

**ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**

На правах рукопису

ТИМОХІН ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ

УДК 532.595

**НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРУБОПРОВОДУ З РІДИНОЮ
В ОКОЛІ КРИТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ ТЕЧІЇ РІДИНИ**

01.02.01 – теоретична механіка

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Лимарченко Олег Степанович,
доктор технічних наук, професор

КИЇВ – 2019

АНОТАЦІЯ

Тімохін О.П. Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії рідини – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2019.

Розглядаються актуальні задачі моделювання та дослідження динаміки руху трубопроводів. Рішенню подібних задач присвятили свої роботи Феодос'єв В.И., Бондарь Н.Г., Бабаков И.М., Светлицький В.А. та інші. На механіко-математичному факультеті КНУ імені Тараса Шевченка тематикою динаміки трубопроводів займаються професори Горошко О.О. та Лимарченко О.С.

Як показують літературні огляди - основні дослідження, присвячені вивченню динаміки трубопроводів, моделюють поведінку трубопроводів в докритичному діапазоні швидкостей течії рідини, або взагалі, визначенню безпечного режиму функціонування трубопроводів методами лінійної теорії стійкості динамічних систем. Проте сучасні тенденції проектування технічних об'єктів відображають потребу стійкого функціонування таких об'єктів навіть за межами безпечних режимів – у позаштатних та аварійних ситуаціях, та інш. У зв'язку з цим, набуває необхідності моделювання та прогнозування поведінки динамічних систем і в закритичних діапазонах зміни параметрів системи.

В даній роботі розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісній течії рідини, яка орієнтована на дослідження задач динаміки трубопроводу в околі втрати стійкості прямолінійної форми і здатна надійно видавати результати як для докритичних швидкісних режимів течії рідини, так і для закритичних режимів. Модель враховує більшість відомих нелінійних механізмів і їх взаємний вплив на систему.

Було проведено дослідження впливу на систему трубопровід-рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості та продемонстровано його низьку ефективність, що пояснюється домінуючим впливом сили Коріоліса на перерозподіл енергії між власними формами коливань трубопроводу при течії рідини.

Була досліджена біфуркаційна динаміка системи трубопровід-рідина, визначені основні режими коливань в системі при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини. Також виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова для лінеаризованої математичної моделі. Проаналізовані режими передбачували повернення системи до стійкого коливального процесу навколо прямолінійного положення рівноваги в закритичній області при значному перевищенні критичної швидкості рідини. Данні режими були перевірені за рахунок рішення за часом рівнянь для відповідної нелінійної системи трубопровід-рідина і було отримано підтвердження прогнозу отриманого на лінеаризованій системі. Також за допомогою швидкого перетворення Фур'є було виконано спектральний аналіз коливань вільного кінця трубопроводу у різних режимах течії рідини, який показав наявність спектрального піку при нульовій частоті в закритичній області течії рідини, тим самим підтвердив факт втрати стійкості коливань системи навколо прямолінійного положення рівноваги.

Значну увагу було приділено аналізу впливу сили Коріоліса на процес перерозподілу енергії коливань в системі між власними формами коливань трубопроводу з рідиною. Було продемонстровано, що при розгляданні малих за амплітудою коливаннях в нелінійній системі трубопровід-рідина – сила Коріоліса є домінуючим фактором впливу на динаміку системи так як є лінійним фактором і починає діяти раніше ніж нелінійні силові фактори.

За результатами дослідження опубліковано 7 наукових праць, з них 6 наукових статей. Представлені до захисту результати здобувачем були отримані здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві з науковим керівником Лимарченко О. С. роботах дисертанта були проведені дослідження загальних закономірностей і особливостей розвитку нелінійних динамічних процесів в системі трубопровід-рідина, спільний аналіз специфіки енергообміну між формами коливань за рахунок наявності сил Коріоліса, проведений аналіз чисельних прикладів. Науковому керівнику Лимарченку О.С. належить постановка задачі, ідея методу та участь в систематизації одержаних результатів.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

(які входять до переліку ВАК/ МОН України)

1. Лимарченко О.С. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини / О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2011, № 14, С. 73-77
2. Limarchenko V.O. Variational approach for investigation of pipelines with rapidly flowing liquid / V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Extend Abstracts, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. Lviv-Brukhovychi : Ukrainian Academy of Sciences, Symposium "Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics", September 18-21, 2012. P. 74-75.
3. Лимарченко В.О. Варіаційний метод дослідження нелінійних задач динаміки трубопроводів з рідиною. / В.О. Лимарченко, О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // т. 9, № 2. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012. С. 224-239.

4. Limarchenko O.S. Bifurcation dynamics of pipeline with liquid. / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2012, № 16, Р. 86-92
5. Лимарченко О.С., Аналіз впливу сил Коріоліса і нелінійностей на динаміку трубопроводу. / О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, № 3, 2014, С. 54-57.
6. Limarchenko O.S., Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O.S. Limarchenko, V.O. Limarchenko, M. Majid, A.P. Timokhin // Опір матеріалів і теорія споруд.— 2015.— no. 94.— Р. 96–106.

*Статті у наукових фахових виданнях,
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:
(за умови, що на момент публікації статті видання вже внесене до
міжнародної наукометричної бази даних)*

1. Limarchenko O.S. Specific features of the dynamic behavior of a straight pipeline for supercritical velocities of the flow of liquid / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Journal of Mathematical Sciences, vol. 3, no. 223, P. 293-297.

Ключові слова: нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною, біфуркаційні режими, дискретизація системи, нелінійний демпфер, однобічна сила, сила Коріоліса.

SUMMARY

Timokhin O.P. Nonlinear dynamics of a pipeline with a liquid in the vicinity of critical flow velocities. – Manuscript.

Thesis for Candidate's Degree of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.02.01 – theoretical mechanics. – The S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 2019.

In the thesis the actual problems of the simulation and investigation of the pipelines dynamics are considered. Feodosiev V.I., Bondar N.G., Babakov I.M., Svetlitskiy V.A. and others have dedicated set of works for this problematic area. Professors Goroshko O.O. and Lymarchenko O.S. work on the studying pipelines with flowing liquid dynamics on the faculty of the Math and Mechanics of the KNU Shevchenko.

According to the literature investigation – the general line for pipelines with the flowing liquid is focused on the modeling behavior of the pipes in the precritical range of the flowing liquids speed or even, just determining the margins of the safety mode for pipeline systems by applying linear stability theory of the dynamical systems. But the nowadays trends of the technical systems design demonstrates a demands for reliable operability such a systems even on the critical modes - like an disasters and catastrophically scenarios. It provides a necessity to modeling and prediction behavior of the dynamical systems in pre critical parametrical modes ether overcritical.

In the scope of this work non linear model of the dynamical system pipeline with the flowing liquid has been produced.

In this paper, we develop a nonlinear model of the dynamics of the pipeline at high-speed fluid flow, which is focused on the study of problems of the dynamics of the pipeline in the vicinity of the loss of stability of a rectilinear shape and is able to reliably produce results for both subcritical velocity modes of fluid flow and for overcritical modes. The model takes into account most of the known nonlinear mechanisms and their mutual influence on the system.

The effect on the pipeline-fluid system of the presence of a nonlinear damper in the form of unilateral additional elasticity or unilateral viscosity was carried out and its low efficiency was demonstrated, which is explained by the dominant

influence of Coriolis force on the redistribution of energy between the natural forms of fluctuation of the pipeline.

The bifurcation dynamics of the pipeline-fluid system were investigated, the basic modes of oscillations in the system at subcritical and closed velocities of fluid flow were determined. The classification of the basic modes of oscillation of the pipeline from the point of view of stability theory was also performed, namely by Lyapunov's first method for a linearized mathematical model. The modes analyzed predicted the return of the system to a stable oscillatory process around the straight-line equilibrium position in the closed region with a significant excess of the critical fluid velocity. These modes were verified by solving the time equations for the corresponding nonlinear pipeline-liquid system and confirmation of the prediction obtained on the linearized system was obtained. Also, using the fast Fourier transform, a spectral analysis of the oscillations of the free end of the pipeline in different modes of fluid flow was performed, which showed the presence of a spectral peak at zero frequency in the closed region of the fluid flow, thus confirming the fact of loss of oscillation of the system around a straight-line position.

Considerable attention was paid to the analysis of the influence of Coriolis force on the process of redistribution of oscillation energy in a system between its own oscillations of a pipeline with a liquid. It has been demonstrated that when considering small amplitude oscillations in a nonlinear pipeline-fluid system - Coriolis force is a dominant factor in influencing the dynamics of the system as it is a linear factor and begins to act earlier than nonlinear force factors.

According to the results, 7 scientific works were published, including 6 scientific articles. The results presented to the defense by the applicant were obtained by the applicant personally. The works of the dissertation published in collaboration with the scientific adviser Lymarchenko O.S. the researches of the general regularities and features of the development of nonlinear dynamic processes in the pipeline-liquid system, the joint analysis of the specificity of energy exchange

between the forms of oscillations due to the presence of Coriolis forces, and the analysis of numerical examples. Scientific adviser Lymarchenko O.S. the problem statement, the idea of the method and participation in the systematization of the obtained results belong.

*Scientific papers, in which the main scientific results
of the dissertation are published:*

1. Lymarchenko O.S. Dynamic behavior of the free-end pipeline around critical fluid velocities / O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Physical and mathematical modeling and information technologies, 2011, № 14, P. 73-77

2. Lymarchenko V.O. Variational approach for investigation of pipelines with rapidly flowing liquid / V.O. Lymarchenko, O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Extend Abstracts, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. Lviv-Brukhovychi: Ukrainian Academy of Sciences, Symposium Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics, September 18-21, 2012. R. 74-75.

3. Lymarchenko V. O. Variational method of investigation of nonlinear problems of fluid pipelines dynamics. / V.O. Lymarchenko, O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Vol. 9, No. 2. Physico-mathematical modeling and information technologies, 2012. P. 224-239.

4. Lymarchenko O.S. Bifurcation dynamics of pipelines with liquid. / O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Physics and mathematics modeling and information technology. 2012, No. 16, P. 86-92

5. O.S. Lymarchenko, Analysis of the influence of Coriolis forces and nonlinearities on the dynamics of the pipeline. / O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv, № 3, 2014, pp. 54-57.

6. Lymarchenko O.S., Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O.S. Lymarchenko, V.O. Lymarchenko, M. Majid, O.P. Timokhin // Materials resistance and structure theory.— 2015.— no. 94. P. 96-106.

*Articles in scientific professional editions,
which are included in international scientometric databases:*

1. Lymarchenko O.S. Specific features of the dynamic behavior of a straight pipeline for supercritical liquid flow velocities / O.S. Lymarchenko, O.P. Timokhin // Journal of Mathematical Sciences, vol. 3, no. 223, P. 293-297.

Keywords: nonlinear dynamics of the pipeline with liquid, bifurcation regimes, system discretization, nonlinear damper, one-sided force, Coriolis force.

ЗМІСТ	
ВСТУП	12
РОЗДІЛ I. ОГЛЯД ТА ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДІВ З РІДИНОЮ ЩО ПРОТІКАЄ	20
1.1. Методи моделювання нелінійної динаміки систем, в яких відбувається взаємодія пружної конструкції із суцільним середовищем	20
1.2. Методи чисельно-аналітичного аналізу нелінійних моделей динамічних систем типу трубопровід-рідина	31
1.3. Короткі висновки	33
РОЗДІЛ II. ПОБУДОВА МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДУ З РІДИНОЮ ЩО ТЕЧЕ.....	35
2.1. Побудова функції Лагранжа для руху системи трубопровід-рідина	35
2.2. Дискретизація функції Лагранжа системи трубопровід-рідина та отримання скінчено вимірної системи диференціальних рівнянь	39
2.3. Зведення системи звичайних диференціальних рівнянь до форми Коші, придатної для чисельного роз'язку	42
2.4. Програмна реалізація моделі системи трубопровід-рідина	45
2.5. Короткі висновки	46
РОЗДІЛ III. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТРУБОПРОВІД-РІДИНА	48
3.1. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини.....	48
3.2. Аналіз проведених розрахунків	54
3.3. Аналіз впливу нелінійного демпферу у вигляді однобічного силового фактору, а також однобічної дисипації на поведінку консольно закріпленого трубопроводу із рідиною, що тече	54
3.4. Короткі висновки	65
РОЗДІЛ IV. АНАЛІЗ БІФУРКАЦІЙНА ДИНАМІКА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ ТРУБОПРОВІД-РІДИНА ПРИ РІЗНИХ ШВИДКОСТЯХ ТЕЧІЇ РІДИНИ З ТОЧКИ ЗОРУ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ	67
4.1. Біфуркаційна динаміка системи трубопровід-рідина	67
4.2. Класифікація точок рівноваги, відповідних до прямолінійного положення трубопроводу на різних швидкостях течії рідини за теорією стійкості	75

4.3. Аналіз впливу сил Кориоліса та нелінійних силових факторів на поведінку трубопровода з рідиною при докритичних та закритичних режимах течії рідини	85
4.4. Короткі висновки	89
ВИСНОВКИ.....	91
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	93

ВСТУП

В сучасному світі, майже в усіх сферах техніки безперервно доводиться вирішувати задачу транспортування різноманітних типів рідини – подача води у побутовій сфері, подача палива у енергетичні установки, та інше.

Основним технічним засобом транспортування рідини були і залишаються трубопроводи. Тому задачі моделювання та дослідження динаміки руху трубопроводів набувають все більшої актуальності. Дослідженню динаміки трубопроводів присвятили свої роботи такі видатні діячі науки та техніки як Феодос'єв В.И., Бондарь Н.Г., Бабаков И.М., Светлицький В.А. та інші. На механіко-математичному факультеті тематикою динаміки трубопроводів займаються професори Горошко О.О. та Лимарченко О.С.

Основні дослідження, присвячені вивченню динаміки трубопроводів, моделюють поведінку трубопроводів в докритичному діапазоні швидкостей течії рідини, або взагалі, визначенню безпечного режиму функціонування трубопроводів методами теорії стійкості динамічних систем. Але сучасні тенденції проектування технічних об'єктів відображають потребу стійкого функціонування таких об'єктів навіть за межами безпечних режимів – у позаштатних та аварійних ситуаціях, та інше. У зв'язку з цим, набуває необхідності моделювання та прогнозування поведінки динамічних систем в закритичних діапазонах параметрів системи.

В даній роботі розроблена нелінійна модель, яка дозволяє продемонструвати характер поведінки динамічної системи «консольно закріплений прямолінійний трубопровід – ідеальна рідина» в околі критичних швидкостей течії рідини, та за межами критичної швидкості течії рідини, а також провести дослідження, аналіз та класифікацію режимів течії рідини в за критичній області.

Актуальність роботи спричинена широким використанням трубопроводів в енергетичних транспортних системах (нафтопроводи, газопроводи), літакобудуванні, космічній галузі, а також жорсткими вимогами

до подібних систем, та нормативними документами, які регламентують процеси проектування, виробництва та експлуатації цих систем.

Більшість робіт з тематики забезпечення функціонування систем складних об'єктів спрямовані на розробку методів запобігання наближення систем до позаштатних та аварійних режимів функціонування, і дуже мала кількість досліджень спрямована на прогнозування поведінки систем та забезпечення їх залишкового функціонування в разі випадку аварії.

Проведення експериментального дослідження поведінки трубопроводів з рідиною, у випадку їх часткового руйнування, пов'язане зі значними матеріальними витратами. У модельних експериментах не завжди вдається витримати критерії подібності, більш того, не вдається відтворити умови, наближені до реальних умов, невагомості та ін. Розрахункові моделі, основані на використанні методу скінчених елементів та методу скінчених об'ємів із використанням технології двобічної взаємодії пружної структури та суцільного середовища вимагають великих розрахункових потужностей ЕОМ.

Тому поряд з розвитком експериментальних методів дослідження динамічних процесів у системах трубопровід–рідина важливо створювати ефективні математичні і розрахункові моделі динаміки, засновані на врахуванні найбільш загальних механічних властивостей досліджуваних динамічних об'єктів.

В даній роботі використовується аналітичний підхід. Рівняння руху системи побудовані на основі варіаційного формулювання задачі, методів нелінійної механіки і методу модальної декомпозиції, для верифікації аналітичні перетворення проводились також із використанням програмного пакету символічної математики Mathematica, що дозволило аналітично отримати дискретну форму системи із урахуванням дванадцяти власних форм коливань. Для подальшого аналізу системи, використовувався неявний адаптивний метод інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь,

представлений у пакеті Mathematica, який дозволив отримати результати для режимів коливань трубопроводу у закритичній області значень швидкості течії рідини. За класифікацією задача про коливання пружного трубопроводу, повністю заповненого рідиною, що тече, в нелінійній постановці зводиться до нестационарної крайової задачі з фізичними і геометричними нелінійностями.

Мета дисертаційної роботи:

дослідити поведінку пружного консольно закріпленого трубопроводу з вільним краєм з рідиною, що тече, в околі втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу, та біфуркаційні режими в системі трубопровід–рідина для закритичних швидкостей течії рідини.

Основні завдання, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети:

- Побудувати нелінійну динамічну модель руху трубопроводу з рідиною на рухомій основі в околі критичних швидкостей течії на основі варіаційних принципів механіки з врахуванням впливу відомих нелінійних механізмів і мішаного (ейлерово-лагранжевого) опису руху складових компонент системи.
- На основі методу модальної декомпозиції, засобами пакету символічної математики Mathematica, побудувати нелінійну дискретизовану модель системи, яка враховує дванадцять власних форм коливань. Звести відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів коливань до форми Коші. Реалізованими у пакеті Mathematica неявними адаптивними методами інтегрування (завдяки яким стало можливим дослідження системи в області закритичних швидкостей течії рідини) систем диференціальних рівнянь, провести чисельний аналіз поведінки динамічної системи на різних режимах швидкостей течії рідини.
- Дослідити частотні гілки власних значень системи. Визначити основні біфуркації, які відбуваються в системі при перевищенні критичного

значення швидкості течії рідини. Провести класифікацію режимів у системі трубопровід–рідина для різних діапазонів швидкостей течії рідини.

На основі розв’язання групи тестових задач розробити рекомендації по практичному застосуванню розвиненої моделі, дослідити ступінь достовірності моделі по відображенню основних властивостей системи трубопровід–рідина, вивчити внесок різних механізмів у формування динамічних процесів.

Об’єктом дослідження даної роботи є дослідження динамічної поведінки системи консольно закріплений пружний трубопровід з вільним кінцем – ідеальна рідина в околі критичних швидкостей течії рідини, включаючи закритичний діапазон швидкостей.

Предметом дослідження роботи є нелінійні динамічні процеси в системі трубопровід – рідина, які відбуваються в околі втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу, та при втраті стійкості при перевищенні критичного значення швидкості течії рідини, а також біфуркаційні режими коливань трубопроводу при закритичних швидкостях течії рідини.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовується сукупність методів нелінійної механіки та варіаційних методів математичної фізики. Моделювання базується на класичному варіаційному принципі Гамільтона–Остроградського. Для побудови дискретної динамічної системи було використано метод модальної декомпозиції, оснований на методі Канторовича, та методи символічних аналітичних перетворень. Для налізу стійкості режимів коливань трубопроводу використовувався перший метод Ляпунова – аналіз власних значень динамічної системи. Для одержання кількісних результатів (деформацій трубопроводу в довільний момент часу, сил та моментів в точці консольного закріплення, спектрів коливань вільного кінця трубопроводу, даних для побудови анімацій) використовувалися

чисельні методи та методи графічної візуалізації даних, реалізовані у пакеті Mathematica.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що:

- Аналітичними засобами та засобами символічної математики побудовано модель нелінійної динаміки пружного трубопроводу з рідиною, що тече.
- Аналітично досліджено проблему втрати стійкості положення рівноваги прямолінійної форми трубопроводу для чотиримодової моделі динамічної системи, що є узагальненням одномодової моделі Феодос'єва В.І., яку переважно використовують в публікаціях.
- Встановлено наявність біфуркаційних режимів коливань в системі трубопровід–рідина, та багатовид динамічних альтернативних динамічних положень рівноваги трубопроводу для закритичних швидкостей течії рідини.

Досліджено характер поведінки, та проведено класифікацію режимів коливання трубопроводу з рідиною для різних діапазонів швидкостей течії рідини, і, зокрема, для закритичних швидкостей, досліджено внесок основних механізмів взаємодії на формування динамічних процесів.

Достовірність отриманих результатів забезпечується:

Використанням засобів символічної математики, реалізованих у пакеті Mathematica, для виконання складних математичних перетворень; варіаційним формулюванням задачі; розглядом дванадцяти власних форм коливань у дискретизованій моделі динамічної системи трубопровід–рідина; співпадінням частини розрахунків із результатами, отриманими іншими авторами; застосуванням адаптивних методів інтегрування із автоматичним контролем точності розрахунків на основі контролю збіжності, реалізованими у пакеті Mathematica, а також узгодженням з теоретичними і експериментальними роботами, виконаними іншими авторами.

Практична цінність отриманих результатів. Розроблена модель та її чисельна реалізація є достатньо універсальними та можуть бути застосованими для дослідження багатьох прикладних задач динаміки трубопроводів, що знаходяться в перехідних режимах руху. Особливо цінною є можливість моделювання руху трубопроводу в діапазонах швидкостей, що перевищують критичні значення, що стало можливим за рахунок використання адаптивних неявних схем інтегрування. Важливим результатом є встановлення наявності біфуркаційних режимів коливань трубопроводу і проведення класифікація різних режимів коливань трубопроводу на основі теорії стійкості.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 4 розділів, висновків та списку літератури із 109 джерел на 12 сторінках. Загальний обсяг дисертації викладено на 104 сторінках разом із 29 рисунками.

