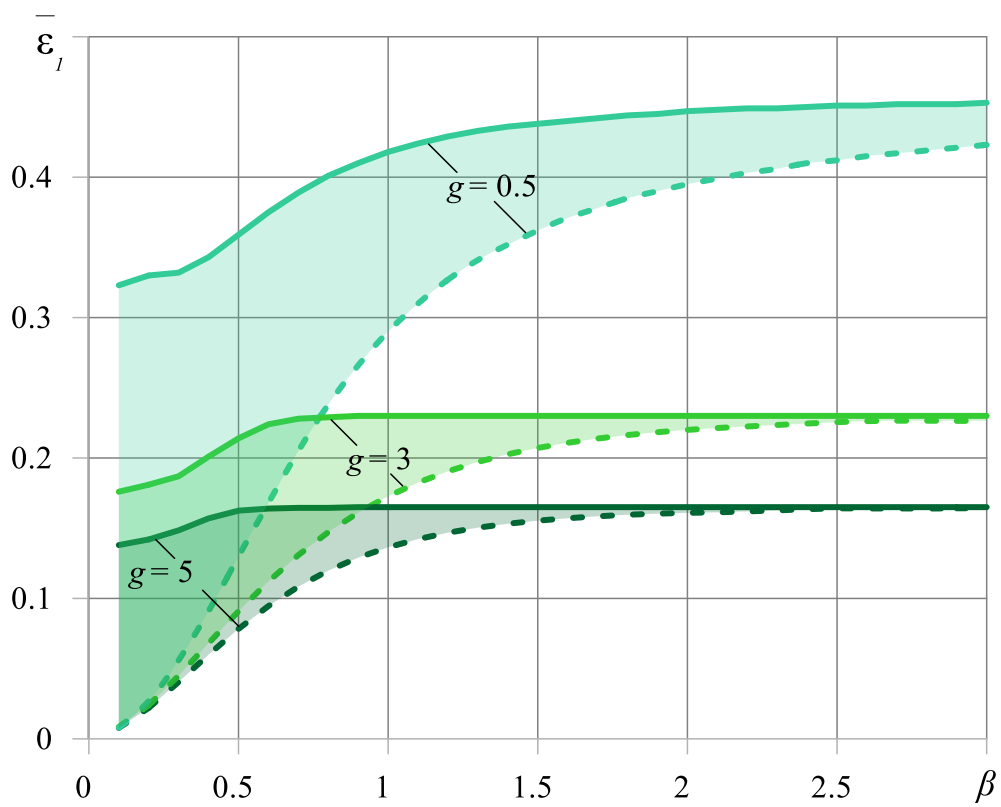


Рис. 5.21 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Трелоара для міжфазної зони проковзування і міжфазної тріщини.

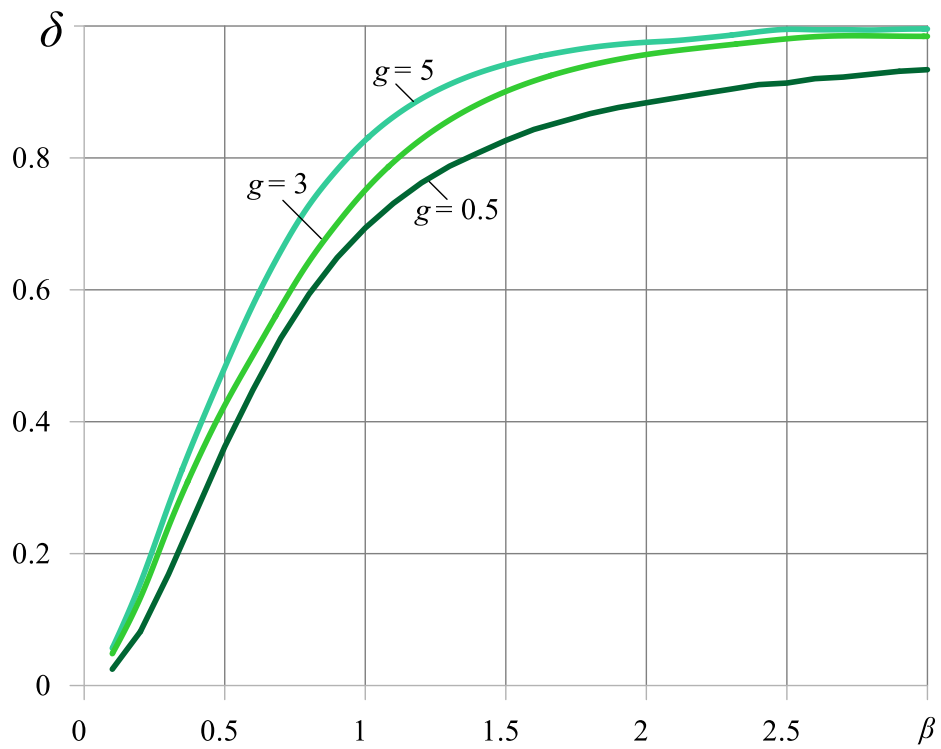


Рис. 5.22 – Залежності $\delta(\beta)$ у випадку потенціалу Трелоара.

деформації у випадку міжфазної зони проковзування – від значення параметра β .

Як свідчать наведені графіки, наявність зв'язку між берегами міжфазного дефекту в кусково-однорідному напівобмеженому тілі призводить до істотного збільшення значення критичних параметрів навантаження, коли значення параметра g досить малі або коли довжина дефекту досить велика. Наприклад, у разі, коли довжина міжфазного дефекту дорівнює подвоєній товщині плівки покриття ($\beta = 1$), то при $g = 0.5$ критичні напруження стиску в задачі для міжфазної зони проковзування перевершують критичні напруження стиску в задачі для міжфазної тріщини в 2.2 раза як для потенціалу гармонічного типу, так і для потенціалу Бартенева–Хазановича. При значенні $g = 5$ указаний коефіцієнт є меншим та становить 1.27 та 1.48, відповідно.

У той же час, у разі, коли довжина дефекту достатньо мала (або покриття достатньо товсте), умови контакту між берегами дефекту майже не впливають на критичні параметри втрати стійкості бішару незалежно від його механічних характеристик.

5.9 Вплив структури пружних потенціалів на величини критичних деформацій втрати стійкості

Як і у випадку бішарів з міжфазною тріщиною, для бішарів з міжфазною зоною гладкого проковзування у разі, коли жорсткості компонентів спів ставні, вибір їхньої конститутивної моделі істотно впливає на величини критичних параметрів навантаження (див., наприклад, верхній рис. 5.18).

На рис. 5.23 – 5.26 зображено залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для різних варіантів комбінацій пружних потенціалів.

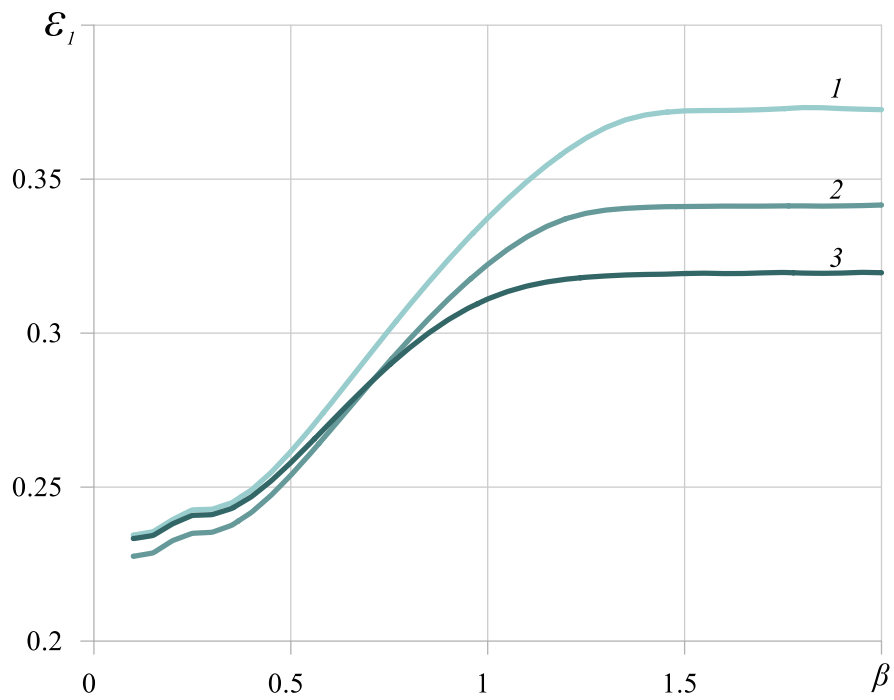


Рис. 5.23 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β для стисливої плівки ($\nu_2 = 0.3$) на нестисливій підкладці

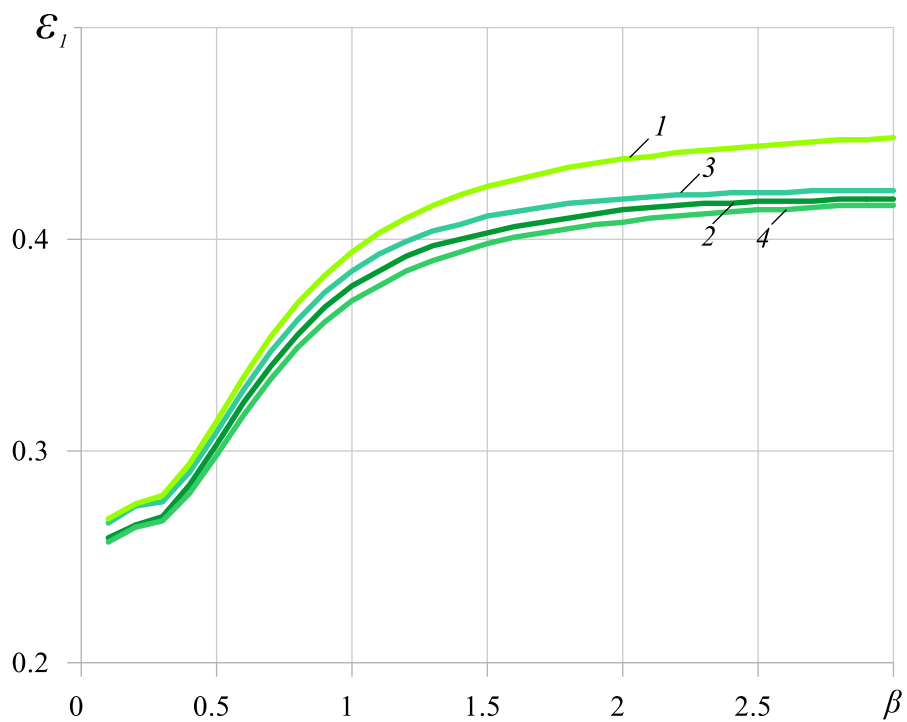


Рис. 5.24 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β при $g = 1$ для різних моделей нестисливих тіл.

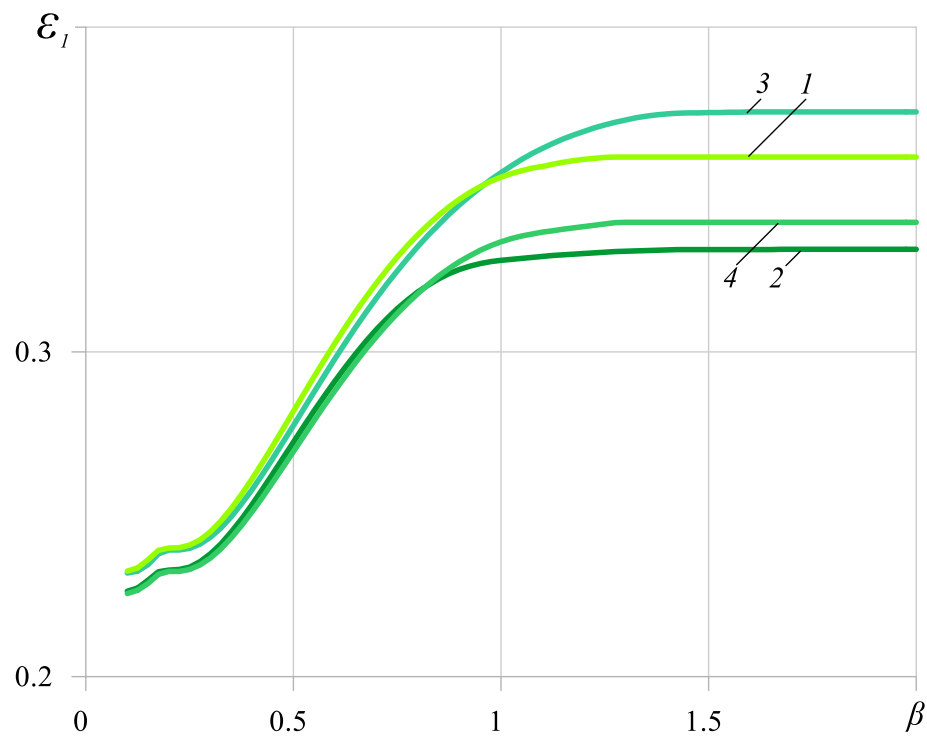


Рис. 5.25 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β при $g = 1.5$ для різних моделей нестисливих тіл.

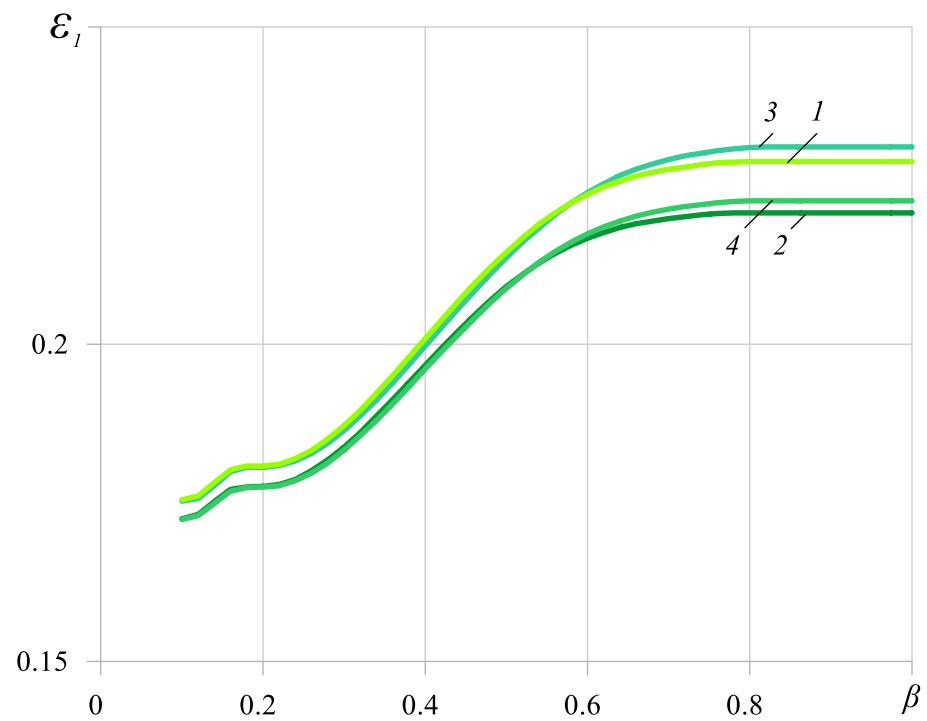


Рис. 5.26 – Залежність критичної деформації ε_1 від параметра β при $g = 3$ для різних моделей нестисливих тіл.

Рис. 5.23 присвячений випадку, коли нестислива підкладка покрита стисливою плівкою. Відношення жорсткостей становить $g = 2.5$. Плівка описується пружним потенціалом гармонічного типу ($\nu_2 = 0.3$), а підкладка – потенціалом Трелоара (крива «1»), потенціалом Бартенєва – Хазановича (крива «2») чи гармонічним потенціалом з коефіцієнтом Пуассона $\nu_1 = 0.499$ (крива «3»).

На рис. 5.24 – 5.26 наведено результати дослідження для випадку, коли компоненти бішару є нестисливими і описуються потенціалом Трелоара чи потенціалом Бартенєва–Хазановича. Розглянуто всі чотири можливі випадки комбінацій цих пружних потенціалів.

Рисунок 5.24 присвячений випадку $g = 1$, рис. 5.25 – випадку $g = 1.5$, рис. 5.26 – випадку $g = 3$. Позначення для кривих на рисунках подані в табл. 3.5. Результати дослідження демонструють, що у разі більш жорстких плівок покриття, залежність ε_1 від геометричного параметра β більшою мірою визначається структурою пружного потенціалу напівобмеженого матеріалу підкладки. Указаний ефект спостерігається і у випадку міжфазної тріщини (див. п. 4.8).

Водночас, зі збільшенням жорсткості матеріалу покриття відносно жорсткості матеріалу підкладки, вплив структури пружних потенціалів матеріалів на критичне значення ε_1 зменшується. При значенні параметра $g = 1.5$ вплив структури потенціалу не перевищує 14%, при цьому за $g = 3$ цей вплив менше 5%. Останнє узгоджується з тим, що при малих деформаціях пружні потенціали, що використовуються в роботі, наближаються до відповідних потенціалів для лінійно пружних ізотропних тіл.

Слід підкреслити, що у випадку одноконстантних пружних потенціалів ядра інтегральних рівнянь (5.19) не залежать окремо від жорсткості матеріалів μ_1 і μ_2 , але лише від їх співвідношення $g = \mu_2/\mu_1$.

Як видно з графіків на рис. 5.23 – 5.26, навіть для найпростіших однопараметричних моделей у випадку співставної жорсткості компонентів [150], фізична нелінійність, закладена в структуру пружних потенціалів, має помітний вплив на результат: система демонструє високу чутливість до вибору конститутивної моделі. Іншими словами, у випадку великих деформацій, навіть для тонких покриттів, знання лише параметрів жорсткості недостатньо для точного визначення критичних параметрів втрати стійкості. Без адекватних моделей матеріалів прогнозування стійкості втрачає надійність навіть на інженерному рівні. Цей факт робить чутливість до форми потенціалу суттєвим фактором при виборі матеріалів покриттів для гнучких конструкцій.

Коли покриття відносно тонке, вибір конститутивної моделі компонентів бішару теж суттєво впливає на значення критичних параметрів навантаження. Для порівняння, у випадку міжфазної тріщини (Розділ 4) за достатньо тонкого покриття, критичні значення деформацій нестійкості (що в цьому випадку відбувається через механізм випучування) слабо залежать навіть від стисливості матеріалів, за умови, що їхня жорсткість достатньо близька [92, 240]. Однак варто зазначити, що в останньому випадку ці критичні деформації значно нижчі, ніж для відповідного бішару з зоною проковзування.

Основні результати та висновки розділу

У даному розділі дисертаційної роботи в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості представлено напіваналітичний підхід до

визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи, компоненти якої жорстко з'єднані, при стиску вздовж міжфазної зони гладкого проковзування.

Граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням інтегрального перетворення Фур'є зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненого додатковою умовою, яке досліджується чисельно. При цьому, як і у випадку міжфазної тріщини (розділ 4), розглянуто всі чотири можливі випадки комбінацій співвідношень між коренями характеристичних рівнянь, записаних для пружних потенціалів складових матеріалів тіла. Це дозволяє стверджувати, що поставлену задачу з визначення критичних параметрів навантаження розв'язано в загальному вигляді для довільної комбінації пружних потенціалів стисливих або нестисливих компонентів бішарової системи.

Для одержаного інтегрального рівняння проведено дослідження неперервності його ядра. Показано, що математичні обмеження на області неперервності мають строге фізичне пояснення.

Чисельні результати з визначення критичних параметрів навантаження представлено для однієї моделі стисливих і двох моделей нестисливих гіперпружних матеріалів. Валідація результатів відбувається шляхом порівняння з граничними випадками – задачами для тіл з дефектом «нульової довжини» (рис. 3.1.а) та «нескінченно довгою» зоною проковзування (рис. 3.1.б).

У випадку, коли довжина зони проковзування достатньо мала вивчено питання впливу такої міжфазної недосконалості на значення критичних параметрів навантаження.

На основі порівняння результатів з визначення критичних параметрів навантаження в задачах для міжфазної тріщини та зони гладкого проковзування досліджено вплив втрати зв'язку між берегами дефекту межі поділу середовищ на зменшення цих параметрів.

Наостанок досліджено питання чутливості критичних значень параметрів навантаження до вибору конститутивних моделей плівки та підкладки.

Аналіз одержаних результатів дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. Якісний характер залежностей критичних параметрів навантаження від механічних характеристик матеріалів та геометричного параметру бішарової системи в задачі для міжфазної зони проковзування в цілому є аналогічним випадку задачі для міжфазної тріщини. Наступні висновки, сформульовані в розділі 4, залишаються справедливими при дослідженні стиску бішару вздовж міжфазної зони гладкого проковзування: пп. 1, 2, 3, 5a, 5b, 5d, 7a, 7b, 8.
2. При збільшенні довжини зони проковзування (зменшенні товщини покриття) критичні параметри втрати стійкості прямують до відповідних значень в задачі про стиск бішару вздовж межі поділу компонентів, що проковзують без тертя (рис. 3.1.б).
3. Якщо жорсткішим з двох матеріалів бішарової системи є матеріал плівки покриття, то для досліджуваних в роботі потенціалів наявність недосконалості межі поділу у вигляді міжфазної зони проковзування можна не враховувати при визначенні критичних параметрів навантаження стиску при значеннях $\beta = h / a > 3$.
4. У разі використання потенціалу гармонічного типу для обох складових бішару у випадку їх однакової стисливості зміна значення коефіцієнта

Пуассона практично не впливає на величину критичного навантаження у разі, коли довжина наявного дефекту достатньо велика (плівка покриття достатньо тонка).

5. Якщо довжина міжфазної зони проковзування достатньо мала або відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки достатньо велике, то втрата зв'язку між берегами дефекту не призводить до суттєвого зменшення критичних параметрів навантаження.

6. Вибір конститутивної моделі близьких за жорсткістю компонентів бішарової системи суттєво впливає на значення критичних параметрів навантаження не тільки у випадку достатньо коротких, а й, на відміну від задачі про міжфазну тріщину, у випадку достатньо довгих дефектів. При цьому вплив структури пружного потенціалу є дещо більшим у випадку зони проковзування, ніж у випадку міжфазної тріщини.

В роботі розглянуто граничний випадок дефекту зі зв'язаними берегами – зони *гладкого* проковзування. Дослідження ж аналогічної задачі у випадку, коли між берегами дефекту наявне *тертя*, безсумнівно, представляє суттєвий інтерес для подальшого розширення застосовності запропонованого методу. Формулювання відповідної граничної умови з використанням того чи іншого закону тертя приводить до певних математичних труднощів, які становлять предмет майбутніх досліджень. Слід зазначити, що наявність тертя між берегами зони проковзування має призводити до збільшення значень критичних параметрів навантаження, а отже висновки, сформульовані на основі порівняння результатів задачі, що розглядається, з результатами аналогічної задачі для тіла без міжфазного дефекту (наприклад, п. 3 висновків) залишаються справедливими і за наявності тертя.

Крім того, науковий інтерес представляє вивчення *форм* втрати стійкості, які мають місце при стиску бішару вздовж зони проковзування на межі поділу. Форми втрати стійкості не можуть бути визначені в межах поточної реалізації запропонованого напіваналітичного методу. Автор припускає, що у разі достатньо коротких дефектів механізм втрати стійкості є аналогічним випадку міжфазної тріщини і полягає у зморщуванні вільної поверхні зразка. Коли ж зона проковзування достатньо довга, механізм втрати стійкості, ймовірно, має більш складний характер, який визначається «конкуренцією» між локальною нестійкістю частини матеріалу в області дефекту та зморщуванням плівки в області над зоною проковзування.

РОЗДІЛ 6 СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНИХ БІШАРОВИХ СИСТЕМ З КОМПОНЕНТАМИ, ЩО ПРОКОВЗУЮТЬ, ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Цей розділ роботи присвячено дослідженню критичних параметрів втрати стійкості гіперпружних бішарових систем з компонентами, що проковзують без тертя, при їх стиску вздовж міжфазної ненавантаженої тріщини.

