

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА**

**ТИМОХІН ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ**

УДК 532.595

**НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРУБОПРОВОДУ З РІДИНОЮ  
В ОКОЛІ КРИТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ ТЕЧІЇ РІДИНИ**

01.02.01 – теоретична механіка

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор  
**Лимарченко Олег Степанович**,  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
**КОНОНОВ Юрій Микитович**,  
Інститут прикладної математики та механіки  
НАН України,  
завідувач відділу

кандидат фізико-математичних наук,  
**КОНСТАНТИНОВ Олександр Володимирович**,  
старший науковий співробітник відділу  
математичних проблем механіки та теорії керування  
Інституту математики НАН України.

Захист відбудеться «17» грудня 2019 р. о 13.30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Автореферат розісланий « » листопада 2019 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01  
доктор фізико-математичних наук

О.П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

В сучасному світі, майже в усіх сферах техніки постійно доводиться вирішувати задачу транспортування різноманітних типів рідини – подача води у побутовій сфері, подача палива у енергетичні установки, та інші.

Основним технічним засобом транспортування рідини були і залишаються трубопроводи. Тому задачі моделювання та дослідження динаміки руху трубопроводів набувають все більшої актуальності. Дослідженню динаміки трубопроводів присвятили свої роботи Феодос'єв В.И., Бондарь Н.Г., Бабаков И.М., Светлицький В.А. та інші. На механіко-математичному факультеті КНУ імені Тараса Шевченка тематикою динаміки трубопроводів займаються професори Горошко О.О. та Лимарченко О.С.

Основні дослідження, присвячені вивченню динаміки трубопроводів, моделюють поведінку трубопроводів в докритичному діапазоні швидкостей течії рідини, або взагалі, визначенню безпечного режиму функціонування трубопроводів методами лінійної теорії стійкості динамічних систем. Проте сучасні тенденції проектування технічних об'єктів відображають потребу стійкого функціонування таких об'єктів навіть за межами безпечних режимів – у позаштатних та аварійних ситуаціях, та інше. У зв'язку з цим, набуває необхідності моделювання та прогнозування поведінки динамічних систем і в закритичних діапазонах зміни параметрів системи.

В даній роботі розроблено нелінійну модель, яка дозволяє продемонструвати характер поведінки динамічної системи «консольно закріплений прямолінійний трубопровід – ідеальна рідина» в околі критичних швидкостей течії рідини, та за межами критичної швидкості течії рідини, а також провести дослідження, аналіз та класифікацію режимів течії рідини в за критичній області.

**Актуальність** роботи спричинена широким використанням трубопроводів в енергетичних транспортних системах (нафтопроводи, газопроводи), літакобудуванні, космічній галузі, а також жорсткими вимогами до подібних систем, та нормативними документами, які регламентують процеси проектування, виробництва та експлуатації цих систем.

Більшість робіт з тематики забезпечення функціонування систем складних об'єктів спрямовані на розробку методів запобігання наближення систем до позаштатних та аварійних режимів функціонування, і дуже мала кількість досліджень спрямована на прогнозування поведінки систем та забезпечення їх залишкового функціонування в разі випадку аварії.

Проведення експериментального дослідження поведінки трубопроводів з рідиною, у випадку їх часткового руйнування, пов'язане зі значними матеріальними витратами. У модельних експериментах не завжди вдається витримати критерії подібності, більш того, не вдається відтворити умови, наближені до реальних умов, невагомості та ін. Розрахункові моделі, основані на використанні методу скінчених елементів та методу скінчених об'ємів із використанням технології двобічної взаємодії пружної структури та суцільного середовища вимагають великих розрахункових потужностей ЕОМ.

Тому поряд з розвитком експериментальних методів дослідження динамічних процесів у системах трубопровід–рідина важливо створювати ефективні математичні і розрахункові моделі динаміки, засновані на врахуванні найбільш загальних механічних властивостей досліджуваних динамічних об'єктів.

В даній роботі використовується аналітичний підхід. Рівняння руху системи побудовані на основі варіаційних формулювань задач, методів нелінійної механіки і методу модальної декомпозиції, для верифікації аналітичні перетворення проводились також із використанням програмного пакету символьної математики Mathematica, що дозволило аналітично отримати дискретну форму системи із урахуванням дванадцяти власних форм коливань. Для подальшого аналізу системи, використовувався неявний адаптивний метод інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь, представлений у пакеті Mathematica, який дозволив отримати результати для режимів коливань трубопроводу у закритичній області значень швидкості течії рідини. За класифікацією задача про коливання пружного трубопроводу, повністю заповненого рідиною, що тече, в нелінійній постановці зводиться до нестационарної крайової задачі з фізичними і геометричними нелінійностями.

**Мета** дисертаційної роботи:

дослідити поведінку пружного консольно закріпленого трубопроводу з рідиною, що тече, в околі втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу, та біфуркаційні режими в системі трубопровід–рідина для закритичних швидкостей течії рідини.

Основні **завдання**, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети:

- Побудувати нелінійну динамічну модель руху трубопроводу з рідиною на рухомій основі в околі критичних швидкостей течії на основі варіаційних принципи механіки з врахуванням впливу відомих нелінійних механізмів і мішаного (ейлерово-лагранжевого) опису руху складових компонент системи.
- На основі методу модальної декомпозиції, засобами пакету символьної математики Mathematica, побудувати нелінійну дискретизовану модель системи, яка враховує дванадцять власних

форм коливань. Звести відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів коливань до форми Коші. Реалізованими у пакеті Mathematica неявними адаптивними методами інтегрування (завдяки яким стало можливим дослідження системи в області закритичних швидкостей течії рідини) систем диференціальних рівнянь, провести чисельний аналіз поведінки динамічної системи на різних режимах швидкостей течії рідини.

- Дослідити частотні гілки власних значень системи. Визначити основні біфуркації, які відбуваються в системі при перевищенні критичного значення швидкості течії рідини. Провести класифікацію режимів у системі трубопровід–рідина для різних діапазонів швидкостей течії рідини.

- На основі розв'язання групи тестових задач розробити рекомендації по практичному застосуванню розвинутої моделі, дослідити ступінь достовірності моделі по відображенню основних властивостей системи трубопровід–рідина, вивчити внесок різних механізмів у формування динамічних процесів.

**Об'єктом дослідження даної роботи** є дослідження динамічної поведінки системи консольно закріплений пружний трубопровід – ідеальна рідина в околі критичних швидкостей течії рідини, включаючи закритичний діапазон швидкостей.

**Предметом дослідження роботи** є нелінійні динамічні процеси в системі трубопровід – рідина, які відбуваються в околі втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу, та при втраті стійкості при перевищенні критичного значення швидкості течії рідини, а також біфуркаційні режими коливань трубопроводу при закритичних швидкостях течії рідини.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі використовується сукупність методів нелінійної механіки та варіаційних методів математичної фізики. Моделювання базується на класичному варіаційному принципі Гамільтона–Остроградського. Для побудови дискретної динамічної системи було використано метод модальної декомпозиції, оснований на методі Канторовича, та методи символічних аналітичних перетворень. Для налізу стійкості режимів коливань трубопроводу використовувався перший метод Ляпунова – аналіз власних значень динамічної системи. Для одержання кількісних результатів (деформацій трубопроводу в довільний момент часу, сил та моментів в точці консольного закріплення, спектрів коливань вільного кінця трубопроводу, даних для побудови анімацій) використовувалися чисельні методи та методи графічної візуалізації даних, реалізовані у пакеті Mathematica.