Вступ представляє собою обґрунтування актуальності проведення даного дослідження. Також у вступі сформульовано основну мету і задачі роботи, відзначено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, наведено дані про апробацію та публікацію результатів роботи.

Розділ 1 являє собою аналіз робіт інших авторів по обраній тематиці, аналізується моделювання трубопроводу та методи дослідження динамічних систем трубопровід – рідина, обґрунтовується вибір в дисертаційній роботі найбільш ефективного способу моделювання та методу для вирішення подібного класу задач.

Розділ 2 присвячено побудові нелінійної моделі динаміки трубопроводу та аналітичними методами і засобами символічної математики зведено її до дискретної моделі – дванадцятивимірної системи звичайних диференціальних рівнянь за методом Канторовича.

Розділ 3 містить результати досліджень різних швидкісних режимів течії рідини, зокрема закритичні. Проводиться аналіз впливу на поведінку системи наявності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності або однобічної в'язкості.

Розділ 4 містить аналіз впливу на характер поведінки системи нелінійних силових факторів та сили Кориоліса. Визначаються біфуркаційні режими коливань трубопроводу, досліджується багатомодальний альтернативних динамічних положень рівноваги трубопроводу та проводиться класифікація режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості.

Особистий внесок дисертанта. Представлені до захисту результати були отримані здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві з науковим керівником роботах дисертанта були проведені дослідження загальних закономірностей і особливостей розвитку нелінійних динамічних процесів в системі трубопровід–рідина, спільний аналіз специфіки енергообміну між формами коливань за рахунок наявності сил Кориоліса, проведений аналіз чисельних прикладів.

Науковому керівнику Лимарченку О.С. належить постановка задачі, ідея методу та участь в систематизації одержаних результатів. В роботі [7] дисертанту належить розділ 3. Лимарченку В.О. в публікаціях [2,3,7] належать результати по руху трубопроводу на основі, коливається, а М. Majid в [7] належать результати по руху трубопроводу на основі, яка виконує обертальні рухи.

Апробація роботи. Наукові та практичні результати були розглянуті на семінарах та конференціях.

Основні результати по темі дисертації були представлені та обговорювались на наступних конференціях:

- Symposium "Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics" , Lviv-Brukhovychi, September 18-21, 2012

Частково розділи дисертації доповідались на семінарах кафедри механіки суцільних середовищ Київський національний університет імені Тараса Шевченка механіко-математичного факультету під керівництвом професора О.С. Лимарченка у 2011 – 2012 роках.

У повному обсязі робота доповідалась і була підтримана на:

- семінарі кафедри механіки суцільних середовищ Київський національний університет імені Тараса Шевченка механіко-математичного факультету під керівництвом професора О.С. Лимарченка (2013)
- семінарі відділу відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України А.А. Мартинюка (2018).
- семінарі секції за напрямом “Динаміка і стійкість руху механічних систем” при Вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (2018).

Публікації. По темі дисертації було опубліковано 6 наукових робіт у вітчизняних фахових виданнях, затверджених МОН України, з них одна – у науковому журналі, який має міжнародний імпаکت-фактор. За результатами дисертації опубліковано також 1 статтю у матеріалах наукових конференцій.

РОЗДІЛ І. ОГЛЯД ТА ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДІВ З РІДИНОЮ ЩО ПРОТІКАЄ

В першому розділі роботи наводиться огляд літератури по тематиці аналізу взаємодії пружної конструкції із суцільним середовищем. Особлива увага приділяється роботам, в яких аналізується динаміка трубопроводів з рідиною що протікає, зокрема консольно закріпленим трубопроводам.

Розглядаються методи аналізу стійкості динамічних систем трубопровід – рідина, та методи моделювання поведінки таких систем. Проводиться аргументація та обґрунтування ефективності методу, який було обрано для даної роботи.

1.1. Методи моделювання нелінійної динаміки систем, в яких відбувається взаємодія пружної конструкції із суцільним середовищем

Задачі нелінійної динаміки трубопроводів з рідиною що тече являють собою підклас більш загального класу задач моделювання поведінки систем у яких пружні елементи конструкції взаємодіють із суцільним середовищем. Для вирішення подібних задач приймається ряд припущень щодо моделі поведінки конструкції та моделі суцільного середовища. Зокрема динамічні системи трубопровід – рідина що протікає, використовують наступні припущення щодо моделі пружного трубопроводу та рідини.

Стосовно трубопроводів можливі такі варіанти припущень. Так, трубопроводи можуть бути прямолінійної або складної просторової форми. Прямолінійні трубопроводи – це трубопроводи для яких геометричне місце центрів усіх перерізів являє собою пряму лінію. Такі трубопроводи можуть розглядатися в рамках моделі пружної балки чи як пружна оболонка або взагалі як деяке тривимірне пружне тіло. Існують оцінки, що якщо довжина трубопровода більша за зовнішній діаметр його перерізу не менше ніж у 6 разів, то доцільно використовувати балочну модель. В разі врахування сил гравітації, або інших силових полів, суттєвим фактором стає просторове положення трубопроводу. Задачі, в яких моделюється поведінка трубопроводу, можуть бути пласкими, просторовими, або взагалі мати осьову

симетрію. Можуть варіюватися методи закріплення кінців або певних ділянок трубопроводу. Трубопровід може працювати на всмоктування чи на викид рідини.

З математичної точки зору моделювання трубопроводів може проводитись в рамках лінійного чи нелінійного підходу.

Нелінійна динамічна постановка використовується частіше при моделюванні прямолінійного трубопроводу. Задачі дослідження криволінійних трубопроводів та складних трубопровідних систем зазвичай використовують лінійні моделі та обмежуються дослідженням власних коливань трубопроводу з визначенням форм та частот, або стають предметом досліджень, які використовують методи скінчених елементів та скінчених об'ємів.

Рідина, в свою чергу, може моделюватися із використанням складних реологічних теорій, в яких враховується в'язкість рідини, стан рідини, теплопровідність та інші параметри, а може вважатися ідеальною. Відповідно, профіль швидкості в перерізі трубопроводу може бути постійним для ідеальної чи змінним для в'язкої рідини. У випадку в'язкої рідини стає суттєвим вид течії рідини – ламінарний чи турбулентний. Значення тиску та швидкості можуть вважатися постійними по перерізу трубопроводу та вздовж його, або змінними.

Вичерпна класифікація задач про рух трубопроводів з рідиною надається в оглядах [(1), (2)]. Розглянемо основні класи задач та основні можливості моделювання динаміки таких систем.

Серед західних дослідників прийнято увесь клас задач про взаємодію пружних елементів конструкції із суцільним середовищем прийнято називати FSI (Fluid Structure Interaction). До вирішення задач такого класу найбільш поширеними є такі підходи: однобічна взаємодія структури з середою (1-way FSI) – при такому підході деформації конструкції вважаються малими, тобто фактично не змінюють граничні умови для розрахунку обтікання; двобічна

взаємодія пружної конструкції із суцільною середою (2-way FSI) – при цьому підході вирішувачі, що обчислюють окремо задачі деформації конструкції та обтікання її середою на кожній ітерації проводять обмін даними – вирішувач деформації конструкції отримує поле тисків середи у граничних точках конструкції, та прикладає їх до конструкції у якості зовнішніх навантажень, а вирішувач обтікання отримає у відповідь картину деформованої конструкції у якості нових граничних умов.

Також слід зазначити, що в огляді [(1)] перераховано перспективні напрямки розвитку галузі та наведено перелік задач, які досі є нерозв'язаними, або недостатньо розглянуті. Одним із таких напрямків автор виділяє задачі з проявами динамічної поведінки основи трубопроводу. В огляді наводиться інформація стосовно зовнішніх збудників, що можуть діяти на всі елементи системи: як на рідину, так і на трубопровід. Серед факторів, що можуть спричинити збудження трубопроводу чи його основи автор наводить наступні: природні та погодні умови, що можуть впливати на великі трубопровідні системи, такі як землетруси, зсуви, вітер, тощо виникнення періодичної вібрації за рахунок вібрації насосу, що качає рідину, вібрації з'єднань та поворотів у складних трубопровідних системах, будь-які інші умови, при яких виникає прогнозований або випадковий рух основи трубопроводу.

Детальним дослідженням поведінки системи трубопровід-рідина із урахуванням впливу динамічної поведінки основи, на якій консольно закріплено прямолінійний трубопровід, займається В. О. Лимарченко. Матеріали щодо побудови моделі системи трубопровід, закріплений на віброуючій основі-рідина та моделювання поведінки таких систем, наведені у роботах [(3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)].

Задачі, в яких рідина моделюється із використанням складних реологічних гіпотез та співвідношень, розглядалися Чарним І.А. та Ля Рока [(10), (11)]. При описі механічної системи в таких задачах враховуються

динамічна в'язкість та стисливість рідини. До цього класу належать задачі про розповсюдження хвиль в трубі, моделювання роботи насосу з урахуванням коливань тиску у трубопроводі [(10)] та інші.

Така постановка задачі є досить складною з точки зору побудови математичної моделі системи та її чисельного розв'язку, але дозволяє розглядати досить складні явища. Наприклад, рух у трубі багатофазної рідини. Рівняння руху системи, методи дослідження та звірення результатів з експериментальними даними надані у роботі [(11)]. Також проводились дослідження взаємодії повітряних бульбашок та води у трубі, явища кавітації та ін. Було виконано чисельне моделювання трьохфазної рідини в трубопроводі, що складається з шарів води, газу та нафти, та дослідження її поведінки у трубопроводі при швидкісній течії. Проводились дослідження реологічних характеристик висококонцентрованої суміші води і олії [(12), (13)].

Складні за геометричною конфігурацією трубопровідні системи, прийнято, зазвичай, розкласти на прості складові об'єкти, та вирішувати задачі динаміки кожного об'єкту окремо із урахуванням відповідних сумісних граничних умов. При моделюванні динаміки таких окремих частин трубопроводів використовуються балкові або оболонкові моделі, а також симетричність процесів, що дозволяє розглядати плоскі або осьосиметричні моделі [(14), (15)]. В наукових роботах зустрічаються випадки розгляду систем за загальними тривимірними моделями трубопроводів. Такі підходи зазвичай використовуються в інженерних цілях та у більшості випадків зводять задачу до чисельного розв'язання програмними комплексами, основаними на методі скінчених елементів [(16)].

У багатьох роботах трубопровід розглядається як циліндрична оболонка [(17), (18), (19), (20), (21), (22)]. Наприклад, в роботі [(22)] за допомогою такого методу аналізується динаміка та стійкість шарнірно закріпленого трубопроводу як циліндричної оболонки. Рух оболонки описується за

допомогою рівняння Флюгге, гідродинамічні збурення тиску отримують із міркувань лінеаризованої теорії безвихрової течії. Розв'язок задачі отримано з використанням двох альтернативних методів – методу Даламбера, та методу розділення Фур'є. Порівняльний аналіз результатів, отриманих обома методами, дозволяє стверджувати, що явища негативного й позитивного затухання шарнірно закріпленої системи, які спостерігалися попередніми дослідниками при як завгодно малих швидкостях потоку, насправді не спостерігаються на практиці. Це також узгоджується з енергетичними міркуваннями, згідно яким робота рідини на оболонці дорівнює нулю. Отже, можна зробити висновок, що обидві системи є консервативними.

Найбільш загальний огляд та аналіз методів і підходів до вирішення задач динаміки трубопроводів представлено в роботах Светлицького В.А. [(23)]. Побудовані моделі описують процес взаємодії трубопроводу з рідиною і зовнішнім суцільним середовищем при протіканні рідини по трубопроводу. Моделі є тривимірними і розглядають рух систем, що складаються з рухомої рідини всередині трубопроводу, який оточено зовнішньою середою що також тече. Моделювання трубопроводу за допомогою основних рівнянь руху балки дає можливість досліджувати різні варіанти граничних умов в залежності від способу закріплення та зовнішніх умов, в яких знаходиться трубопровід. Розглядається задача про стійкість незбуреного положення трубопроводу при наближенні до критичних величин швидкості внутрішнього потоку рідини. Значну увагу приділено ефектам гідро пружності та внутрішнього флатеру.

Для задач динаміки прямолінійних трубопроводів, доцільно використовувати для опису трубопроводу модель пружної балки, так як у більшості випадків поздовжній розмір трубопроводу значно перевищує діаметр перерізу трубопроводу. Слід зауважити, що саме таким методом користуються в більшості випадків для моделювання динаміки руху та коливань трубопроводів [(24), (25), (26)].

Задачі динаміки, в яких трубопровід моделюється на основі моделі пружної балки, а рідина вважається ідеальною, можна виділити в окремий клас задач. Таке представлення системи трубопровід-рідина доцільно використовувати при розгляді перехідних та швидкопротікаючих процесів, наприклад аварійних ситуацій. Перші дослідження перехідних процесів коливань трубопроводу з рідиною в околі прямолінійного положення рівноваги та першої критичної швидкості течії рідини провів Феодос'єв В.І. [(27)]. Досліджувана система була розглянута у лінійній постановці і враховувала лише одну власну форму коливань, для якої і формулювався критерій втрати стійкості прямолінійного положення рівноваги трубопроводу.

Спробу побудови нелінійних моделей динаміки систем трубопровід-рідина виконав Бондар Н.Г. [(28)]. Автор пропонує використовувати метод змінного масштабу, який полягає в тому, що при зміні масштабів залежної та незалежної змінних в диференціальних рівняннях, рівняння перетворюються на лінійні з постійними коефіцієнтами. Проведено аналіз впливу різних нелінійних силових факторів на поведінку системи шляхом симуляції окремого ізолюваного впливу різних нелінійних членів на систему. Вплив сукупності нелінійних механізмів та їх взаємодія між собою в роботі не розглядалися.

У роботі М. Стангля [(29)] отримано нелінійні рівняння коливального руху консольно закріпленого трубопроводу з потоком рідини із використанням рівнянь Лагранжу другого роду. Проводиться порівняння чисельного розв'язку цих рівнянь з розв'язком, побудованим із застосуванням до трубопроводу моделі дискретних мас.

Дослідження нелінійних коливань трубопроводу, втрата прямолінійної форми рівноваги трубопроводу та динамічна стійкість трубопроводу представляють значний інтерес [(30)]. В даній роботі розглянуто різноманітні режими коливань у нелінійній динамічній системі трубопровід-рідина, показана наявність біфуркацій відносно значень швидкості течії рідини, та

проаналізовано вплив різноманітних нелінійних механізмів на загальну поведінку системи.

Тривимірний випадок системи трубопровід-рідина у нелінійній постановці задачі, розглянуто у статтях М. Паїдоусіса [(31), (22), (32), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39)]. Тривимірні рівняння руху трубопроводу виведено із застосуванням варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Проміжні нелінійні в'язі прогину трубопроводу в рівняннях руху враховано за допомогою методу віртуальної роботи. Проведено дискретизацію отриманих рівнянь методом Гальоркіна. Подібний підхід до отримання системи рівнянь руху трубопроводу використовується і в даній дисертаційній роботі.

У цих роботах досліджувався рух вертикального консольно закріпленого трубопроводу, обмеженого пружними в'язями з чотирьох, двох або з однієї сторони вздовж трубопроводу. Проводився аналіз втрати динамічної стійкості системи. Досліджувалися різноманітні режими коливань у системі: плаский флаттер, двовимірні або тривимірні періодичні, квазіперіодичні й хаотичні коливання, втрата стійкості шляхом розбіжності (аперіодичні нерегулярні рухи великих амплітуд). Також розглядався рух трубопроводу з приєднаною точковою масою на вільному кінці труби. Для такої системи отримано діаграму біфуркацій, часові сліди та карти перерізів Пуанкаре.

У статті Грегорі та Паїдоусіса [(40)] розглядаються різноманітні аспекти стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу. Як вказують автори, в таких системах існують точки біфуркації – певні критичні значення швидкості течії рідини, при досягненні яких система стає нестійкою і малі збурення призводять до поперечних коливань з великими амплітудами. Автори приводять детальний аналіз умов стійкості системи для перших чотирьох форм коливань, в залежності від співвідношення лінійних густин трубопроводу та рідини, що протікає. Виявлені такі значення цих співвідношень, при яких система демонструє наявність островків стабілізації

у області за критичних швидкостей течії рідини, тобто після втрати стійкості, збільшення швидкості призводить до тимчасової стабілізації, а подальше збільшення – знову до втрати стійкості. Отримані результати графічно представлені на фазових портретах динамічної системи.

Нелінійна динаміка системи консольно закріпленій трубопровод-рідина що тече, описані в роботах [(31), (41)]. Паїдоусіс в своїх дослідженнях найчастіше використовує аналітичні методи для отримання рівнянь руху системи, потім використовує метод модальної декомпозиції для зведення систем у форму скінченої системи звичайних диференціальних рівнянь (найчастіше використовується не більше п'яти власних форм для трубопроводу). Розв'язок системи рівнянь отримується чисельними засобами, також проводиться аналіз системи рівнянь на предмет динамічної стійкості системи.

В роботі [(42)] досліджено коливання консольно закріпленого трубопроводу з рідиною, що розташовано вертикально. Для побудови математичної дискретної моделі такої системи використовується метод модальної декомпозиції шляхом застосування методу Гальоркіна. Аналіз отриманої системи проводиться методом скінчених різниць. В результаті було отримано спектр власних частот системи та проведено аналіз системи на предмет стійкості в залежності від швидкості течії рідини.

В роботі [(43)] проводиться аналіз поведінки вертикально розташованого консольно закріпленого трубопроводу, направленого вгору. На відміну від даної дисертаційної роботи, у статті враховано вплив сил гравітації. Це може бути доречним при розгляді трубопроводів із матеріалів з відносно невеликими модулями Юнга (вираженими пружними властивостями), наприклад, таких як армований поліуретан, а також при врахуванні можливості втрати стійкості системи як стійки Ейлера. Значна увага в статті приділяється математичному моделюванню та отриманню рівнянь руху такої системи. Автори використовують лінеаризовані рівняння руху для

дослідження поведінки трубопроводу та застосовують представлення коефіцієнтів рівнянь у безрозмірному вигляді. При дослідженні руху такої системи виявилось, що вона має точки біфуркації – характерні значення течії рідини, при переході через котрі система різко змінює свій характер поведінки. Автори наводять діаграми динамічних режимів, в залежності від безрозмірних параметрів руху трубопроводу. Показано, що можливі режими, при яких трубопровід втрачає стійкість прямолінійного положення рівноваги та переходить до коливань відносно певного альтернативного положення рівноваги.

В задачах про коливання в системах трубопровід-рідина, в яких можливі точки біфуркації, проводиться порівняльний аналіз поведінки динамічних систем, при зміні значень параметрів руху системи до переходу та після переходу точки біфуркації.

Основи теорії біфуркації закладені А. Пуанкаре, А.М. Ляпуновим та А.А. Андроном. Сучасний стан розвитку теорії біфуркацій та тісно пов'язаною з нею теорією динамічного хаосу займаються автори [(44) (45)]

Аналіз біфуркаційної поведінки динамічних систем трубопровід-рідина дозволяє визначити характерні режими динаміки таких систем, провести їх класифікацію, а також визначити точки рівноваги у фазовому просторі цих систем, відповідні їм положення рівноваги для трубопроводів, та проаналізувати стійкість цих точок рівноваги [(46), (47)]. У роботах [(48), (49)] розглядається динаміка трубопроводу з рідиною, який встановлено вертикально та який підвернено осьовому стисненню. Розглядалися різноманітні комбінації закріплення трубопроводу та аналізувалися біфуркації, які відбуваються в такій системі при зміні швидкості течії рідини.

Однією з основних задач теорії динамічних систем, є визначення динамічної стійкості положень рівноваги таких систем, класифікація точок рівноваги, виявлення аттракторів та загальний аналіз фазових портретів динамічних систем. Поняття стійкості першим ввів Ляпунов О.М. Стійкість

визначалася Ляпуновим для нульового рішення динамічної системи по аналізу відхилення системи від нульового рішення при зміні початкових параметрів системи [(50)]. Видатна заслуга Ляпунова полягає у розробці двох методик визначення стійкості динамічних систем, сформульовані чітких критеріїв стійкості для лінійних систем та розробці ряду методів лінеаризації нелінійних систем. Друга методика Ляпунова являє собою універсальний засіб визначення стійкості будь-яких динамічних систем, шляхом побудови специфічної індикаторної функції – функції Ляпунова. Ця методика є універсальною, але складність її застосування полягає у тому, що побудова функції Ляпунова, зазвичай, являє собою окрему наукову задачу, за складністю порівняну безпосередньо із визначенням стійкості динамічної системи.

Питанням стійкості динамічних систем присвячені дослідження багатьох видатних вчених сучасності – Арнольд В.І., Зіман К., Смейл С., Томпсон Ж. та інші [(51), (52)]. Динамічна стійкість трубопроводу з рідиною розглядається у роботі [(53)]. При течії рідини з пульсаціями, стійкість руху системи досліджувалася у роботах [(54), (55), (56), (57)].

В роботі [(58)] автор аналізує вплив початкових припущень при математичному моделюванні руху консольно закріплених трубопроводів на стійкість системи. Аналізуються фактори, які можуть забезпечити стійкість такої динамічної системи при відсутності демпфуючих елементів.

У роботі [(38)] проаналізовано двовимірний та просторовий флатер консольно закріпленого трубопроводу з рідиною що тече. Досліджувалися критерії виходу на режими просторового та плоского флатеру. Порівнювалися біфуркації які відбуваються в системі при вертикальному та горизонтальному розташуванні трубопроводу, що дало змогу проаналізувати вплив гравітації на характер динамічної поведінки системи та її схильність до флатеру.