Стиск бішарових систем з проковзуючими компонентами у разі відсутності дефектів на межі поділу середовищ було розглянуто в розділі 3 дисертаційної роботи. На етапі виробництва або в процесі експлуатації відповідних тонкоплівкових елементів, які широко використовуються, наприклад, в біомедицині чи мікроелектроніці, на певній ділянці межі поділу середовищ можливою є втрата зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла та утворення тріщини, береги якої не контактують. Відповідні задачі про стиск бішарів з компонентами, що проковзують без тертя, за наявності міжфазної тріщини раніше не досліджувалися.

У даному розділі пропонується напіваналітичний підхід до визначення критичних деформацій втрати стійкості таких бішарових систем із гіперпружними компонентами. Дослідження проводиться в межах строгої постановки граничної задачі плоскої деформації ТЛТСДТ. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.55), гранична задача, сформульована в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням апарату інтегрального перетворення Фур'є зводиться до задачі на власні значення інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Останнє рівняння досліджується чисельно після визначення області неперервності його ядра.

Оскільки описана методика детально викладена та апробована у розділах 3–5, у цьому розділі розглянуто лише один із чотирьох можливих випадків, – випадок, коли характеристичні рівняння, записані для пружних потенціалів матеріалів тіла мають рівні корені – який є найбільш показовим для аналізу. Інші випадки не подаються, оскільки якісна картина збігається з попередніми результатами, а кількісні дані можуть бути отримані аналогічним чином.

Критичні параметри навантаження визначаються для низки конкретних пружних потенціалів для стисливих і нестисливих тіл. Проводиться аналіз залежності отриманих значень від механічних та геометричних параметрів бішару. Результати дослідження порівнюються з результатами для аналогічної задачі про стиск того ж бішару у разі відсутності міжфазних дефектів (рис. 3.1.б), яка є граничним випадком задачі для тріщини «нульової довжини».

В контексті порівняння результатів з результатами Розділу 4, досліджується вплив послаблення зв'язку між компонентами бішару в області поза тріщиною на значення критичних параметрів навантаження.

На завершення розділу результати критично обговорюються в контексті перспектив подальших досліджень і формулюються висновки.

Результати, представлені в розділі, відображені в публікаціях автора [37, 78, 160].

6.1 Постановка задачі. Гранична задача для гармонічних потенціальних функцій

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, що складається з двох компонент:

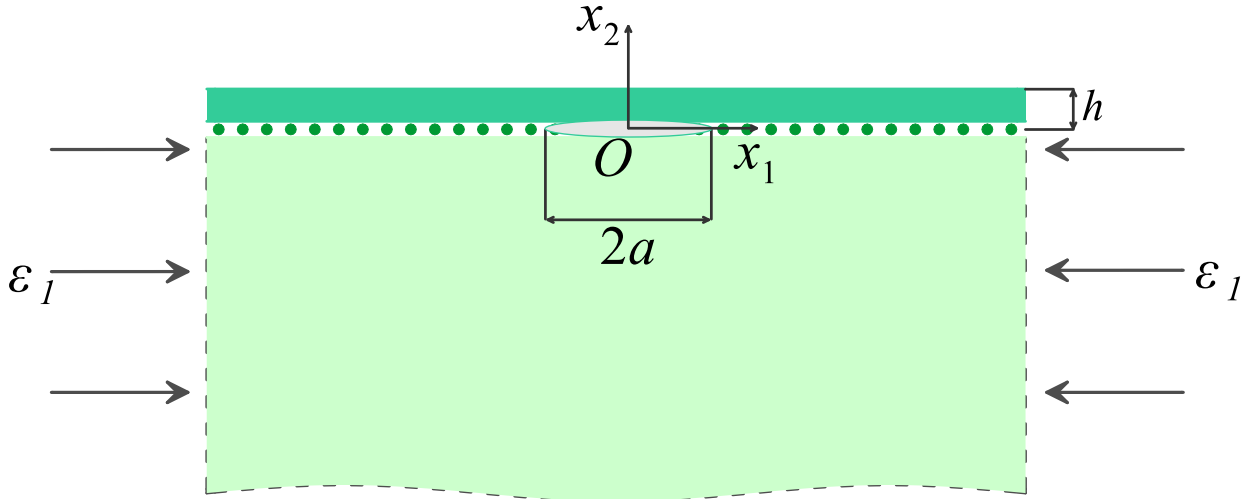


Рис. 6.1 – Бішарова система з проковзуючими компонентами при стиску вздовж міжфазної тріщини.

напівобмеженої гіперпружної підкладки «1» ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «2» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ є ненавантаженою.

Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну ненавантажено тріщину (відшарування) довжини $2a$ (рис. 6.1); поза тріщиною компоненти тіла проковзують один відносно одного без тертя.

Нехай на нескінченності бішарова система стискається таким чином, що докритичний напружено-деформований стан, який реалізується, в тілі є статично визначеним, однорідним і описується виразами (3.1) – (3.4).

Граничні умови сформульованої задачі запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(2)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = h, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, \quad t_{21}^{(1)} = 0, \quad t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a); \\
 u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукається

таке перше значення λ_1 (при його зменшенні починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, яке відповідає недеформованому стану), при якому за неперервного збільшення навантаження стиску, сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 6.1) бішарової системи.

За аналогією з тим, як це було зроблено в розділах 4 (п. 4.2) та 5 (п. 5.2), зведемо задачу з граничними умовами (6.1) до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій – складових представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.41), (2.42).

У розділі 6 проілюструємо хід розв'язання у випадку (i) (див. п. 3.2), тобто коли для обох матеріалів тіла реалізується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь: $n_1^1 = n_2^1$, $n_1^2 = n_2^2$. Випадки (ii) – (iv) досліджуються аналогічно.

Підставляючи представлення (3.7) загальних розв'язків рівнянь рівноваги в граничні умови (6.1), одержуємо граничні умови задачі, подані в термінах потенціальних гармонічних функцій

$$\begin{aligned}
 & k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2} = 0, \\
 & k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2} = 0, h_1 = (n^2)^{-1/2} h \quad (z_2 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 & k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2}, \\
 & k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} = 0, k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad (z_{1,2} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty) \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

$$k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} = 0 \quad (z_2=0, |x_1| \leq a);$$

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} = p_1^2 F^{(2)} + p_2^2 \Phi^{(2)} \quad (z_{1,2}=0, |x_1| > a).$$

6.2 Інтегральні рівняння задачі

Представимо невідомі потенціальні гармонічні функції $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $i=1,2$ у вигляді косинус-розкладів Фур'є з параметром λ за координатою x_1 , зберігши форму представлень (3.15).

Для зручності подамо визначник (3.23) матриці M_1^s коефіцієнтів системи рівнянь (3.21) у вигляді

$$\det M_1^s = -\mu^2 (k_2^2)^2 k_5^2 (k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1) \delta(\mu),$$

$$\delta(\mu) = (1 - \coth^2 \mu)(r_1 \mu + r_2) + k(r_1 k + r_2 \coth \mu), \quad (6.3)$$

$$k = \frac{k_2^2 k_4^2 - k_1^2 k_5^2}{k_2^2 k_5^2}, \quad l = \frac{k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1}{k_2^1 k_5^1}, \quad r_1 = l^{-1} \left(p_2^1 \frac{k_1^1}{k_2^1} - p_1^1 \right), \quad r_2 = p_2^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} - p_1^2, \quad \mu = \lambda h_1.$$

Задовольняючи спочатку наскрізні граничні умови – перші п'ять умов (6.2), приходимо до наступної системи рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$:

$$k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 = 0;$$

$$\mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 = 0;$$

$$k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2 \coth \mu \cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2 \coth \mu \cdot D_2 = 0; \quad (6.4)$$

$$k_1^1 A + k_2^1 B = 0;$$

$$k_1^2 \coth \mu \cdot C_1 + k_1^2 C_2 + k_2^2 \coth \mu \cdot D_1 + k_2^2 D_2 = 0,$$

з якої визначаємо решту невідомих функцій через $C_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{-k^2 - \mu^2 (1 - \coth^2 \mu)}{l\mu} \right] C_2, \\
B &= \frac{k_1^1}{k_2^1} \left[\frac{k^2 + \mu^2 (1 - \coth^2 \mu)}{l\mu} \right] C_2, \\
C_1 &= \left(\frac{k}{\mu} - \coth \mu \right) C_2, \\
D_1 &= \left[\mu - \frac{k_1^2}{k_2^2} \left(\frac{k}{\mu} + \coth \mu \right) \right] C_2, \\
D_2 &= \left(-\frac{k_1^2}{k_2^2} - \mu \coth \mu \right) C_2
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Дві останні умови (6.4), враховуючи (6.5), приводять до парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda \delta_1(\lambda h_1) C_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0 \quad (|x_1| \leq a), \\
\int_0^\infty \delta(\lambda h_1) C_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda &= 0 \quad (|x_1| > a), \\
\delta_1(\mu) &= k^2 + \mu^2 (1 - \coth^2 \mu).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Далі зведемо (6.6) до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду.

Покладемо в (6.6)

$$\delta(\lambda h_1) C_2(\lambda) = \lambda^{-2} \int_0^a \varphi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \tag{6.7}$$

де $\varphi(t)$ — неперервно диференційована невідома функція разом зі своєю похідною на інтервалі $[0, a]$.

Представлення (6.7) дозволяє автоматично задовольнити друге рівняння в (6.6), тоді як перше рівняння приводить до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta = 0,$$

$$K(\xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{\delta_1(n^{-1/2} \beta \lambda)}{\delta(n^{-1/2} \beta \lambda)} \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda, \quad (6.8)$$

$$\beta = h/a, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1} x_1$, $\eta \equiv a^{-1} t$ відносно невідомої безрозмірної функції $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi)$.

Таким чином, вихідна задача зводиться до задачі (6.8) про власні значення відносно параметра $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1$, $\lambda_1 < 1$ (або критичної деформації ε_1). Параметр λ_1 характеризує докритичний стан і нелінійно входить до ядра інтегрального рівняння (6.8).

Інтегральне рівняння (6.8) отримано в загальному вигляді для комбінацій двох різних стисливих або нестисливих гіперпружних матеріалів у випадку, коли вони описуються пружними потенціалами, для яких мають місце випадки рівних коренів характеристичних рівнянь.

Неперервність ядра $K(\xi, \eta)$ інтегрального рівняння порушується, коли для деякого значення $\mu > 0$ виконується наступна умова (порівняти з (3.23), (6.3)):

$$\delta(\mu) = 0. \quad (6.9)$$

Враховуючи результати розділу 3 стосовно бішарів з компонентами, що проковзують, доходимо висновку, що ядро $K(\xi, \eta)$ інтегрального рівняння (6.8) є неперервним для всіх $\lambda > 0$, а відповідний невластний інтеграл збіжний

для всіх допустимих значень змінних ξ , η та механічних параметрів тіла за умови виконання наступної умови:

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^s. \quad (6.10)$$

Легко дати строге фізичне обґрунтування для математичного обмеження (6.10).

Дійсно, значення параметрів критичного навантаження (значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$) в задачі для тіла, ослабленого тріщиною (рис. 6.1), не може перевищувати значення аналогічних параметрів у задачі для тіла без тріщини (рис. 3.1.б).

Слід також зазначити, що задачу, яка досліджується в даному розділі, можна розглядати як граничний випадок задачі на рис. 3.1.б, для тріщини «нульової довжини».

6.3 Чисельне дослідження інтегрального рівняння. Аналіз практичної збіжності.

Числове дослідження задачі на власні значення (6.8) реалізовано за допомогою методу Бубнова – Гальоркіна за аналогією з тим, як це зроблено в пп. 4.5, 5.5.

Невідома функція $g(\xi)$ апроксимується у вигляді лінійної комбінації перших N координатних функцій повного набору степеневих функцій $1, \xi, \xi^2, \dots$ лінійно незалежною в інтервалі $[0, 1]$

$$g(\xi) = \sum_{j=1}^N g_j \xi^{j-1}.$$

Підставляючи останній вираз у (6.8) та припускаючи умови ортогональності лівих частин рівнянь до координатних функцій, отримуємо

наступну систему однорідних лінійних рівнянь розмірності $N \times N$ відносно невідомих коефіцієнтів g_j :

$$\sum_{j=1}^N g_{ij} g_j + c_i \cdot c = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.11)$$

$$g_{ij} = \int_0^1 \left[\int_0^1 K(\xi, \eta) \eta^{j-1} d\eta \right] \xi^{i-1} d\xi, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (6.12)$$

Змінюючи порядок інтегрування у (6.12), отримуємо наступне представлення для коефіцієнтів g_{ij} :

$$g_{ij} = \int_0^\infty \frac{\delta_1(n^{-1/2} \beta \lambda)}{\lambda \delta(n^{-1/2} \beta \lambda)} \left[\left(\int_0^1 \eta^{j-1} \cos \lambda \eta d\eta - \frac{1}{j} \cos \lambda \right) \int_0^1 \xi^{i-1} \cos \lambda \xi d\xi \right] d\lambda. \quad (6.13)$$

Характер збіжності методу числового дослідження, що використовується для кількості N координатних функцій, ілюструється даними, наведеними в таблиці 6.1.

У таблиці 6.1 наведено критичні значення ε_1 , отримані в результаті розв'язання задачі на власні значення (6.12) для різних значень відносної (нормованої на половину довжини міжфазної тріщини) ширини плівки $\beta = h/a$ при значенні параметра $g = \mu_2/\mu_1 = 2$. Дані наведено для гармонічного потенціалу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

β	N					
	2	3	4	5	6	7
0.1	0.009	0.01	0.011	0.009	0.007	0.007
0.5	0.058	0.076	0.082	0.081	0.082	0.082
1	0.133	0.148	0.153	0.155	0.154	0.154
1.5	0.177	0.186	0.189	0.190	0.190	0.190
2	0.199	0.204	0.205	0.206	0.206	0.206

Таблиця 6.1 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу гармонічного типу ($g = 2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

6.4 Аналіз числових результатів

У цьому параграфі наведено результати числового дослідження задачі на власні значення (6.11) відносно критичного параметру ε_1 – значення критичного відносного укорочення, яке відповідає втраті стійкості тонкої плівки покриття, яка проковзує без тертя відносно більш товстої підкладки при стиску вздовж міжфазної тріщини.

Для пружного потенціалу гармонічного типу для стисливих тіл, а також потенціалу Бартенева–Хазановича для нестисливих тіл аналізуються залежності критичних параметрів навантаження від механічних та геометричних параметрів бішару.

Результати числового дослідження задачі на власні значення представлені на графіках, зображених на рис. 6.2, 6.3 для випадку, коли обидва матеріали бішарової системи описуються *потенціалом гармонічного типу* (2.70) ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) та на рис. 6.4, 6.5 – *потенціалом Бартенева–Хазановича* (2.72).

На рис. 6.2, 6.4 зображено залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної товщини плівки покриття $\beta = h/a$ при деяких різних значеннях відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = \mu_2 / \mu_1$.

На рис. 6.3, 6.5 показано залежності критичної деформації ε_1 від значення геометричного параметра β для різних значень параметра g .

Аналогічно випадку тріщини (розділ 4) та зони гладкого проковзування (розділ 5) на межі поділу двох жорстко з'єднаних середовищ, критичні значення ε_1 збільшуються як зі зменшенням відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки, так і зі зменшенням

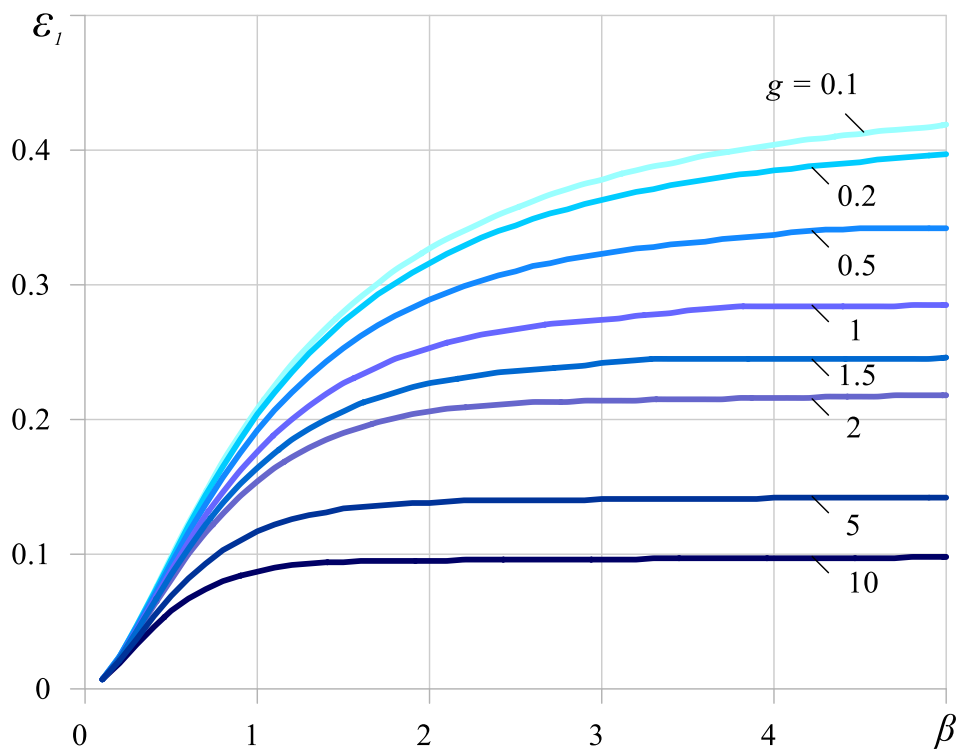


Рис. 6.2 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях g .

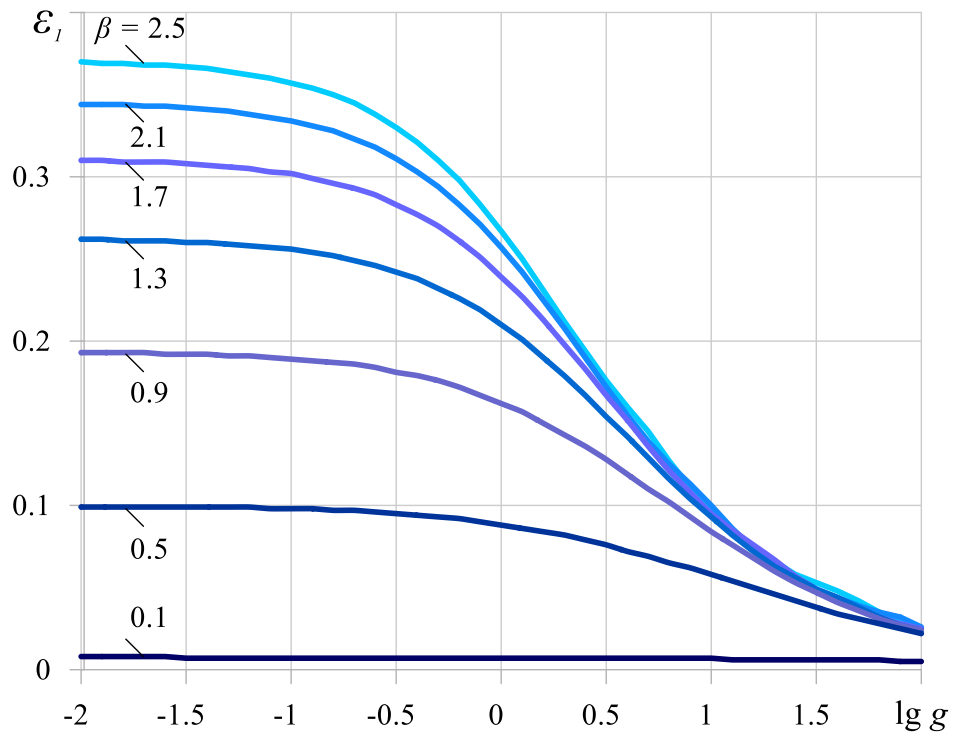


Рис. 6.3 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях β .

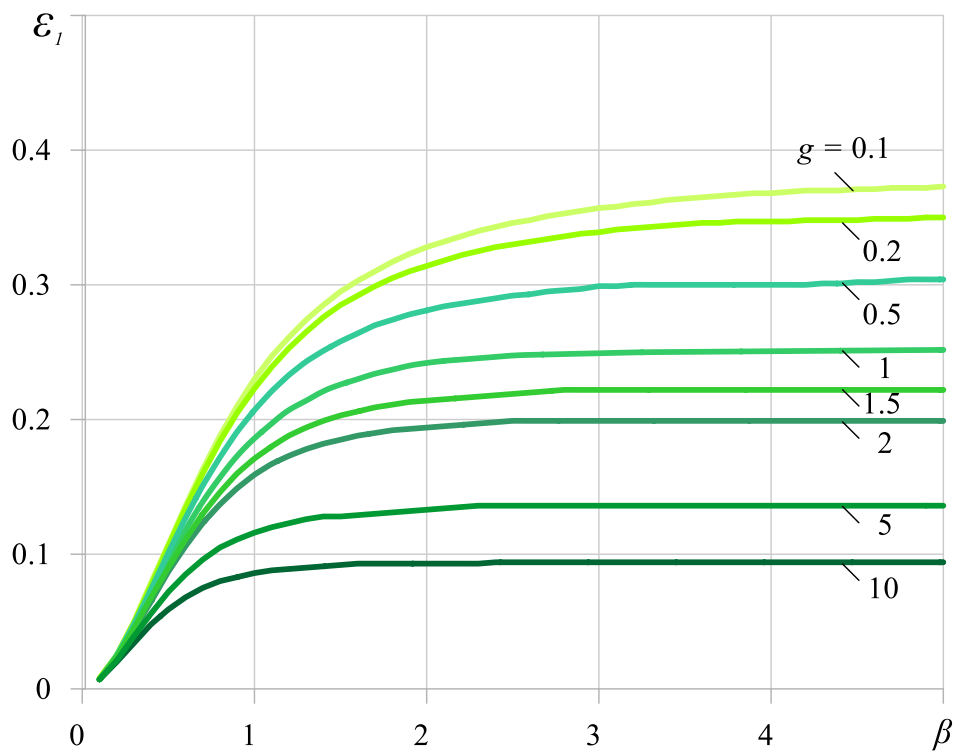


Рис. 6.4 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича при різних значеннях g .

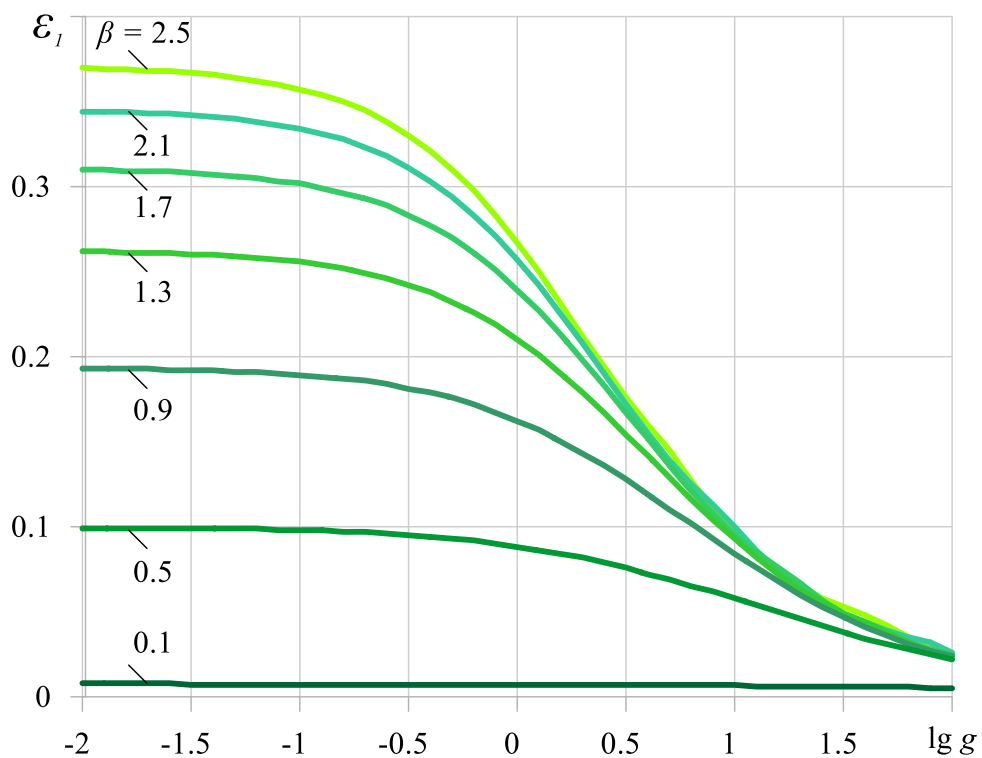


Рис. 6.5 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича при різних значеннях β .