**Наукова новизна** отриманих результатів полягає у тому, що:

- Аналітичними засобами та засобами символічної математики побудовано модель нелінійної динаміки пружного трубопроводу з рідиною, що тече.
- Аналітично досліджено проблему втрати стійкості положення рівноваги прямолінійної форми трубопроводу для чотиримодової моделі динамічної системи, що є узагальненням одномодової моделі Феодос'єва В.І., яку переважно використовують в публікаціях.
- Встановлено наявність біфуркаційних режимів коливань в системі трубопровід–рідина, та багатовид динамічних альтернативних динамічних положень рівноваги трубопроводу для закритичних швидкостей течії рідини.
- Досліджено характер поведінки, та проведено класифікацію режимів коливання трубопроводу з рідиною для різних діапазонів швидкостей течії рідини, і, зокрема, для закритичних швидкостей, досліджено внесок основних механізмів взаємодії на формування динамічних процесів.

**Достовірність отриманих результатів** забезпечується:

Використанням засобів символічної математики, реалізованих у пакеті Mathematica, для виконання складних математичних перетворень; варіаційним формулюванням задачі; розглядом дванадцяти власних форм коливань у дискретизованій моделі динамічної системи трубопровід–рідина; співпадінням частини розрахунків із результатами, отриманими іншими авторами; застосуванням адаптивних методів інтегрування із автоматичним контролем точності розрахунків на основі контролю збіжності, реалізованими у пакеті Mathematica, а також узгодженням з теоретичними і експериментальними роботами, виконаними іншими авторами.

**Практична цінність отриманих результатів.** Розроблена модель та її чисельна реалізація є достатньо універсальними та можуть бути застосованими для дослідження багатьох прикладних задач динаміки трубопроводів, що знаходяться в перехідних режимах руху. Особливо цінною є можливість моделювання руху трубопроводу в діапазонах швидкостей, що перевищують критичні значення, що стало можливим за рахунок використання адаптивних неявних схем інтегрування. Важливим результатом є встановлення наявності біфуркаційних режимів коливань трубопроводу і проведення класифікація різних режимів коливань трубопроводу на основі теорії стійкості.

**Особистий внесок дисертанта.** Представлені до захисту результати були отримані здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві з науковим керівником роботах дисертанта були проведені дослідження загальних закономірностей і особливостей розвитку

нелінійних динамічних процесів в системі трубопровід–рідина, спільний аналіз специфіки енергообміну між формами коливань за рахунок наявності сил Коріоліса, проведений аналіз чисельних прикладів.

Науковому керівнику Лимарченку О.С. належить постановка задачі, ідея методу та участь в систематизації одержаних результатів.

**Апробація роботи.** Наукові та практичні результати були розглянуті на семінарах та конференціях.

Основні результати по темі дисертації були представлені та обговорювались на наступних конференціях:

- Symposium "Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics", Lviv-Brukhovychi, September 18-21, 2012

Частково розділи дисертації доповідались на семінарах кафедри механіки суцільних середовищ Київський національний університет імені Тараса Шевченка механіко-математичного факультету під керівництвом професора О.С. Лимарченка у 2011 – 2012 роках.

У повному обсязі робота доповідалась і була підтримана на:

- семінарі кафедри механіки суцільних середовищ Київський національний університет імені Тараса Шевченка механіко-математичного факультету під керівництвом професора О.С. Лимарченка (2013)
- семінарі відділу відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України А.А. Мартинюка (2018).
- семінарі секції за напрямом "Динаміка і стійкість руху механічних систем" при Вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (2018).

**Публікації.** По темі дисертації було опубліковано 6 наукових робіт у вітчизняних фахових виданнях, затверджених МОН України, з них одна – у науковому журналі, який має міжнародний імпаکت-фактор. За результатами дисертації опубліковано також 1 статтю у матеріалах наукових конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається з вступу, 4 розділів, висновків та списку літератури із 109 джерел на 12 сторінках. Загальний обсяг дисертації викладено на 104 сторінках разом із 29 рисунками.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**Вступ** представляє собою обґрунтування актуальності проведення даного дослідження. Також у вступі сформульовано основну мету і задачу роботи, відзначено об'єкт і предмет дослідження, наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, наведено дані про апробацію та публікацію результатів роботи.

**Розділ 1** являє собою аналіз робіт інших авторів по обраній тематиці, аналізується моделювання трубопроводу та методи дослідження динамічних систем трубопровід – рідина, обґрунтовується вибір в дисертаційній роботі найбільш ефективного способу моделювання та методу для вирішення подібного класу задач.

**Розділ 2** присвячено побудові нелінійної моделі динаміки трубопроводу та аналітичними методами і засобами символічної математики зведено її до дискретної моделі – дванадцятимірної системи звичайних диференціальних рівнянь за методом Канторовича.

В дисертаційній роботі побудована нелінійна модель поведінки пружного консольно закріпленого трубопроводу з рідиною, що тече. Для побудови моделі було використано варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського. Також було застосовано метод Канторовича для виконання модальної декомпозиції лагранжіану динамічної системи трубопровід-рідина та отримання відповідної скінчено вимірної системи рівнянь Лагранжу другого роду. Усі аналітичні перетворення, отримання системи диференціальних рівнянь на основі Лагранжіану динамічної системи, та зведення системи рівнянь до форми Коші було виконано аналітично і підтверджено у пакеті символічної математики Mathematica.

Враховано мішаний характер опису руху компонент системи. Рух рідини розглядається у змінних Ейлера, а рух трубопроводу – у змінних Лагранжа. Загальний рух елементів об'єму рідини складається із суми руху трубопроводу та руху рідини. Тому це призводить до необхідності розглядати для руху рідини лагранжову змінну поперечної деформації труби  $u(x,t)$  як ейлерову змінну з наступним врахуванням у рівняннях руху конвективної складової прискорення.

Модель динаміки системи ґрунтується на наступних припущеннях: ідеальної однорідної нестисливої рідини, що тече по трубопроводу з заданою постійною швидкістю  $V$ , та трубопроводу кругового поперечного перерізу, який описується моделлю пружної балки. Деформації трубопроводу вважаються достатньо малими по відношенню до його довжини. Це дозволяє замінити нелінійні члени в складових функції Лагранжа на їх поліноміальні апроксимації. При цьому розглядаються лише члени до четвертого порядку малості відносно прогинів балки. Це



дозволяє отримати рівняння руху системи з точністю до величин третього порядку малості. В результаті отримуємо таку функцію Лагранжа для досліджуваної динамічної системи у вигляді:

$$L = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx -$$

$$- \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l u dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx -$$

$$- \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx +$$

$$+ \rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx.$$

Перехід до дискретної моделі системи здійснюється на основі методу модальної декомпозиції динамічної системи. Виконується розклад функції відхилення елементів трубопроводу у ряд за власними формами

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t)$$

$c_i(t)$  – амплітудні параметри коливань, залежні від часу,  $A_i(x)$  – власні форми коливань трубопроводу, які є повною ортогональною системою функцій.