В статті [(59)] розглядається динаміка ділянки трубопроводу з рідиною, на яку діє поздовжня сила, що має постійну та осцилюючу складові. Для

роз'язку задачі була побудована модель яка враховує лише одну власну форму коливань трубопроводу. Це дозволяє звести задачу до рівняння Мат'є, яке є добре дослідженим. Відомо, що в подібних динамічних системах виникає параметричний резонанс, якщо частота зовнішнього збурення дорівнює подвоєній власній частоті коливань трубопроводу.

Власні коливання, та фактори впливу на спектр власних частот для шарнірно та жорстко закріплених з обох кінців трубопроводів, досліджувалися в роботі [(60)].

Трубопроводи із складною криволінійною конфігурацією досліджувалися у роботах [(61), (62), (63)]. У статті [(62)] використовується підхід Ейлера до моделювання рідини. Проведено аналіз його відмінностей та переваг перед загально прийнятим підходом.

Ганієв Р.Ф. [(64)] проводить дослідження нелінійних коливань у різноманітних механічних системах, та аналізує резонансні режими періодичних та квазіперіодичних коливань.

В роботі [(65)] досліджуються багатотональні нелінійні коливання композитних циліндричних оболонок із рідиною. Основну увагу приділено до взаємодії згинних форм коливань оболонок в режимах вільних коливань, та вимушених при резонансі.

Динамікою ортотропних циліндричних оболонок з рідиною займався Крук Л.А. [(66)].

Кікоть С.В. [(67) - (68)] дослідив поведінку гнучких, пружних трубопроводів прямолінійної та криволінійної форм. Розглядалися симетричні ситуації коли кожній власній частоті системи відповідали дві власні форми. Результати отримані завдяки використанню асимптотичних методів. Пружний трубопровід моделювався реологічним рівнянням в'язко-пружної балки.

Проаналізувавши роботи ряду авторів, можна дійти висновку, що режими поведінки систем трубопровід-рідина досить ретельно досліджені у

докритичних діапазонах швидкостей течії рідини, також деякі автори робили спробу аналізувати біфуркації що відбуваються в подібних системах, однак динаміка подібних систем у областях закритичних значень швидкостей течії рідини (режими флатеру, аварійні ситуації, та ін.) досліджена дуже мало.

1.2. Методи чисельно-аналітичного аналізу нелінійних моделей динамічних систем типу трубопровід-рідина

Зазвичай, математичні моделі динамічних систем трубопровід-рідина описуються диференціальними рівняннями у частинних. Методи зведення подібних рівнянь до скінчено вимірних систем звичайних диференціальних рівнянь ґрунтуються на використанні методу Гальоркіна [(69)]. Загальний огляд методів дослідження коливань у динамічних системах подано у роботі [(70)].

Чисельне дослідження динаміки трубопроводів з рідиною зазвичай проводять методом побудови програмно-розрахункових комплексів які моделюють поведінку системи, чисельно розв'язуючи відповідні системи диференціальних рівнянь [(71), (72), (73), (74), (75)].

Також широке поширення отримала методика використання сучасних САЕ систем широкого профілю для моделювання поведінки систем трубопровід-рідина [(76), (77)]. Усі сучасні САЕ системи реалізують методи скінчених елементів та скінчених об'ємів [(78), (79)]. Серед найвідоміших пакетів інженерних розрахунків найбільш придатними до моделювання трубопроводів з рідиною є наступні: LS-DYNA, Simulia ABAQUS, ANSYS. Для реалізації двобічної взаємодії пружної конструкції із суцільним середовищем використовується методика 2-way FSI у рамках якої відбувається ко-симуляція двох незалежних програмних модулів – вирішувача для задач міцності та вирішувача задач обтікання суцільним середовищем. Наприклад взаємодія ANSYS Mechanical та ANSYS Fluent, де перший модуль відповідає за моделювання поведінки трубопроводу, а другий, відповідно, моделює поведінку суцільного середовища. Для моделювання пружних об'єктів використовується Лагранжева сітка, а для моделювання суцільного середовища використовується Ейлерова сітка [(80)], але у деяких

програмних пакетах також реалізован метод Лагранжево-Ейлерової сітки (ALE – Arbitrary Lagrange Euler [(81)]).

Чисельно-аналітичний підхід полягає у використанні аналітичних методів математичної фізики, варіаційного числення та принципу мінімуму дії т. ін. для отримання рівнянь динамічної системи, та чисельного розв'язку цих рівнянь. Для моделювання систем, в яких пружні об'єкти взаємодіють із рідиною, добре зарекомендував себе наступний підхід – використання варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського [(82), (83), (84)] для отримання Лагранжіану системи, отримання скінчено вимірної системи рівнянь Лагранжу другого роду шляхом модальної декомпозиції Лагранжіану та прийняття функцій амплітуд за загальні координати динамічної системи, чисельний розв'язок отриманої системи рівнянь [(85)]. Такий підхід може бути застосованим для розв'язання широкого класу задач динаміки [(86)].

В статті [(87)] проводиться порівняльний аналіз методів інтегрування систем рівнянь, що описують рух трубопроводів з рідиною. Подібні системи розв'язуються чисельно за допомогою таких методів як: метод трансформатриці, метод скінченних елементів, метод малих збурень, метод Рунге-Кута, метод квадратур та інші. Автори порівнюють ці методи з так званим точним методом інтегрування - Precise Integration Method (PIM), що полягає в попередньому застосуванні до системи методу Гальоркіна. Метод Гальоркіна дозволяє розкласти розв'язок рівнянь у вигляді суми добутків певних координатних функцій на амплітудні параметри, що залежать лише від часу. Координатні функції, в той самий час, залежать тільки від просторової координати. В якості них зазвичай обирають форми власних коливань трубопроводу як балки. Підстановка розв'язку, поданого через метод Гальоркіна дозволяє перейти до системи диференціальних рівнянь другого порядку, яку можна розв'язувати одним з перелічених вище чисельних методів.

Результати дослідження показують, що Precise Integration Method (PIM) є на порядок швидшим, ніж, наприклад отримання розв'язку прямим застосуванням до рівнянь методу Рунге-Кута, а також є достатньо стабільним навіть на довгих проміжках часу. Схожий метод використовується в даній дисертації для інтегрування системи диференціальних рівнянь.

В даній дисертаційній роботі для інтегрування системи диференціальних рівнянь було використано засоби пакету Mathematica адаптивний неявний метод інтегрування ImplicitRungeKutta [(88)].

Задачі динаміки трубопроводів з рідиною – це окремий клас задач в теорії нелінійних коливань. Теорія нелінійних коливань на даний час достатньо добре розвинена лише для так званих слабо нелінійних (квазілінійних) систем. Під квазілінійними маються на увазі системи, які відрізняються від лінійних лише наявністю нелінійних сил, максимальні значення яких є малими, у порівнянні з поновлюючою силою. Найбільш ефективними аналітичними методами дослідження квазілінійних систем є асимптотичні методи Пуанкаре, Ван-дер-Поля, Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) та варіаційні методи механіки, що в своїй основі мають варіаційні принципи механіки та методи математичної фізики. Детальний опис асимптотичних методів наведений у роботах [(89), (90), (91), (92)]. Використання методів математичної фізики до задач динаміки трубопроводів розглянуто у роботі [(54)].

Варіаційні методи у застосуванні до задач механіки розглянуто у роботах С.Г. Міхліна [(93), (94)].

В даній дисертаційній роботі використовувався варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського для отримання Лагранжіану системи трубопровід, рідина. Далі використовувався метод Гальоркіна для модальної декомпозиції Лагранжіану та отримання скінчено вимірної системи рівнянь Лагранжу другого роду.

1.3. Короткі висновки

В першому розділі дисертаційної роботи було проведено аналіз досліджень, виконаних іншими авторами. Визначені основні підходи до

моделювання динамічних систем типу трубопровід-рідина, відмічені основні історичні етапи розвитку напрямку науки про взаємодію пружних об'єктів із суцільним середовищем, та тенденції його подальшого розвитку.

Керуючись цим оглядом можна констатувати той факт, що біфуркаційні режими коливань у трубопроводах з рідиною на даний момент досліджені недостатньо. Більшість авторів зосереджувалась на визначенні критеріїв стійкості динамічних систем трубопровід рідина. Динамічна поведінка таких систем у закритичних режимах досліджена дуже мало, основним питанням у розглянутих роботах було – як уникнути закритичних режимів та забезпечити безпечну роботу трубопровідних систем. У той же час на просте інженерне питання – що буде у випадку позаштатної ситуації, яка буде поведінка системи трубопровід рідина у за критичному режимі, прозорої відповіді не отримано.

Виходячи із вищезазначеного, можна сказати, що проведена у цій роботі класифікація режимів коливань трубопроводу з рідиною у широкому діапазоні швидкостей течії рідини є доцільною та запитаною.

РОЗДІЛ II. ПОБУДОВА МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДУ З РІДИНОЮ ЩО ТЕЧЕ

В розділі 2 побудована нелінійна модель поведінки пружного консольно закріпленого трубопроводу з рідиною що тече. Для побудови моделі було використано варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського. Також було застосовано метод Гальоркіна для виконання модальної декомпозиції Лагранжіану динамічної системи трубопровід-рідина, та отримання відповідної скінчено вимірної системи рівнянь Лагранжу другого роду. Усі аналітичні перетворення, отримання системи диференціальних рівнянь на основі Лагранжіану динамічної системи, та зведення системи рівнянь до форми Коші було виконано у пакеті символічної математики Mathematica .

2.1. Побудова функції Лагранжа для руху системи трубопровід-рідина

Розглядається механічна система, що складається із пружного трубопроводу та рідини що протікає по ньому (рис.2.1). Діаметр перерізу трубопроводу значно менший за його довжину, тож поведінку трубопроводу можна описувати на основі моделі балки. Рідина вважається ідеальною, однорідною та нестисливою, та її рух одновимірний стаціонарний.

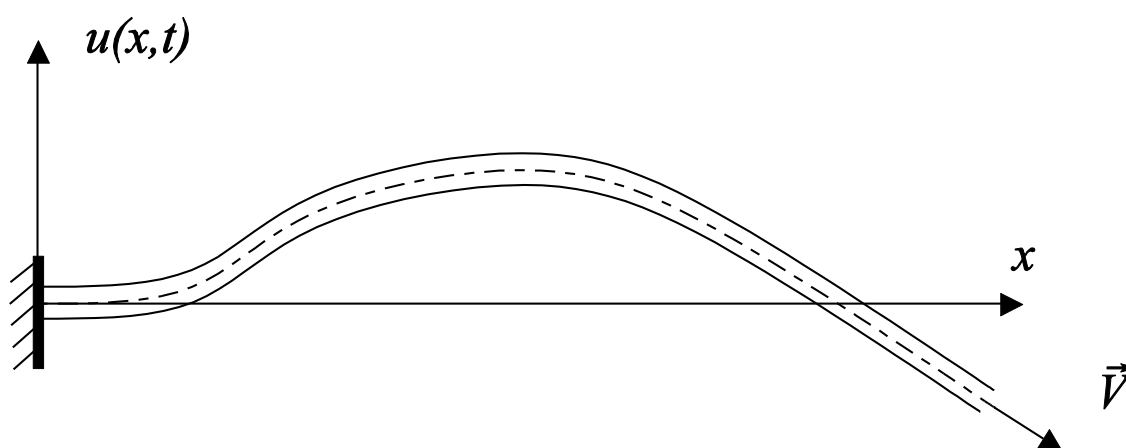


Рис.2.1 Механічна система трубопровід-рідина.

Як зазначено у роботі [(95)], можна обмежитись розглядом двовимірної системи, бо якщо початкове збурення трубопроводу лежало в одній площині, подальший рух такої системи буде відбуватись у цій самій площині.

Загальні принципи побудови Лагранжіану для такої механічної системи аналогічні принципам, описаним у роботах [(96), (97), (98), (95)].

Введемо позначення, які будуть використовуватися у роботі:

$u = u(x, t)$ – переміщення елемента труби,

EJ – згинна жорсткість балки;

F – площа поперечного перерізу труби (площа труби напросвіт);

F_2 – ефективна площа перерізу труби (площа рідини у перерізі);

ρ – лінійна густина рідини;

μ – лінійна густина матеріалу балки;

P – внутрішній тиск у трубі;

l – довжина балки.

Для побудови моделі системи будемо використовувати варіаційні принципи механіки, а саме принцип Гамільтона-Остроградського. При використанні цього варіаційного принципу виникають методичні питання використання змішаного опису руху компонент системи. Рух рідини розглядається у змінних Ейлера, а рух участків трубопроводу – у змінних Лагранжа. Загальний рух елементів об'єму рідини складається із суми руху участків трубопроводу та руху рідини. Тому це призводить до необхідності розглядати для руху рідини лагранжеву змінну поперечної деформації труби $u(x, t)$ як ейлерову змінну з наступним врахуванням у рівняннях руху конвективної складової прискорення.

Побудуємо функцію Лагранжа для системи, що моделюється як балка. Вона за означенням буде дорівнювати різниці між кінетичною та потенціальною енергіями системи. Потенціальна енергія балки представлена енергією згинних деформацій та енергією стискання матеріалу трубопроводу. У свою чергу кінетична енергія балки має такий вигляд [(99)]:

$$T_B = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t^2} \right)^2 \sqrt{1 + u'^2} dx \quad (2.1)$$

Потенціальна енергія згинних деформацій може бути представлена у формі:

$$P_B = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \sqrt{1 + u'^2} dx \quad (2.2)$$

Потенціальна енергія, що пов'язана з повздовжнім стисканням матеріалу трубопроводу буде:

$$P_{CT} = \frac{1}{8} EF \int_0^l u^4 dx \quad (2.3)$$

Розглянемо рух рідини. Компоненти швидкості рідини матимуть наступний вигляд:

$$V_x = V \cos \theta \quad V_y = V \sin \theta + \frac{du}{dt} \quad (2.4)$$

де $V = V(t)$ – задана повздовжня швидкість течії рідини у трубопроводі, θ – кут повороту елемента трубопроводу відносно вісі Ox (рис. 2.2).

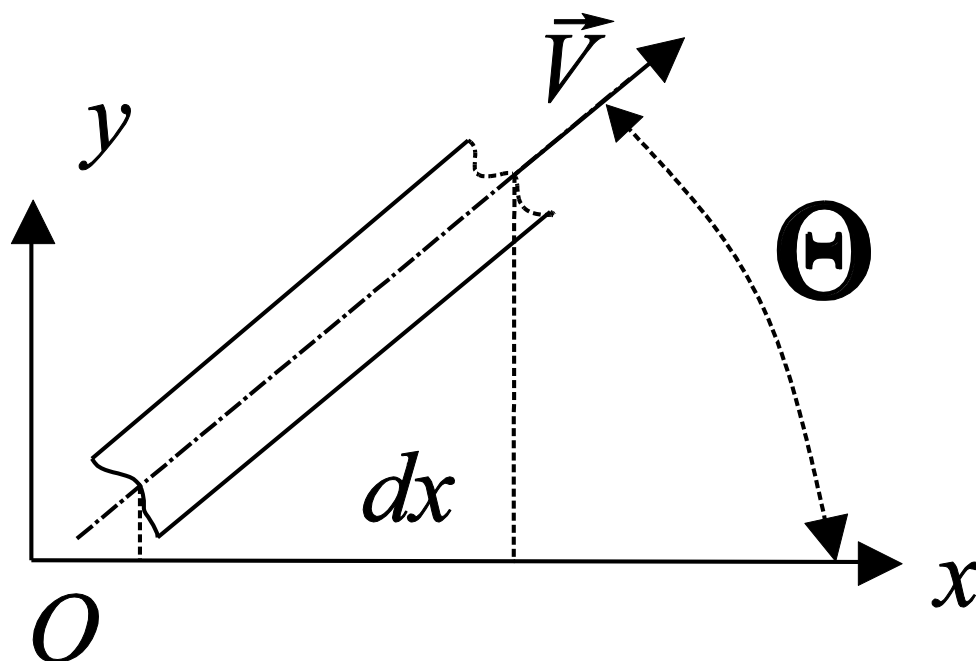


Рис.2.2 Відхилений елемент трубопроводу з рідиною.

Враховуючи геометричні співвідношення (рис.2.2):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + u'^2}}; \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}}. \quad (2.5)$$

Повна похідна від функції переміщення за часом становить:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} V_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{V \frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+u'^2}} \quad (2.6)$$

Квадрат швидкості руху елементів трубопроводу набуває наступного вигляду:

$$v^2 = \left(V \sin \theta + \frac{du}{dt} \right)^2 + (V \cos \theta)^2 = V^2 \sin^2 \theta + 2V \frac{du}{dt} \sin \theta + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + V^2 \cos^2 \theta = \left[V^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] + 2V \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}} \frac{du}{dt} \quad (2.7)$$

Для визначення кінетичної енергії рідини, необхідно проінтегрувати квадрат швидкості руху елементів трубопроводу вздовж усього трубопроводу.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ \left[V^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] \sqrt{1 + u'^2} + 2V \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} \right\} dx \quad (2.8)$$

Потенціальна енергія рідини зумовлена внутрішнім тиском у трубопроводі [(28)].

$$P_{ж} = -\frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.9)$$

Розглядаються деформації трубопроводу достатньо малі по відношенню до його довжини. Це дозволяє замінити нелінійні члени в складових функції Лагранжа на їх поліноміальні апроксимації. При цьому розглядаються лише члени до четвертого порядку малості відносно прогинів балки. Це дозволяє отримати рівняння руху системи з точністю до величин третього порядку малості. В результаті отримаємо функцію Лагранжа для досліджуваної динамічної системи у вигляді

$$L = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l u^4 dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx. \quad (2.10)$$

Отримана функція Лагранжу співпадає з результатами досліджень [(3) - (9)] за умови відсутності руху основи трубопроводу.

2.2. Дискретизація функції Лагранжа системи трубопровід-рідина та отримання скінчено вимірної системи диференціальних рівнянь

Для побудови скінченновимірної моделі при застосуванні варіаційно-аналітичного підходу застосовується метод модальної декомпозиції динамічної системи [(93)].

Виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича, оснований на методах Гальоркіна [(90), (69), (100)].

Скористаємось розкладом функції відхилення елементів трубопроводу у ряд за власними формами

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t) \quad (2.11)$$

$c_i(t)$ – амплітудні параметри коливань, залежні від часу, $A_i(x)$ – власні форми коливань трубопроводу, які є повною ортогональною системою функцій [(99)].

Функції $A_i(x)$ є форми власних коливань труби (балки) з нерухомою рідиною для лінійної задачі. Саме завдяки вибору за лінійно незалежні та повні системи функцій A_i форм коливань системи, отримано можливість розділення змінних та дослідження рівнянь відносно амплітудних параметрів.

Функція Лагранжу системи трубопровід-рідина має наступний вигляд

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\ & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l u^4 dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \\ & - \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Систему рівнянь для опису руху трубопроводу з рідиною отримаємо, побудувавши рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{c}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial c_r} = 0 \quad (2.13)$$

Після підстановки виразу (2.11) для переміщення елементів трубопроводу до функції Лагранжу, вона приймає наступний дискретизований вигляд:

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{1}{2}(\rho + \mu) \int_0^l \sum_{ij} \dot{c}_i \dot{c}_j A_i A_j dx + \frac{1}{4}(\rho + \mu) \int_0^l \sum_{ijkl} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k c_l A_i A_j A'_k A'_l dx - \\ & - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \sum_{ij} c_i c_j A''_i A''_j dx - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l A''_i A''_j A'_k A'_l dx - \\ & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l A''_i A''_j A'_k A'_l dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l A'_i A'_j A'_k A'_l dx + \\ & + \frac{7}{4} \rho V^2 \int_0^l \sum_{ij} c_i c_j A'_i A'_j dx - \frac{13}{16} \rho V^2 \int_0^l \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l A'_i A'_j A'_k A'_l dx + \\ & + 2\rho V \int_0^l \sum_{ij} \dot{c}_i c_j A_i A'_j dx - \frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \sum_{ij} c_i c_j A'_i A'_j dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу лінійності обох операторів – інтегрування та сумування їх можна поміняти місцями, та обчислити інтеграли добутків відомих функцій – власних форм коливань балки.