довжини міжфазного дефекту (збільшенням товщини покриття). При цьому в останньому випадку справедливою є асимптотика

$$\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1^s \text{ при } \beta \rightarrow \infty, \quad (6.14)$$

де ε_1^s – критична деформація зморщування плівки на напівобмеженій підкладці у випадку гладкого проковзування (див. Розділ 3).

Асимптотика (6.14) свідчить про узгодженість розв'язку задачі, що розглядається, з розв'язком відповідної задачі для тіла без міжфазного дефекту (рис. 3.1.б).

На графіку, зображеному на рис. 6.6 для випадку, коли компоненти бішару описуються пружним потенціалом гармонічного типу ($g = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), представлено такі криві.

Суцільна крива «1» на рис. 6.6 відповідає випадку міжфазної тріщини на межі поділу жорстко з'єднаних середовищ (рис. 4.2), крива «2» – випадку зони гладкого проковзування (рис. 5.1), крива «3» – випадку тріщини на межі поділу проковзуючих середовищ (рис. 6.1).

Штрихова та штрих-пунктирна прямі на цьому ж рисунку відповідають значенням деформацій зморщування у випадку жорсткого з'єднання та гладкого проковзування компонентів бішару, відповідно.

Рисунок 6.6. демонструє узгодженість між собою розв'язків *всіх задач*, що досліджені в розділах 3 – 6. Відповідні числові дані подані в таблиці 6.2.

Наостанок зауважимо, що в разі, коли компоненти бішару рис. 6.1 описуються пружним *потенціалом гармонічного типу* з рівними коефіцієнтами Пуассона, критичні деформації ε_1 не залежать від стисливості компонентів тіла, що цілком узгоджується з результатами п. 3.6 (див. табл. 3.4).

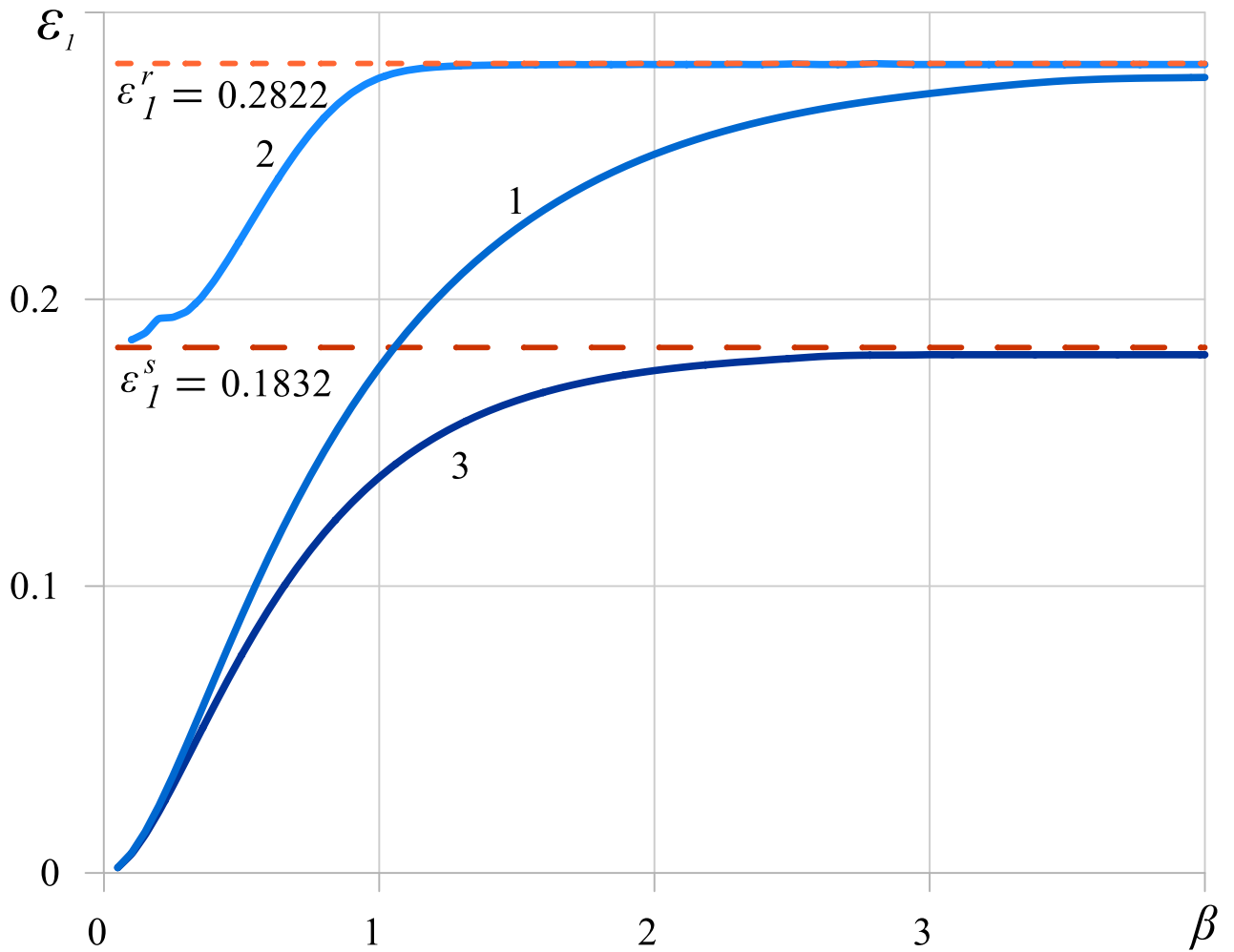


Рис. 6.6 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при $g = 3$ для різних задач про стиск бішару вздовж міжфазних дефектів.

крива	$\beta = h/a$								
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2
«1» (рис. 4.2)	0.0235	0.0446	0.0672	0.0895	0.1385	0.1762	0.2042	0.2247	0.2505
«2» (рис. 5.1)	0.1933	0.1957	0.2064	0.2215	0.2578	0.2771	0.2812	0.2817	0.2818
«3» (рис. 6.1)	0.0214	0.0396	0.0582	0.0760	0.1126	0.1379	0.1544	0.1647	0.1751

Таблиця 6.2 – Числові дані деяких точок графіку на рис. 6.6

6.5 Аналіз застосовності балкового наближення для «довгих» тріщин

Розглядаючи стиск бішарових систем із жорстко з'єднаними компонентами вздовж достатньо довгих міжфазних тріщин (див. п. 4.7.2) було, зокрема, спостережено наступне. Значення критичних деформацій втрати стійкості (яка в цьому разі відбувається за механізмом випучування (рис. 4.1)), одержані із застосуванням наближеної формули (4.56), перевищують аналогічні значення, одержані в рамках строгої постановки задачі ТЛТСДТ не більше ніж на 15% для $g < 3$ та $\beta \leq 0.1$. В цьому ж випадку указані критичні значення ε_1 слабо залежать від механічних параметрів бішару (див. рис. 4.32, 4.33).

Метою цього параграфу є з'ясування, чи спостерігається описаний ефект у випадку, коли зв'язок між складовими тіла в області поза тріщиною послаблюється і чи залишається формула (4.56) застосовною.

На графіку, зображеному на рис. 6.7, для відносно довгих міжфазних тріщин (достатньо тонких покриттів) представлено наступні залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Штрихова крива на рис. 6.7 відповідає формулі балкового наближення (4.56); суцільні криві – результатам дослідження задачі з геометричною схемою на рис. 6.1 при указаному значенні відношення жорсткостей $g = \mu_2 / \mu_1$, а крива з круглих маркерів такого ж кольору – задачі зі схемою на рис. 4.2 при тому ж значенні g .

Наведені дані свідчать про те, що й у випадку гладкого проковзування між компонентами тонкоплівкової системи у разі достатньо довгих міжфазних тріщин і достатньо малих значень g , критичні деформації втрати стійкості майже не залежать від механічних характеристик тіла і є близькими

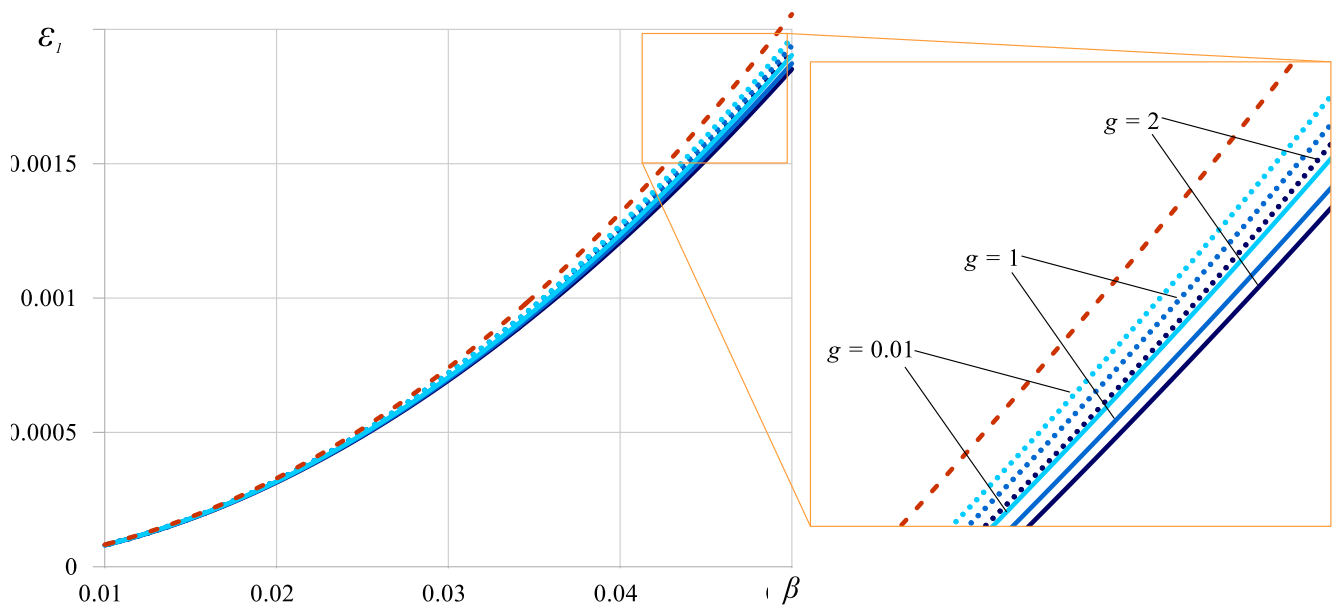


Рис. 6.7 – Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) при різних значеннях параметра g (суцільні криві та круглі маркери) і залежність $\varepsilon_1^0(\beta)$ (штрихова крива).

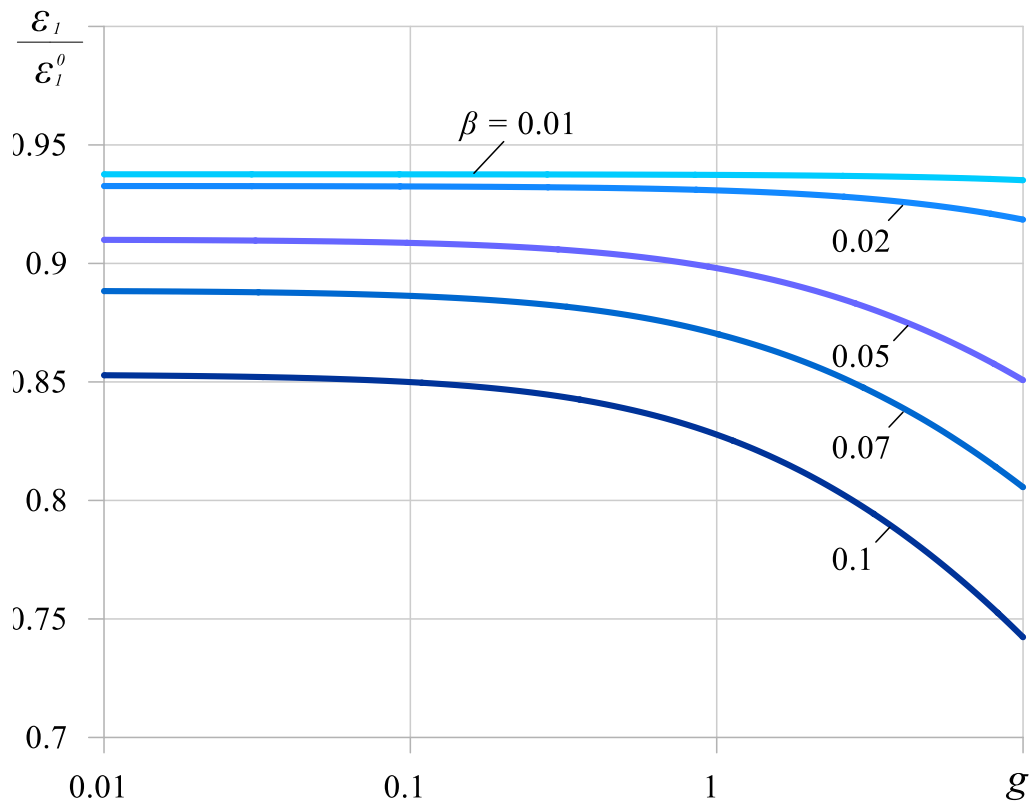


Рис. 6.8 – залежності $\varepsilon_1 / \varepsilon_1^0$ від значення параметра g для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

до відповідних значень для випадку жорсткого з'єднання. Так, наприклад, для $\beta \leq 0.05$ критичне значення ε_1 у випадку гладкого проковзування плівки відносно підкладки є меншим за відповідне значення у випадку жорсткого з'єднання не більше ніж на 4% для всіх значень $g \leq 2$.

Графік на рис. 6.8 ілюструє залежності критичних значень ε_1 , нормованих до значень деформацій початку випучування ε_1^0 , отриманих на основі формули (4.56), від значень параметра g . Розглянуто випадки $\beta = 0.01; 0.02; 0.05; 0.07; 0.1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Аналіз результатів, представлених на рис. 6.8 показує, що критичні значення ε_1 відрізняються від значень ε_1^0 для розшарування $\beta \leq 0.1$ не більше ніж на ~20%, коли $g < 3$. Для $\beta \leq 0.07$ це значення становить ~15%, для $\beta \leq 0.05$ – ~12%, для $\beta \leq 0.02$ – ~8%, для $\beta \leq 0.01$ – ~6%.

6.6 Вплив послаблення зв'язку між компонентами в області поза тріщиною на критичні параметри навантаження

У параграфі досліджується питання зменшення критичних напружень і деформацій, що відповідають втраті стійкості бішарової системи при стиску вздовж міжфазної тріщини у разі послаблення зв'язку між її компонентами.

Аналіз ґрунтується на порівнянні результатів дослідження задачі на власні значення (4.38) у випадку міжфазної тріщини на межі поділу двох жорстко з'єднаних середовищ з результатами задачі на власні значення (6.11) для міжфазної тріщини на межі поділу середовищ, що проковзують без тертя.

На графіках, зображених на рис. 6.9 для випадку *потенціалу гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) та на рис. 6.10 для *потенціалу Бартенева–Хазановича* представлено залежності безрозмірного критичного напруження

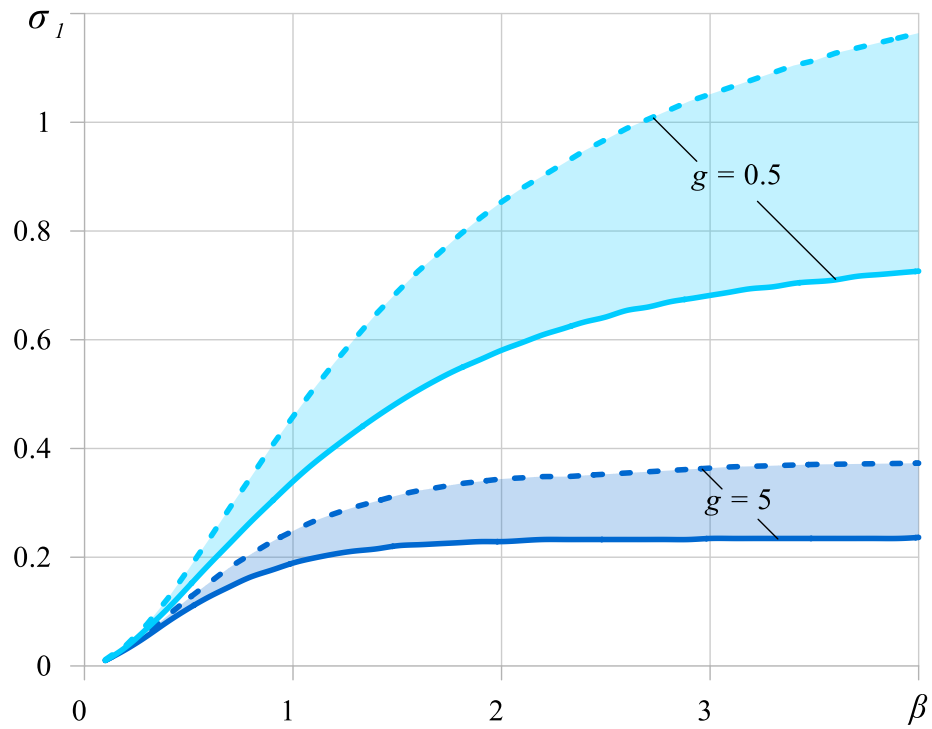


Рис. 6.9 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для жорсткого з'єднання і гладкого проковзування поза тріщиною.

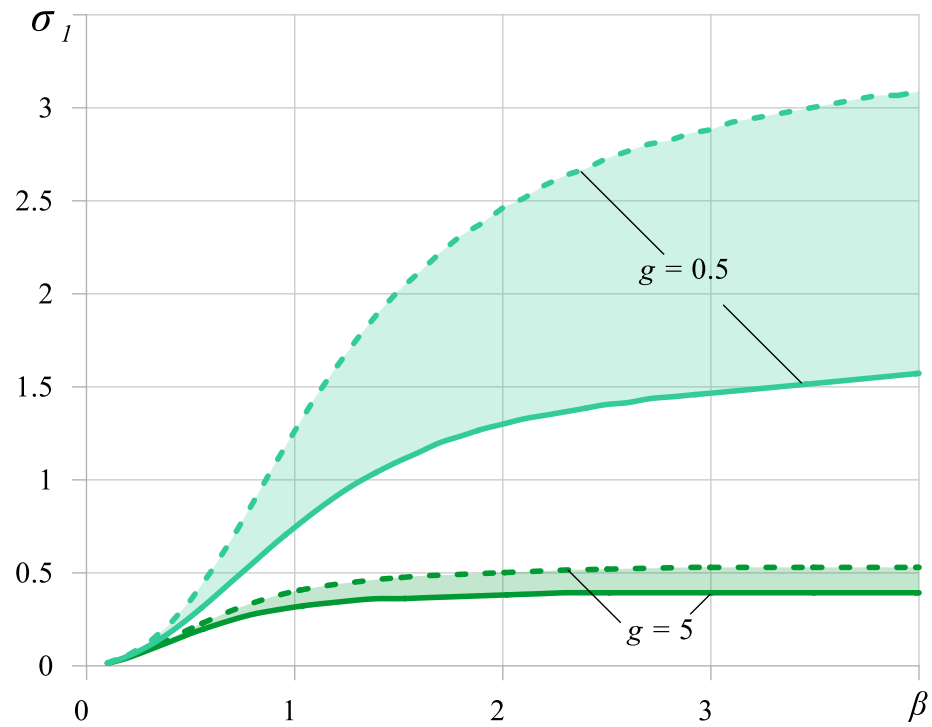


Рис. 6.10 – Залежності $\sigma_1(\beta)$ у випадку потенціалу Бартенєва–Хазановича для жорсткого з'єднання і гладкого проковзування поза тріщиною.

стиску $\sigma_1 = -\sigma_{11}^{0(1)} / 2\mu_1$, що відповідає матеріалу підкладки, від значення геометричного параметра $\beta = h/a$ для двох значень відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки: $g = 0.5$ та $g = 5$. Суцільні криві на рисунках відповідають випадку гладкого проковзування плівки відносно підкладки (рис. 6.1), а штрихові криві – випадку їх жорсткого з'єднання (рис. 4.2).

Коли зв'язок між складовими бішару послаблюється лише на окремих ділянках (на цих ділянках утворюються зони проковзування), то критичні значення ε_1 мають бути такими, щоб відповідні точки на графіках рис. 6.9, 6.10 потрапляли в затемнені області, розташовані між «верхньою» штриховою та «нижньою» суцільною кривими.

Як видно з графіків, послаблення зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла може призвести до значного зменшення значення критичного напруження стиску. Наприклад, для нестисливого бішару з потенціалом Бартенєва–Хазановича, компоненти якого проковзують без тертя, значення σ_1 зменшується на 47% у порівнянні з аналогічним значенням для того бішару з жорстко з'єднаними компонентами при $g = 0.5$ і $\beta = 2$. При $g = 5$ указане зменшення становить вже 24%.

Збільшення впливу послаблення зв'язку між компонентами тіла на значення критичних параметрів навантаження зі збільшенням геометричного параметру β та зменшенням механічного параметра $g = \mu_2 / \mu_1 > 1$ демонструється даними графіків на рис. 6.11 (*потенціал гармонічного типу*) та на рис. 6.12 (*потенціал Бартенєва–Хазановича*). На рисунках зображено залежності δ – відношення критичної деформації у випадку проковзування поза тріщиною до критичної деформації у випадку жорсткого з'єднання вздовж цієї області інтерфейсу – від значення параметру β .