Рівняння руху системи трубопровід–рідина в загальному вигляді такі

$$\ddot{c}_r = - \frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) -$$

$$- \frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 -$$

$$- \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left( d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 -$$

$$- \frac{EF}{2(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4$$

В рівняннях розглянуто нелінійності тільки до третього порядку малості (оскільки функція Лагранжа враховувала величини до четвертого порядку малості включно) та враховано більшість відомих нелінійних механізмів системи трубопровід–рідина та їх взаємодія. Розв'язання такої системи рівнянь можливо провести тільки шляхом використання чисельних методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

Побудована модель руху системи трубопровід–рідина була проаналізована та візуалізована у програмному пакеті символічної та

обчислювальної математики із широким спектром можливостей візуалізації – Mathematica.

**Розділ 3** містить результати досліджень різних швидкісних режимів течії рідини, зокрема закритичні. Проводиться аналіз впливу на поведінку системи наявності нелінійного демпфера у вигляді однобічної додаткової пружності або однобічної в'язкості.

Основною метою моделювання поведінки трубопровід–рідина є розрахунок ряду тестових прикладів, які дадуть змогу оцінити коректність побудованої моделі, провести порівняльний аналіз отриманих результатів із відомими результатами інших авторів, а також зробити оцінку достатності та доцільності взяття у розрахунок дванадцяти власних форм для моделі консольно закріпленого трубопроводу. При досягненні першої критичної швидкості в системі значно зростають амплітуди коливань, які не спадають із подальшим зростанням швидкості течії, тому розглядати поведінку системи в околі таких значень критичних швидкостей недоцільно.

Розрахунки проводилися для перших дванадцяти власних форм трубопроводу. Розглядали випадок течії рідини із постійною швидкістю. Рідина вважалася нестисливою ідеальною з густиною, що відповідає густині води. Трубопровід вважався довжиною один метр із круглим перерізом – зовнішній діаметр дорівнює 42 мм, товщина стінки – 0.8 мм. За матеріал трубопроводу було обрано поліуретан, армований скловолокном. Його модуль Юнга дорівнює  $E=2 \cdot 10^9$  Па, густина дорівнює  $1250 \text{ кг/м}^3$ . Вибір такого матеріалу зумовлений необхідністю дослідити динаміку трубопровідних систем, у яких інерційні властивості рідини мають суттєвий вплив на поведінку системи.

За початкове збурення системи приймалося відхилення трубопроводу від положення рівноваги за другою власною формою  $c_2(0) = 0.02$ .

Розглянемо поведінку системи якщо  $V = 0$ . Варіант *a* відповідає стартовому руху системи, а варіант *б* — поведінці системи після п'яти періодів коливань.

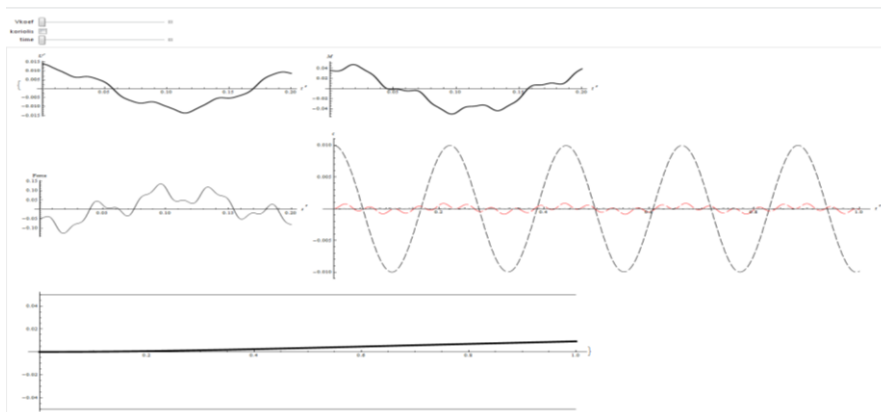


Рис. 1. Поведінка системи при  $V = 0$ .

Бачимо, що коливання за другою формою є домінуючі, перша та третя форми збуджуються нелінійними механізмами, проте їх амплітуди значно поступаються амплітуді другої форми коливань. Під час аналізу прогину трубопроводу помітно, що коливання відбуваються практично за другою формою та не зростають у часі

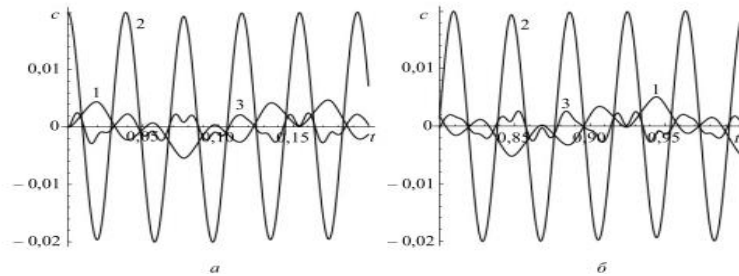


Рис.2. Зміна перших трьох амплітуд коливань при  $V = 0$ .

Розглянемо випадок  $V = 0.6V_{кр}$ . За такої швидкості поведінка системи докорінно змінюється (рис. 3). Тепер у системі створюються умови для перерозподілу енергії як між формами коливань, так і для її переходу від рідини до коливань трубопроводу за першою формою. Помітно, що на відміну від нульової швидкості течії в системі починає домінувати перша форма коливань.

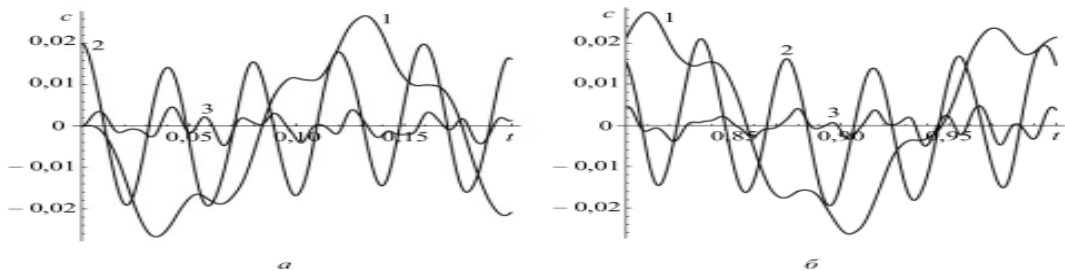


Рис.3. Зміна перших трьох амплітуд коливань при  $V = 0.6V_{кр}$ .

У випадку коливань для  $V = 0.9V_{кр}$ , амплітуди коливань значно збільшуються, домінування першої форми стає ще відчутнішим. Спостерігається інтенсивне розгойдування коливань трубопроводу за рахунок механізму типу внутрішнього флатера. Відхилення вільного кінця трубопроводу та кут повороту його перерізу подані на рис. 4. Цікаво відзначити наявність коливань, за яких кінець трубопроводу виконує високочастотні вібрації з поворотами перерізу, але без переходу через рівноважний стан. Це свідчить про значний внесок вищих форм коливань.

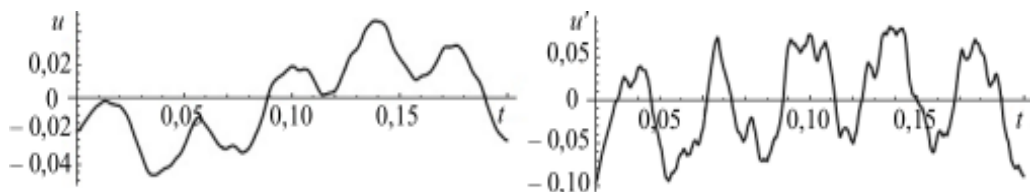


Рис.4. Залежність переміщення та кута повороту кінця трубопроводу від часу.