Отримаємо наступні квадратури:

$$\begin{aligned} N_i &= \int_0^l A_i^2 dx; \\ \beta_{ij}^1 &= \int_0^l A'_i A'_j dx; & \beta_{ij}^2 &= \int_0^l A'_i A'_j dx; & (2.15) \\ d_{ijkl}^2 &= \int_0^l A'_i A'_j A'_k A'_l dx; \\ d_{ijkl}^4 &= \int_0^l A'_i A'_j A'_k A'_l dx; & \kappa_i^4 &= \int_0^l (A''_i)^2 dx; \\ d_{ijkl}^6 &= \int_0^l A''_i A''_j A'_k A'_l dx. \end{aligned}$$

Тоді, після підстановки вищезазначених квадратур, функція L_1 системи трубопровід – рідина має наступний дискретний вигляд у квадратурах:

$$\begin{aligned}
L_1 = & \frac{1}{2}(\rho + \mu) \sum_i \dot{c}_i^2 N_i + \frac{1}{4}(\rho + \mu) \sum_{ijkl} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k c_l d_{ijkl}^2 - \\
& - \frac{1}{2} E J \sum_i c_i^2 \kappa_i^4 N_i - \frac{1}{4} E J \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^6 - \\
& - \frac{1}{8} E F \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 - \frac{13}{16} \rho V^2 \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 + \frac{+7}{4} \rho V^2 \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2 + \\
& + 2\rho V \sum_{ij} \dot{c}_i c_j \beta_{ij}^1 - \frac{1}{2} P F_2 \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Розділимо на $(\rho + \mu)$ для того, щоб привести функцію L_1 до безрозмірного вигляду:

$$\begin{aligned}
L_1 = & \frac{1}{2} \sum_i \dot{c}_i^2 N_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k c_l d_{ijkl}^2 - \frac{1}{2} \frac{E J}{\rho + \mu} \sum_i c_i^2 \kappa_i^4 N_i - \\
& - \frac{1}{4} \frac{E J}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^6 - \frac{1}{8} \frac{E F}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 - \\
& - \frac{13}{16} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 + \frac{7}{4} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2 + \\
& + \frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_{ij} \dot{c}_i c_j \beta_{ij}^1 - \frac{1}{2} \frac{P F_2}{\rho + \mu} \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Переходимо безпосередньо до отримання скінчено вимірної системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, приймаючи за узагальнені координати амплітудні параметри $c_r(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{c}_r} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial c_r} = 0 \tag{2.18}$$

Отримаємо відповідні частинні похідні. Частинна похідна по швидкості зміни узагальненої координати, що є у розглядуваному випадку амплітудним параметром, має вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{c}_r} = \dot{c}_r N_r + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \dot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 + \frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^1 \tag{2.19}$$

Візьмемо похідну від функції Лагранжа по узагальненій координаті

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_r} = & \frac{1}{2} \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k d_{krij}^2 - \frac{E J}{\rho + \mu} c_r \kappa_r^4 N_r - \\
& - \frac{E J}{\rho + \mu} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^6 - \frac{E F}{2(\rho + \mu)} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 - \\
& - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ri}^2 + \frac{+2\rho V}{\rho + \mu} \sum_i \dot{c}_i \beta_{ri}^1 - \frac{P F_2}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Повна похідна за часом від частинної похідної по швидкості зміни узагальненої координати функції Лагранжа має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{c}_r} \right) = \ddot{c}_r N_r + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 + \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k d_{jkir}^2 + \frac{+2\rho\dot{V}}{\rho+\mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^1 + \frac{2\rho V}{\rho+\mu} \sum_i \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \quad (2.21)$$

Тоді, підставляючи вирази (2.21) та (2.20) у рівняння Лагранжа другого роду (2.18), отримаємо однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених функцій, що є амплітудними параметрами різних форм коливань досліджуваної системи трубопровід – рідина та характеризують її рух

$$\begin{aligned} & \ddot{c}_r N_r + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 + \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) + \frac{EJ}{\rho + \mu} c_r N_r \kappa_r^4 + \\ & \frac{+EJ}{\rho + \mu} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^6 + \frac{EF}{2(\rho + \mu)} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 + \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \\ & - \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ir}^1 - \beta_{ri}^1) + \frac{PF_2}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho\dot{V}}{\rho + \mu} \sum_i c_i \beta_{ir}^1 = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3. Зведення системи звичайних диференціальних рівнянь до форми Коші, придатної для чисельного роз'язку

Поділимо рівняння (2.22) на квадрат норми власних форм коливань N_r та перепишемо їх таким чином, щоб зліва була тільки друга похідна від узагальненої координати за часом \ddot{c}_r .

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & - \frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\ & - \frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho\dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \dot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{EF}{2(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Якщо залишити тільки лінійні члени рівнянь руху системи, то її можна представити у наступному вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{c}_p = & -\frac{EJ}{\rho+\mu} \kappa_p^4 c_p + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \frac{+2\rho V}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \\ & - \frac{PF_2}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отримане лінійне представлення другої похідної за часом від узагальненої координати, підставимо у систему рівнянь (2.23) у член

$$-\frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2.$$

Тоді одержимо наступний вигляд системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho+\mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{+2\rho V}{(\rho+\mu)N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\ & - \frac{PF_2}{(\rho+\mu)N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho+\mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{EJ}{(\rho+\mu)} \kappa_p^4 c_p + - \frac{EF}{2(\rho+\mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \frac{1}{2N_r} \sum_{pjk} c_j c_k \frac{+7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \\ & + \frac{2\rho V}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \frac{PF_2}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho\dot{V}}{(\rho+\mu)N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Рівняння (2.25) є системою нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно амплітудних параметрів коливань $c_i(t)$, зведені до форми Коші, тобто мають форму явного вираження для старшої похідної. В рівняннях розглянуто нелінійності тільки до третього порядку малості (оскільки функція Лагранжа враховувала величини до четвертого порядку малості включно) та враховано більшість відомих нелінійних механізмів системи трубопровід – рідина та їх взаємодія. Розв'язання такої системи рівнянь можливо провести тільки шляхом використання чисельних методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

Для вибору повної системи функцій $A(x)$ скористуємося теорією функцій Крилова [(99)], яка є зручною у використанні і забезпечує виконання граничних умов, що є необхідною умовою для застосування варіаційних принципів механіки. Наведемо власні функції та власні числа для розглянутого у даній роботі випадку закріплення трубопроводів – закріплення типу консоль.

Для консольного закріплення відомо, що кінематичні граничні умови задовольняються на кінцях для таких функцій, що задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} A(0) = A'(0) = 0; \\ A''(l) = A'''(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Згідно з теорією функцій Крилова такі функції мають вигляд

$$A(x) = CU(kx) + DV(kx) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2}(chx - \cos x); \\ V(x) &= \frac{1}{2}(shx - \sin x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

C та D – константи, що знаходяться з другої граничної умови,

$$\begin{aligned} A''(l) = Ck^2U''(kl) + Dk^2V''(kl) = Ck^2S(kl) + Dk^2T(kl) = 0 \\ A'''(l) = Ck^3U'''(kl) + Dk^3V'''(kl) = Ck^3V(kl) + Dk^3S(kl) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Граничні умови (2.29) будуть задовольнятися тільки у випадку, коли

$$S^2(kl) - TV(kl) = 0 \quad (2.30)$$

$$chkl\cos kl + 1 = 0$$

Підставимо вирази для функцій Крилова в елементарних функціях і отримаємо вираз для знаходження хвильових чисел:

$$chkl\cos kl + 1 = 0 \quad (2.31)$$

Власні частоти зв'язані з хвильовими числами k відомою формулою

$$p_i^2 = k_i^4 \frac{EJ}{\mu + \rho} \quad (2.32)$$

Для знаходження власних частот з граничних умов необхідно розв'язати трансцендентне рівняння (2.31), що виконується у пакеті Mathematica за допомогою функції Reduce.

У випадку консольного заземлення одного кінця трубопроводу функція $A(x)$ буде мати наступний вигляд:

$$A(x) = A \left(U(kx) - \frac{V(kl)}{S(kl)} V(kx) \right),$$

$$\text{де } U(x) = \frac{1}{2}(\text{ch } x + \cos x) \quad (2.33)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(\text{sh } x - \sin x)$$

$$S(x) = \frac{1}{2}(\text{ch } x - \cos x) - \text{функції Крилова [(99)].}$$

При аналізі руху системи при такому закріпленні виявлено вплив сили повздовжнього стискання на рух системи. Цей вплив буде представлений додатковими членами в виразах для частоти власних коливань труби та повинен змінювати діапазони стійкості системи.

При консольному закріпленні трубопроводу з однієї сторони члени, що характеризують поздовжнє стискання, впливають на систему. За допомогою отриманої залежності власних значень від параметрів системи можна зробити приблизну оцінку динамічної стійкості прямолінійної форми трубопроводу.

2.4. Програмна реалізація моделі системи трубопровід-рідина

Для побудови, аналізу, та візуалізації поведінки моделі системи трубопровід-рідина використовувався програмний пакет символної та обчислювальної математики із широким спектром можливостей візуалізації – Mathematica .

Першим кроком побудови моделі було чисельне отримання перших дванадцяти коренів трансцендентного рівняння (2.31), для побудови відповідних дванадцяти власних форм коливань трубопроводу.

Далі обчислювалися набори квадратур від власних форм коливань (2.15). Усі квадратури були обчислені однократно (виходячи з міркувань незмінності граничних умов у системі) та збережені у окремому xml файлі, до якого був забезпечений доступ для імпорту квадратур у подальші розрахунки.

Процедура моделювання поведінки системи побудована таким чином, що усі аналітичні перетворення – отримання рівнянь із Лагранжіану, т. ін. –

виконується кожен раз при виклику даної процедури. Це дало змогу відстежувати ефекти, пов'язані із зміною деяких параметрів в системі так би мовити у режимі онлайн (рис.2.3).

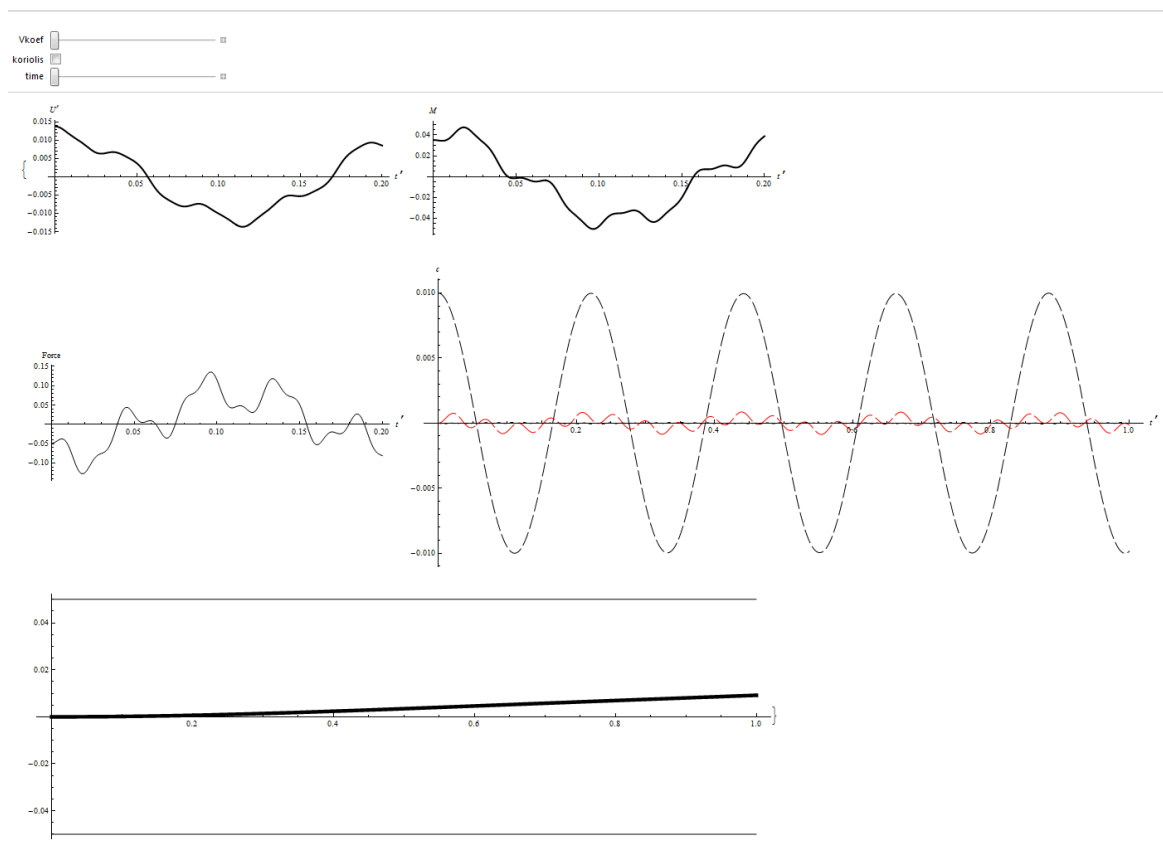


Рис.2.3. Результати моделювання поведінки системи трубопровід – рідина у програмному пакеті Mathematica .

Побудована програма являє собою універсальний засіб дослідження динаміки систем трубопровід-рідина і дозволяє із внесенням незначних змін досліджувати трубопроводи з різноманітними схемами закріплення, та навіть трубопроводи із дисками на кінці. Необхідно лише внести зміни у модуль розрахунку квадратур – зміняться граничні умови, рівняння для визначення хвильових чисел та власні форми трубопроводу.

2.5. Короткі висновки

Можна сформулювати наступні висновки проведеної роботи:

- Побудовано математичну модель динаміки системи трубопровід-рідина із урахуванням більшості відомих нелінійних силових факторів.

- Виконана дискретизація Лагранжіану системи трубопровід-рідина методом модальної декомпозиції та побудована скінчено вимірна система диференціальних рівнянь у формі Коші для аналізу коливань трубопроводу із рідиною.
- Побудовано програмний комплекс моделювання поведінки системи трубопровід-рідина на основі математичного пакету Mathematica .

РОЗДІЛ III. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТРУБОПРОВІД-РІДИНА

Основною метою моделювання поведінки трубопровід-рідина є розрахунок ряду тестових прикладів, які дадуть змогу оцінити коректність побудованої моделі, провести порівняльний аналіз отриманих результатів із відомими результатами інших авторів, а також зробити оцінку достатності та доцільності взяття у розрахунок дванадцяти власних форм для консольно закріпленого трубопроводу.

3.1. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини

Трубопровід із рідиною, як механічний об'єкт, значно складніший, ніж трубопровід із парою, оскільки інерційними властивостями рідини не можна нехтувати. Течія рідини може створювати умови для зростання коливань у системі. Існують критичні швидкості течії, в околі яких спостерігається явище типу резонансу, якщо амплітуда відповідної форми коливань буде значно зростати внаслідок цілеспрямованого перерозподілу енергії від потоку рідини до цієї форми. Такі задачі виникають під час застосування трубопроводів у транспортній, енергетичній та інших галузях. Особливо важливими вони є у разі позаштатних ситуацій (пошкодження трубопроводів, потреба в досягненні граничних швидкостей течій тощо). Переважна частина досліджень динаміки трубопроводів стосується задач про усталені процеси [(27), (28), (101), (31)]. Здебільшого дослідження подібних задач виконуються на основі лінійних моделей. Пропоноване дослідження ґрунтується на підходах, поданих у роботах [(99), (96)], де здійснено мішаний (ейлерово-лагранжевий) опис руху складників системи та виведено дискретну модель системи на основі застосування методу модальної декомпозиції до нелінійного формулювання задачі.

Для різних значень швидкостей течії рідини розглядаємо задачу про коливання трубопроводу, який з одного боку консольно защемлений, а інший кінець трубопроводу вільний. Відомо, що в трубопроводі, по якому тече

рідина, існують критичні швидкості [(27)] течії, які визначаються за формулою:

$$V_{\text{кр}}^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{7\rho} \left(\frac{EJN_1 \chi_1^4}{\beta_{11}^2} + PF \right)} \quad (3.1)$$

(наведено значення лише для першої критичної швидкості). Тут:

EJ – згинна жорсткість балки;

F – площа поперечного перерізу труби (площа труби напросвіт);

F_2 – ефективна площа перерізу труби (площа рідини у перерізі);

ρ – лінійна густина рідини;

μ – лінійна густина матеріалу балки;

P – внутрішній тиск у трубі;

l – довжина балки.

рідина рухається в трубі зі заданою швидкістю $v(t)$, також введені наступні квадратури:

$$\begin{aligned} N_i &= \int_0^l A_i^2 dx; \\ \beta_{ij}^1 &= \int_0^l A_i' A_j' dx; & \beta_{ij}^2 &= \int_0^l A_i' A_j' dx; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$d_{ijkl}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx;$$

$$d_{ijkl}^4 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx; \quad \kappa_i^4 = \int_0^l (A_i'')^2 dx;$$

$$d_{ijkl}^6 = \int_0^l A_i'' A_j'' A_k' A_l' dx.$$

У разі досягнення першої критичної швидкості в системі значно зростають амплітуди коливань, які не спадають із подальшим зростанням швидкості течії, тому розглядати поведінку системи в околі таких значень критичних швидкостей недоцільно.

Розрахунки проводилися для перших дванадцяти власних форм трубопроводу. Розглядали випадок течії рідини із постійною швидкістю. Рідина вважалася нестисливою ідеальною із густиною, що відповідає густині води. Трубопровід вважався довжиною один метр із круглим перерізом – зовнішній діаметр дорівнює 42 мм, товщина стінки – 0.8 мм. За матеріал трубопроводу було обрано поліуретан, армований скловолокном. Його модуль Юнга дорівнює $E=2 \cdot 10^9$ Па, густина дорівнює 1250 кг/м^3 . Вибір такого матеріалу зумовлений необхідністю дослідити динаміку трубопровідних систем, у яких інерційні властивості рідини мають дуже суттєвий вплив на поведінку системи.

За початкове збурення системи приймалося відхилення трубопроводу від положення рівноваги по другій власній формі $c_2(0) = 0.02$.

Розглянемо поведінку системи, якщо $V = 0$ (рис. 3.1). При цьому тут і далі варіант *a* відповідає стартовому руху системи, а варіант *б* — поведінці системи після п'яти періодів коливань.

Бачимо, що коливання за другою формою є домінуючі, перша та третя форми збуджуються нелінійними механізмами, проте їх амплітуди значно поступаються амплітуді другої форми коливань. Під час аналізу прогину трубопроводу помітно, що коливання відбуваються практично за другою формою та не зростають у часі.

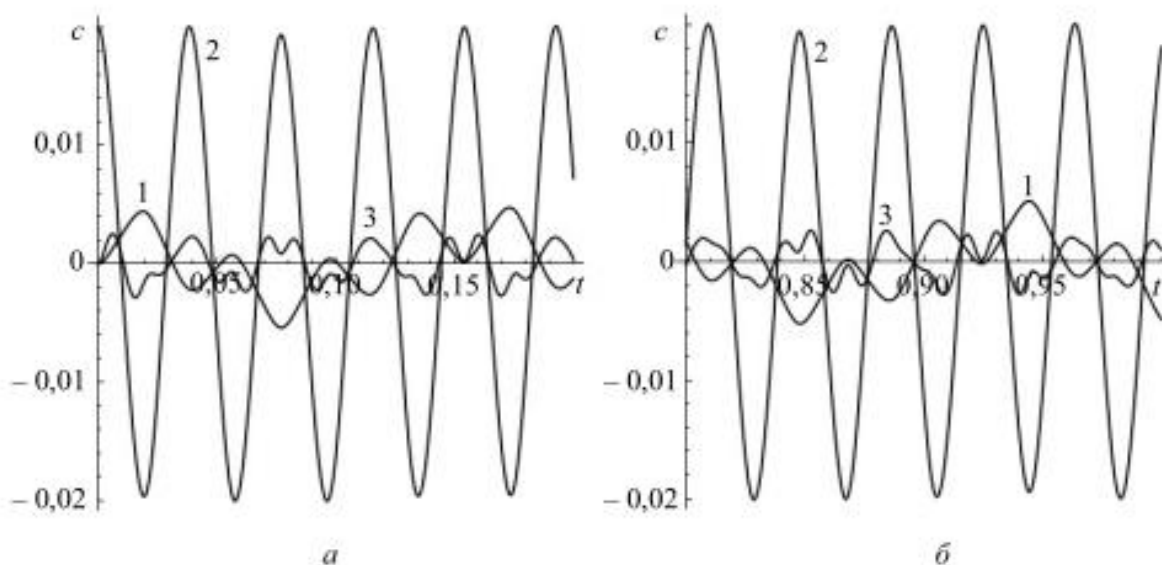


Рис.3.1. Зміна перших трьох амплітуд коливань для $V = 0$ на різних інтервалах часу.

Розглянемо тепер випадок $V = 0.6V_{кр}$. За такої швидкості поведінка системи докорінно змінюється (рис. 3.2). Тепер у системі створюються умови для перерозподілу енергії як між формами коливань, так і для її переходу від рідини до коливань трубопроводу за першою формою. Помітно, що на відміну від нульової швидкості течії в системі починає домінувати перша форма коливань. Аналогічно, як і у попередньому варіанті, яскраво помітна модуляція коливань першої та третьої форми за частотою другої форми. Модуляція другої форми відбувається за частотою першої форми. Нелінійні механізми в системі проявляються значно сильніше, ніж у випадку відсутності течії рідини. На рис. 3.3 для різних моментів часу наведено зміну форми трубопроводу в часі [(102), (103)]. Форми трубопроводу тепер визначаються значно складнішими профілями, в яких присутні вищі гармоніки спектру. Досліджено також випадок $V = 0.9V_{кр}$. При цьому амплітуди коливань значно збільшуються, домінування першої форми стає ще відчутнішим. Спостерігається інтенсивне розгойдування коливань трубопроводу за рахунок механізму типу внутрішнього флатера. Відхилення вільного кінця трубопроводу та кут повороту його перерізу подані на рис. 3.4. Цікаво відзначити наявність коливань, за яких кінець трубопроводу виконує

високочастотні вібрації з поворотами перерізу, але без переходу через рівноважний стан. Це свідчить про значний вклад вищих форм коливань.