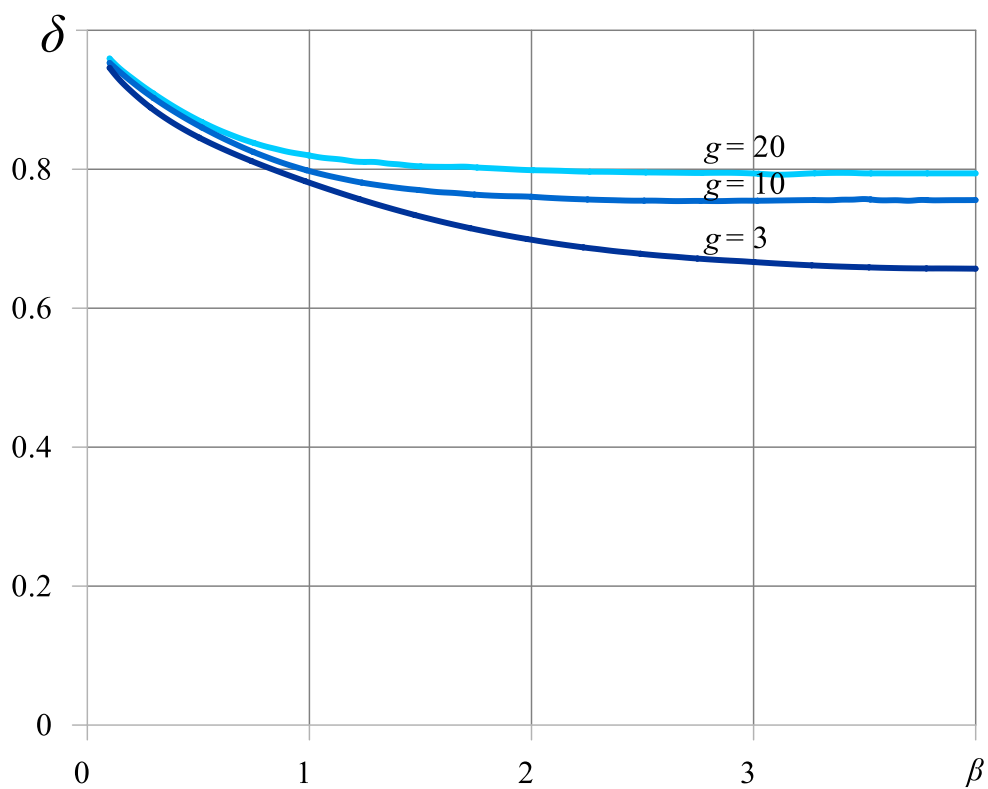


Рис. 6.11 – Залежності $\delta(\beta)$ для потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

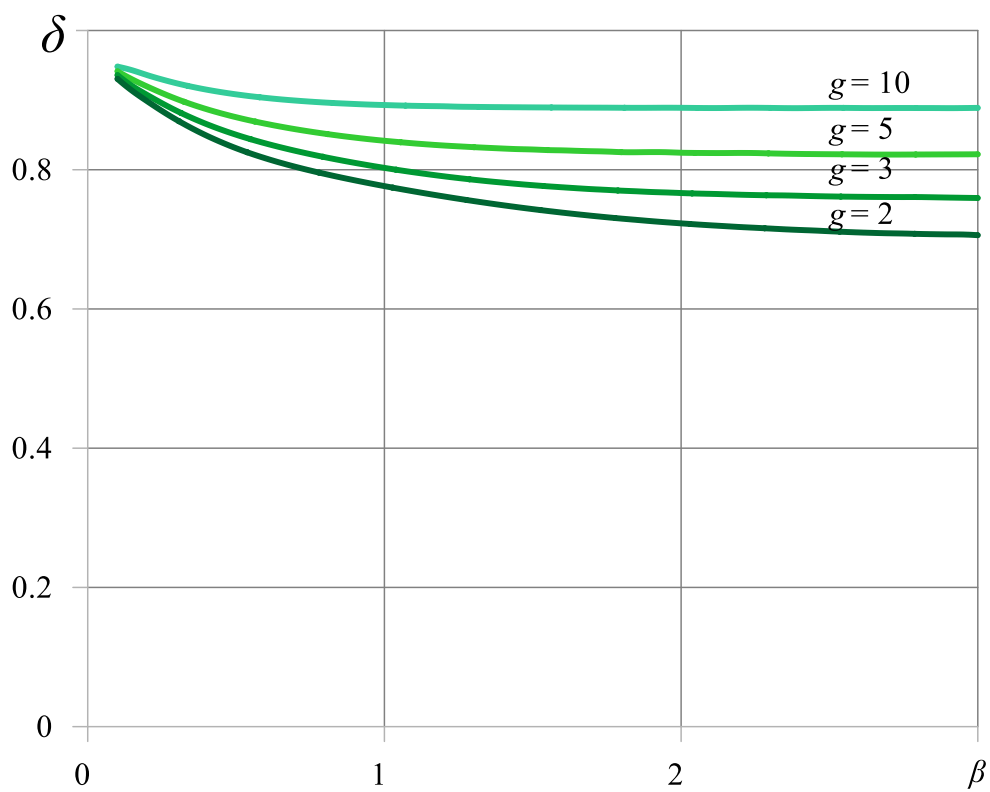


Рис. 6.12 – Залежності $\delta(\beta)$ для потенціалу Бартенєва–Хазановича.

Дані рисунків 6.11, 6.12 свідчать про те, що максимальний вплив умов контакту на межі поділу за фіксованих механічних характеристик бішару визначається невідповідністю між значеннями ε_1^s та ε_1^r , яка вивчалася в п. 3.7. При цьому у випадку *потенціалу гармонічного типу* цей вплив є більшим і сягає майже 40%.

Основні результати та висновки розділу

У цьому розділі дисертаційної роботи в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості представлено напіваналітичний підхід до визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи, складові якої проковзують одна відносно одної без тертя, при стиску вздовж міжфазної тріщини.

Граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням до інтегрального перетворення Фур'є зведено інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, яке досліджується чисельно. Для одержаного інтегрального рівняння проведено дослідження неперервності ядра та показано, що математичні обмеження на область неперервності мають строге фізичне пояснення.

Чисельні результати з визначення критичних параметрів навантаження представлені для однієї моделі стисливих і однієї моделі нестисливих гіперпружних матеріалів. Валідація результатів відбувається шляхом порівняння з граничним випадком – задачею для тіла з міжфазним дефектом «нульової довжини» (рис. 3.1.б).

На основі порівняння результатів з визначення критичних параметрів навантаження в задачі для міжфазної тріщини на межі поділу двох жорстко з'єднаних компонентів бішару (рис. 4.2) з результатами задачі для

компонентів, що проковзують без тертя (рис. 6.1) вивчено вплив послаблення зв'язків між ними на значення критичних параметрів навантаження

Проаналізовано застосовність балкового наближення при визначенні критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості тонкої плівки покриття на напівобмеженій основі.

Аналіз одержаних результатів дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. Якісний характер залежностей критичних параметрів навантаження від механічних характеристик матеріалів та геометричного параметру бішарової системи в задачі для міжфазної тріщини на межі поділу двох проковзуючих середовищ в цілому є аналогічним до випадку задачі для міжфазної тріщини на межі поділу середовищ, що жорстко з'єднані. Наступні висновки, сформульовані в розділі 4, залишаються справедливими: пп. 1, 2, 3, 3а, 3б, 3д, 4а, 5д.
2. Зі збільшенням відносної товщини покриття критичні деформації асимптотично прямують до значення критичних деформацій зморщування аналогічного бішару (із компонентами, що проковзують) без дефекту, одержаних в розділі 3.
3. Для достатньо довгих тріщин (достатньо тонких покриттів), якщо значення параметру $g = \mu_2 / \mu_1$ достатньо малі, критичні параметри навантаження слабо залежать не лише від механічних характеристик складових бішару (див. п. 4.7.2), а й від умов контакту між ними в області поза тріщиною. При цьому застосовною залишається наближена формула (4.56), хоча точність її знижується у порівнянні з випадком жорсткого закріплення компонентів.

4. Вплив послаблення зв'язку між компонентами тіла на значення критичних параметрів навантаження збільшується зі збільшенням геометричного параметру $\beta = h/a$ та зменшенням механічного параметру $g > 1$.

5. Максимальний вплив умов контакту на межі поділу за фіксованих механічних характеристик бішару визначається невідповідністю між значеннями ε_1^s й ε_1^r , та у випадку *потенціалу гармонічного типу* сягає майже 40%.

Сукупний аналіз результатів, представлених у розділах 3 – 6 дисертаційної роботи продемонстрував хорошу узгодженість між розв'язками *всіх* поставлених задач (мова йде про задачі з геометричним схемами на рисунках 3.1.а, 3.1.б, 4.2, 5.1 та 6.1) лінеаризованої теорії стійкості (див. рис. 6.6). Варто ще раз підкреслити, що ця узгодженість не лише відповідає фізичним міркуванням, а й дає пояснення математичним обмеженням на області неперервності ядер інтегральних рівнянь в задачах для тіл з дефектами.

Сказане вище свідчить про те, що запропонований комплексний напіваналітичний підхід (в межах ТЛТСДТ) до визначення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості кусково-однорідних тіл при їх стиску вздовж різного типу дефектів є вельми ефективним. Узагальнюючи, указаний підхід полягає в наступному. Спочатку виконується постановка задачі для тіла з внутрішнім дефектом (або рядом дефектів). Виходячи з типу наявного дефекту визначаються відповідні граничні задачі для того ж тіла з дефектом «нульової довжини» та «нескінченно довгим дефектом». Ці задачі (в разі їх фізичної коректності) розв'язують методом, представленим в Розділі 3. При цьому важливим аспектом ефективності підходу є те, що форма

представлень загальних розв'язків, як і перетворень Фур'є їх гармонічних складових, зберігається при переході до розгляду задачі для тіла з внутрішнім дефектом.

Описаний комплексний підхід, окрім представлених в роботі задач для напівобмежених бішарових систем, вже був успішно апробований [37, 159] на прикладі задач про стиск вздовж міжфазних дефектів кусково-однорідного тіла, що являє собою смугу, з'єднану з двома півплощинами. Подібним чином, зокрема, моделюються шаруваті композити зі структурними [18, 19] міжфазними дефектами.

Останнє питання, яке залишилось з'ясувати в рамках дисертаційного дослідження з точки зору меж застосовності презентованого напіваналітичного підходу, це можливість його використання для кусково-однорідних тіл, що складаються з більш ніж двох компонентів. З цією, зокрема, метою в заключному розділі 7 досліджується задача про стиск бішарової системи вздовж тріщини, що не розташована на межі поділу підкладки та плівки покриття.

РОЗДІЛ 7 СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНИХ БІШАРОВИХ СИСТЕМ З ЖОРСТКО З'ЄДНАНИМИ КОМПОНЕНТАМИ ВЗДОВЖ ТРІЩИНИ, НЕ РОЗТАШОВАНОЇ НА МЕЖІ ПОДІЛУ

Цей розділ роботи присвячено дослідженню критичних параметрів втрати стійкості гіперпружних бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами при їхньому стиску вздовж тріщини, яка розташована в матеріалі підкладки паралельно до межі їх поділу.

Розгляд поставленої задачі переслідує подвійну мету. Перша була окреслена вище, і полягає в апробації запропонованого в розділах 4 – 6 підходу до задачі для тіла, що складається з трьох компонентів. В даному разі трьома компонентами слугують плівка покриття та дві області матеріалу підкладки: смугова область «над тріщиною» та напівобмежена область «під» тріщиною. Друга мета – з'ясувати, чи змінюються критичні значення параметрів навантаження неперервно при переході від задачі для тріщини, не розташованої на межі поділу, до задачі для міжфазної тріщини. Іншими словами, слід з'ясувати, чи справедливим є граничний перехід від першої з указаних задач до другої. У разі ствердної відповіді обґрунтованим стає використання для бішарових систем континуальних моделей кусково-однорідних тіл (однорідних моделей з усередненими фізико-механічними характеристиками [18, 19]).

Нижче напіваналітичний підхід у межах ТЛТСДТ вперше застосовується до дослідження задачі для кусково-однорідного тіла, що стискається вздовж тріщини, яка не розташована на межі поділу двох середовищ. Така схема розташування тріщини приводить до необхідності формулювати граничні умови не на двох, а на трьох лініях (межа тіла, межа

поділу середовищ тіла, лінія розташування тріщини), що значно збільшує кількість проміжних викладок. Система інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, доповнена деякою додатковою умовою, одержується в загальному вигляді для широкого класу комбінацій двох стисливих або нестисливих матеріалів, для пружних потенціалів яких реалізується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь. Система інтегральних рівнянь досліджується чисельно із застосуванням методу Бубнова–Гальоркіна.

На прикладі стисливих гіперпружних матеріалів з *потенціалом гармонічного типу* визначаються критичні значення параметру навантаження в задачі, аналізується характер їх залежності від геометричних та механічних характеристик складових матеріалів. У разі, коли матеріали тіла однакові, який відповідає випадку однорідного тіла, та у випадку, коли тріщина розташована близько до межі поділу середовищ, проводиться порівняння одержаних результатів з результатами, одержаними в розділі 4 для міжфазної тріщини.

На завершення розділу результати критично обговорюються в контексті перспектив подальших досліджень і формулюються висновки.

Результати, представлені в розділі, відображені в публікації автора [39].

7.1 Постановка задачі

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл розглянемо напівобмежене кусково-однорідне ізотропне тіло, що складається з двох компонент: напівобмеженої гіперпружної підкладки ($x_2 \leq 0$) і гіперпружної плівки покриття «3» ($0 \leq x_2 \leq h$). Гранична поверхня тіла $x_2 = h$ ненавантажена. Матеріал підкладки містить ненавантажену тріщину довжини $2a$, яка

розташована паралельно до прямолінійної межі поділу середовищ $x_2 = 0$ на відстані $h_0 > 0$ від неї (Рис. 7.1). Поза тріщиною матеріали жорстко з'єднані.

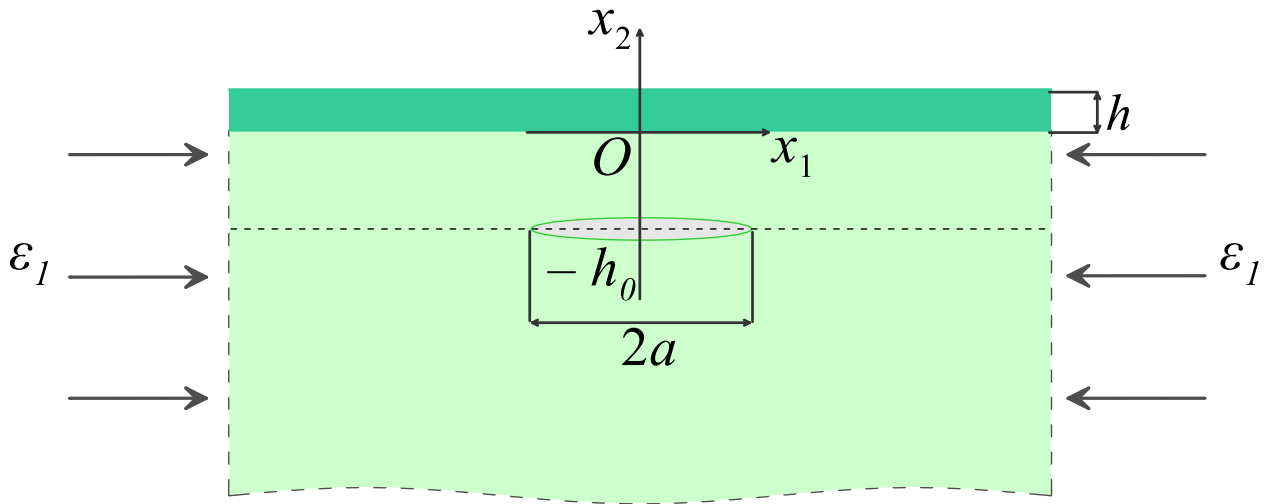


Рис. 7.1 – Бішарова система підкладка/плівка при стиску вздовж міжфазної тріщини.

Розіб'ємо область, яку займає підкладка, на області «1» ($x_2 \leq -h_0$) та «2» ($-h_0 \leq x_2 \leq 0$), вважаючи, що береги тріщини належать різним областям. Приписуватимемо надалі індекси «1», «2» або «3» величинам і функціям, які відносяться, відповідно, до областей «1», «2» або «3». Верхнім індексом «0», як і раніше, будемо позначати величини, що відносяться до докритичного стану, а збурення цих величин не позначатимемо додатковим індексом.

Нехай на нескінченності матеріали тіла стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = const, i = 1, 2, 3; \sigma_{11}^{0(1)} \equiv \sigma_{11}^{0(2)} \neq \sigma_{11}^{0(3)} \quad (7.1)$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі Ox_1 для матеріалів основи та покриття

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1^3 = \lambda_1 = const, \lambda_1 < 1, \quad (7.2)$$

де $\lambda_1^1 \equiv \lambda_1^2$, λ_1^3 – коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(3)}$, відповідно.

Граничні умови сформульованої задачі запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 t_{22}^{(3)} = 0, t_{21}^{(3)} = 0, (x_2 = h, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(2)} = t_{22}^{(3)}, t_{21}^{(2)} = t_{21}^{(3)}, u_1^{(2)} = u_1^{(3)}, u_2^{(2)} = u_2^{(3)} (x_2 = 0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}, t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} (x_2 = -h_0, 0 \leq |x_1| < \infty); \\
 t_{21}^{(1)} = 0, t_{22}^{(1)} = 0, (x_2 = -h_0, |x_1| \leq a); \\
 u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, (x_2 = -h_0, |x_1| > a).
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ставиться задача визначити критичні відносні укорочення (3.4), за яких система підкладка/плівка втрачає стійкість. Інакше кажучи, шукається таке перше значення λ_1 (при його зменшенні починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, яке відповідає недеформованому стану), при якому за неперервного збільшення навантаження стиску, сформульована однорідна задача має нетривіальний розв'язок. Останнє свідчило б про наявність суміжного рівноважного стану (рис. 7.1) бішарової системи.

7.2 Гранична задача для гармонічних потенціальних функцій

За аналогією з тим, як це було зроблено в розділах 4 – 6, зведемо задачу з граничними умовами (7.3) до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій – складових представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги (2.41), (2.42).

В розділі 7 обмежимося дослідженням випадку, коли для обох матеріалів тіла реалізуються випадок рівних коренів характеристичних рівнянь: $n_1^1 = n_2^1$, $n_1^2 = n_2^2$.

Зауважимо, що оскільки області «1» і «2» належать одному і тому самому матеріалу, то

$$\tilde{\omega}^{(1)} \equiv \tilde{\omega}^{(2)}, \tilde{\alpha}^{(1)} \equiv \tilde{\alpha}^{(2)}, n^1 \equiv n^2, z_1 \equiv z_2, n^1 \equiv n^2, k_i^1 \equiv k_i^2, p_i^1 \equiv p_i^2$$

Використавши представлення (3.7) загальних розв'язків рівнянь рівноваги, для перших восьми умов (7.3) (перші три рядки в (7.3)) отримаємо наскрізні граничні умови задачі, записані в термінах потенціальних гармонічних функцій:

$$\begin{aligned} k_1^2 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial x_1} - k_2^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(3)}}{\partial x_1 \partial z_3} &= 0, \\ k_4^2 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial z_3} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z_3} - k_5^2 h_1 \frac{\partial^2 F^{(3)}}{\partial z_3^2} &= 0, (z_3 = -h_1, 0 \leq |x_1| < \infty); \\ k_1^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} &= k_1^2 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial x_1}, \\ k_4^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} &= k_4^2 \frac{\partial F^{(3)}}{\partial z_3} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$p_1^1 F^{(2)} + p_2^1 \Phi^{(2)} = p_1^2 F^{(3)} + p_2^2 \Phi^{(3)}, (z_{2,3} = 0, 0 \leq |x_1| < \infty);$$

$$k_1^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x_1} + k_2^1 h_2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x_1 \partial z_1} = k_1^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x_1} + k_2^2 h_2 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x_1 \partial z_2},$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 h_2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial z_1^2} = k_4^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} + k_5^2 h_2 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial z_2^2},$$

$$(z_{1,2} = h_2, 0 \leq |x_1| < \infty),$$

де $h_1 = (n^3)^{-1/2} h$, $h_2 = (n^1)^{-1/2} h_0 = (n^2)^{-1/2} h_0$.

Аналогічно, з четвертого рядка в умовах (7.3) отримаємо граничні умови задачі «на тріщині» (перша з умов проінтегрована по x_1):

$$k_1^1 F^{(1)} + k_2^1 \Phi^{(1)} + k_2^1 h_2 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} = const ,$$

$$k_4^1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} + k_5^1 h_2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial z_1^2} = 0 , (z_1 = h_2, |x_1| \leq a). \quad (7.5)$$

Використавши останній рядок в умовах (7.3) та провівши деякі перетворення [21, 185], одержуємо граничні умови задачі «поза тріщиною», записані в термінах потенціальних гармонічних функцій:

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} , \quad (7.6)$$

$$p_1^1 F^{(1)} + p_2^1 \Phi^{(1)} + p_2^1 h_2 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial z_1} = p_1^1 F^{(2)} + p_2^1 \Phi^{(2)} + p_2^1 h_2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial z_2} \quad (z_{1,2} = h_2, |x_1| > a)$$

та додаткову умову:

$$\int_0^a \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z_1} \Big|_{z_1=h_2} dx_1 = \int_0^a \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z_2} \Big|_{z_2=h_2} dx_1 . \quad (7.7)$$

7.3 Система інтегральних рівнянь задачі

Представимо невідомі потенціальні функції $F^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1

$$F^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} E(\lambda) e^{-\lambda(z_1-h_2)} \cos \lambda x_1 d\lambda ,$$

$$\Phi^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^{\infty} G(\lambda) e^{-\lambda(z_1-h_2)} \cos \lambda x_1 d\lambda ,$$

$$\varphi^{(1)}(x_1, z_1) = -\int_0^{\infty} G(\lambda) e^{-\lambda(z_1-h_2)} \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\lambda}; \quad (7.8)$$

$$F^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) \cosh \lambda(-h_2 + z_2) + A_2(\lambda) \sinh \lambda(-h_2 + z_2)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_2},$$

$$\Phi^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [B_1(\lambda) \cosh \lambda(-h_2 + z_2) + B_2(\lambda) \sinh \lambda(-h_2 + z_2)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_2},$$

$$\varphi^{(2)}(x_1, z_2) = \int_0^{\infty} [B_2(\lambda) \cosh \lambda(-h_2 + z_2) + B_1(\lambda) \sinh \lambda(-h_2 + z_2)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\lambda \sinh \lambda h_2};$$

$$F^{(3)}(x_1, z_3) = \int_0^{\infty} [C_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_3) + C_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_3)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1},$$

$$\Phi^{(3)}(x_1, z_3) = \int_0^{\infty} [D_1(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_3) + D_2(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_3)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\sinh \lambda h_1},$$

$$\varphi^{(3)}(x_1, z_3) = \int_0^{\infty} [D_2(\lambda) \cosh \lambda(h_1 + z_3) + D_1(\lambda) \sinh \lambda(h_1 + z_3)] \frac{\cos \lambda x_1 d\lambda}{\lambda \sinh \lambda h_1},$$

де $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$, $C_i(\lambda)$, $D_i(\lambda)$, $E(\lambda)$, $G(\lambda)$ – невідомі функції, які підлягають визначенню.