Проведене моделювання поведінки трубопроводу з рідиною в околі критичної швидкості свідчить про те, що з наближенням до критичних

швидкостей у системі створюються умови для цілеспрямованого перерозподілу енергії руху рідини до першої форми коливань трубопроводу. За своїм характером такий механізм розвитку коливань є внутрішнім флатером. За зростання амплітуди першої форми в системі суттєво проявляються нелінійні механізми, які сприяють залученню до коливань вищих форм. Ефекти, пов'язані з наближенням до першої критичної швидкості, стають суттєвими вже для швидкостей течії порядку половини від її критичного значення.

Розглянемо модель динамічної системи трубопровід–рідина в якій присутній нелінійний демпфер у вигляді однобічного пружного впливу або однобічної дисипативної сили. Проведемо порівняння поведінки системи з однобічною додатковою пружністю та без неї, а також системи з однобічною дисипативною силою та двобічною, на основі якого виконано аналіз ефективності використання однобічних силових факторів як демпфуючих елементів у трубопровідних системах.

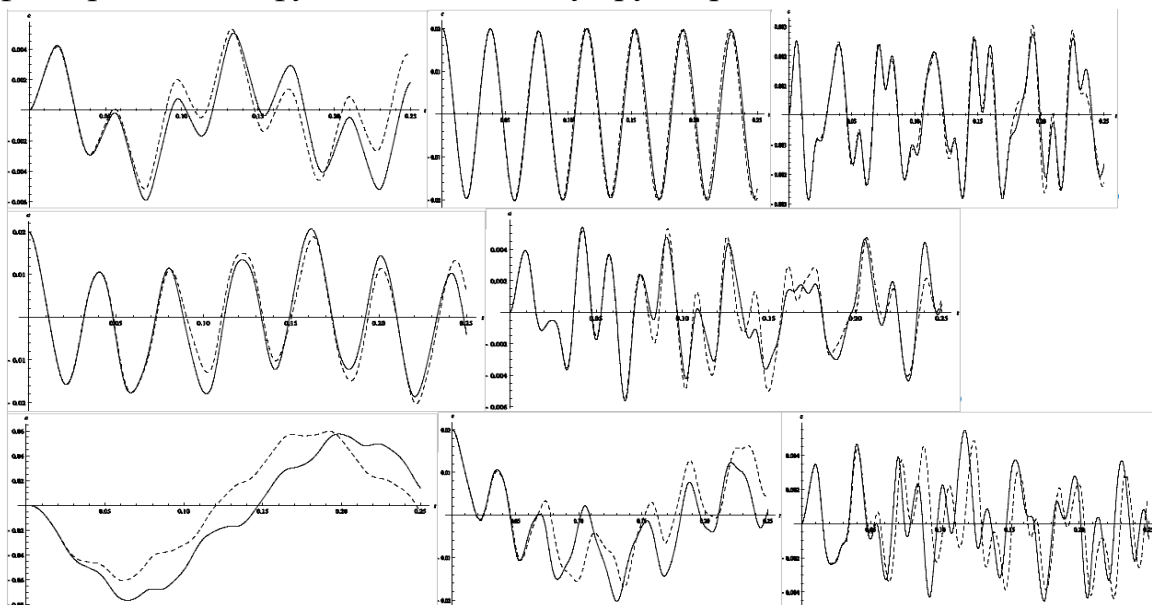


Рис.5. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань при  $V=0, V=0.9V_{кр}, V=1.5V_{кр}$ .

У першому випадку вище нейтральної лінії розташовані пружні елементи, а у другому випадку вище нейтральної лінії розташоване в'язке середовище, яке реалізує ефект лінійного тертя. Введення однобічної додаткової пружності характеризується додаванням до математичної моделі силового фактору:  $F(x,t) = -k \cdot H(u(x,t)) \cdot u(x,t)$ , а введення однобічної в'язкості – додаванням сили  $F(x,t) = -h \cdot H(u(x,t)) \cdot \frac{d}{dt} u(x,t)$ , де  $u(x,t)$  – поперечне відхилення трубопроводу;  $H(x)$  – функція Хевісайда;  $k, h$  – коефіцієнти, які деяким чином характеризують жорсткість однобічної пружності, та в'язкість відповідно. Розглядається декілька швидкісних режимів течії рідини  $V=0, V=0.9V_{кр}, V=1.5V_{кр}$  (рис. 5).

Суцільні криві відповідають амплітудним параметрам системи з однобічною додатковою пружністю, а штриховані криві відповідають амплітудним параметрам системи без додаткових силових факторів.

При швидкісному режимі  $V=0$ , а також при інших швидкісних режимах однобічна додаткова пружність не дає демпфуючого ефекту в системі. Нелінійний механізм однобічної пружності не вносить в систему очікуваного значного ефекту демпфування за рахунок перерозподілу енергії між власними формами коливань та відводу енергії на вищі моди. На вищеописаних швидкісних режимах течії рідини, які представляють практичний інтерес, основним механізмом перерозподілу енергії між власними формами коливань є сила Кориоліса, на фоні котрої ефекти зумовлені присутністю однобічної додаткової пружності є несуттєвими.

Тепер перейдемо до порівняння поведінки систем з однобічною та двобічною в'язкістю.

Видно, що в системі з однобічною в'язкістю демпфування відбувається не так інтенсивно, як у системі із двобічною в'язкістю, але декременти затухання власних форм коливань відрізняються менше ніж у два рази (як можна було б очікувати). При порівнянні частот власних форм коливань можна зробити висновок, що у системі з однобічною в'язкістю власні частоти вищі за частоти з двобічною в'язкістю, що є достатньо очікуваним. Суцільна лінія відповідає системі з однобічною в'язкістю, штрихована – система з двобічною в'язкістю.