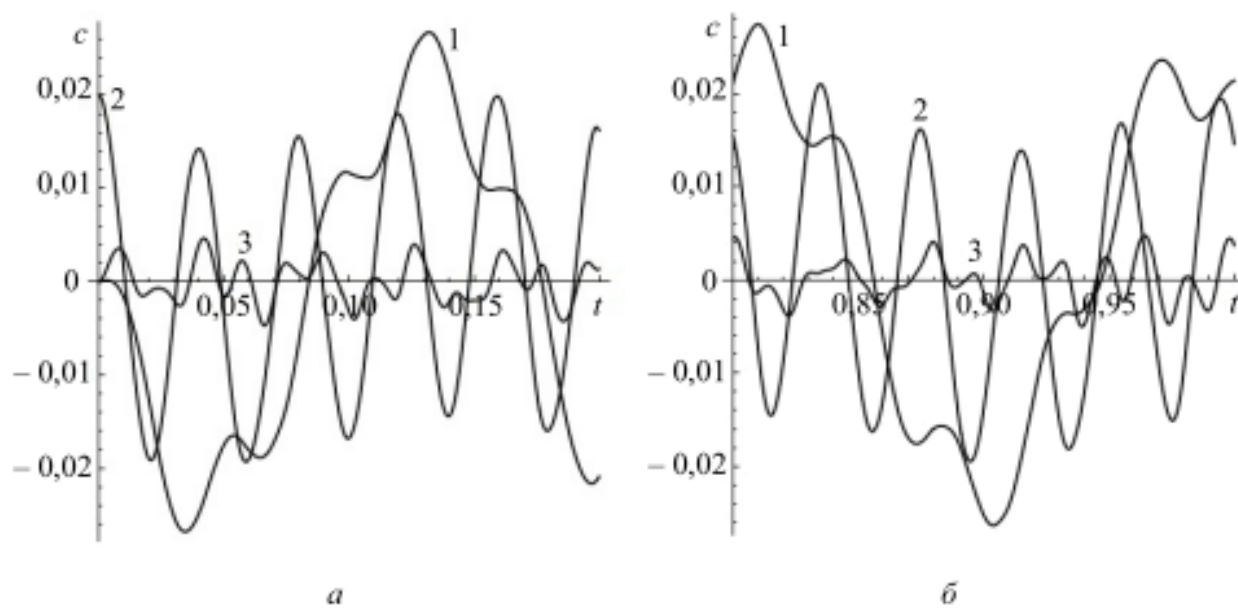


Рис.3.2. Зміна перших трьох амплітуд коливань для $V = 0.6V_{kp}$ на різних інтервалах часу.

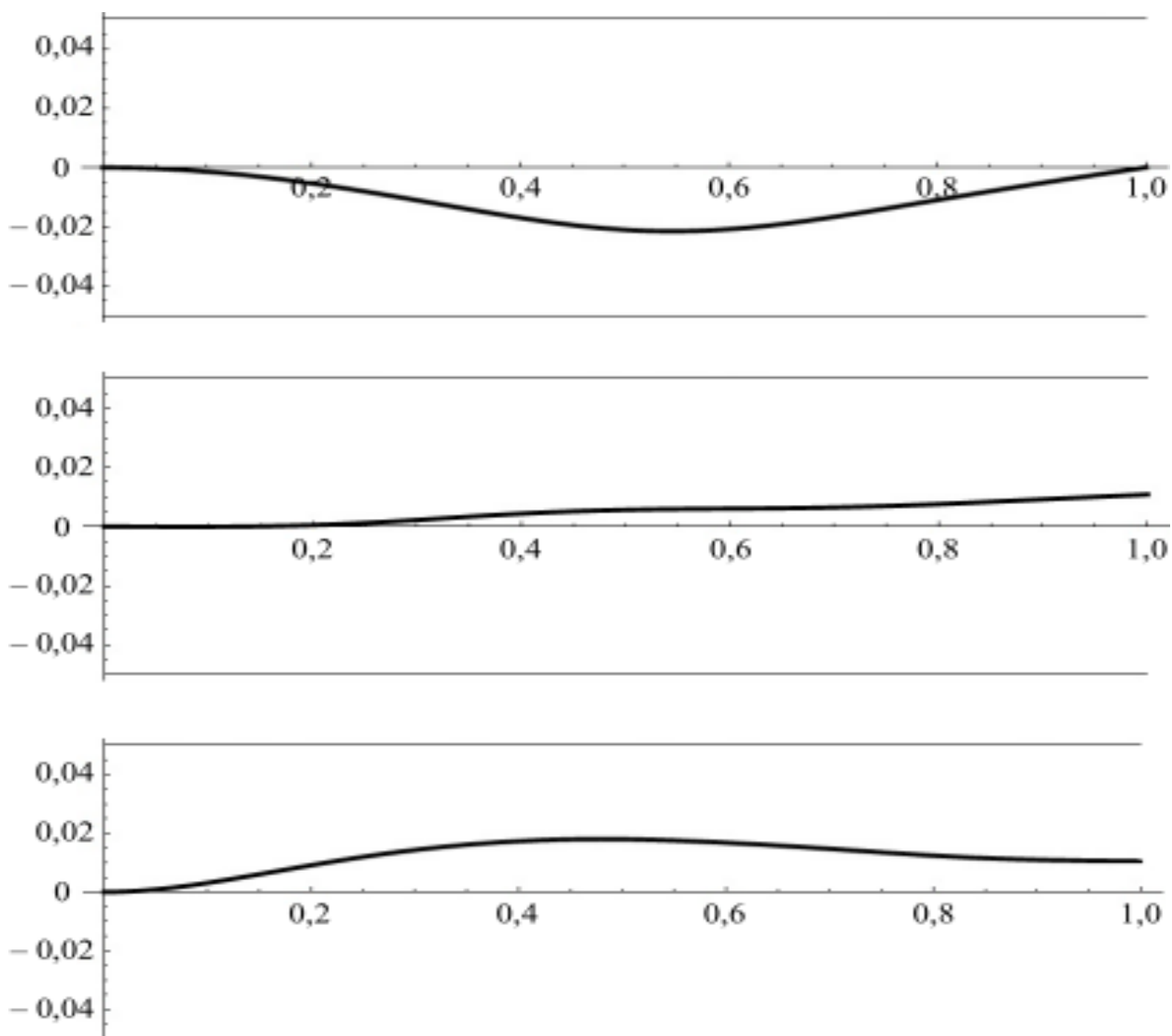


Рис.3.3 Форми трубопроводу для $V = 0.6V_{кр}$ для часу 0.06 с, 0.11 с, 0.8 с.

Було встановлено, що такі флатерні ефекти в коливаннях трубопроводів для трубопроводів із високою жорсткістю (наприклад, виготовлених із сталі з відносно товстими стінками) є несуттєві.

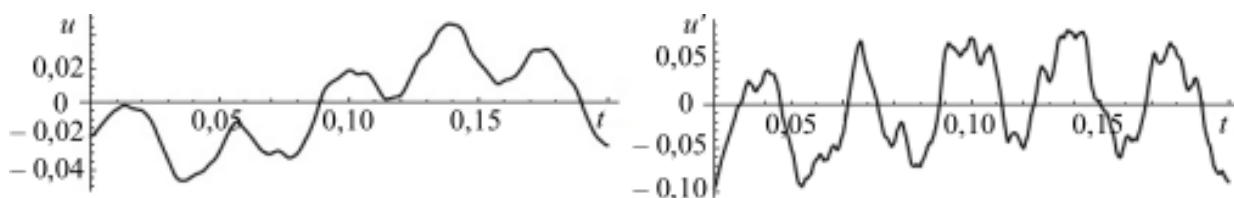


Рис.3.4. Залежність переміщення та кута повороту кінця трубопроводу від часу.

3.2. Аналіз проведених розрахунків

Проведене моделювання поведінки трубопроводу з рідиною в околі критичної швидкості свідчить про те, що з наближенням до критичних швидкостей у системі створюються умови для цілеспрямованого перерозподілу енергії від рідини до першої форми коливань трубопроводу. За своїм характером такий механізм розвитку коливань є внутрішнім флатером. За зростання амплітуди першої форми в системі суттєво проявляються нелінійні механізми, які сприяють залученню до коливань вищих форм. Ефекти, пов'язані з наближенням до першої критичної швидкості, стають суттєвими вже для швидкостей течії порядку половини від її критичного значення.

3.3. Аналіз впливу нелінійного демпфера у вигляді однобічного силового фактору, а також однобічної дисипації на поведінку консольно закріпленого трубопроводу із рідиною, що тече

В даному розділі розглядається модель динамічної системи трубопровод-рідина в котрій присутній нелінійний демпфер у вигляді однобічного пружного впливу або однобічної дисипативної сили (25). Проводиться порівняння поведінки системи з однобічною додатковою пружністю та без неї, а також системи з однобічною дисипативною силою та двобічною, на основі котрого виконано аналіз ефективності використання однобічних силових факторів як демпфуючих елементів у трубопровідних системах.

Було розглянуто систему аналогічну описаній у попередньому розділі, але із додатковими елементами. У першому випадку вище нейтральної лінії розташовані пружні елементи, а у другому випадку вище нейтральної лінії розташоване в'язке середовище, яке реалізує ефект лінійного тертя (рис. 3.5).

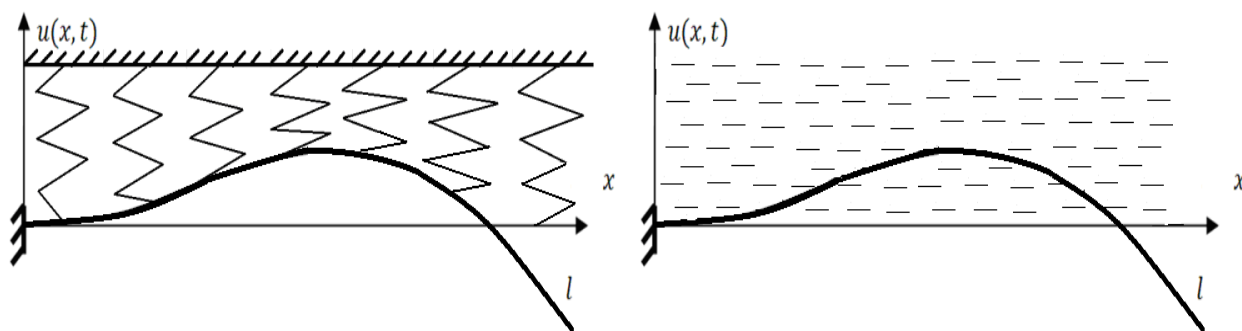


Рис.3.5. Динамічна система трубопровід-рідина із однобічною пружністю, або із однобічною в'язкістю.

Введення однобічної додаткової пружності характеризується додаванням до математичної моделі силового фактору

$$F(x, t) = -k \cdot H(u(x, t)) \cdot u(x, t) \quad (3.3)$$

А введення однобічної в'язкості – додаванням сили

$$F(x, t) = -h \cdot H(u(x, t)) \cdot \frac{d}{dt} u(x, t) \quad (3.4)$$

Де :

$u(x, t)$ – поперечне відхилення трубопроводу;

$H(x)$ – функція Хевісайда;

k, h - коефіцієнти, які деяким чином характеризують жорсткість однобічної пружності, та в'язкість відповідно.

Для внесення вищезазначених сил у праві частини системи диференціальних рівнянь, потрібно визначити їх проекції на узагальнені координати системи.

Таким чином для однобічної пружності права частина j -го рівняння буде мати наступний вигляд:

$$f_j(t) = -k \cdot \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{12} H(u(x, t)) \cdot A_i(x) \cdot c_i(t) \right) \cdot A_j(x) \cdot dx \quad (3.5)$$

Скориставшись модальною декомпозицією відхилення трубопроводу, та маючи на увазі ортогональність власних форм отримаємо:

$$f_j(t) = -k \cdot c_j(t) \cdot \int_0^l H \left(\sum_{i=1}^{12} A_i(x) \cdot c_i(t) \right) \cdot A_j^2(x) \cdot dx \quad (3.6)$$

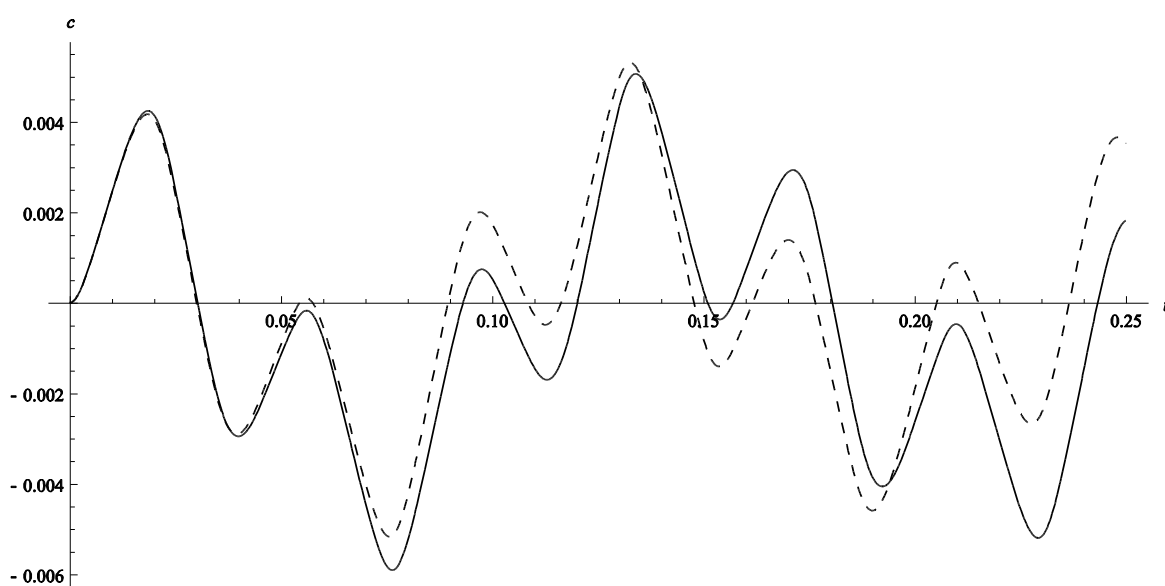
Для однобічної в'язкості, відповідно, права частина рівнянь буде мати вигляд:

$$f_j(t) = -h \cdot \dot{c}_j(t) \cdot \int_0^l H(\sum_{i=1}^{12} A_i(x) \cdot c_i(t)) \cdot A_j^2(x) \cdot dx \quad (3.7)$$

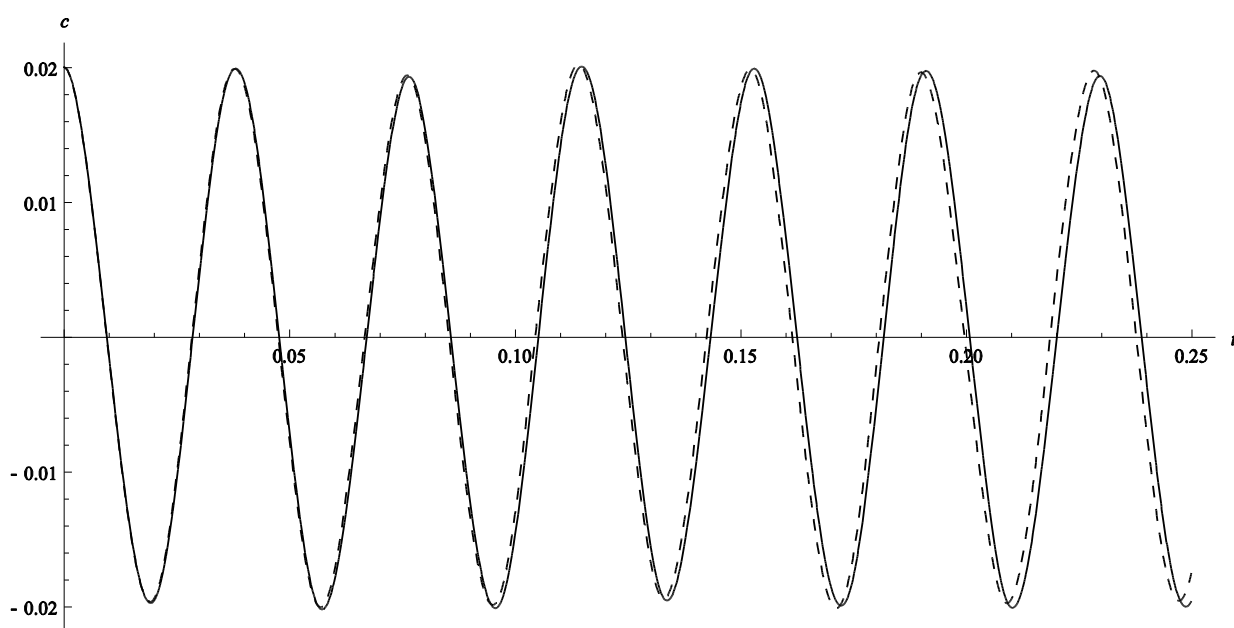
Аналогічно попередньому розділу розглядається декілька швидкісних режимів течії рідини $V=0$, $V=0.9V_{kp}$, $V=1.5V_{kp}$.

На рис.3.6 представлені порівняльні графіки амплітудних параметрів перших трьох власних форм коливань трубопроводу на режимі $V=0$.

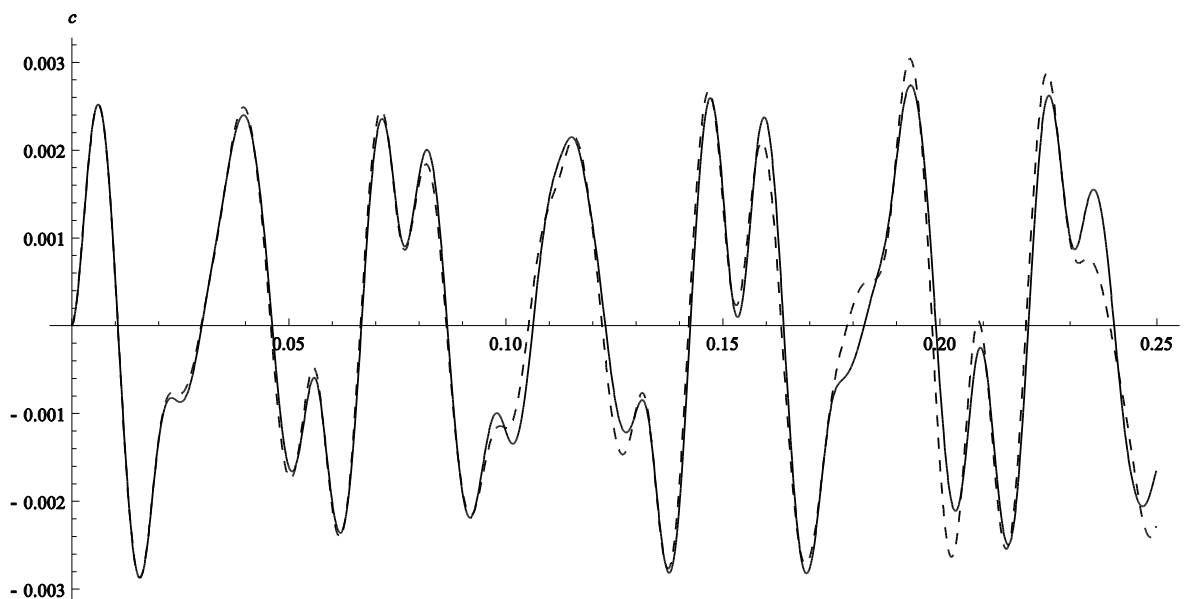
Суцільні криві відповідають амплітудним параметрам системи з однобічною додатковою пружністю, а штриховані криві відповідають амплітудним параметрам системи без додаткових силових факторів.



а



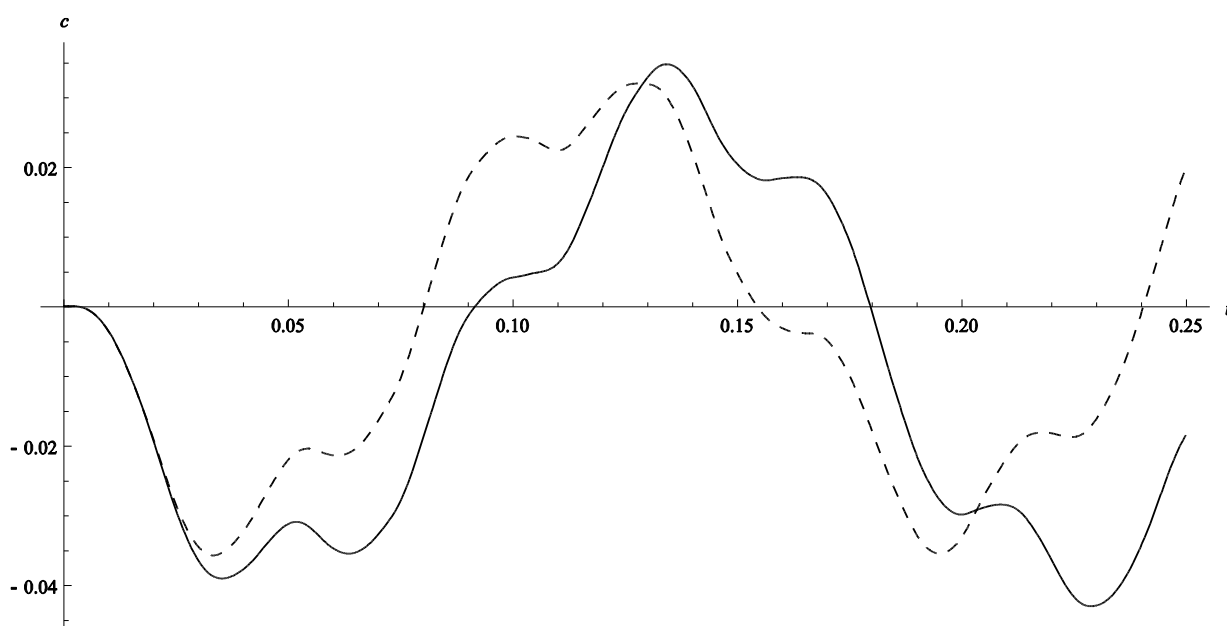
б



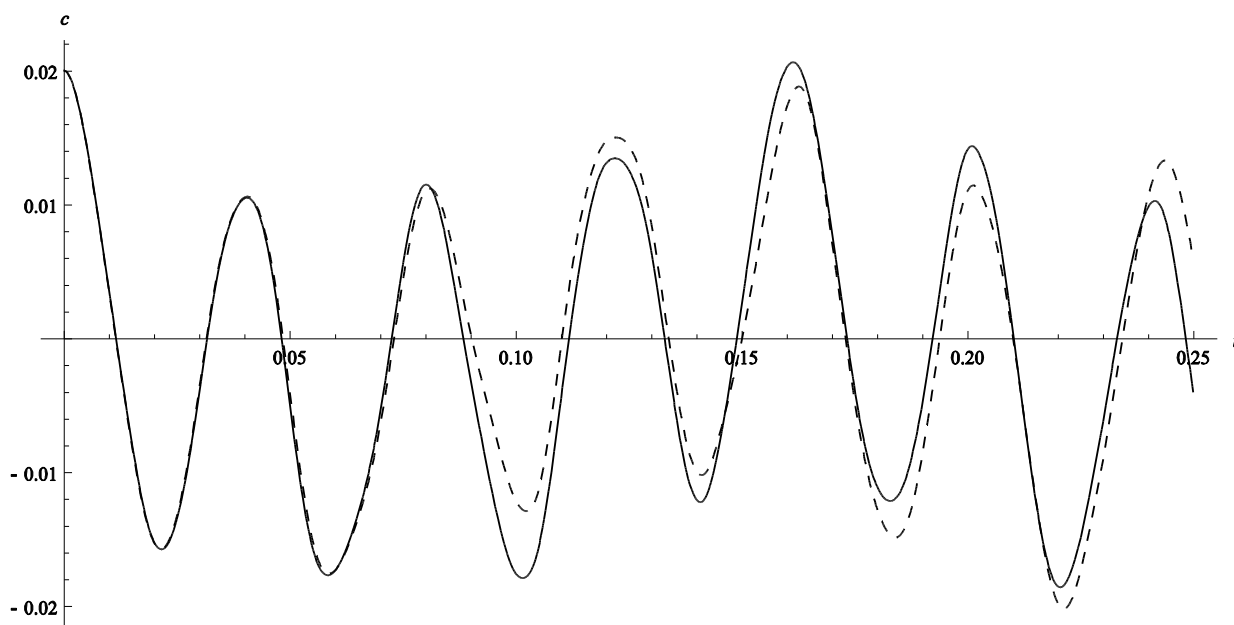
в

Рис.3.6. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а- перша форма, б- друга, в- третя) при $V=0$, суцільна лінія відповідає системі з однобічною додатковою пружністю, штрихована – система без додаткової пружності.