Підставивши представлення (7.8) в умови (7.4), одержуємо систему восьми однорідних рівнянь відносно десяти невідомих функцій $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$, $C_i(\lambda)$, $D_i(\lambda)$, $E(\lambda)$, $G(\lambda)$:

$$k_1^2 C_1 - \mu_1 k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 = 0,$$

$$\mu_1 k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 = 0,$$

$$k_1^1 A_1 \coth \mu_2 - k_1^1 A_2 + k_2^1 B_1 \coth \mu_2 - k_2^1 B_2 - k_1^2 C_1 \coth \mu_1 - \\ - k_1^2 C_2 - k_2^2 D_1 \coth \mu_1 - k_2^2 D_2 = 0,$$

$$k_4^1 A_1 - k_4^1 A_2 \coth \mu_2 + k_5^1 B_1 - k_5^1 B_2 \coth \mu_2 + k_4^2 C_1 +$$

$$\begin{aligned}
&+k_4^2 C_2 \coth \mu_1 + k_5^2 D_1 + k_5^2 D_2 \coth \mu_1 = 0, \\
&B_2 \coth \mu_2 - B_1 - D_2 \coth \mu_1 - D_1 = 0,
\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}
&p_1^1 A_1 \coth \mu_2 - p_1^1 A_2 + p_2^1 B_1 \coth \mu_2 - p_2^1 B_2 - \\
&-p_1^2 C_1 \coth \mu_1 - p_1^2 C_2 - p_2^2 D_1 \coth \mu_1 - p_2^2 D_2 = 0
\end{aligned}$$

$$k_1^1 A_1 + k_2^1 \mu_2 A_2 + k_2^1 B_1 - (k_1^1 - k_2^1 \mu_2) E \sinh \mu_2 - k_2^1 G \sinh \mu_2 = 0,$$

$$k_5^1 \mu_2 A_1 + k_4^1 A_2 + k_5^1 B_2 + (k_4^1 - k_5^1 \mu_2) E \sinh \mu_2 + k_5^1 G \sinh \mu_2 = 0, \quad (\mu_1 = \lambda h_1, \mu_2 = \lambda h_2).$$

З перших двох рівнянь системи (7.9) виразимо D_1, D_2 через C_1 і C_2 :

$$D_1 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} C_1 + \mu_1 C_2, \quad D_2 = \mu_1 C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} C_2. \tag{7.10}$$

Далі, ввівши допоміжні функції

$$\alpha_1 = \coth \mu_2 \cdot A_1 - A_2, \quad \gamma_1 = \coth \mu_2 \cdot B_1 - B_2, \quad \alpha_2 = -A_1 + \coth \mu_2 \cdot A_2,$$

$$\gamma_2 = -B_1 + \coth \mu_2 \cdot B_2,$$

і також визначивши їх через C_1 і C_2 :

$$\alpha_1 = \alpha_1^{C_1} C_1 + \alpha_1^{C_2} C_2, \quad \gamma_1 = \gamma_1^{C_1} C_1 + \gamma_1^{C_2} C_2, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{C_1} C_1 + \alpha_2^{C_2} C_2, \quad \gamma_2 = \gamma_2^{C_1} C_1 + \gamma_2^{C_2} C_2,$$

$$\alpha_1^{C_1} = (p_1^1 k_2^1 - p_2^1 k_1^1)^{-1} \left[(p_2^2 k_2^1 - p_2^1 k_2^2) \mu_1 + \frac{k_2^1}{k_2^2} (p_1^2 k_2^2 - p_2^2 k_1^2) \coth \mu_1 \right],$$

$$\alpha_1^{C_2} = (p_1^1 k_2^1 - p_2^1 k_1^1)^{-1} \left[(p_2^2 k_2^1 - p_2^1 k_2^2) \left(\mu_1 \coth \mu_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} \right) + (p_1^2 k_2^1 - p_2^2 k_1^2) \right],$$

$$\gamma_1^{C_1} = (p_1^1 k_2^1 - p_2^1 k_1^1)^{-1} \left[(p_1^1 k_2^2 - p_2^2 k_1^1) \mu_1 - \frac{k_1^1}{k_2^2} (p_1^2 k_2^2 - p_2^2 k_1^2) \coth \mu_1 \right],$$

$$\gamma_1^{C_2} = (p_1^1 k_2^1 - p_2^1 k_1^1)^{-1} \left[(p_1^1 k_2^2 - p_2^2 k_1^1) \left(\mu_1 \coth \mu_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} \right) + (p_1^2 k_1^2 - p_2^2 k_1^1) \right],$$

$$\alpha_2^{C_1} = \frac{k_5^2 - k_5^1}{k_4^1} \left(\mu_1 \coth \mu_1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \right) + \frac{k_4^2}{k_4^1}, \quad \alpha_2^{C_2} = \frac{k_5^2 - k_5^1}{k_4^1} \mu_1 + \frac{k_4^2 k_5^1}{k_4^1 k_5^2} \coth \mu_1,$$

$$\gamma_2^{C_1} = \mu_1 \coth \mu_1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}, \quad \gamma_2^{C_2} = \mu_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2} \coth \mu_1,$$

отримаємо з наступних чотирьох рівнянь системи (7.9) неявні представлення функцій A_1, A_2, B_1, B_2 через C_1 і C_2 у вигляді

$$A_1 = (\alpha_1 \coth \mu_2 + \alpha_2) \sinh^2 \mu_2, \quad A_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \coth \mu_2) \sinh^2 \mu_2,$$

$$B_1 = (\gamma_1 \coth \mu_2 + \gamma_2) \sinh^2 \mu_2, \quad B_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 \coth \mu_2) \sinh^2 \mu_2. \quad (7.11)$$

Використавши два останні рівняння системи (7.9), визначаємо E і G через A_1, A_2, B_1, B_2 (які, в свою чергу, вже визначені через C_1 і C_2):

$$G = \Delta^{-1} \sinh^{-1} \mu_2 \left[(k_1^1 k_4^1 - \mu_2^2 k_2^1 k_5^1) (A_1 + A_2) + (k_2^1 k_4^1 - \mu_2 k_2^1 k_5^1) B_1 + (k_1^1 k_5^1 - \mu_2 k_2^1 k_5^1) B_2 \right]$$

$$E = -\Delta^{-1} \sinh^{-1} \mu_2 \left[(k_1^1 k_5^1 + \mu_2 k_2^1 k_5^1) A_1 + (k_2^1 k_4^1 + \mu_2 k_2^1 k_5^1) A_2 + k_2^1 k_5^1 (B_1 + B_2) \right], \quad (7.12)$$

$$\Delta = k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1.$$

Підставивши тепер представлення (7.8) в (7.5) – (7.7), одержуємо систему парних інтегральних рівнянь задачі

$$\int_0^\infty \left[(k_1^1 - k_2^1 \mu_2) E(\lambda) + k_2^1 G(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = const,$$

$$\int_0^\infty \lambda \left[(k_4^1 - k_5^1 \mu_2) E(\lambda) + k_5^1 G(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| \leq a); \quad (7.13)$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sinh \mu_2} (p_1^1 A_1(\lambda) + p_2^1 \mu_2 A_2(\lambda) + p_2^1 B_1(\lambda)) - (p_1^1 - p_2^1 \mu_2) E(\lambda) - k_2^1 G(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0$$

$$\int_0^\infty \lambda \left[\frac{1}{\sinh \mu_2} B_2(\lambda) + G(\lambda) \right] \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| > a) \quad (7.14)$$

та додаткову умову у вигляді

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sinh \mu_2} B_2(\lambda) + G(\lambda) \right] \sin \lambda a d\lambda = 0. \quad (7.15)$$

З урахуванням (7.10) – (7.12), система парних інтегральних рівнянь (7.13), (7.14) прийме вигляд

$$\int_0^{\infty} Y_3(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = const, \quad \int_0^{\infty} \lambda Y_4(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| \leq a),$$

$$Y_i(\lambda) = r_i C_1 + s_i C_2, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (7.16)$$

$$r_3 = \sinh \mu_2 \left[(k_1^1 \coth \mu_2 + k_2^1 \mu_2) \alpha_1^{C_1} + k_2^1 \coth \mu_2 \cdot \gamma_1^{C_1} + (k_2^1 \mu_2 \coth \mu_2 + k_1^1) \alpha_2^{C_1} + k_2^1 \gamma_2^{C_1} \right]$$

$$s_3 = \sinh \mu_2 \left[(k_1^1 \coth \mu_2 + k_2^1 \mu_2) \alpha_1^{C_2} + k_2^1 \coth \mu_2 \cdot \gamma_1^{C_2} + (k_2^1 \mu_2 \coth \mu_2 + k_1^1) \alpha_2^{C_2} + k_2^1 \gamma_2^{C_2} \right]$$

$$r_4 = (k_4^1 + k_5^1 \mu_2 \coth \mu_2) \alpha_1^{C_1} + k_5^1 \gamma_1^{C_1} + (k_4^1 \coth \mu_2 + k_5^1 \mu_2) \alpha_2^{C_1} + k_5^1 \coth \mu_2 \cdot \gamma_2^{C_1},$$

$$s_4 = (k_4^1 + k_5^1 \mu_2 \coth \mu_2) \alpha_1^{C_2} + k_5^1 \gamma_1^{C_2} + (k_4^1 \coth \mu_2 + k_5^1 \mu_2) \alpha_2^{C_2} + k_5^1 \coth \mu_2 \cdot \gamma_2^{C_2};$$

$$l_1 \int_0^{\infty} Y_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad l_2 \int_0^{\infty} \lambda Y_2(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0, \quad (|x_1| > a),$$

$$l_1 = \frac{p_2^1 k_1^1 - p_1^1 k_2^1}{k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1}, \quad l_2 = \frac{1}{k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1}, \quad (7.17)$$

$$r_1 = e^{\mu_2} \left[(k_5^1 \mu_2 + k_4^1) (\alpha_1^{C_1} + \alpha_2^{C_1}) + k_5^1 (\gamma_1^{C_1} + \gamma_2^{C_1}) \right],$$

$$s_1 = e^{\mu_2} \left[(k_5^1 \mu_2 + k_4^1) (\alpha_1^{C_2} + \alpha_2^{C_2}) + k_5^1 (\gamma_1^{C_2} + \gamma_2^{C_2}) \right]$$

$$r_2 = e^{\mu_2} \left[(k_1^1 k_4^1 - k_2^1 k_5^1 \mu_2^2) (\alpha_1^{C_1} + \alpha_2^{C_1}) + (k_2^1 k_4^1 - k_2^1 k_5^1 \mu_2) (\gamma_1^{C_1} + \gamma_2^{C_1}) \right],$$

$$s_2 = e^{\mu_2} \left[(k_1^1 k_4^1 - k_2^1 k_5^1 \mu_2^2) (\alpha_1^{C_2} + \alpha_2^{C_2}) + (k_2^1 k_4^1 - k_2^1 k_5^1 \mu_2) (\gamma_1^{C_2} + \gamma_2^{C_2}) \right],$$

а додаткова умова запишеться так:

$$l_2 \int_0^{\infty} Y_2(\lambda) \sin \lambda a_1 d\lambda = 0. \quad (7.18)$$

Вибір функцій $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ у вигляді

$$\begin{aligned} Y_1(\lambda) &= \lambda^{-2} \int_0^a \varphi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt, \\ Y_2(\lambda) &= -h_1 \lambda^{-3} \int_0^a \psi(t) (\cos \lambda t - \cos \lambda a) dt \end{aligned} \quad (7.19)$$

дозволяє автоматично задовольнити умови (7.17).

В (7.19) функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – нові невідомі функції, неперервні зі своїми похідними на відрізку $[0, a]$.

Виразивши з (7.17) $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ через $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \delta^{-1}(\lambda) (s_2 Y_1 - s_1 Y_2), \\ C_2 &= \delta^{-1}(\lambda) (-r_2 Y_1 + r_1 Y_2), \\ \delta(\lambda) &= r_1 s_2 - r_2 s_1, \end{aligned}$$

та підставивши отримані вирази в (7.17), для безрозмірних змінних

$$\xi \equiv a^{-1} x_1, \quad \eta \equiv a^{-1} t$$

приходимо до такої системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} P_1(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^{\infty} P_2(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta) d\eta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_1(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \left[\int_0^\infty Q_2(\lambda) \frac{(\cos \lambda \eta - \cos \lambda) \cos \lambda \xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta) d\eta - const = 0, \\ & 0 \leq \xi < 1, 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a \varphi(a\xi)$, $g(\xi) \equiv a \psi(a\xi)$ та невідомої константи $const$, яка пов'язана з додатковою умовою (7.18). Остання ж, своєю чергою, представляється так:

$$\int_0^1 g(\eta)(1-\eta^2) d\eta = 0. \quad (7.21)$$

Функції P_1, P_2, Q_1, Q_2 , що входять до складу ядер інтегральних рівнянь (7.20), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= \frac{r_4 s_2 - r_2 s_4}{\delta}, \quad P_2(\lambda) = \frac{r_1 s_4 - r_4 s_1}{\delta}, \\ Q_1(\lambda) &= \frac{r_3 s_2 - r_2 s_3}{\delta}, \quad Q_2(\lambda) = \frac{r_1 s_3 - r_3 s_1}{\delta}, \end{aligned}$$

де функції, які позначені «тильдою» згори, збігаються з аналогічними функціями без «тильди», в усіх складових для яких замість $\mu_1 = \lambda h_1$, $\mu_2 = \lambda h_2$ покладено, відповідно, $(n^3)^{-1/2} \beta_1 \lambda$, $(n^1)^{-1/2} \beta_2 \lambda$, де $\beta_1 = h/a$, $\beta_2 = h_0/a$.

Структура інтегральних рівнянь (7.20), доповнених умовою (7.21), в задачі, що розглядається, є аналогічною відповідній в задачі про стискання бішарової системи із жорстко з'єднаними компонентами вздовж міжфазної тріщини (див. (4.26), (4.27)). Крім того, справедливими залишаються і висновки стосовно неперервності ядер інтегральних рівнянь, сформульовані в п. 4.4: ядра інтегральних рівнянь (7.20) є неперервними, а невідомі інтегралі,

що входять до їх складу – збіжними при всіх допустимих значеннях параметрів і змінних, коли виконується умова

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^{hp},$$

якщо для бішару (без тріщини), що досліджується, явище приповерхневої втрати стійкості не спостерігається або умова

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^r,$$

якщо таке явище спостерігається.

Величина ε_1^{hp} , що фігурує в нерівностях, є мінімальним з критичних значень, що відповідають приповерхневій нестійкості *однорідної півплощини* з вільною межею, виконаної з матеріалу підкладки або покриття.

Величина $\varepsilon_1^r < \varepsilon_1^{hp}$ – значення критичної деформації зморщування бішарової системи із жорстко з'єднаними компонентами.

Таким чином, проблема зводиться до задачі (7.20), (7.21) на власні значення відносно параметра $\lambda_1 < 1$ (або критичної деформації $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$). Параметр λ_1 характеризує докритичний стан та складним нелінійним чином входить до ядер інтегральних рівнянь.

Система інтегральних рівнянь (7.20) з умовою (7.21) була отримана в загальній формі для стисливих і нестисливих пружних матеріалів у випадку, коли матеріали підкладки і плівки покриття описуються пружними потенціалами (для гіперпружних матеріалів), для яких має місце випадок рівних коренів характеристичного рівняння.

7.4 Аналіз практичної збіжності і апробація підходу

Числове дослідження системи інтегральних рівнянь (7.20) з умовою (7.21) реалізовано методом Бубнова – Гальоркіна аналогічно пп. 4.5.1, 4.5.2.

Характер збіжності використовуваного методу чисельного дослідження в залежності від кількості N координатних функцій ілюструється даними таблиці 7.1.

У таблиці 7.1 наведено критичні значення параметра $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$, отримані в результаті розв'язання задачі на власні значення для деяких пар значень відносної (нормованої на половину довжини тріщини) ширини смуги $\beta_1 = h/a$ і відносної відстані від межі поділу середовищ до тріщини $\beta_2 = h_0/a$ при значенні відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1 = 2$ (потенціал гармонічного типу, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Критичні значення ε_1 визначалися з точністю до третього знака після коми.

β_1	β_2	N				
		1	2	3	4	5
0.1	0.05	0.026	0.015	0.016	0.015	0.015
0.3	0.15	0.065	0.071	0.075	0.074	0.074
0.5	0.25	0.113	0.130	0.136	0.136	0.136
0.3	0.7	0.134	0.160	0.168	0.172	0.172
1	0.1	0.182	0.198	0.203	0.203	0.203

Таблиця 7.1 – Практична збіжність результатів обчислення критичних деформацій ε_1 для потенціалу гармонічного типу ($g = 2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Для апробації запропонованого підходу до дослідження задач про стискання бішару вздовж тріщини, яка не розташована на межі поділу середовищ (*внутрішня тріщина*), проведемо порівняння результатів дослідження задачі на власні значення (7.20), (7.21) у випадку, коли матеріали основи і покриття описуються потенціалом гармонічного типу та мають однакові фізико-механічні характеристики ($\tilde{\omega}^{(1)} \equiv \tilde{\omega}^{(2)} \equiv \tilde{\omega}^{(3)}$) з результатами задачі про стискання бішару, виконаного з того самого матеріалу, вздовж міжфазної тріщини (Розділ 4) при $g = 1$.

При цьому результати задачі, що розглядається, які одержані для довільних пар значень β_1 і β_2 повинні збігатися з результатами задачі з

геометричною схемою рис. 4.2, які одержані для значення відносної відстані від межі тіла до тріщини $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Результати указанного порівняння, які наведені в таблиці 7.2 ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), показують розбіжність не більше ніж 3%.

задача	β								
	β_2	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
міжфазна тріщина	-	0.008	0.049	0.105	0.158	0.204	0.241	0.272	0.298
внутрішня тріщина	0.1	-	0.048	0.101	0.154	0.200	0.239	0.270	0.296
	0.3	-	-	0.102	0.155	0.201	0.239	0.271	0.296
	0.5	-	-	-	0.155	0.201	0.240	0.271	0.297
	1	-	-	-	-	-	0.241	0.272	0.298

Таблиця 7.2 – Порівняння результатів дослідження задач рис .4.2 і рис. 7.1 для випадку однорідного тіла з *потенціалом гармонічного типу* ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

7.5 Аналіз числових результатів

Результати наведені у параграфі для випадку, коли матеріал плівки, як і матеріал підкладки бішарової системи описуються пружним *потенціалом гармонічного типу* (2.70).

На графіках, зображених на рис. 7.2, 7.3 суцільними кривими, представлено залежності критичної деформації ε_1 від значення відносної ширини смуги β_1 для різних значень відношення параметрів β_2 / β_1 (збільшення значення параметра β_1 при фіксованому значенні параметра β_2 / β_1 відповідає неперервному зменшенню довжини тріщини при фіксованих значеннях відстаней h і h_0) при значеннях відношення жорсткостей матеріалів тіла $g = 1.2$ та $g = 10$, відповідно. Коефіцієнти Пуассона матеріалів тіла становлять $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

Криві з червоних маркерів на рис. 7.2, 7.3 відповідають розв'язку аналогічної задачі для міжфазної тріщини, яка досліджена в розділі 4.

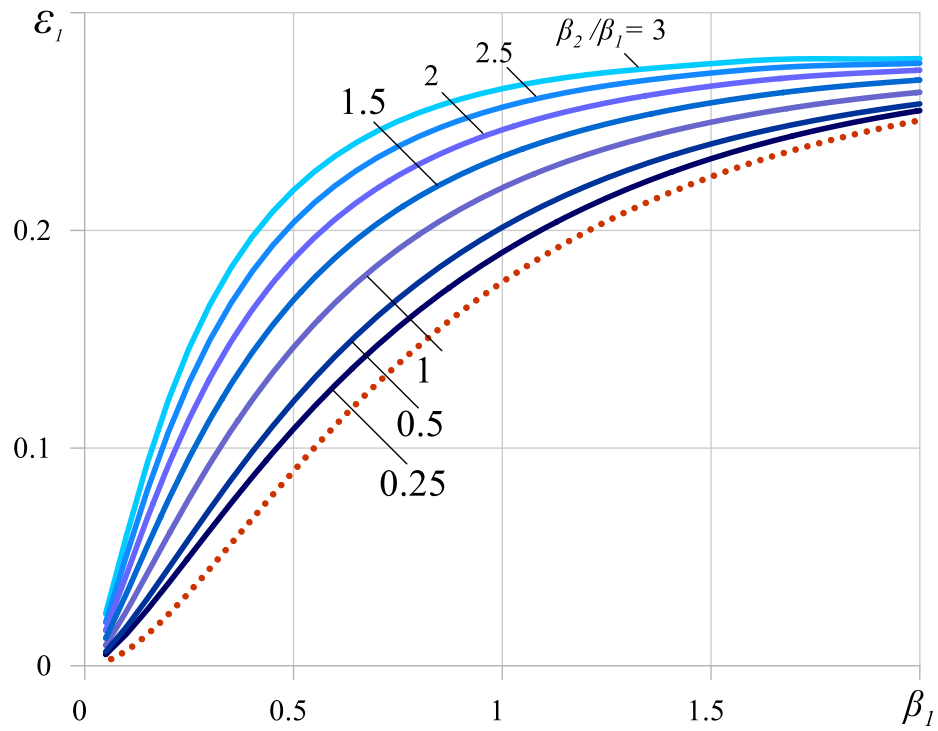


Рис. 7.2 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для значення $g = 3$ при різних значеннях β_2 / β_1 .

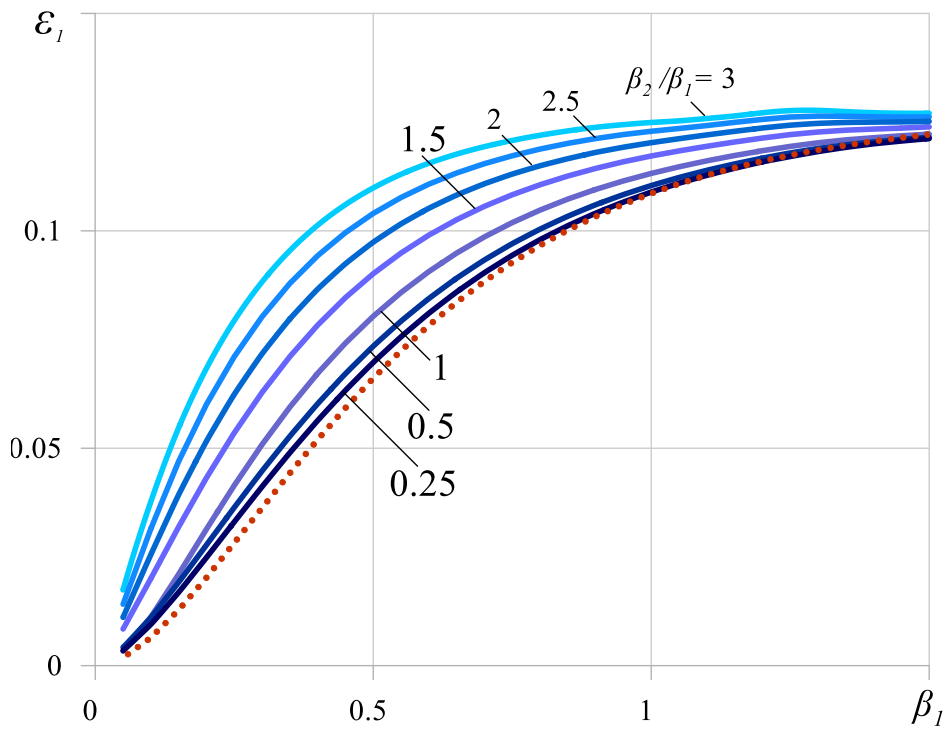


Рис. 7.3 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для значення $g = 10$ при різних значеннях β_2 / β_1 .

Як видно з представлених даних, при наближенні тріщини, що розташована в матеріалі підкладки, до межі поділу середовищ, критичні деформації в задачі з геометричною схемою на рис. 7.1 асимптотично наближаються до цих значень в задачі для міжфазної тріщини зі схемою на рис. 4.2. При цьому, що більшою є відстань від тріщини до граничної поверхні тіла, то більшими є критичні параметри навантаження.

Так, при $g = 3$ та $g = 10$ у разі, коли відстань від тріщини до межі поділу середовищ становить чверть товщини плівки ($\beta_2 = 0.25\beta_1$), критичні значення ε_1 у випадку *внутрішньої тріщини* перевищують аналогічні значення для *міжфазної тріщини* не більше ніж на 10% для $\beta_1 > 0.85$ та $\beta_1 > 0.35$, відповідно.

На рис. 7.4, 7.5 суцільними кривими зображено залежності критичної деформації ε_1 в задачі, що розглядається, від значення відносної ширини плівки покриття $\beta_1 = h/a$ для різних значень відносної відстані від межі поділу середовищ до тріщини $\beta_2 = h_0/a$ (збільшення значення параметра β_1 при фіксованому значенні параметра β_2 відповідає неперервному зменшенню товщини плівки при фіксованих значеннях довжини тріщини та відстані від неї до межі поділу) при значенні відношення жорсткості матеріалу покриття до жорсткості матеріалу основи $g = 1.2$ та $g = 2$, відповідно ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Криві з червоних маркерів на рис. 7.4, 7.5 відповідають розв'язку аналогічної задачі для міжфазної тріщини, яка досліджена в розділі 4.