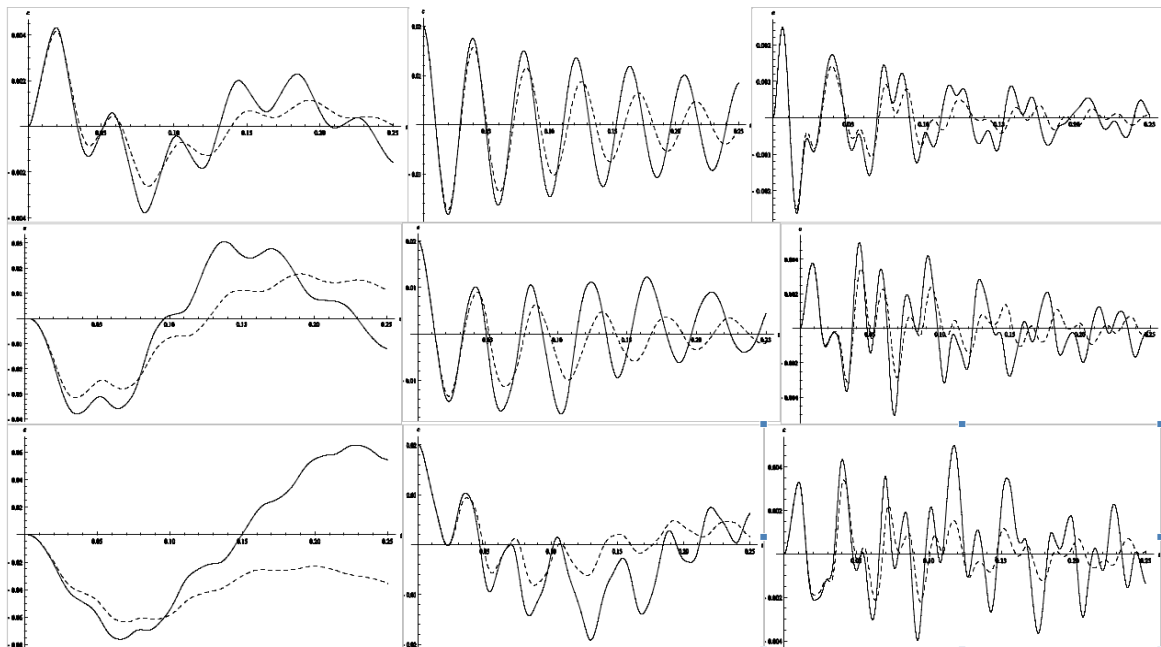


Рис. 6. Порівняння поведінки систем з однобічною та двобічною в'язкістю при  $V=0$ ,  $V=0.9V_{kr}$ ,  $V=1.5V_{kr}$ .

**Розділ 4** містить аналіз впливу на характер поведінки системи нелінійних силових факторів та сили Кориоліса. Визначаються біфуркаційні режими коливань трубопроводу, досліджується многовид альтернативних динамічних положень рівноваги трубопроводу та проводиться класифікація режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості.

В даному розділі проводиться дослідження процесу втрати стійкості положення рівноваги, відповідного до прямолінійної форми трубопроводу в динамічній системі трубопровід-рідина. Аналізуються біфуркації, які відбуваються у системі при зміні швидкості течії рідини, проводиться класифікація прямолінійного положення рівноваги трубопроводу з точки зору теорії стійкості при до критичних та за критичних швидкостях течії рідини. У даній роботі досліджується одномодова, двомодова та чотиримодова модель динамічної системи трубопровід-рідина. Стійкість прямолінійного положення рівноваги трубопроводу на різних швидкісних режимах аналізується за першим методом Ляпунова, тобто за рахунок аналізу власних значень, відповідних до власних форм коливань. Також проводиться аналіз впливу сили Кориоліса та нелінійних силових факторів на динамічну поведінку системи трубопровід-рідина.

На рис. 7 видно, що до досягнення першої критичної швидкості перше парціальне власне значення має лише уявну частину (штрихована лінія), тобто відбуваються незгасаючі коливання, після перевищення швидкістю першого критичного значення власне значення має лише дійсну частину, тобто відбувається аперіодичний рух по першій формі коливань, що відповідає втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу. Суцільна лінія відповідає дійсній частині власного значення, штрихова – уявна частина власного значення.

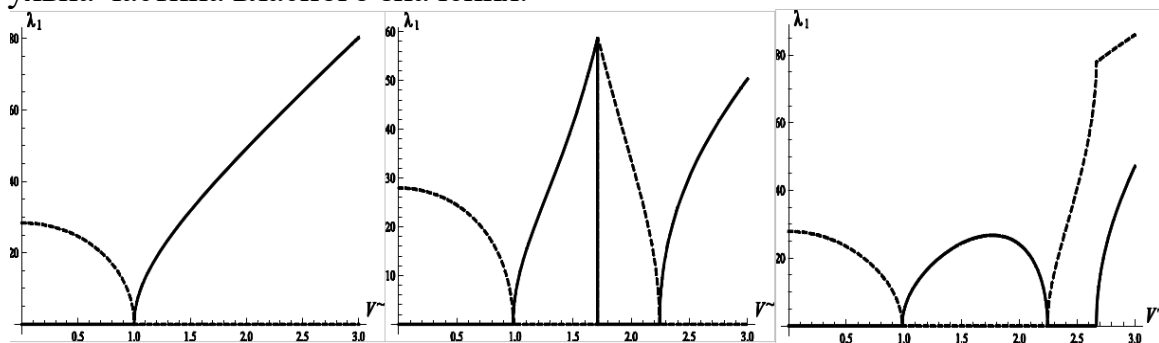


Рис. 7. Залежність власного значення від безрозмірної швидкості течії рідини  $V̄ = V/V_{кр}$ .

Видно що в двомодовій системі точка біфуркації по швидкості настає незначно раніше ніж у одномодовій системі (де власне значення являється парціальним), при  $V = 0.9934 \cdot V_{кр}^1$ . Також присутні ще дві точки біфуркації при швидкості  $V = 1.7 \cdot V_{кр}^1$ , після котрої процес знову носить коливальний характер, а також  $V = 2.23 \cdot V_{кр}^1$ , що відповідає втраті стійкості системи по другій формі коливань (друга критична швидкість).

На рис. 7 видно, що присутність сил Кориоліса призводить до того, що дві останні біфуркації відбуваються значно пізніше ніж у системі, де вплив сил Кориоліса не враховано. До того ж видно, що навіть після проходження другої критичної швидкості  $V=2.66 \cdot V_{кр}^1$  уявна частина першого власного значення не дорівнює нулю, тобто процес носить коливальний характер.

Розглянемо графіки амплітудних параметрів двох перших форм коливань для двомодової системи із урахуванням сил Кориоліса при швидкостях течії рідини  $V=0.9 \cdot V_{кр}^1$ ,  $V=1.5 \cdot V_{кр}^1$ ,  $V=2.56 \cdot V_{кр}^1$ ,  $V=2.7 \cdot V_{кр}^1$

Після проходження першої точки біфуркації по швидкості початкове прямолінійне положення рівноваги трубопроводу стає нестійким. Але динамічна система не проявляє характер аперіодичного руху в силу власної нелінійності. Динамічна система виходить на альтернативне стійке положення рівноваги і виконує коливання в його околі (рис. 8).

Таким чином форма трубопроводу, яку він займає у положенні альтернативної рівноваги буде мати наступний вигляд:  $u(x)=A_1(x) \cdot C_{eq}(V)$ , де  $A_1(x)=U(k_1 \cdot x) - \frac{S(k_1 \cdot l)}{T(k_1 \cdot l)} \cdot V(k_1 \cdot x)$  – перша власна форма трубопроводу як консольної балки, складена із функцій Крилова.  $C_{eq}(V)$ - амплітуда першої форми коливань трубопроводу в положенні альтернативної рівноваги, яка залежить від швидкості течії рідини.