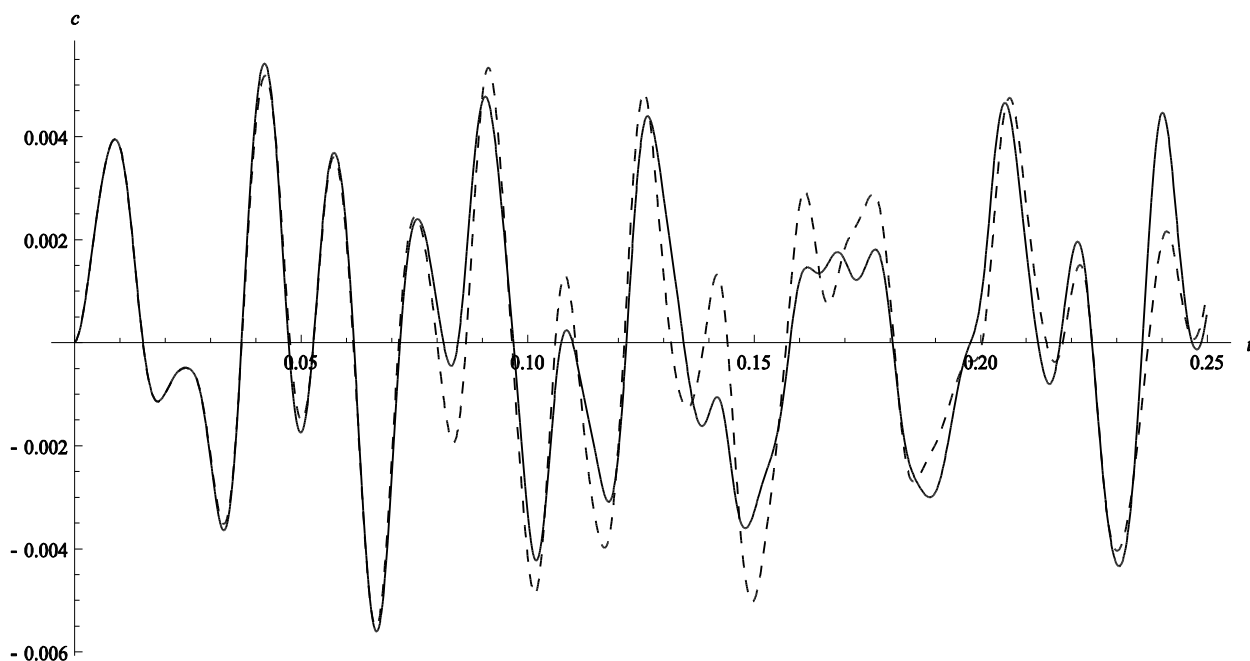
Із рис. 3.6 можна зробити висновок, що в даному швидкісному режимі однобічна додаткова пружність не дає демпфуючого ефекту в системі. Той самий висновок можна зробити і проаналізувавши інші швидкісні режими течії рідини (див. рис. 3.7, 3.8).



а

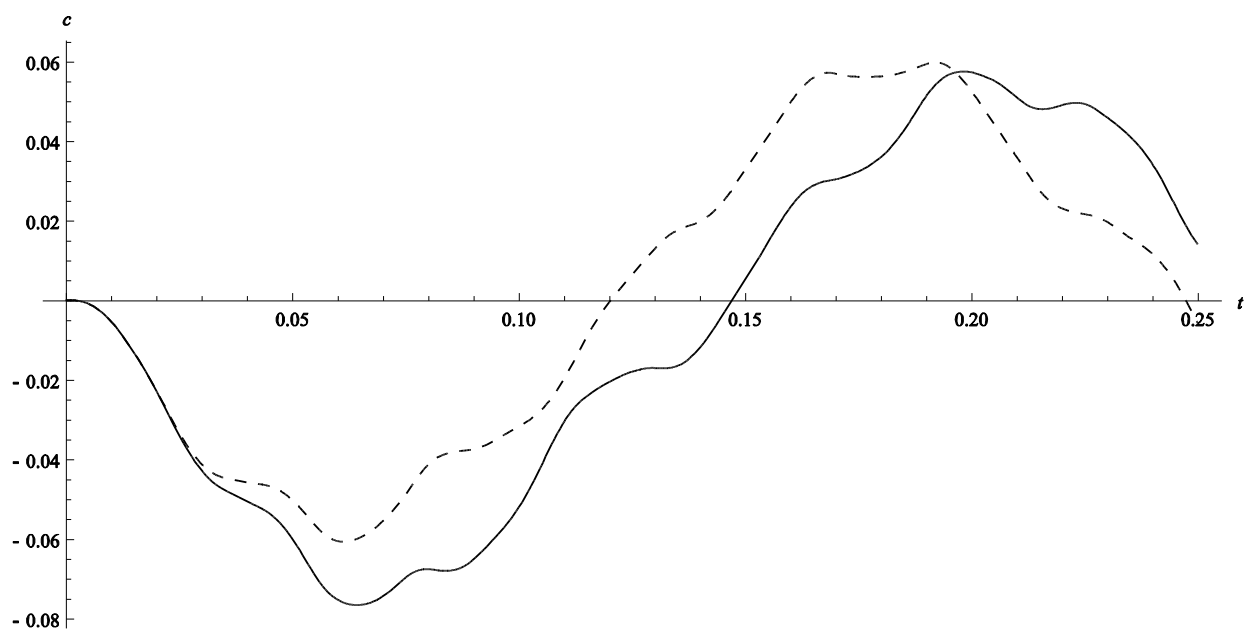


б

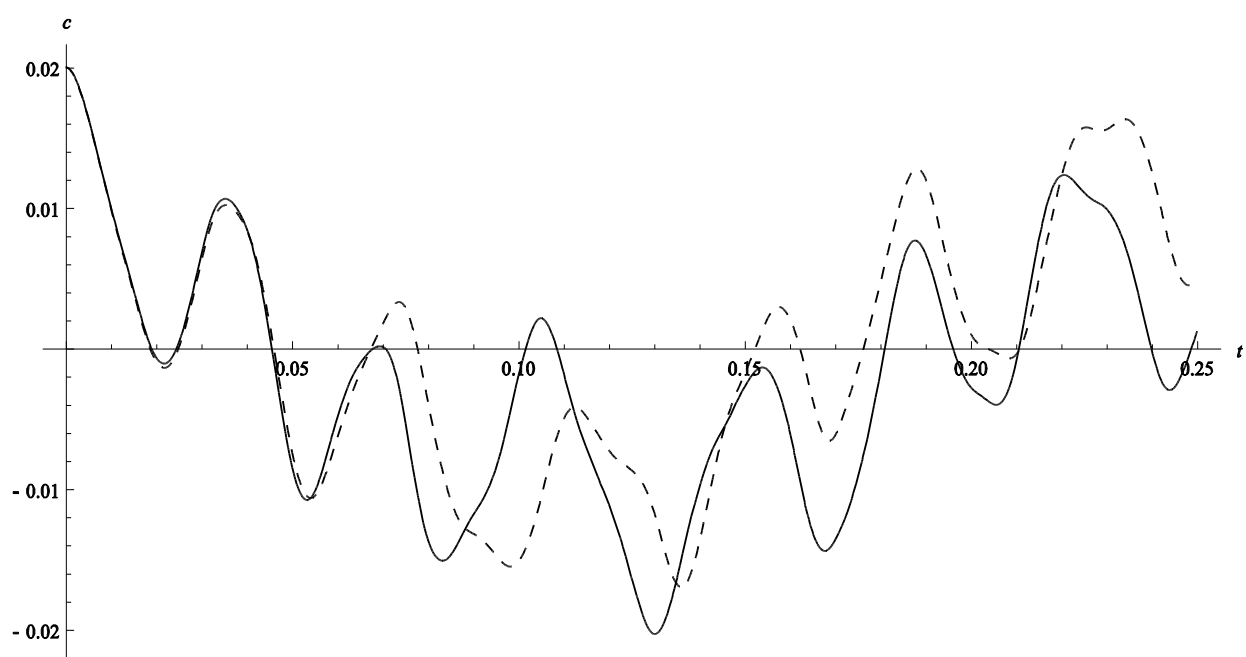


в

Рис.3.7. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а-перша форма, б- друга, в-третя) при $V=0.9V_{кр}$, суцільна лінія відповідає системі з однобічною додатковою пружністю, штрихована – система без додаткової пружності.



a



б

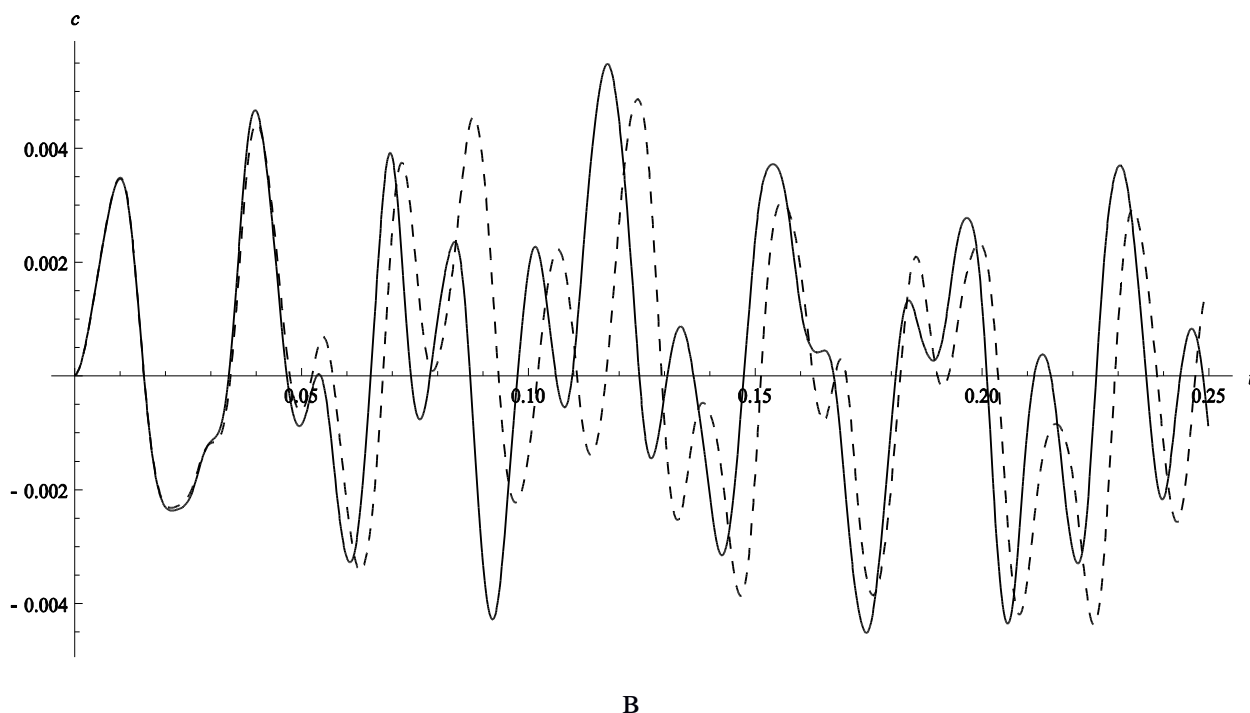


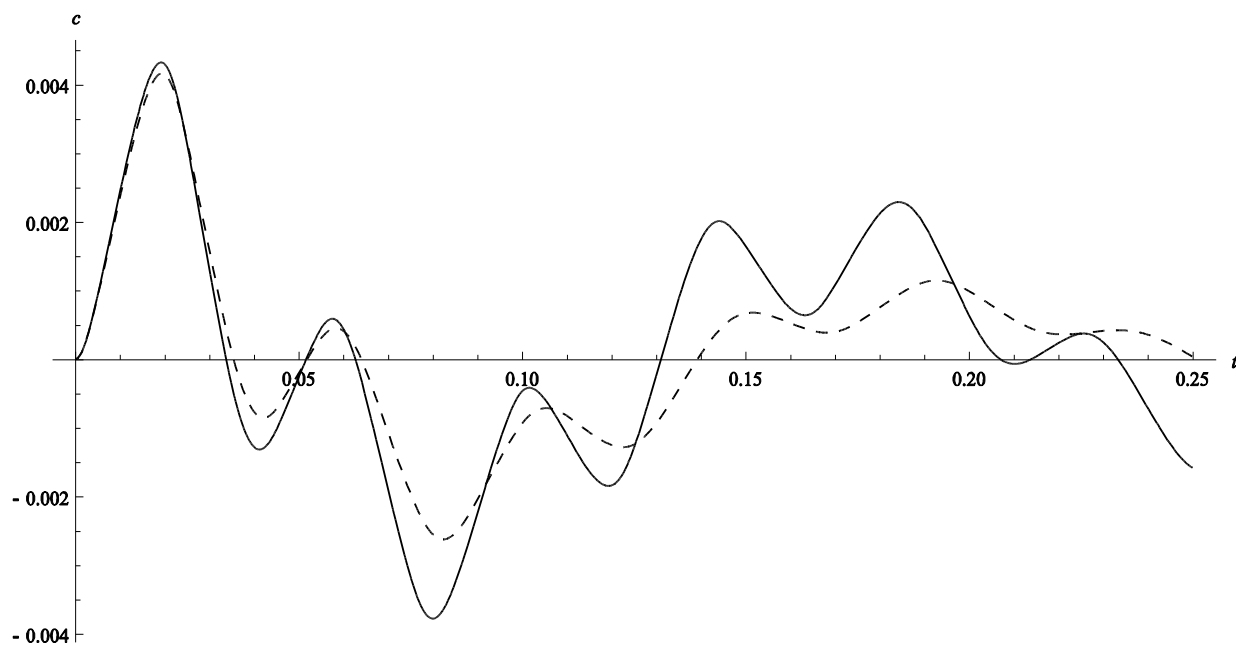
Рис.3.8. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а- перша форма, б- друга, в-третя) при $V=1.5V_{кр}$, суцільна лінія відповідає системі з однобічною додатковою пружністю, штрихована – система без додаткової пружності.

Нелінійний механізм однобічної пружності не вносить в систему очікуваного значного ефекту демпфування за рахунок перерозподілу енергії між власними формами коливань та відводу енергії на вищі моди. На вищеописаних швидкісних режимах течії рідини, які представляють практичний інтерес, основним механізмом перерозподілу енергії між власними формами коливань є сила Коріоліса, на фоні котрої ефекти зумовлені присутністю однобічної додаткової пружності є несуттєвими.

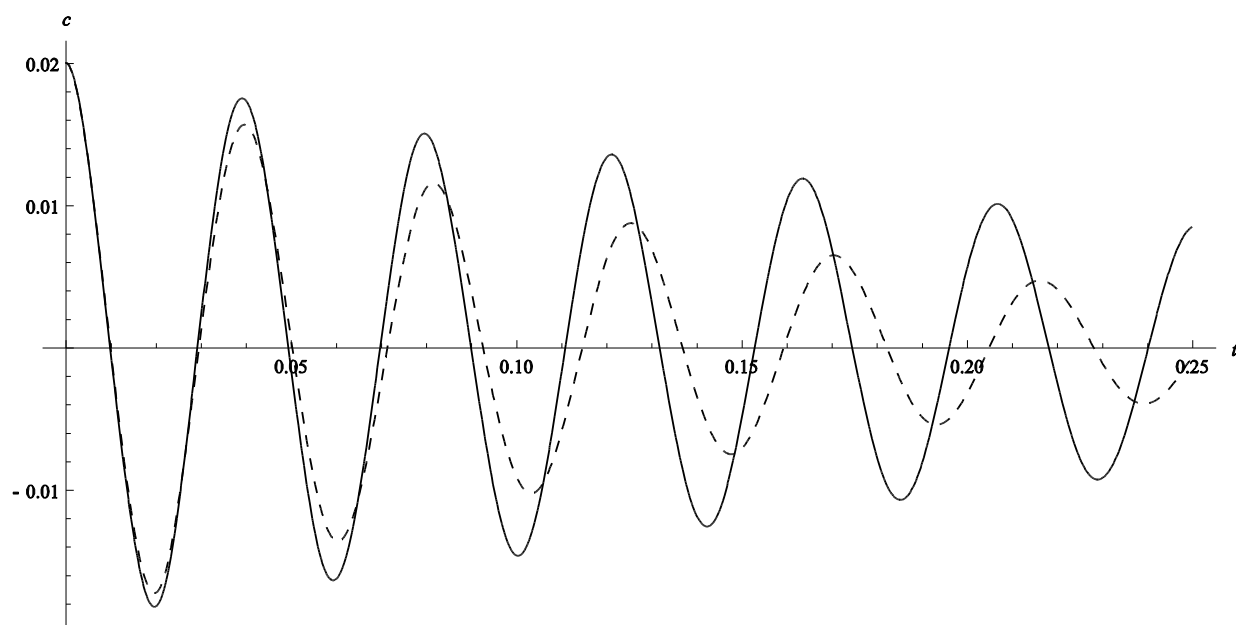
Тепер перейдемо до порівняння поведінки систем з однобічною та двобічною в'язкістю.

Із рисунків 3.9, 3.10, 3.11 видно, що в системі з однобічною в'язкістю демпфування відбувається не так інтенсивно як у системі із двобічною в'язкістю, але декременти затухання власних форм коливань відрізняються менше ніж у два рази (як можна було б очікувати). При порівнянні частот власних форм коливань можна зробити висновок, що у системі з однобічною

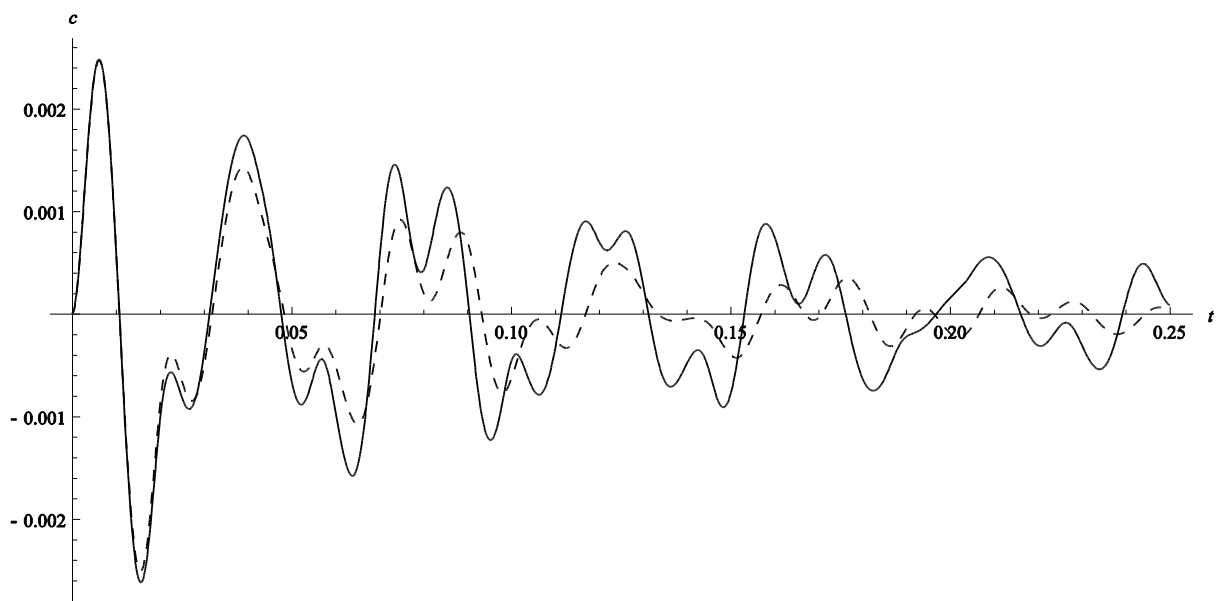
в'язкістю власні частоти вищі за частоти з двобічною в'язкістю, що є достатньо очікуваним.