Графіки, зображені на рис. 7.2 – 7.5, демонструють, що при $\beta_1 \rightarrow \infty$ критичні значення ε_1 асимптотично наближаються до значень ε_1^r , що відповідають зморщуванню бішарової системи з жорстко з'єднаними компонентами (розділ 3) за тих самих значень фізико-механічних параметрів тіла. Іншими словами, при зменшенні довжини тріщини розв'язок задачі,

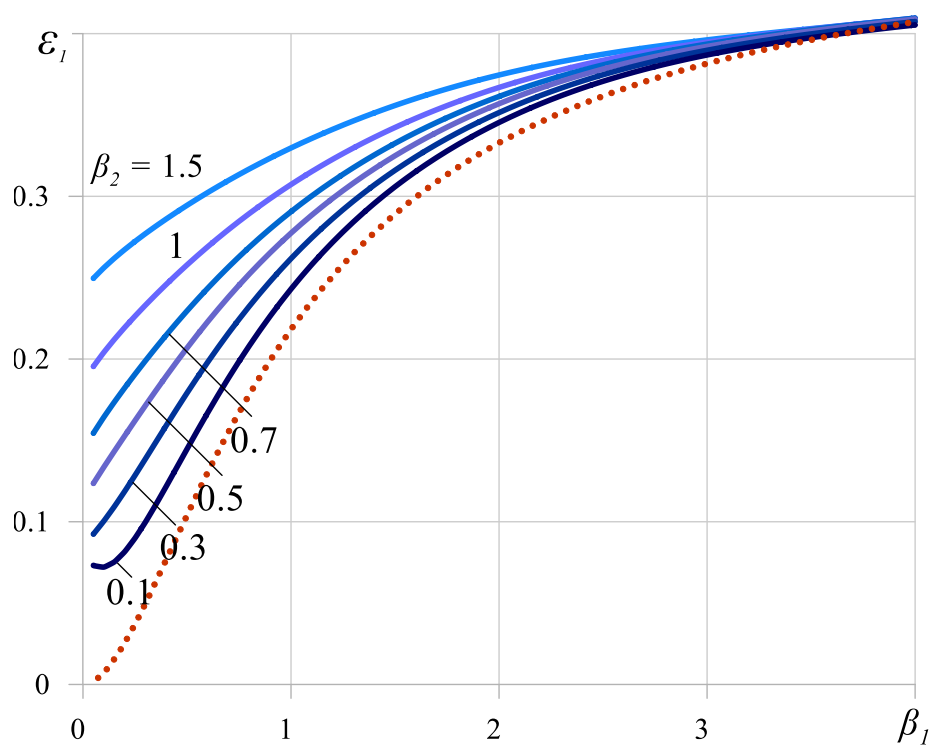


Рис. 7.4 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для значення $g = 1.2$ при різних значеннях β_2 .

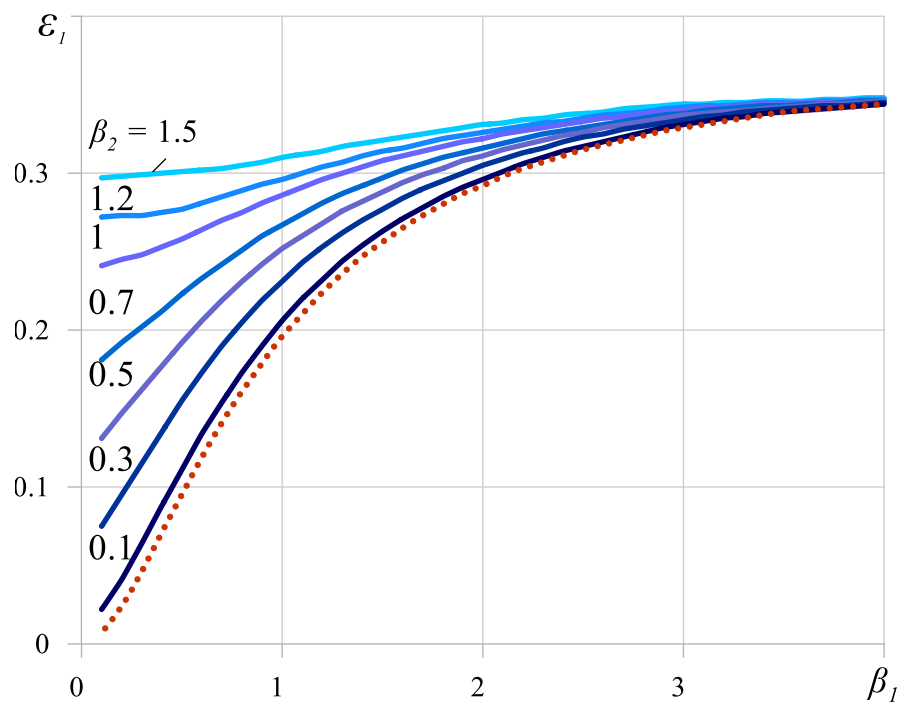


Рис. 7.5 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для значення $g = 2$ при різних значеннях β_2 .

що розглядається, за будь-якої відстані від тріщини до межі поділу середовищ наближається до розв'язку аналогічної задачі для тіла без тріщини. При цьому, максимальна довжина тріщини, яку можна не враховувати при визначенні критичних деформацій втрати стійкості, користуючись відповідними значеннями для зморщування бішару без дефекту (тобто розв'язком рівняння (3.19)), збільшується при віддаленні тріщини від межі поділу середовищ вглиб підкладки.

На графіках, представлених на рис. 7.6, 7.7, для широкого діапазону зміни значення відношення жорсткостей матеріалів g зображено залежність $\varepsilon_1(g)$ для деяких значень параметру β_1 при значеннях $\beta_2 = 0.1$ (рис. 7.6) і $\beta_2 = 0.5$ (рис. 7.7) ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$). Використовується логарифмічна шкала.

На графіку, зображеному на рис. 7.8 наведені залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ для різних значень параметру g . Суцільні криві на рисунку відповідають випадку, коли значення відстані від тріщини до межі поділу дорівнює товщині покриття ($\beta_2 = \beta_1$), штрихові криві – випадку, коли ця відстань вдвічі менша ($\beta_2 = 0.5\beta_1$).

Вплив стисливості компонентів бішарової системи на значення критичних деформацій демонструється даними графіків на рис. 7.9, 7.10, на яких представлені криві залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ для різних значенні коефіцієнтів Пуассона $\nu = \nu_1 = \nu_2$ у випадках $g = 1.5$ і $g = 2.5$, відповідно. При цьому криві на рис. 7.9 побудовано для фіксованого значення геометрично параметру $\beta_2 = 0.2$, і збільшення параметру β_1 відповідає неперервному збільшенню товщини плівки покриття за фіксованої довжини тріщини. Криві на рис. 7.10 побудовано для фіксованого значення відношення $\beta_2 / \beta_1 = 2$, і збільшення параметра β_1 відповідає неперервному зменшенню довжини тріщини за фіксованих відстані від неї до межі поділу і товщини плівки.

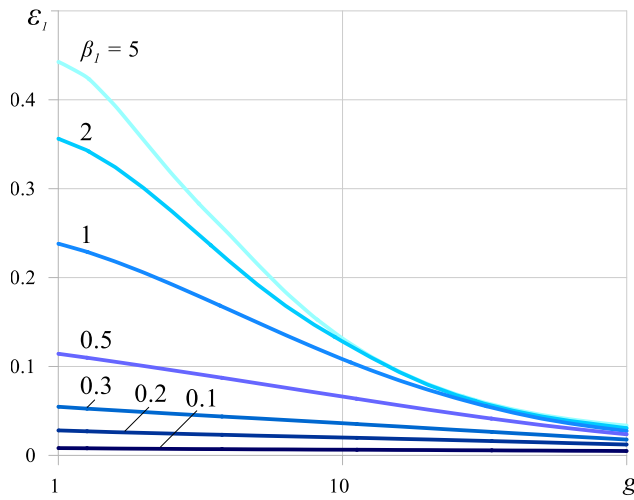


Рис. 7.6 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу при $\beta_2 = 0.1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для різних значень β_1 .

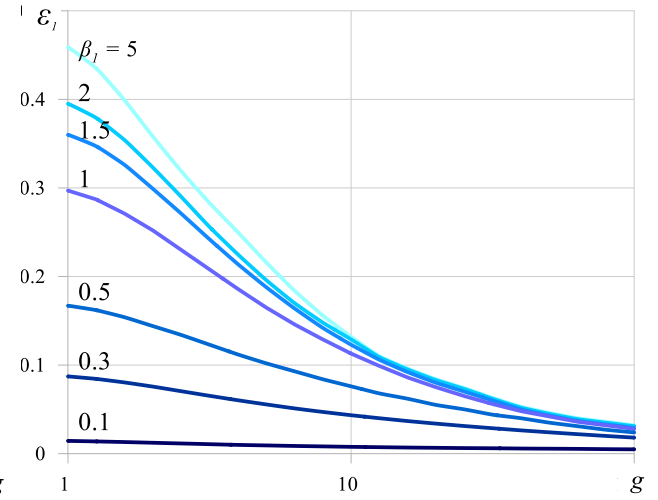


Рис. 7.7 – Залежності $\varepsilon_1(g)$ у випадку потенціалу гармонічного типу при $\beta_2 = 0.5$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для різних значень β_1 .

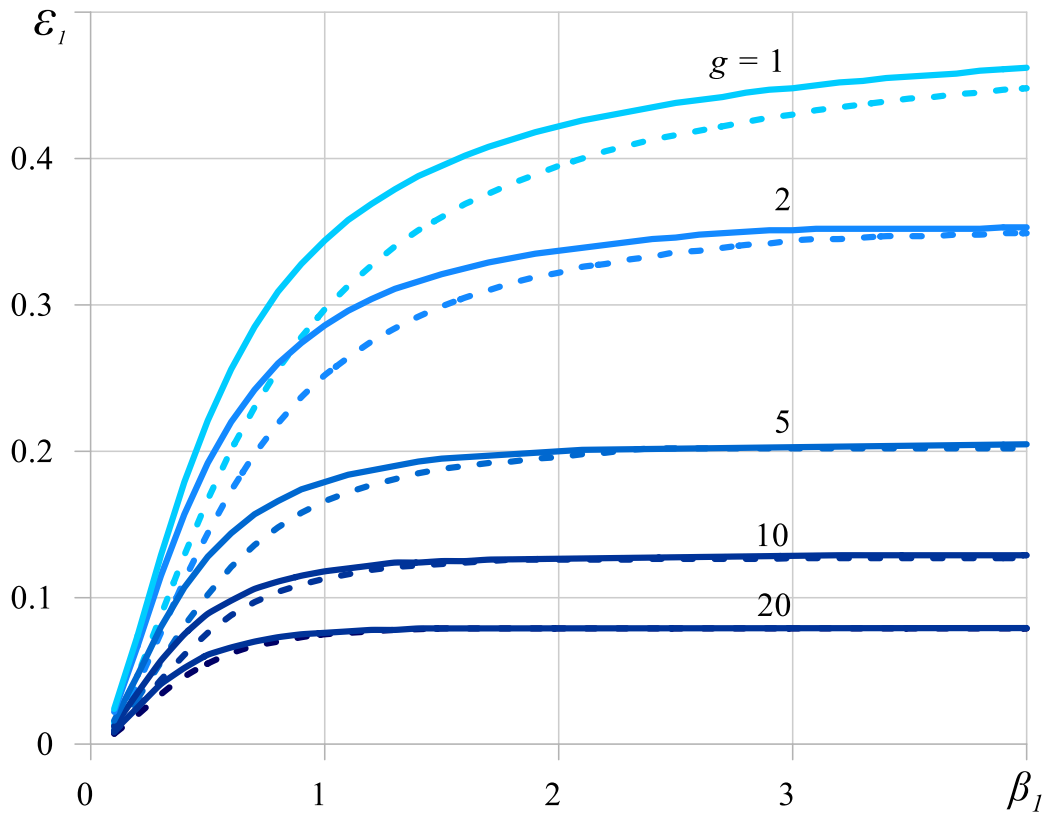


Рис. 7.8 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) для різних значень g при $\beta_2 = \beta_1$ та $\beta_2 = 0.5\beta_1$.

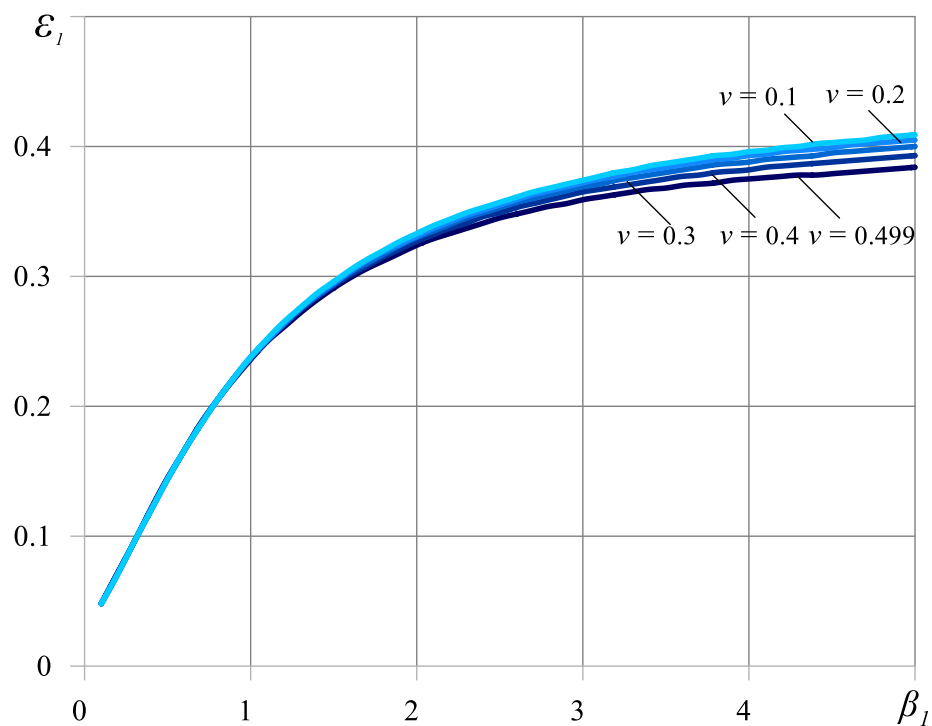


Рис. 7.9 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 1.5$, $\beta_2 = 0.2$.

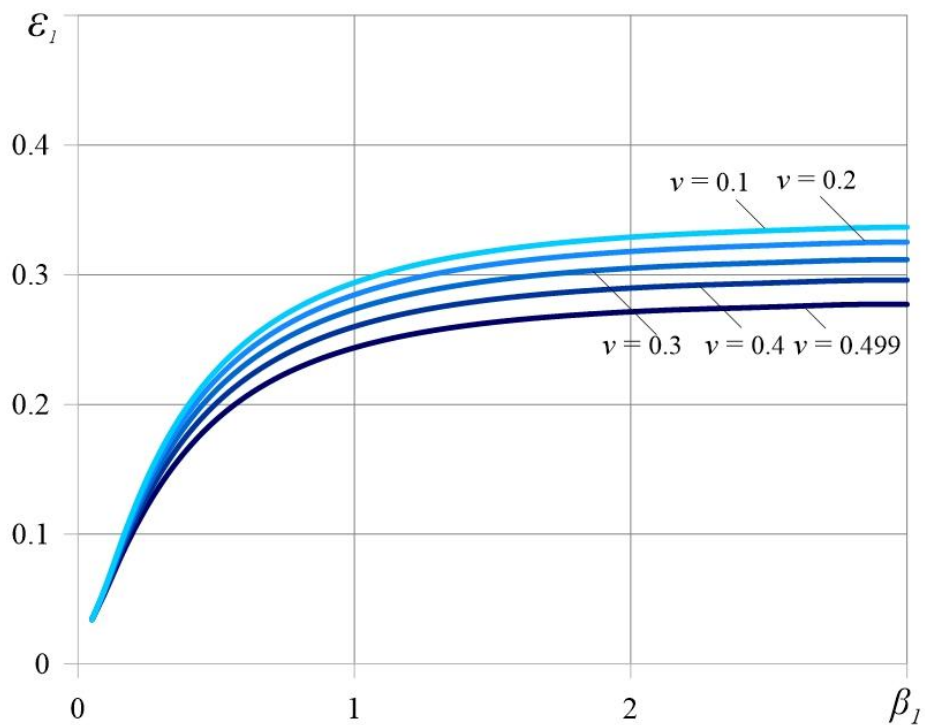


Рис. 7.10 – Залежності $\varepsilon_1(\beta_1)$ у випадку потенціалу гармонічного типу за різних $\nu = \nu_1 = \nu_2$ при $g = 2.5$, $\beta_2 = 2\beta_1$.

Дані представлених рис. 7.9, 7.10 указують на те, що характер залежності критичних параметрів навантаження в задачі, що розглядається (рис. 7.1) є аналогічним до випадку міжфазної тріщини (рис. 4.2), який досліджено в п. 4.6.6, а максимальний вплив стисливості на критичні значення ε_1 можна оцінити, користуючись даними рис. 3.13 (п. 3.4.6.).

Основні результати та висновки розділу

В заключному розділі дисертаційної роботи в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості представлено напіваналітичний підхід до визначення критичних параметрів навантаження, які відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи, складові якої жорстко з'єднані, при її стиску вздовж тріщини, розташованої в матеріалі підкладки паралельно до межі поділу середовищ.

Граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, з використанням інтегрального перетворення Фур'є зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, яка доповнена додатковою умовою і досліджується чисельно методом Бубнова – Гальоркіна.

Структура одержаної системи інтегральних рівнянь є аналогічною до випадку міжфазної тріщини (розділ 4), а області неперервності їхніх ядер збігаються.

Чисельні результати з визначення критичних деформацій представлені для бішарової системи з компонентами, що описуються пружним потенціалом гармонічного типу.

Валідація результатів відбувається шляхом порівняння з граничними випадками – задачею для тіла з дефектом «нульової довжини» (рис. 3.1.а) та задачею для тіла з міжфазною тріщиною (рис. 4.2).

Аналіз одержаних результатів дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. Якісний характер залежностей критичних параметрів навантаження від механічних параметрів бішарової системи та від зміни відносної товщини плівки покриття в задачі для внутрішньої тріщини в цілому є аналогічним до випадку задачі для міжфазної тріщини. Наступні висновки, сформульовані в розділі 4, залишаються справедливими при дослідженні стиску бішару вздовж тріщини, розташованої в напівобмеженому матеріалі підкладки: пп. 1, 2, 3, 5a, 5b, 5d, 7a, 7b.
2. При збільшенні відстані від тріщини, довжина якої фіксована, до межі поділу підкладки і плівки фіксованої товщини значення критичних деформацій збільшуються, а їх величини прямують до відповідних значень критичних деформацій зморщування такого ж бішару без дефекту.
3. Що більша відстань від тріщини до межі поділу середовищ, то більшою є максимальна довжина такого дефекту, який можна не враховувати при визначенні критичних деформацій бішарової системи, користуючись значенням, обрахованим для такого ж бішару без дефекту (Розділ 3).
4. При наближенні тріщини до межі поділу середовищ, критичні параметри втрати стійкості прямують до відповідних значень для випадку міжфазної тріщини (Розділ 4).

В ході дослідження, представленого в Розділі 7, було з'ясовано, що у випадку напівобмежених бішарових систем *міжфазна* тріщина дійсно є граничним положенням *внутрішньої* тріщини (як мінімум у разі її розташування в матеріалі підкладки), а критичні деформації при переході від одного положення до іншого змінюються неперервно. Сформульований висновок дає можливість застосовувати континуальні моделі для

напівобмежених бішарових систем, у межах яких неможливо розрізнити міжфазні тріщини та тріщини, що не розташовані на межі поділу.

Іншим важливим теоретичним результатом розділу стало поширення напіваналітичного методу, що використовується, на тіла, які складаються з трьох компонентів.

Розгляд задачі про бішарову систему з внутрішньою тріщиною, представлений у цьому розділі, фіналізує дослідження з визначення критичних параметрів втрати плівки покриття на напівобмеженій підкладці. Було представлено ефективний напіваналітичний метод визначення цих параметрів як у випадку відсутності дефектів, так і у випадку наявності міжфазних дефектів двох типів або внутрішньої тріщини.

В контексті перспектив подальших досліджень автор виділяє наступні напрямки розвитку використаного підходу: просторові задачі; задачі для бішарових систем за наявності початкових (залишкових) напружень; задачі для систем з двома плівками покриття; задачі для систем з підкладкою обмеженої товщини; задачі для зон проковзування з тертям.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл представлено та апробовано ефективний напіваналітичний метод визначення критичних параметрів навантаження, що відповідають втраті стійкості гіперпружної бішарової системи «тонка плівка покриття на напівобмеженій підкладці» при стиску вздовж прямолінійної межі поділу середовищ. Розглянуто різні типи міжфазного контакту компонентів і проаналізовано вплив на міцність бішарів розташованих на межі поділу та поза нею тріщин та зон проковзування.

Такі тонкоплівкові системи широко використовуються в низці високотехнологічних галузей, а науковий інтерес до їх дослідження підтверджується неперервним зростанням кількості наукових публікацій з відповідної тематики. В Розділі 1 дисертації проведено належний огляд літератури та обґрунтована наукова новизна дисертації.

Розділ 2 роботи є допоміжним. У ньому викладені необхідні для подальшого дослідження відомості з тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл та наведено відповідні співвідношення.

Розділ 3 роботи присвячено визначенню та аналізу критичних деформацій і критичних довжин хвиль (що утворюються на поверхні тіла в результаті зморщування плівки покриття), які відповідають втраті стійкості описаних бішарів *без дефектів*, яка в цьому разі відбувається за механізмом зморщування. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції вихідну граничну задачу плоскої деформації зведено до граничної задачі, сформульованої в термінах потенціальних гармонічних функцій.

Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є, остання зводиться до трансцендентного рівняння для визначення критичної деформації зморщування.

Розділи 4 – 7 роботи присвячені визначенню та аналізу критичних параметрів навантаження при стиску гіперпружних бішарових систем вздовж присутніх в них дефектів: тріщини (Розділ 4) та зони гладкого проковзування (Розділ 5) на межі поділу жорстко з'єднаних середовищ; тріщини на межі поділу середовищ, що проковзують (Розділ 6); тріщини, яка розташована поза межею поділу середовищ (Розділ 7). Використовуючи представлення невідомих функцій через гармонічні потенціали, введені в Розділі 3, відповідні граничні задачі зведено до інтегрального рівняння (Розділи 5, 6) або системи інтегральних рівнянь (Розділи 4, 7) Фредгольма першого роду. В кожному випадку визначається область неперервності ядер інтегральних рівнянь. Далі їх дослідження з використанням методу Бубнова–Гальоркіна зводиться до задачі на власні значення для системи лінійних однорідних рівнянь відносно критичного параметру навантаження, який нелінійним чином входить в коефіцієнти цієї системи.

«Ядро» дисертаційної роботи складають Розділи 3 – 5, розв'язальні рівняння в яких одержано в загальній формі для комбінації двох довільних пружних потенціалів, якими описуються гіперпружні стисливі або нестисливі складові бішарової системи. Це дало змогу вивчити чутливість критичних параметрів навантаження до вибору конституційних моделей матеріалів підкладки та плівки покриття.

Валідація одержаних результатів відбувається шляхом порівняння з: відповідними результатами для однорідних тіл (Розділи 3, 4, 7); результатами задач для тіл без дефектів (Розділи 4 – 7); результатами натурних (Розділ 3) та

числових (Розділи 3, 4) експериментів інших авторів; результатами, одержаними із застосуванням наближених підходів (Розділи 3 – 6).

В кінці кожного з Розділів 3 – 7, що виносяться на захист, формулюються висновки та проводиться обговорення одержаних результатів, де викладається погляд автора на їх наукову цінність та обґрунтовуються перспективи подальших досліджень.

Висновки, що наведені нижче, стосуються проведеного дослідження в цілому. У них проводиться порівняння результатів задач для бішарів різної конфігурації, підкреслюючи як загальні тенденції, так і відмінності.