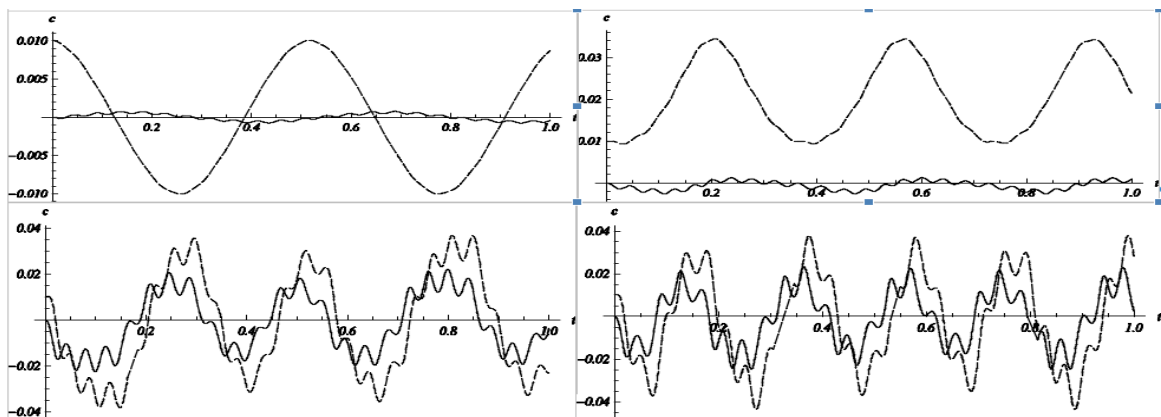


Рис.8 Амплітудні параметри перших двох форм коливань системи із урахуванням сил Кориоліса.

Положення альтернативної рівноваги виникає коли  $c''(t) \equiv 0$ , тобто коли

$$c_1(t) \cdot \left( -\frac{7\rho V^2}{2} \cdot \beta_{1,1}^2 + EJ \cdot \beta_{1,1}^3 + PF \cdot \beta_{1,1}^2 \right) + c_1(t)^3 \cdot \left( EJ \cdot d_{1,1,1,1}^6 + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot d_{1,1,1,1}^4 + \frac{13}{4} \cdot \rho V^2 \cdot d_{1,1,1,1}^4 \right) = 0$$

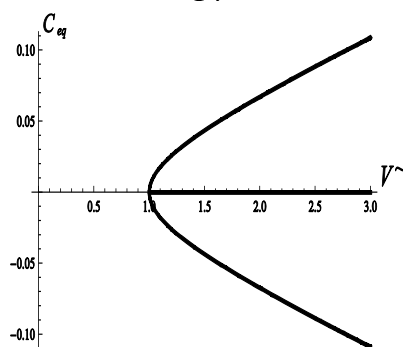


Рис. 9. Значення трьох амплітуд, відповідних до положень альтернативної рівноваги в залежності від безрозмірної швидкості.

На рис. 9 показані амплітуди для верхнього та нижнього стійких положень рівноваги, а також рівна нулю амплітуда, відповідна початковому прямолінійному положенню рівноваги, котре на закритичних швидкостях течії рідини стає нестійким.

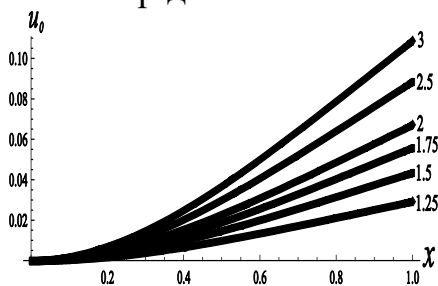


Рис. 10. Форми трубопроводу в альтернативних положеннях рівноваги при різних швидкостях течії.

Проведемо класифікація точок рівноваги, відповідних до прямолінійного положення трубопроводу на різних швидкостях течії рідини за теорією стійкості. Будемо проводити класифікацію режимів коливань трубопроводу шляхом аналізу стійкості рівноваги прямолінійної форми трубопроводу, тобто стійкості нульового рішення системи за Ляпуновим.

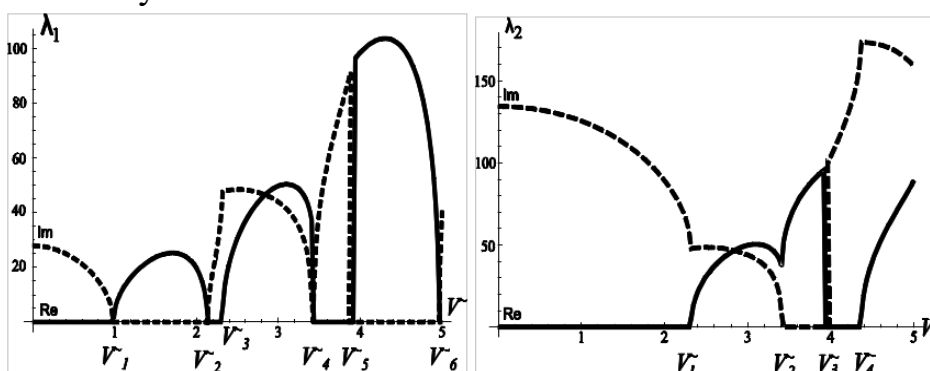


Рис. 11. Залежність дійсної та уявної частин першого та другого власного числа чотиримодової системи трубопровід–рідина із урахуванням дії сили Кориоліса від безрозмірної швидкості.

На рис. 11 характерними точками позначено біфуркації, які відбуваються в системі трубопровід–рідина при зміні швидкості течії рідини. Точки біфуркацій розділяють різні режими коливань



трубопроводу, які характеризуються стійкістю прямолінійного положення рівноваги трубопроводу з рідиною. Класифікація режимів проведена згідно загальної класифікації точок рівноваги динамічних систем за першим методом Ляпунова (аналіз власних значень)

Слід відзначити, що безпосередньо відповідною до першої форми точкою біфуркації – є лише перша точка біфуркації при досягненні першої критичної швидкості течії рідини  $V^* = V/V_{кр}^1 = 1$ . Усі інші точки біфуркацій є фактично проєкціями біфуркацій, що відбуваються на вищих формах на першу форму коливань. Завдяки присутності нелінійних механізмів в динамічній системі трубопровід–рідина у нестійких режимах коливань амплітуди власних форм коливань трубопроводу не зростають до нескінченності. Система просто переходить у сусідні атрактори альтернативних точок рівноваги, відповідних непрямолінійним положенням рівноваги трубопроводу.

Проведемо аналіз впливу сил Коріоліса та нелінійних силових факторів на поведінку системи трубопровід–рідина. Для цього поетапно будемо розглядати два швидкісних режими течії рідини – докритичний при  $V=0.9 \cdot V_{кр}^1$ , та закритичний при  $V=1.5 \cdot V_{кр}^1$ . На кожному режимі будемо розглядати чотири варіанти системи трубопровід–рідина – цілком лінійна система без урахування сил Коріоліса, лінійна система з урахуванням дії сил Коріоліса, нелінійна система без урахування сил Коріоліса та система, в якій враховані усі силові фактори. Графіки амплітудних параметрів перших трьох власних форм для усіх чотирьох варіантів для докритичного режиму течії рідини показано на рис. 12  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  при швидкості течії рідини  $V=0.9 \cdot V_{кр}^1$  для чотирьох варіантів системи трубопровід–рідина: перший графік — лінійна система, другий — лінійна система із урахуванням сил Коріоліса третій — нелінійна система без урахування сил Коріоліса, четвертий — система з урахуванням усіх силових факторів.