а

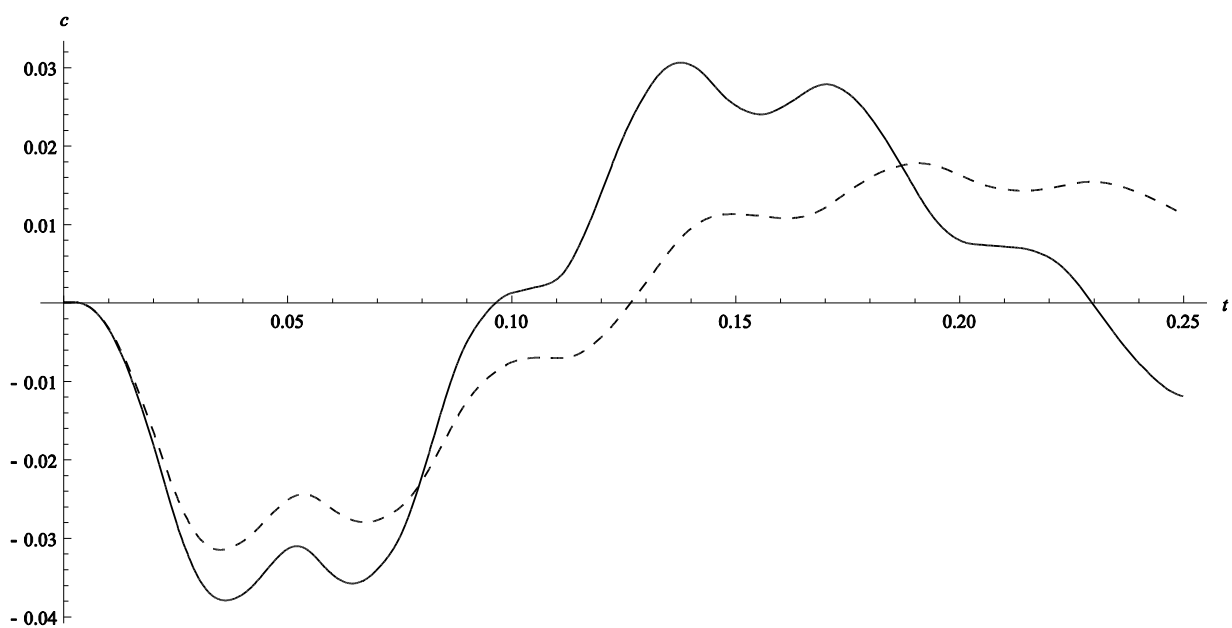


б

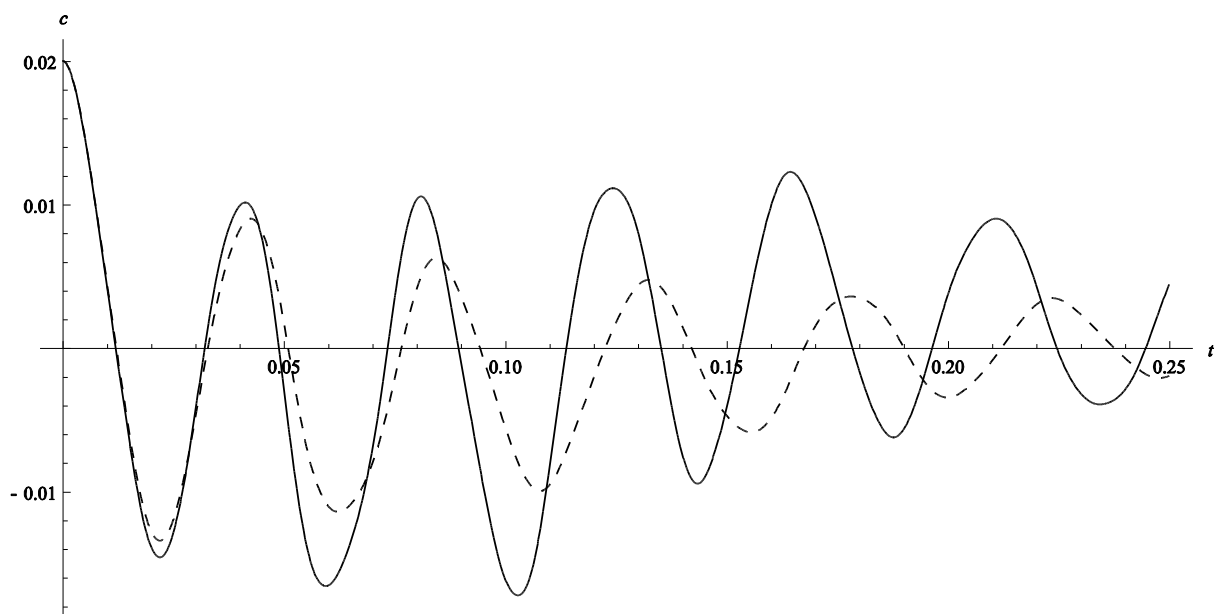


в

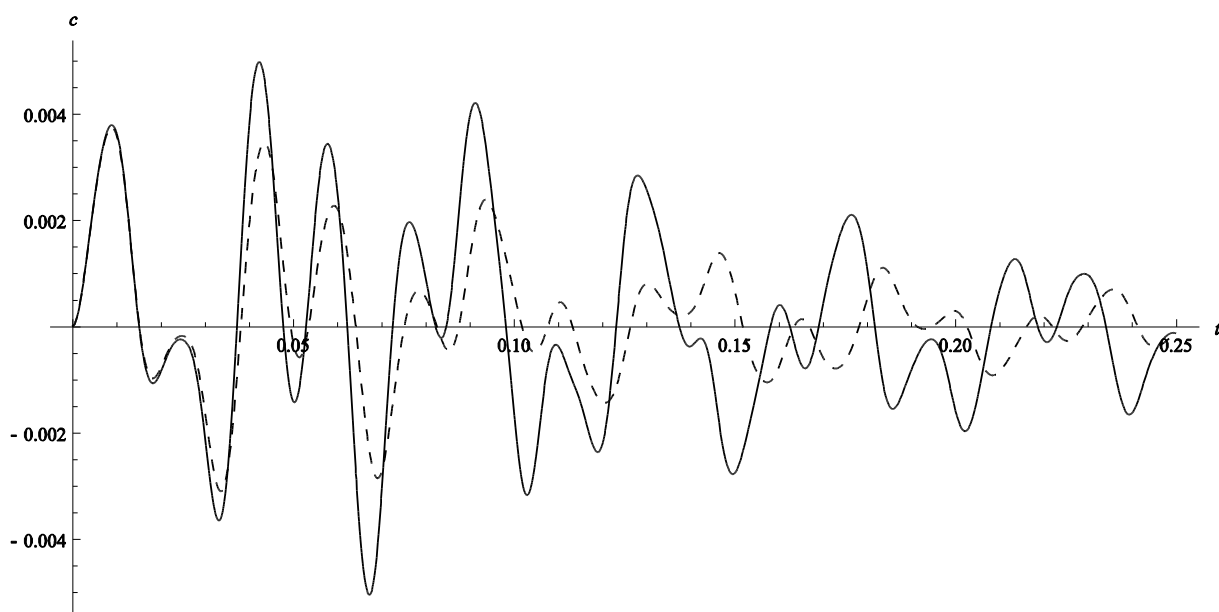
Рис. 3.9. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а- перша форма, б- друга, в- третя) при $V=0$, суцільна лінія відповідає системі з однібічною в'язкістю, штрихована – система з двобічною в'язкістю.



а

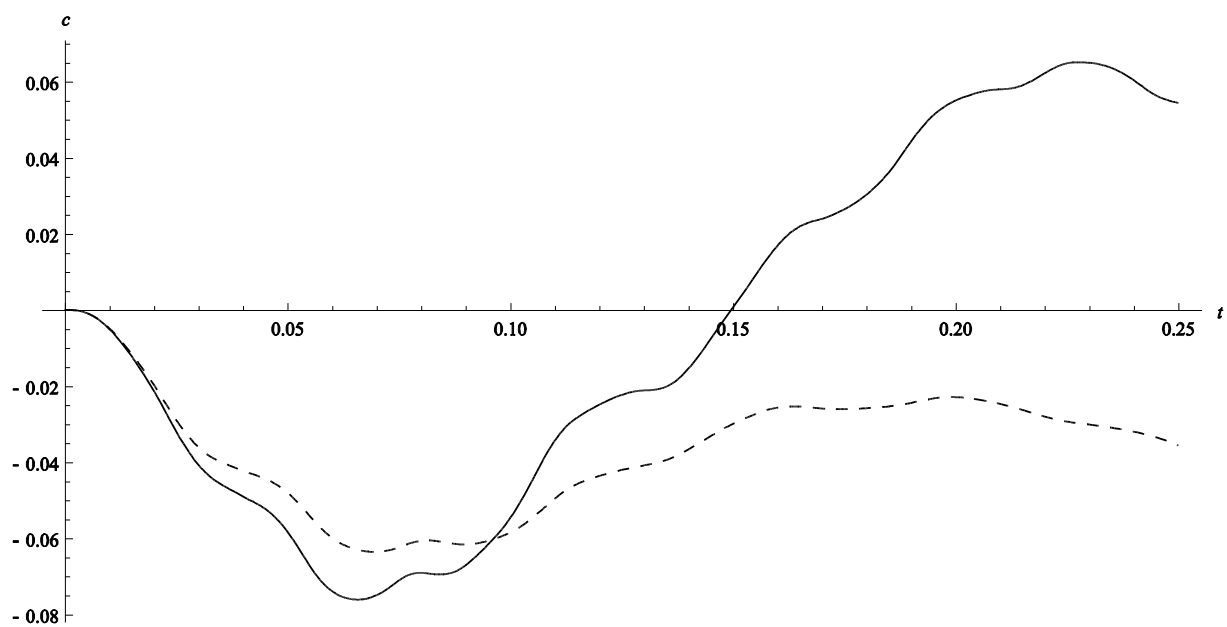


б

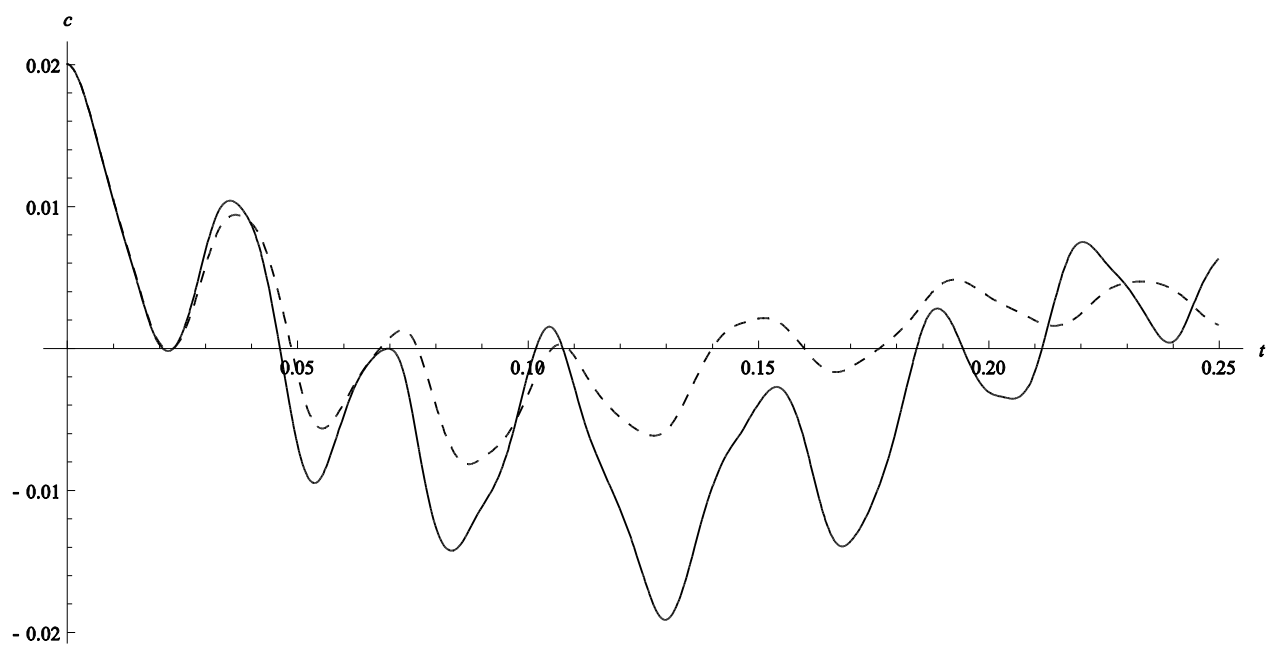


в

Рис. 3.10. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а-перша форма, б- друга, в-третя) при $V=0.9V_{kp}$, суцільна лінія відповідає системі з одnobічною в'язкістю, штрихована – система з двобічною в'язкістю.



a



б

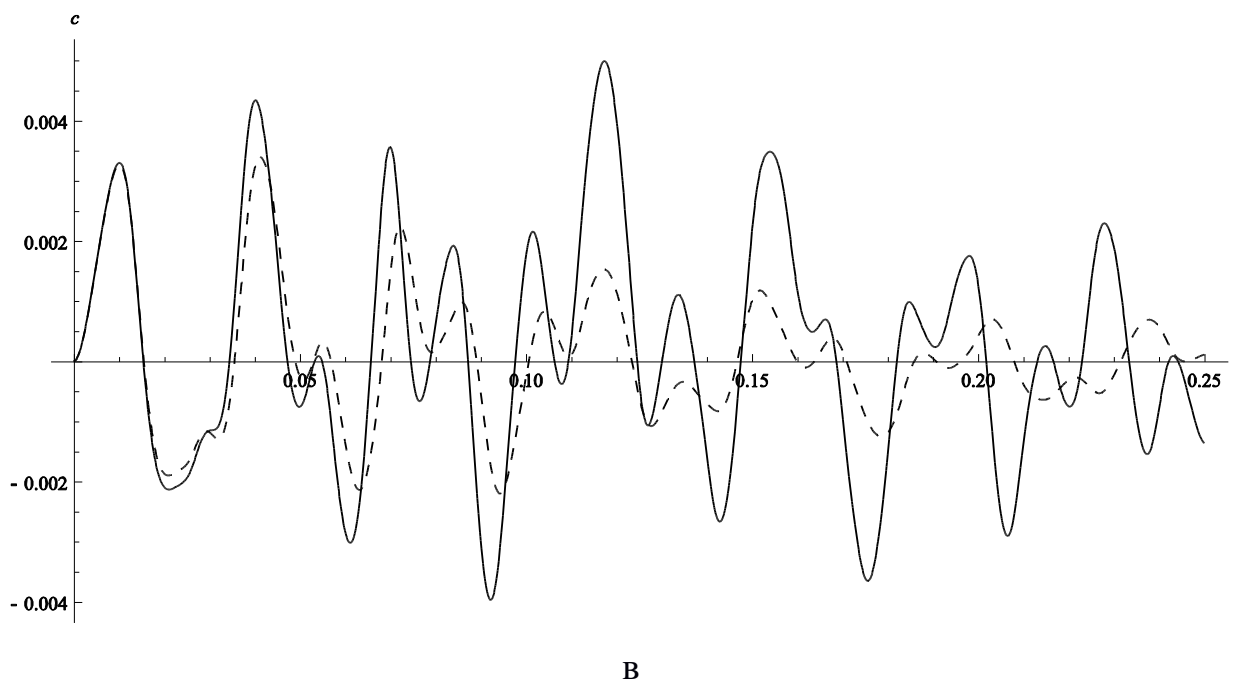


Рис. 3.11. Амплітудні параметри перших трьох власних форм коливань (а-перша форма, б- друга, в-третя) при $V=1.5V_{kp}$, суцільна лінія відповідає системі з однобічною в'язкістю, штрихована – система з двобічною в'язкістю.

3.4. Короткі висновки

Побудована математична модель нелінійної динамічної системи трубопровід-рідина продемонструвала здатність моделювати різноманітні ситуації, та отримувати високоякісні результати. Проаналізовані тестові приклади показали збіжність із результатами досліджень інших авторів, а візуалізація відтворюваних ефектів продемонструвала правдоподібність результатів, отриманих на побудованій моделі.

Також у якості тесту, було проведено дослідження впливу на систему трубопровід-рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості. Ідея такого демпферу полягала у тому, що за рахунок нелінійності буде відбуватися інтенсивний перерозподіл енергії коливань між власними формами, тобто буде відбуватися відкачка енергії із нижчих форм, коливання яких мають найбільшу амплітуду і представляють найбільшу небезпеку, до вищих форм де можуть бути швидко задемпфовані. Але в процесі аналізу таких демпферів було виявлено їх низьку

ефективність. Це пов'язано із тим фактом, що динамічна система трубопровід-рідина і так є суттєво нелінійною і додаткова не лінійність не привносить значного вкладу у перерозподіл енергії між власними формами коливань. Також, як буде показано у четвертому розділі, основним механізмом перерозподілу енергії коливань між власними формами є сила Кориолісу.

РОЗДІЛ IV. АНАЛІЗ БІФУРКАЦІЙНА ДИНАМІКА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ ТРУБОПРОВІД-РІДИНА ПРИ РІЗНИХ ШВИДКОСТЯХ ТЕЧІЇ РІДИНИ З ТОЧКИ ЗОРУ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

В даному розділі проводиться дослідження процесу втрати стійкості положення рівноваги, відповідного до прямолінійної форми трубопроводу в динамічній системі трубопровід-рідина. Аналізуються біфуркації, які відбуваються у системі при зміні швидкості течії рідини, проводиться класифікація прямолінійного положення рівноваги трубопроводу з точки зору теорії стійкості при до критичних та за критичних швидкостях течії рідини. Відомий результат для першої критичної швидкості течії рідини був отриманий В. І. Феодос'євим [(27)] на одномодовій моделі системи трубопровід-рідина, де критерієм втрати стійкості являлось виродження в нуль частоти коливань першої форми, тобто ситуація коли наступала зрівноваженість центробіжних сил та сил пружності трубопроводу. На відміну від роботи Феодос'єва, у даній роботі досліджується одномодова, двомодова та чотиримодова модель динамічної системи трубопровід-рідина. Стійкість прямолінійного положення рівноваги трубопроводу на різних швидкісних режимах аналізується по першій методі Ляпунова, тобто за рахунок аналізу власних значень, відповідних до власних форм коливань. Також проводиться аналіз впливу сили Коріоліса та нелінійних силових факторів на динамічну поведінку системи трубопровід-рідина.

4.1. Біфуркаційна динаміка системи трубопровід-рідина

В. І. Феодос'євим було досліджено втрату стійкості по першій формі коливань в одномодовій системі трубопровід-рідина. Якщо ж брати до розгляду двохмодову модель, то перша власна частота коливань одномодової моделі стає першою парціальною частотою. Для уточнення значення першої критичної швидкості течії рідини та дослідження поведінки системи трубопровід-рідина при за критичних швидкостях течії рідини було

розглянуто три системи – одномодова, вдомодова без урахування сил Кориоліса та двомодова із урахуванням сил Кориоліса.

Для визначення втрати стійкості системи по першій формі коливань проводився аналіз власного значення першої форми коливань лінійної частини рівнянь руху (2.25).

Залежність першого парціального власного значення одномодової моделі від безрозмірної швидкості $V^{\sim} = V/V_{kp}$ показано на рис. 4.1.

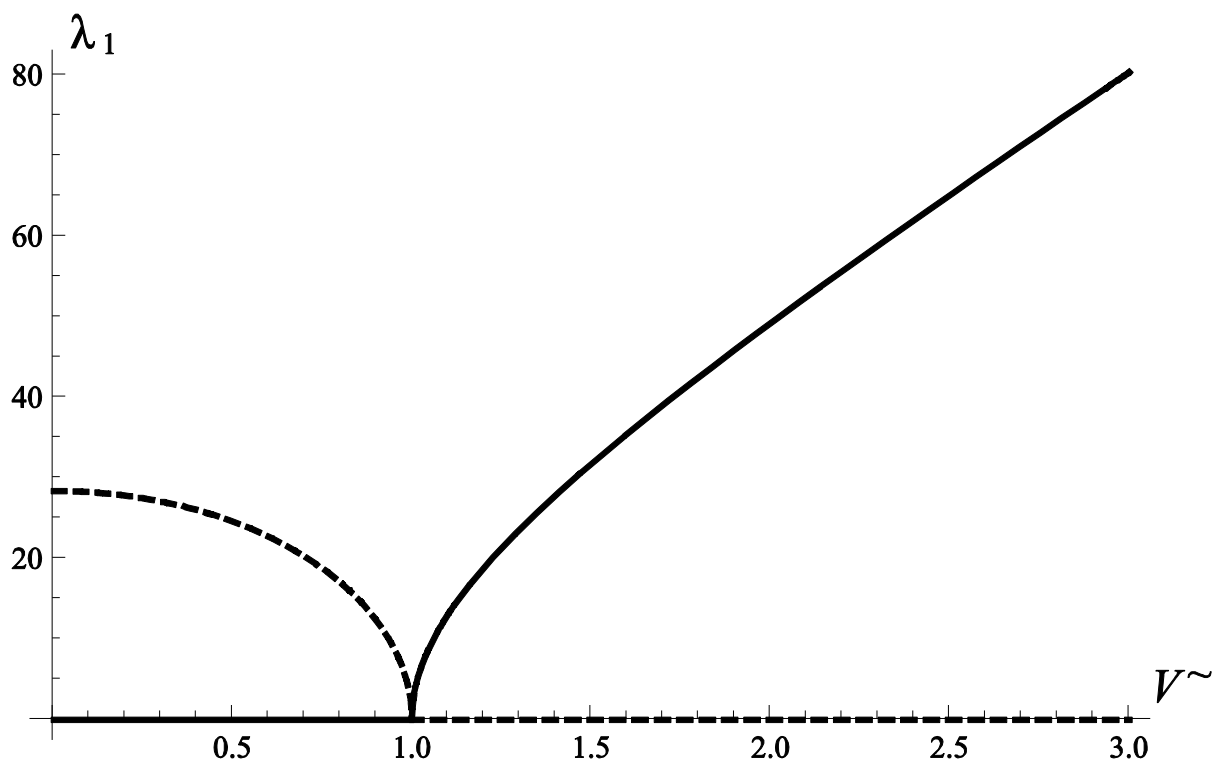


Рис. 4.1. Залежність першого парціального власного значення одномодової системи від безрозмірної швидкості течії рідини $V^{\sim} = V/V_{kp}$. Суцільна лінія відповідає дійсній частині власного значення, штрихована – уявна частина власного значення.