1. В задачах для бішарових систем з міжфазним дефектом та без дефектів у разі, коли компоненти тіла жорстко з'єднані між собою, а матеріал плівки є менш жорстким, ніж матеріал підкладки, втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом, аналогічним тому, що має місце у випадку однорідного тіла. При цьому в задачі для тіла без дефекту значення критичної деформації, що відповідає втраті стійкості, *дорівнює* меншому з відповідних значень критичної деформації для приповерхневої нестійкості півплощини, виконаної з матеріалу підкладки або з матеріалу плівки; в задачі для тіла з дефектом – *прямує* до вказаного значення при зменшенні відносної довжини міжфазного дефекту.

2. В задачах для бішарових систем з дефектом, при зменшенні його відносної довжини, значення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, *прямують* до значень критичних деформацій, отриманих для тих же бішарових систем без дефектів. При цьому встановлені такі механічні ефекти:

- виявлено, що якщо матеріал плівки покриття є жорсткішим за матеріал підкладки, указані значення є критичними деформаціями, що відповідають зморщуванню плівки на більш податливій підкладці, і у разі

жорсткого з'єднання компонентів в деяких випадках (див. п. 3 Висновків) можуть бути визначенні з використанням наближених формул;

- для усіх розглянутих задач показано, що чим більшою є жорсткість матеріалу плівки по відношенню до жорсткості матеріалу підкладки, тим більшою є максимальна довжина дефекту, наявність якого можна не враховувати при визначенні критичних деформацій, а користуватися значеннями критичних деформацій для тіла без дефекту;

- в усіх розглянутих задачах виявлена закономірність, що чим більшою є жорсткість матеріалу плівки по відношенню до жорсткості матеріалу підкладки, тим меншою є мінімальна товщина плівки покриття, потовщення якої не призводить до суттєвого збільшення міцності бішару на стиск за наявності в ньому дефекту заданої довжини.

3. Наближені формули для визначення критичних деформацій зморщування і критичних довжин хвиль для бішарових систем з жорстко з'єднаними компонентами (без дефектів) найкраще описують випадок бішару із нестисливих компонентів з потенціалом гармонічного типу. В усіх інших випадках формули можуть бути застосовними лише для достатньо податливих підкладок, коли критичні деформації менші 10%. Точність указаних формул зменшується зі збільшенням стисливості компонентів тіла.

4. Для достатньо довгих міжфазних тріщин (достатньо тонких покриттів) втрата стійкості при стиску відбувається за механізмом локального випучування. При цьому

- якщо матеріал підкладки є жорсткішим ніж матеріал плівки покриття, критичні деформації втрати стійкості майже не залежать ані від механічних характеристик тіла, ані від типу зв'язку між його компонентами. Коли жорсткішим з двох є матеріал покриття, то зі збільшенням його

відносної жорсткості залежність критичних деформацій від указаних характеристик посилюється;

- якщо відношення жорсткостей матеріалів бішарової системи достатньо мале ($\mu_2 / \mu_1 \lesssim 3$), то наближена формула (4.13) застосовна (орієнтовно для тріщин, довжина яких перевищує товщину покриття у 20 та більше разів) як для випадку жорсткого з'єднання, так і для випадку гладкого проковзування. Із послабленням зв'язку між компонентами тіла та зі збільшенням відношення жорсткостей, точність формули зменшується;

- трансцендентне рівняння для визначення критичних деформацій випучування плівки, жорстко з'єднаної з більш податливою товстою підкладкою, застосовне навіть для достатньо жорстких плівок. Проте й це рівняння не враховує внесок механізму зморщування в явище втрати стійкості плівки, та зі збільшенням відношення μ_2 / μ_1 область його застосовності звужується.

5. Послаблення зв'язку між нестисливими компонентами бішару як вздовж всієї лінії поділу, так і на окремих її ділянках, не призводить до суттєвого зменшення критичних деформацій, що відповідають втраті стійкості, якщо плівка достатньо жорстка. Цей висновок є справедливим як для систем з міжфазними тріщинами, так і для бішарів без дефектів. При цьому, зі збільшенням стисливості матеріалів тіла та зі зменшенням відносною жорсткості підкладки вплив послаблення зв'язку між його компонентами посилюється. У разі наявності тріщини на межі поділу указаний вплив також посилюється зі зменшенням її довжини; для достатньо довгих тріщин вплив є незначним (див п. 4 Висновків).

6. Якщо довжина міжфазної зони проковзування достатньо мала або відношення жорсткості матеріалу плівки до жорсткості матеріалу підкладки

достатньо велике, то втрата зв'язку між берегами дефекту не призводить до суттєвого зменшення критичних параметрів навантаження.

7. Навіть для найпростіших моделей гіперпружних матеріалів у випадку співставної жорсткості компонентів бішару фізична нелінійність, закладена в структуру пружних потенціалів, має помітний вплив на результат - система демонструє високу чутливість до вибору конститутивної моделі. Якщо у випадку міжфазної тріщини указаний вплив є суттєвим лише для достатньо коротких тріщини (достатньо тонких покриттів), то у випадку міжфазної зони гладкого проковзування він є суттєвим і у разі достатньо довгих дефектів.

8. Показано, що при зміні геометричного розташування тріщини від *внутрішнього* (усередині матеріалу основи) до *міжфазного* значення критичних деформацій змінюються неперервно. Сформульований висновок дає можливість застосовувати континуальні моделі для напівобмежених бішарових систем, в межах яких неможливо розрізнити міжфазні тріщини та тріщини, що не розташовані на межі поділу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабич, И. Ю., Бакланова, Г. Н. Устойчивость полосы, расположенной между двумя полупространствами. Прикл. механика 23(1), 24–35 (1987).
2. Бартенев, Г. М., Хазанович, Т. Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров. Высокомолекулярные соединения 2(1), 21–28 (1960).
3. Богданов, В. Л., Назаренко, В. М., Кіпніс, О. Л. Розв'язання плоскої задачі механіки руйнування для кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Доповіді Національної академії наук України (4), 3–13 (2024).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.04.003>
4. Гузь, А. Н. К линеаризованой теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями. Докл. АН СССР 252(5), 1085–1088 (1980).
5. Гузь, А. Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача. Докл. АН СССР 259(6), 1315–1318 (1981).
6. Гузь, А. Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача. Докл. АН СССР 261(1), 313–315 (1981).
7. Гузь, А. Н. Трещины нормального отрыва в упругих телах с начальными напряжениями. Докл. АН СССР 254(3), 571–574 (1980).
8. Гузь, А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Наук. думка, Киев (1983).

9. Гузь, А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. Наук. думка, Киев (1989).
10. Гузь, А. Н. О критерии разрушения материалов с начальными напряжениями. Докл. АН СССР 262(2), 285–288 (1982).
11. Гузь, А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Наук. думка, Киев (1977).
12. Гузь, А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Вища школа, Киев (1986).
13. Гузь, А. Н. Пространственная неосесимметричная задача о разрушении полупространства с приповерхностной круговой трещиной. Докл. АН СССР 319(4), 835–839 (1991).
14. Гузь, А. Н. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты. In: Успехи механики в 6-ти томах, т. 5, pp. 661–705. Літера, Киев (2009).
15. Гузь, А. Н. Точное решение плоской задачи о разрушении материала при сжатии вдоль трещин, лежащих в одной плоскости. ДАН СССР 310(3), 563–566 (1990).
16. Гузь, А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Наук. думка, Киев (1979).
17. Гузь, А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Наук. думка, Киев (1973).
18. Гузь, А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. – Т. 1: Разрушение в структуре материала. Літера, Киев (2008).

19. Гузь, А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 т. – Т. 2: Родственные механизмы разрушения. Літера, Киев (2008).
20. Неклассические проблемы механики разрушения: в 4-х т., 5 кн. (Под общей ред. А.Н.Гузя). Наук. думка, Киев (1991–1993).
21. Гузь, А.Н., Дышель, М.Ш., Назаренко, В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами (Неклассические проблемы механики разрушения, том 4) (1992)
22. Гузь, А. Н., Кнюх, В. И., Назаренко, В. М. Расслоение композита при сжатии вдоль двух параллельных макротрещин. Физ.-хим. механика материалов 23(1), 72–78 (1987).
23. Гузь, А. Н., Кнюх, В. И., Назаренко, В. М. Пространственная задача о пластическом приповерхностном разрушении материала при сжатии вдоль макротрещин. ДАН СССР 284(4), 812–815 (1985).
24. Гузь, А. Н., Назаренко, В. М. К теории приповерхностного отслаивания композитных материалов при сжатии вдоль макротрещин. Мех. комп. материалов (5), 826–833 (1985).
25. Гузь, А. Н., Назаренко, В. М. Разрушение материалов при сжатии вдоль периодической системы трещин в условиях плоской деформации. ПММ 51(2), 323–329 (1987).
26. Гузь, А. Н., Назаренко, В. М., Хома, Ю. И. Разрушение композитного материала при сжатии вдоль цилиндрической трещины. Докл. НАНУ (10), 48–52 (1995).

27. Гузь, А. Н., Назаренко, В. М., Хома, Ю. И. О методе решения задач разрушения бесконечного материала с цилиндрической трещиной при осевом сжатии (случай неравных корней). Докл. НАНУ (7), 62–67 (1994).
28. Гузь, А. Н., Чехов, В. Н., Шульга, Н. А. Поверхностная неустойчивость полупространства периодической структуры. ДАН СССР 266(6), 1306–1310 (1982).
29. Довжик, М. В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной. Прикл. механика 48(3), 79–88 (2012).
30. Довжик, М. В. Разрушение материала с периодической системой дискообразных трещин при сжатии вдоль трещин для малых значений расстояний между трещинами. Доп. НАН України (10), 100–105 (2013).
31. Довжик, М. В., Назаренко, В. М. Разрушение материала при сжатии вдоль двух дискообразных трещин для малых расстояний между трещинами. Прикл. механика 48(4), 78–85 (2012).
32. Довжик, М. В., Назаренко, В. М. Разрушение материала при сжатии вдоль периодической системы близко расположенных трещин. Прикл. механика 48(6), 106–113 (2012).
33. Кіпніс, О. Л. Аналіз застосовності наближених підходів до визначення критичних деформацій зморщування тонкої плівки на напівобмеженій підкладці. Доповіді Національної академії наук України (2), 42–53 (2025).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2025.02.042>

34. Кіпніс, О. Л. Локальна втрата стійкості покриття тонкоплівкової системи під дією стиску вздовж міжфазної тріщини за різних умов контакту. Доповіді Національної академії наук України (6), 74–84 (2025).
35. Кіпніс, О. Л. Плоска задача про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. Доповіді Національної академії наук України (6), 43–52 (2024). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.043>
36. Кіпніс, О. Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з'єднання. Доповіді Національної академії наук України (5), 62–74 (2024). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062>
37. Кіпніс, О. Л. Стиснення шаруватого композиту з компонентами, що проковзують, уздовж двох паралельних міжфазних структурних тріщин. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки 80(1), 60–63 (2025). <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.8>
38. Кіпніс, О. Л. Стійкість однорідної нескінченної смуги при стисканні вздовж внутрішньої тріщини. Мат. методи та фіз.-мех. поля 67(1-2), 224–232 (2024). <https://doi.org/10.15407/mmpmf2024.67.1-2.224-232>
39. Кіпніс, О.Л. Руйнування кусково-однорідної півплощини при стиску вздовж тріщини, не розташованої на межі поділу середовищ. Прикл. механіка 61 (6), 114–130 (2025).
40. Леонов, М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения. Прикл. математика и теор. физика (3), 85–92 (1961).

41. Леонов, М. Я., Панасюк, В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикл. механіка 5(5), 391–401 (1959).
42. Механика композитов: в 12 т. Наук. думка, Киев (1993–1998).
43. Механика разрушения и прочности материалов: Справочное пособие: в 8 т. Наук. думка, Киев (1988–2005).
44. Михлин, С. Г., Смолицкий, Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Наука, Москва (1965).
45. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. Наук. Думка, Київ (2006).
46. Панасюк, В. В., Андрейкив, А. Е., Партон, В. З. Основы механики разрушения материалов. Наук. думка, Киев (1988).
47. Прудников, А. П., Бычков, Ю. А., Маричев, О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Наука, Москва (1981).
48. Прудников, А. П., Бычков, Ю. А., Маричев, О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Наука, Москва (1983).
49. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки. Наука, Москва (1966).
50. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Наука, Москва (1971).
51. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, Москва; Ленинград (1963).
52. Уфлянд, Я. С. Методы парных уравнений в задачах математической физики. Наука, Ленинград (1977).

53. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения. Наука, Москва (1974).
54. Abramowitz, M., Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York (1965)
55. Adams, G. G., Hills, D. A. Spontaneous debonding, buckling and delamination of an elastic plate adhering to a rigid base: Theoretical limits. Proc. R. Soc. A 480, 20230578 (2024). <https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0578>
56. Allen, H. G. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. Pergamon Press, Oxford (1969). <https://doi.org/10.1016/C2013-0-02134-2>
57. Bakiler, A. D., Javili, A. Understanding the role of interfacial mechanics on the wrinkling behavior of compressible bilayer structures under large plane deformations. Math. Mech. Solids 28, 748–772 (2022). <https://doi.org/10.1177/10812865221094833>
58. Bereznick, D. E., Ross, J. K., McGill, S. M. The frictional properties at the thoracic skin-fascia interface: implications in spine manipulation. Clin. Biomech. 17(4), 297–303 (2002). [https://doi.org/10.1016/s0021-9290\(02\)00014-3](https://doi.org/10.1016/s0021-9290(02)00014-3)
59. Bigoni, D., Bordignon, N., Piccolroaz, A., Stupkiewicz, S. Bifurcation of elastic solids with sliding interfaces. Proc. R. Soc. A 474, 20170681 (2018). <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0681>
60. Biot, M. A. Mechanics of Incremental Deformation. John Wiley & Sons, New York (1965).
61. Biot, M. A. Surface Instability of Rubber in Compression. Appl. Sci. Res. 12, 168–182 (1963). <https://doi.org/10.1007/BF03184638>

62. Blatz, P. J., Ko, W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6, 223–251 (1962).
63. Bogdanov, V. L. Fracture of highly elastic and composite materials in compression along near-surface crack. *Mech. Compos. Mater.* 59(2), 411–418 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10102-0>
64. Bogdanov, V. L. Influence of initial stresses on the stress state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks. *J. Math. Sci.* 186(1), 1–13 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0977-4>
65. Bogdanov, V. L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses. *Mater. Sci.* 43(3), 321–330 (2007). <https://doi.org/10.1007/s11003-007-0035-1>
66. Bogdanov, V. L. On one approach in fracture mechanics of composites with parallel cracks under the action of initial (residual) stresses. *Mech. Compos. Mater.* 59(2), 239–262 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10094-x>
67. Bogdanov, V. L., Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem. *Int. Appl. Mech.* 45(2), 111–124 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0177-8>
68. Bogdanov, V. L., Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Fracture of semiinfinite material with a circular surface crack in compression along the crack plane. *Int. Appl. Mech.* 28(11), 687–704 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF00847301>
69. Bogdanov, V. L., Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace. *Theor.*

Appl. Fract. Mech. 22, 239–247 (1995). [https://doi.org/10.1016/0167-8442\(95\)00003-8](https://doi.org/10.1016/0167-8442(95)00003-8)

70. Bogdanov, V. L., Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Stress–strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks. Int. Appl. Mech. 46(12), 1339–1350 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0427-4>

71. Bogdanov, V. L., Kipnis, A. L. Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack. J. Math. Sci. 253(1), 99–107 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05214-8>

72. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. Compression of a composite material along a macrocrack near the surface. Mech. Compos. Mater. 30(3), 352–358 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00616467>

73. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential. Int. Appl. Mech. 30(10), 760–765 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00847073>

74. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., Kipnis, A. L. Compression of a semi-bounded body with a coating layer along the interface sliding zone. Z. Angew. Math. Mech. 105, e202400799 (2024). <https://doi.org/10.1002/zamm.202400799>

75. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., Kipnis, O. L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part I. Int. Appl. Mech. 60, 511–524 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2>

76. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., Kipnis, O. L. Compression of semibounded body with thin coating layer along interface near-surface crack. Part

II. Int. Appl. Mech. 60, 641–652 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01316-x>

77. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, A.L. Critical loads for a piecewise-homogeneous half-plane of different hyperelastic materials under compression along the interface sliding zone. Arch Appl Mech 95, 213 (2025) <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02925-1>

78. Bogdanov, V.L., Nazarenko, V.M., Kipnis, O.L. Material Compressibility Effect on the Surface Instability of a Coated Body Under Compression. Strength Mater (2026). <https://doi.org/10.1007/s11223-026-00843-3>

79. Bogdanov, V., Dovzhyk, M., Nazarenko, V. Analysis of the beam approximation applicability in problems on compression of bodies along closely spaced cracks. In: Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A. Y., Kushnir, R. M., Nazarenko, V. M., Eremeyev, V. A. (eds) Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Adv. Struct. Mater., pp. 59–80. Springer, Cham (2024).

80. Bohnenblust, H. F. Note on von Karman's theory of the propagation of plastic deformation in solids. National Technical Reports Library, ADB280574 (1942).

81. Bolotin, V. V. Stability Problems in Fracture Mechanics. John Wiley & Sons, New York (1994).

82. Brau, F. et al. Multiple-length-scale elastic instability mimics parametric resonance of nonlinear oscillators. Nat. Phys. **7**, 56–60 (2011).

83. Bush, K. A., et al. Controlling thin-film stress and wrinkling during perovskite film formation. *ACS Energy Lett.* 3, 1225–1232 (2018). <https://doi.org/10.1021/acsenergylett.8b00544>
84. Cai, Z., Fu, Y. On the imperfection sensitivity of a coated elastic half-space. *Proc. R. Soc. Lond. A* 455, 3285–3309 (1999). <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0451>
85. Cao, G. Z., Xu, Z. H. Surface instability of a semi-infinite elastic half-space under hydrostatic loading. *Appl. Math. Mech.* 13, 101–116 (1992). <https://doi.org/10.1007/BF02450432>
86. Cao, Y., Hutchinson, J. W. From wrinkles to creases in elastomers: The instability and imperfection-sensitivity of wrinkling. *Proc. R. Soc. A* 468, 94–115 (2012). <https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0384>
87. Cao, Y., Hutchinson, J. W. Wrinkling phenomena in neo-Hookean film/substrate bilayers. *ASME J. Appl. Mech.* 79(3), 031019 (2012). <https://doi.org/10.1115/1.4005960>
88. Cao, Y., Jiang, Y., Li, B., Feng, X. Biomechanical modeling of surface wrinkling of soft tissues with growth-dependent mechanical properties. *Acta Mech. Solida Sin.* 25, 483–492 (2012). [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(12\)60043-3](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(12)60043-3)
89. Chen, C. M., Yang, S. Wrinkling instabilities in polymer films and their applications. *Polym. Int.* 61, 1041–1047 (2012). <https://doi.org/10.1002/pi.4223>
90. Cherepanov, G. P. *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw Hill, New York (1979).

91. Comninou, M. The interface crack. *Appl. Mech.* 44(4), 631–636 (1977).
<https://doi.org/10.1115/1.3424148>
92. Cotterell, B., Chen, Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fract.* 104, 169–179 (2000).
<https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>
93. Dimmock, R., Wang, X., Fu, Y., Haj, A., Yang, Y. Biomedical applications of wrinkling polymers. *Recent Prog. Mater.* 2, 1–31 (2020).
<https://doi.org/10.21926/rpm.2001005>
94. Dovzhik, M. V. Fracture of a semi-bounded composite material with a near-surface penny-shaped crack under compression. *Int. Appl. Mech.* 56, 192–197 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01005-x>
95. Dow, N. F., Grundfest, I. J. Determination of most needed potentially possible improvements in materials for ballistic and space vehicles. General Electric Co. Space Sci. Lab. TISR 60 SD389 (1960).
96. Dowson, D. Bio-tribology. *Faraday Discuss.* 156, 9–30 (2012).
<https://doi.org/10.1039/c2fd20103h>
97. Dunn, A. C., Tichy, J. A., Uruena, J. M., Sawyer, W. G. Lubrication regimes in contact lens wear during a blink. *Tribol. Int.* 63, 45–50 (2013).
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2013.01.008>
98. Dvorak, G. J. Composite materials: Inelastic behaviour, damage, fatigue and fracture. *Int. J. Solids Struct.* 37(1-2), 155–170 (2000).
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00089-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00089-8)

99. El-Borgi, S., Usman, S., Güler, M. A. A frictional receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *Int. J. Solids Struct.* 51(25–26), 4462–4476 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.017>
100. Eshelby, J. D. The force on an elastic singularity. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* 244, 87–112 (1951).
101. Euler, L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* 1, 267–268 (1744).
102. Fu, Y. B., Ogden, R. W. (eds) *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
103. Gong, H., Song, Y., Li, G. L., Zhang, L., Guo, D., Xie, G. An intelligent polymer composite with self-lubricating and self-healing functionalities. *Compos. Part B Eng.* 260, 110776 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2023.110776>
104. Green, A. E., Adkins, J. E. *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford (1960).
105. Griffith, A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* 221, 163–198 (1920). <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>
106. Groenewold, J. Wrinkling of plates coupled with soft elastic media. *Physica A* 298(1–2), 32–45 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00209-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00209-6)

107. Gu, P., Chen, X. Role of an interface crack for the blistering mode of a stiff film on a compliant substrate. *J. Coat. Technol. Res.* 19, 661–669 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11998-021-00556-z>
108. Guler, M. A. Closed-form solution of the two-dimensional sliding frictional contact problem for an orthotropic medium. *Int. J. Mech. Sci.* 87, 72–88 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.033>
109. Guz, A. N. *Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. Advanced Structure Materials, Vol. 159.* Springer, Cham (2021).
110. Guz, A. N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech.* 50, 1–57 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>
111. Guz, A. N. Fracture mechanics of composites in compression along cracks. *Sov. Appl. Mech.* 18(6), 489–493 (1982). <https://doi.org/10.1007/BF00883336>
112. Guz, A. N. Fracture mechanics of solids in compression along cracks. *Sov. Appl. Mech.* 18(3), 213–224 (1982). <https://doi.org/10.1007/BF00893923>
113. Guz, A. N. *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1999). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69633-9>
114. Guz, A. N. Nonclassical problems of fracture mechanics: to fiftieth anniversary of studies (review). III. *Int. Appl. Mech.* 55(4), 3–100 (2019).
115. Guz, A. N., Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. Fracture of materials under compression along cracks. In: *Advanced Structured Materials, Vol. 138,* pp. 1–490. Springer, Cham (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1>

116. Guz, A. N., Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. Two-dimensional problems on fracture of solids under compression along cracks. In: *Advanced Structured Materials*, Vol. 138, pp. 149–248. Springer, Cham (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
117. Guz, A. N., Dovzhyk, M. V., Nazarenko, V. M. Fracture of a material compressed along a crack located at a short distance from a free surface. *Int. Appl. Mech.* 47(6), 627–635 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0427-4>
118. Guz, A. N., Dyshel, M. Sh., Nazarenko, V. M. Fracture and stability of materials and structural members with cracks: Approaches and results. *Int. Appl. Mech.* 40(12), 1323–1359 (2004).
119. Guz, A. N., Guz, I. A. Analytical solution of stability problem for two composite half-plane compressed along interfacial cracks. *Composites Part B* 31(5), 405–418 (2000). [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(00\)00016-8](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00016-8)
120. Guz, A. N., Guz, I. A. Mixed plane problems of linearized solids mechanics. Exact solutions. *Int. Appl. Mech.* 40(1), 1–29 (2004). <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000028495.86503.b9>
121. Guz, A. N., Guz, I. A. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 1. Exact solution for the case of unequal roots. *Int. Appl. Mech.* 36(4), 482–491 (2000). <https://doi.org/10.1007/BF02681898>
122. Guz, A. N., Guz, I. A. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 2. Exact solution for the case of equal roots. *Int. Appl. Mech.* 36(5), 615–622 (2000). <https://doi.org/10.1007/BF02681913>
123. Guz, A. N., Guz, I. A. The stability of the interface between two bodies compressed along interface cracks. 3. Exact solution for the case of equal and

unequal roots. *Int. Appl. Mech.* 36(6), 759–768 (2000).
<https://doi.org/10.1007/BF02681934>

124. Guz, A. N., Guz, I. A., Menshykov, A. V., Menshykov, V. A. Three-dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks. (Review). *Int. Appl. Mech.* 49(1), 1–61 (2013).
<https://doi.org/10.1007/s10778-013-0540-7>

125. Guz, A. N., Khoma, Y. I., Nazarenko, V. M. On fracture of an infinite elastic body in compression along a cylindrical defect. In: *Advance in Fracture Research, Proc. of the IX-th Int. Conf. on Fract., Sydney, Australia, Vol. 4*, pp. 2047–2054 (1999).