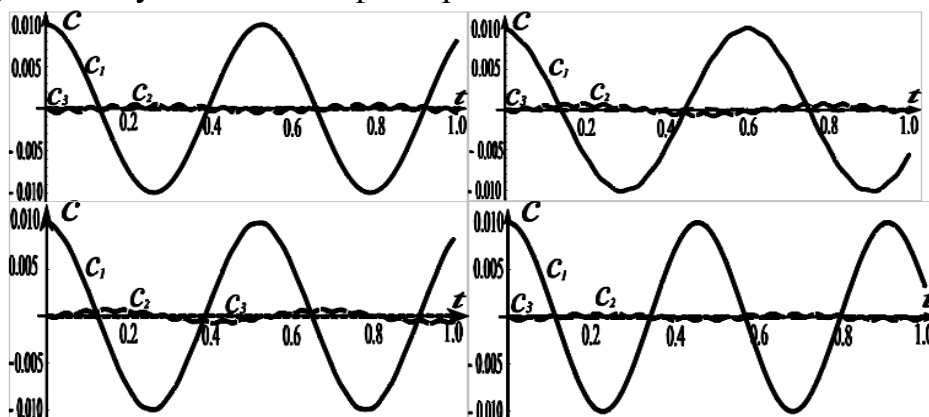


Рис. 12. Амплітудні параметри перших трьох форм трубопроводу

Із рис. 12 можна заключити, що на докритичних швидкісних режимах течії рідини ані нелінійні силові фактори, ані сили Коріоліса значного внеску у динамічну поведінку системи трубопровід–рідина не

вносять. Видимим є лише той факт, що сила Кориоліса зменшує власні частоти коливань у системі.

На рис. 13 показані амплітуди для перших трьох форм коливань  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  при швидкості течії рідини  $V=1.5 \cdot V_{кр}^1$  для чотирьох варіантів системи трубопровід–рідина: а) лінійна система б) лінійна система із урахуванням сил Кориоліса в) нелінійна система без урахування сил Кориоліса г) система з урахуванням усіх силових факторів.

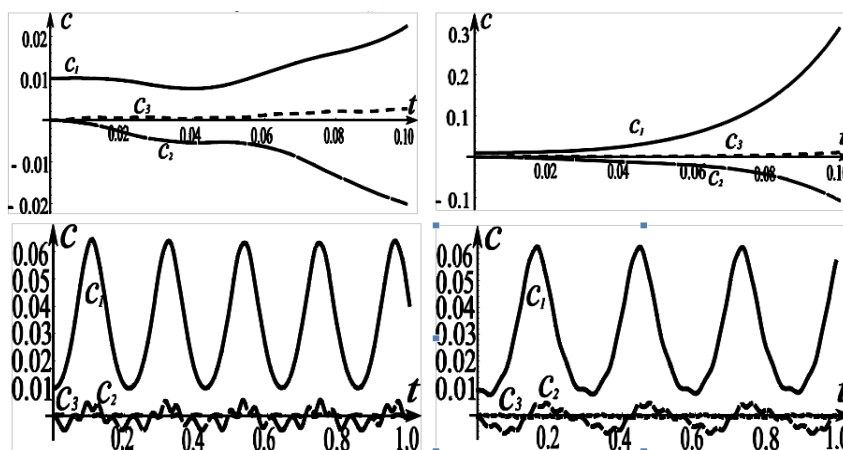


Рис. 13. Нестійкі амплітуди коливання системи трубопровід–рідина.

Наведені на рис. 13 графіки демонструють, що в закритичній області лінійна система трубопровід–рідина очікувано поводить себе нестійко – тобто амплітуди усіх трьох форм коливань з часом аперіодично зростають до нескінченності. Також видно, що врахування дії сил Кориоліса не впливає на зміну стійкості системи ані у лінійному варіанті, ані у нелінійному варіанті. Цікавим фактом є те, що при зміні початкового збурення з першої форми на другу, тобто при початковому відхиленні трубопроводу від положення прямолінійної рівноваги по другій формі, характер впливу дії сили Кориоліса на нелінійну систему у закритичному режимі течії рідини стає суттєвим.

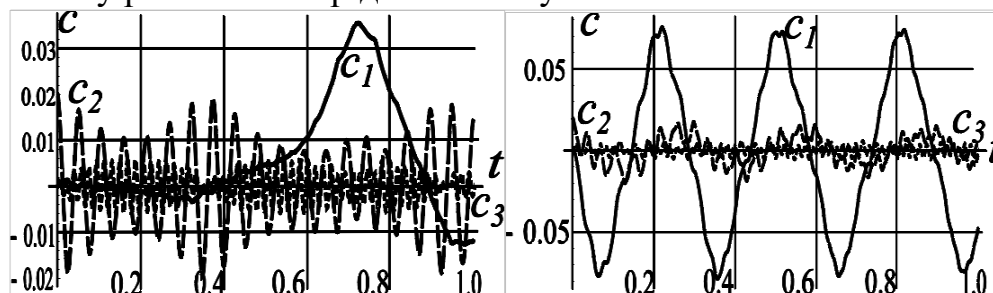


Рис. 14. Амплітудні параметри перших трьох форм трубопроводу для  $V=1.5 \cdot V_{кр}^1$

На рис. 14 показані амплітуди для перших трьох форм трубопроводу  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  при швидкості течії рідини  $V=1.5 \cdot V_{кр}^1$  для двох варіантів системи трубопровід–рідина: а) нелінійна система без

урахування сил Кориоліса б) система з урахуванням усіх силових факторів.

Із рис. 14 видно, що якщо збурення нелінійної системи відбувалося за другою власною формою, вплив сили Кориоліса стає суттєвим. При чому можна констатувати, що якщо сила Кориоліса на докритичних режимах течії рідини була основним фактором енергообміну між власними формами коливань і відповідала за взаємну модуляцію форм, тобто вносила елемент безладу у поведінку системи, на закритичних режимах сила Кориолісу являє собою основний стабілізаційний фактор.

## ВИСНОВКИ

1. Розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісній течії рідини, яка орієнтована на дослідження задач динаміки трубопроводу в околі втрати стійкості прямолінійної форми і здатна надійно відображати поведінку системи як для докритичних швидкісних режимів течії рідини, так і для закритичних режимів. Модель враховує більшість відомих нелінійних механізмів і їх взаємний вплив на систему.
2. На основі методу модальної декомпозиції побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопровід–рідина для довільної кількості власних форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги дванадцять власних форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в закритичних режимах течії рідини. Засобами символічної математики, реалізованими у програмному пакеті Mathematica, систему диференціальних рівнянь аналітично було приведено до форми Коші.
3. Для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем розроблено і реалізовано модель динамічної системи та програмний пакет засобами програмного середовища Mathematica із застосуванням найбільш передових інструментів адаптивного неявного аналізу диференціальних рівнянь, реалізованих у даному середовищі. Достовірність побудованої моделі підтверджується повною відповідністю результатів для випадку відсутності течії рідини та відповідністю частини результатів дослідженням інших авторів.
4. Було проведено дослідження впливу на систему трубопровід–рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості. Ідея такого демпферу полягала у тому, що за рахунок нелінійності буде відбуватися інтенсивний перерозподіл енергії коливань між власними формами, тобто буде відбуватися відкачка енергії із нижчих форм, коливання яких мають найбільшу амплітуду і

представляють найбільшу небезпеку, до вищих форм де можуть бути швидко задемпфовані. Але в процесі аналізу таких демпферів було виявлено їх низьку ефективність через наявність механізму енергообміну обумовленого силами Коріоліса.

5. Була досліджена біфуркаційна динаміка системи трубопровод-рідина, визначені основні режими коливань в системі при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини. Також виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова.
6. Найбільш важливим практичним результатом є визначення існування «островків стійкості» в закритичній області швидкостей течії рідини. Для підтвердження існування «островків стійкості» було проведено безпосереднє моделювання поведінки системи в визначених областях швидкостей течії рідини, де було отримано підтвердження можливості коливань навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги за першою формою.

Одержані в дисертаційній роботі результати можна застосовувати у задачах коливань трубопроводів з різними типами закріплень, метод можна застосувати для вивчення перехідних процесів в задачах динаміки трубопроводів з рідиною довільної форми та складних трубопроводних систем.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Лимарченко О.С. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини / О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2011, № 14, С. 73-77
2. Limarchenko V.O. Variational approach for investigation of pipelines with rapidly flowing liquid / V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Extend Abstracts, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. Lviv-Brukhovychi : Ukrainian Academy of Sciences, Symposium "Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics", September 18-21, 2012. P. 74-75.
3. Лимарченко В.О. Варіаційний метод дослідження нелінійних задач динаміки трубопроводів з рідиною. / В.О. Лимарченко, О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // т. 9, № 2. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012. С. 224-239.
4. Limarchenko O.S. Bifurcation dynamics of pipeline with liquid. / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2012, № 16, P. 86-92

5. Лимарченко О.С., Аналіз впливу сил Коріоліса і нелінійностей на динаміку трубопроводу. / О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, № 3, 2014, С. 54-57.
6. Limarchenko O.S. Specific features of the dynamic behavior of a straight pipeline for supercritical velocities of the flow of liquid / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Journal of Mathematical Sciences, vol. 3, no. 223, P. 293-297.
7. Limarchenko O.S., Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O.S. Limarchenko, V.O. Limarchenko, M. Majid, O.P. Timokhin // Опір матеріалів і теорія споруд.— 2015.— no. 94.— P. 96–106.

## АНОТАЦІЯ

Тімохін О.П. Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії рідини – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут механіки НАН України, Київ, 2019.

В дисертаційній роботі розглянуто актуальні задачі нелінійної динаміки трубопроводу з рідиною, а саме досліджується динамічна поведінка системи консольно закріпленого пружнього трубопроводу з ідеальною рідиною в околі критичних швидкостей течії рідини, включаючи закритичний діапазон швидкостей. .

Для дослідження цього класу задач застосовано варіаційний підхід, засоби та методи символної математики, методи дискретизації неперервних динамічних систем на основі методу Канторовича. Проведено дослідження біфуркаційних режимів в закритичній області швидкостей рідини. В роботі була проведена класифікація режимів стійкості на основі першого методу Ляпунова при різних значеннях швидкості течії рідини, а також було проаналізовано внесок сил Коріоліса в загальний характер поведінки системи в докритичній та закритичній області швидкостей рідини. Додатково в роботі проаналізовано дію нелінійного демпфера, оснований на дії однобічної додаткової пружності а також однобічного тертя та показана його низька ефективність. Також в роботі проведено спектральний аналіз коливань вільного кінця трубопроводу що дозволило в частотній області зафіксувати пік при нульовій частоті коливань, що відповідає стаціонарному відхиленню положення рівноваги трубопроводу в закритичній області швидкостей течії рідини.

Розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісній течії рідини, яка орієнтована на дослідження задач динаміки трубопроводу в околі втрати стійкості прямолінійної форми і здатна надійно видавати результати як для докритичних швидкісних режимів течії рідини, так і для закритичних режимів. Модель враховує більшість відомих нелінійних механізмів і їх взаємний вплив на систему. На основі методу модальної декомпозиції побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопровід–рідина для довільної кількості власних форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги дванадцять власних форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в закритичних режимах течії рідини. Засобами символної математики, реалізованими у програмному пакеті Mathematica, систему диференціальних рівнянь аналітично було приведено до форми Коші. Для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем розроблено і реалізовано модель динамічної системи та програмний пакет засобами програмного

середовища Mathematica із застосуванням найбільш передових інструментів адаптивного неявного аналізу диференціальних рівнянь, реалізованих у даному середовищі. Достовірність побудованої моделі підтверджується повною відповідністю результатів для випадку відсутності течії рідини та відповідністю частини результатів дослідженням інших авторів.

Було проведено дослідження впливу на систему трубопровід–рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості. Ідея такого демпферу полягала у тому, що за рахунок нелінійності буде відбуватися інтенсивний перерозподіл енергії коливань між власними формами, тобто буде відбуватися відкачка енергії із нижчих форм, коливання яких мають найбільшу амплітуду і представляють найбільшу небезпеку, до вищих форм де можуть бути швидко задемпфовані. Але в процесі аналізу таких демпферів було виявлено їх низьку ефективність. Була досліджена біфуркаційна динаміка системи трубопровід–рідина, визначені основні режими коливань в системі при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини. Також виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова.

Найбільш важливим практичним результатом є визначення існування «островків стійкості» в закритичній області швидкостей течії рідини. Для підтвердження існування «островків стійкості» було проведено безпосереднє моделювання поведінки системи в визначених областях швидкостей течії рідини, де було отримано підтвердження можливості коливань навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги за першою формою.

Ключові слова: нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною, біфуркаційні режими, дискретизація системи, нелінійний демпфер, однобічна сила, сила Коріоліса.

## АННОТАЦІЯ

Тимохин О.П. Нелинейная динамика трубопровода с жидкостью в окрестностях критических скоростей течения жидкости. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Инстит механики НАН Украины, Киев, 2019.

В диссертационной работе рассмотрены задачи нелинейной динамики трубопровода с жидкостью. Для исследования этого класса задач использовались вариационный подход, средства и методы символьной математики, метод дискретизации непрерывных систем на основе метода Галеркина. Проведено исследование бифуркационных режимов в надкритической области скоростей жидкости. В работе была

проведена классификация режимов устойчивости на основе методов Ляпунова, а также было проанализировано вклад силы Кориолиса в общий характер поведения системы. Дополнительно в работе проанализировано действие нелинейного демпфера, основанного на действии односторонней дополнительной упругости и показана ее низкая эффективность.

Ключевые слова: нелинейная динамика трубопровода с жидкостью, бифуркационные режимы, дискретизация системы, нелинейный демпфер, односторонняя сила, сила Кориолиса.

#### SUMMARY

Timokhin O.P. Nonlinear dynamics of a pipeline with a liquid in a vicinity of critical flow velocities. – Manuscript.

Thesis for Candidate's Degree of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.02.01 – theoretical mechanics. – The S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2019.

In the thesis the problems of nonlinear dynamics of a pipeline with a liquid are considered. To study this class of problems, we used a variational approach, tools and methods of symbolic mathematics, a method for discretizing continuous systems based on the Galerkin method. A study of bifurcation regimes in the supercritical region of fluid velocities is carried out. In this paper, the stability regimes were classified on the basis of Lyapunov's methods, and the contribution of the Coriolis force to the overall behavior of the system was analyzed. In addition, the work analyzes the effect of a nonlinear damper based on the effect of unilateral additional elasticity and shows its low efficiency.

Keywords: nonlinear dynamics of the pipeline with liquid, bifurcation regimes, system discretization, nonlinear damper, unilateral force, Coriolis force.