126. Guz, A. N., Knyukh, V. I., Nazarenko, V. M. Fracture of a material with two parallel cracks: Small and large deformations. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 11(3), 213–223 (1989).

127. Guz, A. N., Knyukh, V. I., Nazarenko, V. M. Fracture of composites in compression along internal and surface macrocracks. *Sov. Appl. Mech.* 22(11), 1047–1051 (1986).

128. Guz, A. N., Knyukh, V. I., Nazarenko, V. M. Fracture of plastic materials in compression along two parallel penny-shaped cracks. *Sov. Appl. Mech.* 24(2), 112–117 (1988).

129. Guz, A. N., Knyukh, V. I., Nazarenko, V. M. Three-dimensional axisymmetric problem of fracture of a material with two penny-shaped cracks in compression along them. *Sov. Appl. Mech.* 20(11), 1003–1012 (1984).

130. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Fracture mechanics of material in compression along cracks (Review). *Highly elastic materials. Sov. Appl. Mech.* 25(9), 851–876 (1989).
131. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Fracture mechanics of materials under compression along cracks (survey). *Structural materials. Sov. Appl. Mech.* 25(10), 959–972 (1989).
132. Guz, A. N., Nazarenko, V. M. Symmetric Failure of the Halfspace with Penny-Shaped Crack in Compression. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 3(3), 233–245 (1985). [https://doi.org/10.1016/0167-8442\(85\)90026-0](https://doi.org/10.1016/0167-8442(85)90026-0)
133. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Bogdanov, V. L. Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 48, 285–303 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2007.10.002>
134. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Khoma, Y. I. Fracture of an infinite incompressible hyperelastic material in compression along a cylindrical crack. *Int. Appl. Mech.* 32(5), 325–331 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF00847016>
135. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Khoma, Y. I. Fracture of an infinite composite material in compression along a finite cylindrical crack. *Int. Appl. Mech.* 31(9), 695–703 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF00847301>
136. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Nazarenko, S. M. Fracture of composites in compression along periodically spaced parallel circular delaminations. *Sov. Appl. Mech.* 25(3), 215–221 (1989).
137. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Starodubtsev, I. P. On fracture problems of materials in compression along two internal parallel cracks. *Appl. Math. Mech.* 18(6), 517–528 (1997).

138. Guz, A. N., Nazarenko, V. M., Starodubtsev, I. P. Plane problem on fracture of structural materials in compression along two parallel cracks. *Sov. Appl. Mech.* 27(4), 352–360 (1991).
139. Guz, I. A. Computational schemes in three-dimensional stability theory (the piecewise-homogeneous model of a medium) for composites with cracks between layers. *Int. Appl. Mech.* 29(4), 274–280 (1993).
140. Guz, I. A. Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface. *Int. Appl. Mech.* 30(11), 841–847 (1994).
141. Guz, I. A. On modelling of a failure mechanism for layered composites with interfacial cracks. *ZAMM* 78, Sup. N 1, S429–S430 (1998).
142. Guz, I. A. Problems of the stability of composite materials in compression along interlaminar cracks: periodic system of parallel macrocracks. *Int. Appl. Mech.* 31(7), 551–557 (1995).
143. Guz, I. A., Guz, A. N. Stability of two different half-planes in compression along interfacial cracks: Analytical solutions. *Int. Appl. Mech.* 37(7), 906–912 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1012302804367>
144. Guz, I. A., Kokhanenko, Y. V. Stability of laminated composite material in compression along microcrack. *Int. Appl. Mech.* 29(9), 702–708 (1993).
145. Guz, I. A., Menshykova, M., Soutis, C. Internal instability as a possible failure mechanism for layered composites. *Phil. Trans. R. Soc. A* 374, 20160019 (2016). <https://doi.org/10.1098/rsta.2016.0019>

146. Hajiesmaili, E., Clarke, D. R. Dielectric elastomer actuators. *J. Appl. Phys.* 129(15), 151102 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0043959>
147. Hamaied, R., Gao, C., Spagnoli, A., Berto, F., Bertolin, C. Wrinkling of soft bilayers created with additive manufacturing: Experimental tests, finite element modeling and analytical validation. *Procedia Struct. Integr.* 47, 102–112 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.06.046>
148. Hines, L., Petersen, K., Lum, G. Z., Sitti, M. Soft actuators for small-scale robotics. *Adv. Mater.* 29, 1603483 (2017). <https://doi.org/10.1002/adma.201603483>
149. Hsieh, Y.-T., Chen, J.-Y., Shih, C.-C., Chueh, C.-C., Chen, W.-C. Mechanically robust, stretchable organic solar cells via buckle-on-elastomer strategy. *Org. Electron.* 53, 339–345 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.orgel.2017.12.008>
150. Hutchinson, J. W. The role of nonlinear substrate elasticity in the wrinkling of thin films. *Philos. Trans. R. Soc. A* 371, 20120422 (2013). <https://doi.org/10.1098/rsta.2012.0422>
151. Irwin, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.* 24, 361–364 (1957). <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
152. Irwin, G. R. Fracture. In: *Handbuch der Physik*, Bd. 6, pp. 551–590. Springer, Berlin (1958).
153. Ji, Q., et al. Enhancing the efficiencies of organic photovoltaic and organic light-emitting diode devices by regular nano-wrinkle patterns. *J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.)* 23, 45–51 (2018). <https://doi.org/10.1007/s12204-018-1908-y>

154. Jin, L., Auguste, A., Hayward, R. C., Suo, Z. Bifurcation diagrams for the formation of wrinkles or creases in soft bilayers. *J. Appl. Mech.* 82, 061008 (2015). <https://doi.org/10.1115/1.4030384>
155. John, F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure Appl. Math.* 13(2), 239–296 (1960). <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130206>
156. Kaltenbrunner, M., White, M., Głowacki, E., et al. Ultrathin and lightweight organic solar cells with high flexibility. *Nat. Commun.* 3, 770 (2012). <https://doi.org/10.1038/ncomms1772>
157. Kienzler, R., Herrmann, G. *Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics.* Springer, Berlin (2000). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57010-0>
158. Kim, J. B., et al. Wrinkles and deep folds as photonic structures in photovoltaics. *Nat. Photonics* 6, 327 (2012). <https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.70>
159. Kipnis, A. L. Investigation of the compression of a piecewise homogeneous half-plane with a fixed boundary along the interface crack. *Mater. Sci.* 60, 736–746 (2025). <https://doi.org/10.1007/s11003-025-00944-5>
160. Kipnis, A. L. Stability of a piecewise-homogeneous half-plane with sliding components under compression along an interface crack. *Mech. Compos. Mater.* 61, 409–424 (2025). <https://doi.org/10.1007/s11029-025-10283-w>
161. Kipnis, A. L. Wrinkling of hyperelastic thin film on hyperelastic semibounded substrate in cases of rigid connection and frictionless sliding of components. *J. Elast.* 157, 40 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10659-025-10130-y>

162. Kouri, J. V., Atluri, S. N. Analytical modelling of laminated composites. *Compos. Sci. Technol.* 46, 335–344 (1993). [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(93\)90179-K](https://doi.org/10.1016/0266-3538(93)90179-K)
163. Kushch, V., Mogilevskaya, S., Stolarski, H., Crouch, S. Elastic interaction of spherical nanoinhomogeneities with Gurtin–Murdoch type interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 59, 1702–1716 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2011.06.004>
164. Kushch, V., Mogilevskaya, S., Stolarski, H., Crouch, S. Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces. *International Journal of Solids and Structures.* 50, 1141–1153 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.12.016>
165. Lam, M. T., Sim, S., Zhu, X., Takayama, S. The effect of continuous wavy micropatterns on silicone substrates on the alignment of skeletal muscle myoblasts and myotubes. *Biomaterials* 27, 4340–4347 (2006). <https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2006.04.004>
166. Li, M., Sun, B. Post-buckling behaviors of thin-film soft-substrate bilayers with finite-thickness substrate. *Sci. Rep.* 12, 4074 (2022). <https://doi.org/10.1038/s41598-022-08136-w>
167. Lipomi, D. J., Tee, B. C. K., Vosgueritchian, M., Bao, Z. Stretchable organic solar cells. *Adv. Mater.* 23, 1771–1775 (2011). <https://doi.org/10.1002/adma.201004426>
168. Loumeaud, A., Pouletaut, P., Bensamoun, S. F., George, D., Chatelin, S. Multiscale mechanical modeling of skeletal muscle: a systemic review of the

literature. *J. Med. Biol. Eng.* 44, 337–356 (2024). <https://doi.org/10.1007/s40846-024-00879-3>

169. Lurie, A. I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. North-Holland, Amsterdam (1990).

170. Ma, H., Zhou, Y., Wang, X., et al. Analysis of a cracked harmonic substrate under a rigid punch. *Int. J. Fract.* 247, 73–86 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10704-024-00782-7>

171. Marchuk, A.V. Three-dimensional analytical solution for laminar plates with allowance for layer slip. *Int Appl Mech* 33, 685–689 (1997). <https://doi.org/10.1007/BF02700664>

172. Mei, H., Huang, R., Chung, J. Y., Stafford, C. M., Yu, H. H. Buckling modes of elastic thin films on elastic substrates. *Appl. Phys. Lett.* 90, 151902 (2007). <https://doi.org/10.1063/1.2720759>

173. Mei, H., Landis, C. M., Huang, R. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mech. Mater.* 43, 627–642 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.08.003>

174. Melly, S. K., Liu, L., Liu, Y., Leng, J. A review on material models for isotropic hyperelasticity. *Int. J. Mech. Syst. Dyn.* 1, 71–88 (2021). <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>

175. Merodio, J., Ogden, R. W. Instabilities associated with loss of ellipticity in fiber-reinforced nonlinearly elastic solids. In: *Computational and Experimental Methods in Structures. Mathematical Methods and Models in Composites*, Chapter 7, pp. 295–332 (2023). https://doi.org/10.1142/9781800611887_0007

176. Mikhlin, S. G. Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press, Oxford (1964).
177. Milton, G. W. The Theory of Composites. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
178. Moon, M.-W., et al. Wrinkled hard skins on polymers created by focused ion beam. Proc. Natl. Acad. Sci. 104, 1130–1133 (2007). <https://doi.org/10.1073/pnas.0608138104>
179. Mooney, M. A theory of large elastic deformation. Journal of Applied Physics, 11(9), 582–592 (1940).
180. Murnaghan, F. D. Finite deformations of an elastic solid. American Journal of Mathematics, 59(2), 235–260 (1937).
181. Nazarenko, V. M. Mutual influence of a circular surface crack and a free boundary in an axisymmetric problem on fracture of an incompressible half-space in compression along the crack plane. Sov. Appl. Mech. 21(2), 133–137 (1985).
182. Nazarenko, V. M. Plastic failure of materials in compression along near-surface cracks. Sov. Appl. Mech. 22(3), 133–137 (1986).
183. Nazarenko, V.M. Plastic rupture of materials during compression along near-surface fractures. Soviet Applied Mechanics 22, 245–250 (1986). <https://doi.org/10.1007/BF00887246>
184. Nazarenko, V.M. Theory of fracture of materials in compression along near-surface cracks under plane-strain conditions. Soviet Applied Mechanics 22, 1192–1199 (1986). <https://doi.org/10.1007/BF01375820>

185. Nazarenko, V. M. Two-dimensional problem on fracture of materials in compression along surface cracks. *Sov. Appl. Mech.* 22(10), 970–977 (1986).
186. Nazarenko, V. M., Bogdanov, V., Altenbach, H. Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear. *Int. J. Fract.* 104, 273–287 (2000). <https://doi.org/10.1023/A:1007649801220>
187. Niinivaara, E., Desmaisons, J., Dufresne, A., Bras, J., Cranston, E. D. Film thickness limits of a buckling-based method to determine mechanical properties of polymer coatings. *J. Colloid Interface Sci.* 582, 227–235 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2020.08.025>
188. Nikraves, S., Ryu, D., Shen, Y. L. Instabilities of thin films on a compliant substrate: Direct numerical simulations from surface wrinkling to global buckling. *Sci. Rep.* 10, 5728 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-020-62600-z>
189. Nolte, A. J., Chung, J. Y., Davis, C. S., Stafford, C. M. Wrinkling to delamination transition in thin polymer films on compliant substrates. *Soft Matter* 13, 7930–7937 (2017). <https://doi.org/10.1039/C7SM01472D>
190. Novozhilov, V. V. *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity.* Graylock Press, Rochester, NY (1953).
191. Ogden, R. W. Incremental elastic motions superimposed on a finite deformation in the presence of an electromagnetic field. *Int. J. Non-Linear Mech.* 44, 570–580 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.017>
192. Ogden, R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567), 565–584 (1972).

193. Ogden, R. W. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, New York (1997).
194. Öner, E. Frictionless contact mechanics of an orthotropic coating/isotropic substrate system. *Comput. Concr.* 28, 209–220 (2021). <https://doi.org/10.12989/cac.2021.28.2.209>
195. Öner, E. Two-dimensional frictionless contact analysis of an orthotropic layer under gravity. *J. Mech. Mater. Struct.* 16, 573–594 (2021). <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.573>
196. Ostryk, V.I. Contact of the faces of an interface semiinfinite crack. *J. Math. Sci.*, 270 (1), 123–142 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06336-x>
197. Orowan, E. O. Fundamentals of brittle behavior of metals. In: Murray, W. M. (ed) *Fatigue and Fracture of Metals*, pp. 139–167. Wiley, London (1950).
198. Otténio, M., Destrade, M., Ogden, R. W. Incremental magnetoelastic deformations, with applications to surface instability. *J. Elast.* 90, 19–42 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9120-6>
199. Pan, T., et al. Experimental and Theoretical Studies of Serpentine Interconnects on Ultrathin Elastomers for Stretchable Electronics. *Adv. Funct. Mater.* 27, 1702589 (2017). <https://doi.org/10.1002/adfm.201702589>
200. Ram, S. K., et al. Efficient light-trapping with quasi-periodic uniaxial nanowrinkles for thin-film silicon solar cells. *Nano Energy* 35, 341–349 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2017.04.007>
201. Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 35(4), 379–386 (1968).

202. Rogers, J. A., Someya, T., Huang, Y. Materials and mechanics for stretchable electronics. *Science* 327, 1603–1607 (2010). <https://doi.org/10.1126/science.1182383>
203. Rosset, S., Shea, H. R. Flexible and stretchable electrodes for dielectric elastomer actuators. *Appl. Phys. A* 110, 281–307 (2013). <https://doi.org/10.1007/s00339-012-7402-8>
204. Ryu, D., Mongare, A. Corrugated photoactive thin films for flexible strain sensor. *Materials* 11(10), 1970 (2018). <https://doi.org/10.3390/ma11101970>
205. Saha, S. K. Sensitivity of the mode locking phenomenon to geometric imperfections during wrinkling of supported thin films. *Int. J. Solids Struct.* 109, 166–179 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.01.018>
206. Schauer, S., et al. Disordered diffraction gratings tailored by shape-memory based wrinkling and their application to photovoltaics. *Opt. Mater. Express* 8, 184–198 (2018). <https://doi.org/10.1364/OME.8.000184>
207. Schultheisz, C., Waas, A. Compressive failure of composites, parts I and II. *Progr. Aerosp. Sci.* 32, 1–78 (1996). [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(94\)00002-3](https://doi.org/10.1016/0376-0421(94)00002-3)
208. Sensenig, C. Instability of thick elastic solids. *Commun. Pure Appl. Math.* 17, 451–491 (1964). <https://doi.org/10.1002/cpa.3160170406>
209. Shahbad, R., Kazim, M., Razian, S. A., Desyatova, A., Jadidi, M., et al. Variations in stiffness and structure of the human aorta along its length. *Sci. Rep.* 15, 11120 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41598-025-95008-8>
210. Sharba, M. J., Leman, Z., Sultan, M. T. H., Ishak, M. R., Hanim, M. A. A. Tensile and compressive properties of woven kenaf/glass sandwich hybrid

- composites. *Int. J. Polym. Sci.* 2016, 1235048 (2016).
<https://doi.org/10.1155/2016/1235048>
211. Shariyat, M. A generalized high-order global–local plate theory for nonlinear bending and buckling analyses of imperfect sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads. *Compos. Struct.* 92(1), 130–143 (2010).
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.07.007>
212. Signorini, A. Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 19, 97–112 (1930).
213. Steigmann, D. J., Ogden, R. W. Elastic surface–substrate interactions. *Proc. R. Soc. A* 455, 437–474 (1999). <https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0320>
214. Stewart, P. S., Waters, S. L., Sayed, T. E., Vella, D., Goriely, A. Wrinkling, creasing, and folding in fiber-reinforced soft tissues. *Extreme Mech. Lett.* 8, 22–29 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.10.005>
215. Stoop, N., Müller, M. M. Non-linear buckling and symmetry breaking of a soft elastic sheet sliding on a cylindrical substrate. *Int. J. Non-Linear Mech.* 75, 115–122 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.02.013>
216. Stupkiewicz, S., Marcinişzyn, A. Elastohydrodynamic lubrication and finite configuration changes in reciprocating elastomeric seals. *Tribol. Int.* 42, 615–627 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.08.008>
217. Sun, J.-Y., Xia, S., Moon, M.-W., Oh, K. H., Kim, K.-S. Folding wrinkles of a thin stiff layer on a soft substrate. *Proc. R. Soc. A* 468, 932–953 (2012).
<https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0567>

218. Tarasovs, S., Andersons, J. Competition between the buckling-driven delamination and wrinkling in compressed thin coatings. *Microelectron. Reliab.* 52, 296–299 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2011.08.007>
219. Torres, J. M., Stafford, C. M., Vogt, B. D. Elastic modulus of amorphous polymer thin films: relationship to the glass transition temperature. *ACS Nano* 3(9), 2677–2685 (2009). <https://doi.org/10.1021/nn9006847>
220. Treloar, L. R. G. Large elastic deformations in rubberlike materials. In: Grammel, R. (ed) *Deformation and Flow of Solids*, pp. 208–217. Springer, Berlin, Heidelberg (1956).
221. Vandeparre, H., et al. Hierarchical wrinkling patterns. *Soft Matter* 6, 5751–5756 (2010). <https://doi.org/10.1039/c0sm00246k>
222. Verhelst, H. M., Möller, M., Den Besten, J. H., Mantzaflaris, A., Kaminski, M. L. Stretch-based hyperelastic material formulations for isogeometric Kirchhoff–Love shells with application to wrinkling. *Comput. Aided Des.* 139, 103075 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.cad.2021.103075>
223. Vitu, T., Escudeiro, A., Polcar, T., Cavaleiro, A. Sliding properties of Zr-DLC coatings: The effect of tribolayer formation. *Surf. Coat. Technol.* 258, 734–745 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.08.003>
224. Volynskii, A. L., Bazhenov, S., Lebedeva, O. V., et al. Mechanical buckling instability of thin coatings deposited on soft polymer substrates. *J. Mater. Sci.* 35, 547–554 (2000). <https://doi.org/10.1023/A:1004707906821>
225. Wang, B., Bao, S., Vinnikova, S., Ghanta, P., Wang, S. Buckling analysis in stretchable electronics. *npj Flex. Electron.* 1, 5 (2017). <https://doi.org/10.1038/s41528-017-0005-9>

226. Wang, C., Zhang, H., Yang, F., Fan, Y., Liu, Q. Enhanced light scattering effect of wrinkled transparent conductive ITO thin film. *RSC Adv.* 7, 25483–25487 (2017). <https://doi.org/10.1039/C7RA03376A>
227. Wang, G. F., Schiavone, P., Ru, C. Q. Surface instability of a semi-infinite harmonic solid under van der Waals attraction. *Acta Mech.* 180, 1–10 (2005). <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0271-x>
228. Wells, A. A. Critical tip opening displacement as fracture criterion. In: *Proc. Crack Propagation Symp.*, Vol. 1, pp. 210–221. Cranfield (1961).
229. Wells, A. A. Critical tip opening displacement as fracture criterion. In: *Proc. Crack Propagation Symp.*, Vol. 1, pp. 210–221. Cranfield (1961).
230. Winiarski, B., Guz, I. A. Plane problem for layered composites with periodic array of interfacial cracks under compressive static loading. *Int. J. Fract.* 144(2), 113–119 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10704-007-9076-3>
231. Winiarski, B., Guz, I. A. The effect of cracks interaction for transversely isotropic layered material under compressive loading. *Finite Elem. Anal. Des.* 44(4), 197–213 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.11.013>
232. Winiarski, B., Guz, I. A. The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading. *Phil. Trans. R. Soc. A* 366(1871), 1835–1839 (2008). <https://doi.org/10.1098/rsta.2007.2191>
233. Winiarski, B., Guz, I. A. The effect of fibre volume fraction on the onset of fracture in laminar materials with an array of coplanar interface cracks. *Compos. Sci. Technol.* 68(12), 2367–2375 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.12.008>

234. Xu, F., Koutsawa, Y., Potier-Ferry, M., Belouettar, S. Instabilities in thin films on hyperelastic substrates by 3D finite elements. *Int. J. Solids Struct.* 69–70, 71–85 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.007>
235. Yan, D., Zhang, K., Hu, G. Wrinkling of structured thin films via contrasted materials. *Soft Matter* 12, 3937–3942 (2016). <https://doi.org/10.1039/C6SM00216A>
236. Yeerella, R. H., Cai, S. Fracture mechanics modeling of aortic dissection. *Biomech. Model. Mechanobiol.* 23, 1377–1391 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10237-024-01845-3>
237. Yeo, T., Burghardt, W. R. A model for finite deformation of elastic materials with couple stresses. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22), 3045–3063 (1996).
238. Yeoh, O. H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 63(5), 792–805 (1990).
239. Yin, D., et al. Two-dimensional stretchable organic light-emitting devices with high efficiency. *ACS Appl. Mater. Interfaces* 8, 31166–31171 (2016). <https://doi.org/10.1021/acsami.6b09925>
240. Yu, H. H., Hutchinson, J. W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.* 113, 39–55 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>
241. Žák, S., Lassnig, A., Hrstka, M., Cordill, M. J. Buckling induced delamination: Connection between mode mixity and Dundurs parameters. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 122, 103647 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103647>

242. Zhang, Y., et al. Enhancement of silicon-wafer solar cell efficiency with low-cost wrinkle antireflection coating of polydimethylsiloxane. *Sol. Energy Mater. Sol. Cells* 181, 15–20 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2018.01.021>
243. Zhao, Y., Yin, L.-J., Zhong, S.-L., Zha, J.-W., Dang, Z.-M. Review of dielectric elastomers for actuators, generators and sensors. *IET Nanodielectr.* 3(4), 99–106 (2020). <https://doi.org/10.1049/iet-nde.2019.0045>
244. Zhuo, X. R., Jang, H. S., Beom, H. G. Delamination buckling of a thin film bonded to an orthotropic substrate. *Int. J. Precis. Eng. Manuf.* 16, 323–333 (2015). <https://doi.org/10.1007/s12541-015-0043-z>