Із рис. 4.1 видно, що до досягнення першої критичної швидкості перше парціальне власне значення має лише уявну частину (штрихована лінія), тобто відбуваються незгасаючі коливання, після перевищення швидкістю першого критичного значення власне значення має лише дійсну частину, тобто відбувається аперіодичний рух по першій формі коливань, що відповідає втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу.

Якщо розглядати двоходову систему зневажаючи нелінійними членами та силами Кориоліса, два перших рівняння системи можна представити у наступній формі:

$$A \cdot \begin{bmatrix} c_1'' \\ c_2'' \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Власні значення системи будуть власними значеннями матриці $A^{-1} \cdot B$.

На рис. 4.2 показана залежність першого власного значення двоходової моделі без урахування сил Кориоліса від безрозмірної швидкості $V \sim = V/V_{kp}$.

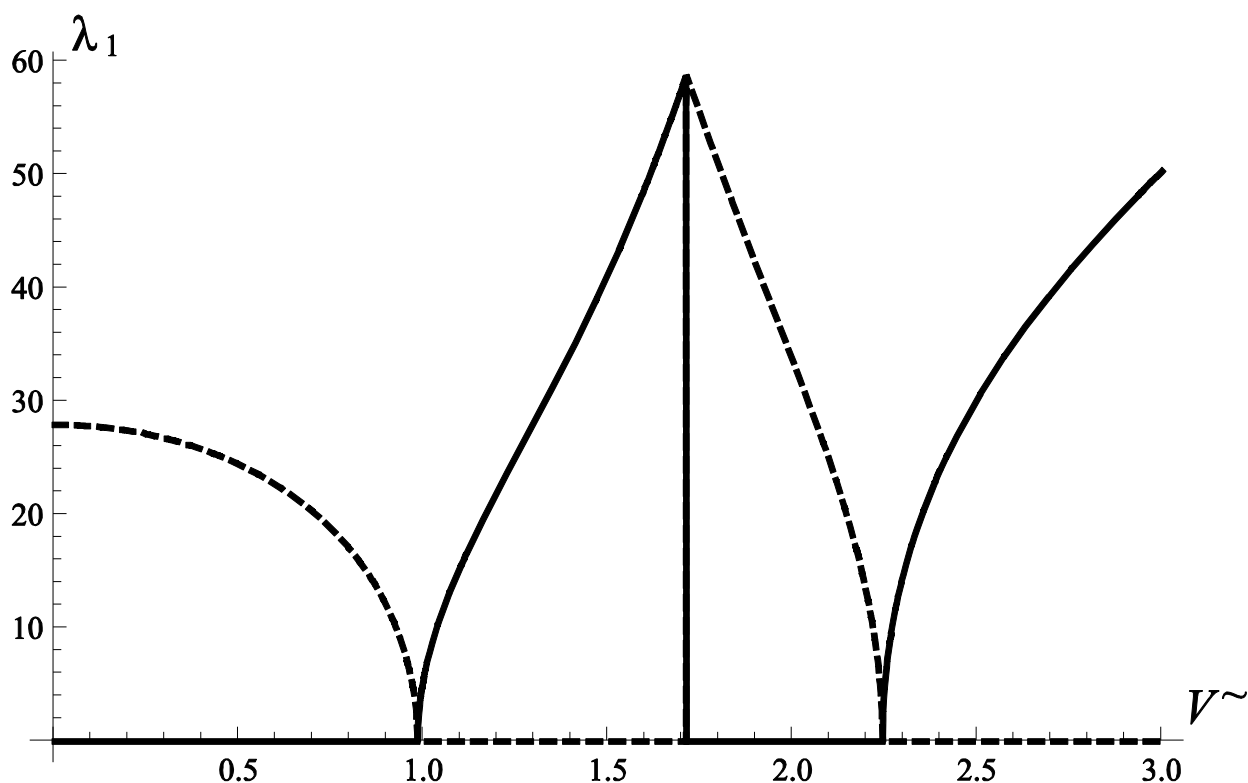


Рис. 4.2. Залежність першого власного значення двоходової системи без урахування сил Кориоліса від безрозмірної швидкості течії рідини $V \sim = V/V_{kp}$. Суцільна лінія відповідає дійсній частині власного значення, штрихована – уявна частина власного значення.

На рис. 4.2 видно, в двоходовій системі точка біфуркації по швидкості настає незначно раніше ніж у одноходовій системі (де власне значення являється парційним), при $V = 0.9934 \cdot V_{kp}^1$. Також присутні ще дві точки біфуркації при швидкості $V = 1.7 \cdot V_{kp}^1$, після котрої процес знову носить

коливальний характер, а також $V = 2.23 \cdot V_{кр}^1$, що відповідає втраті стійкості системи по другій формі коливань (друга критична швидкість).

Якщо розглядати двомодову систему трубопровід-рідина, зневажаючи нелінійними частинами рівнянь, але беручи до уваги дію сил Кориоліса, то з двох перших рівнянь шляхом пониження їх порядку отримаємо наступну систему:

$$A \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Власні значення матриці $A^{-1} \cdot B$ будуть власними значеннями двомодової системи трубопровід-рідина із урахуванням сил Кориоліса.

На рис. 4.3 показана залежність першого власного значення двомодової моделі із урахування сил Кориоліса від безрозмірної швидкості $V \sim = V/V_{кр}$.

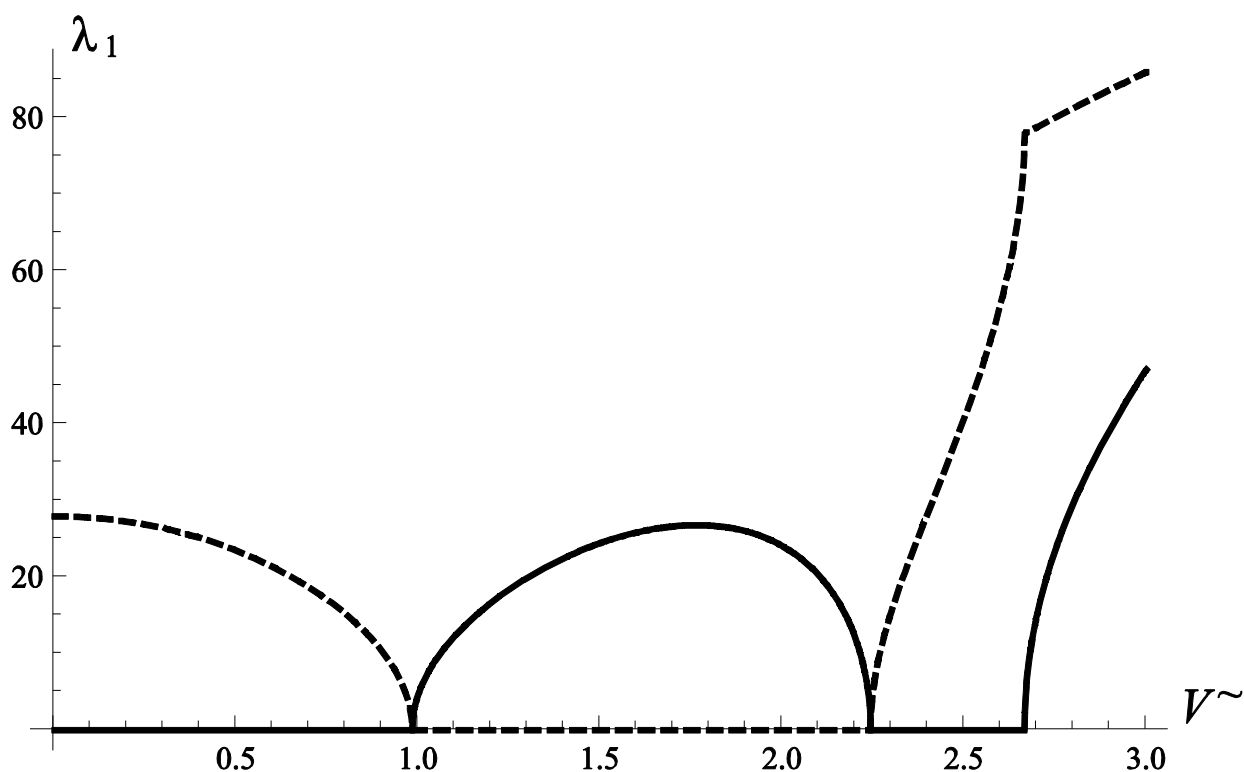
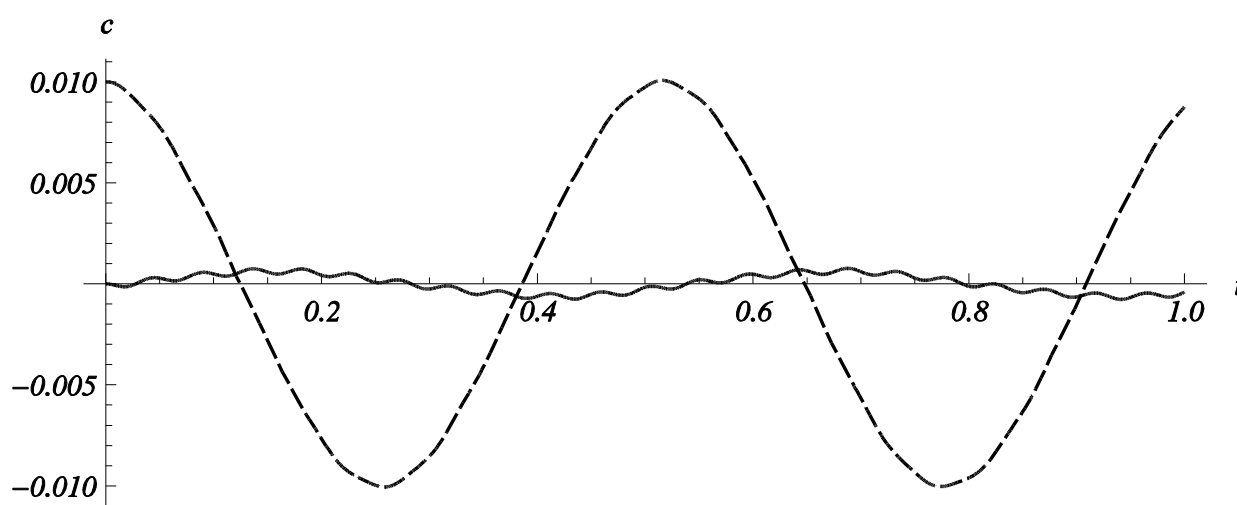


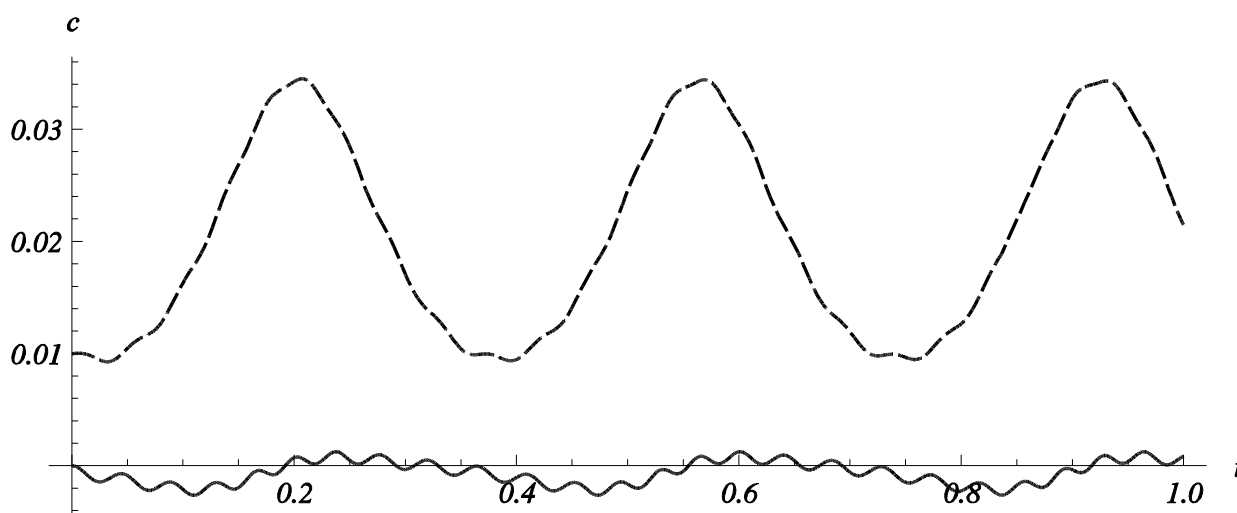
Рис. 4.3. Залежність першого власного значення двомодової системи із урахування сил Кориоліса від безрозмірної швидкості течії рідини $V \sim = V/V_{кр}$. Суцільна лінія відповідає дійсній частині власного значення, штрихована – уявна частина власного значення.

Із рис. 4.3 видно, що присутність сил Кориоліса призводить до того, що дві останні біфуркації відбуваються значно пізніше ніж у системі де вплив сил Кориоліса не враховано. До того ж видно, що навіть після проходження другої критичної швидкості $V = 2.66 \cdot V_{кр}^1$ уявна частина першого власного значення не дорівнює нулю, тобто процес носить коливальний характер.

Нижче наведені графіки амплітудних параметрів двох перших форм коливань для двомодової системи із урахуванням сил Кориоліса [(104)] при швидкостях течії рідини $V = 0.9 \cdot V_{кр}^1$, $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$, $V = 2.56 \cdot V_{кр}^1$, $V = 2.7 \cdot V_{кр}^1$



а



б

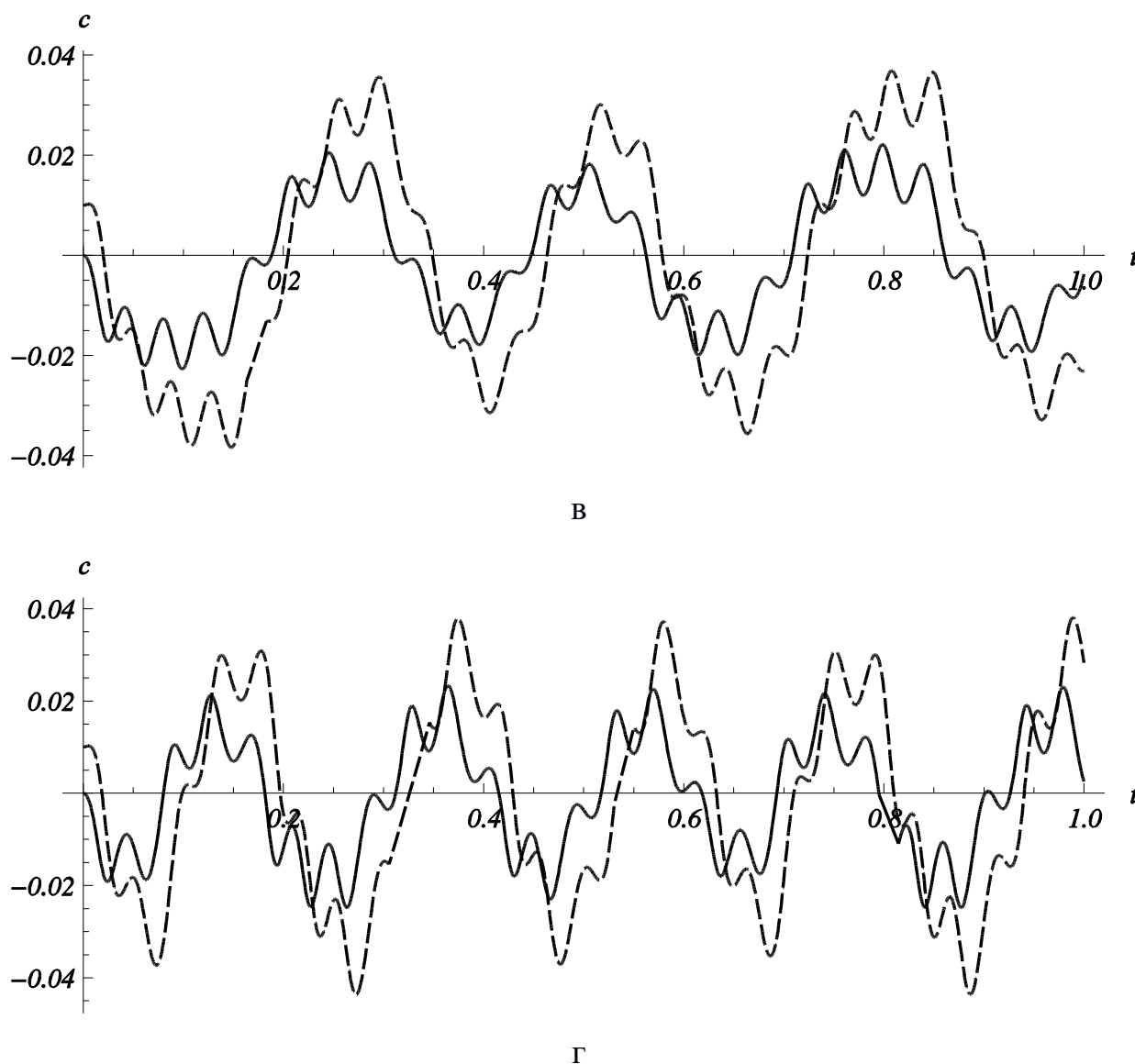


Рис.4.4 Амплітудні параметри перших двох форм коливань системи із урахуванням сил Кориоліса, $c_1(t)$ - штрихова лінія, $c_2(t)$ - суцільна лінія, а) $V = 0.9 \cdot V_{кр}^1$, б) $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$, в) $V = 2.56 \cdot V_{кр}^1$, г) $V = 2.7 \cdot V_{кр}^1$.

Після проходження першої точки біфуркації по швидкості початкове прямолінійне положення рівноваги трубопровода стає нестійким. Але динамічна система не проявляє характер аперіодичного руху в силу власної нелінійності. Динамічна система виходить на альтернативне стійке положення рівноваги і виконує коливання в його околі (рис. 4.4 б).

Так як втрата стійкості системи відбувається по першій формі коливань, то для знаходження форми трубопровода в положенні альтернативної рівноваги, аналізується лише перша форма коливань, тобто лише перше

рівняння системи. Таким чином форма трубопровода, яку він займає у положенні альтернативної рівноваги буде мати наступний вигляд

$$u(x) = A_1(x) \cdot C_{\text{eq}}(V) \quad (4.3)$$

де

$$A_1(x) = U(k_1 \cdot x) - \frac{S(k_1 \cdot l)}{T(k_1 \cdot l)} \cdot V(k_1 \cdot x) \quad (4.4)$$

перша власна форма трубопровода як консольної балки, складена із функцій Крилова.

$C_{\text{eq}}(V)$ амплітуда першої форми коливань трубопровода в положенні альтернативної рівноваги, яка залежить від швидкості течії рідини.

Для знаходження $C_{\text{eq}}(V)$ в двомодовій системі, розглянемо перше рівняння в якому знехтуємо присутністю другої форми коливань та силою Кориоліса, тобто прирівнюємо до нуля $c_2(t), c_2'(t)$.

Отримане нелінійне рівняння буде мати наступний вигляд:

$$c''(t) + c_1(t) \cdot \left(-\frac{7\rho V^2}{2} \cdot \beta^{2_{1,1}} + EJ \cdot \beta^{3_{1,1}} + PF \cdot \beta^{2_{1,1}} \right) + \quad (4.5)$$

$$c_1(t)^3 \cdot \left(EJ \cdot d^{6_{1,1,1,1}} + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot d^{4_{1,1,1,1}} + \frac{13}{4} \cdot \rho V^2 d^{4_{1,1,1,1}} \right) = 0$$

Положення альтернативної рівноваги виникає коли $c''(t) \equiv 0$, тобто коли

$$c_1(t) \cdot \left(-\frac{7\rho V^2}{2} \cdot \beta^{2_{1,1}} + EJ \cdot \beta^{3_{1,1}} + PF \cdot \beta^{2_{1,1}} \right) +$$

$$c_1(t)^3 \cdot \left(EJ \cdot d^{6_{1,1,1,1}} + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot d^{4_{1,1,1,1}} + \frac{13}{4} \cdot \rho V^2 d^{4_{1,1,1,1}} \right) = 0 \quad (4.6)$$

Корні цього кубічного рівняння відносно c_1 задають значення $C_{\text{eq}}(V)$ яке залежить лише від швидкості течії рідини.

Нижче приведені графіки трьох коренів відповідних до $C_{\text{eq}}(V)$ в залежності від безрозмірної швидкості $\tilde{V} = V/V_{kp}$.

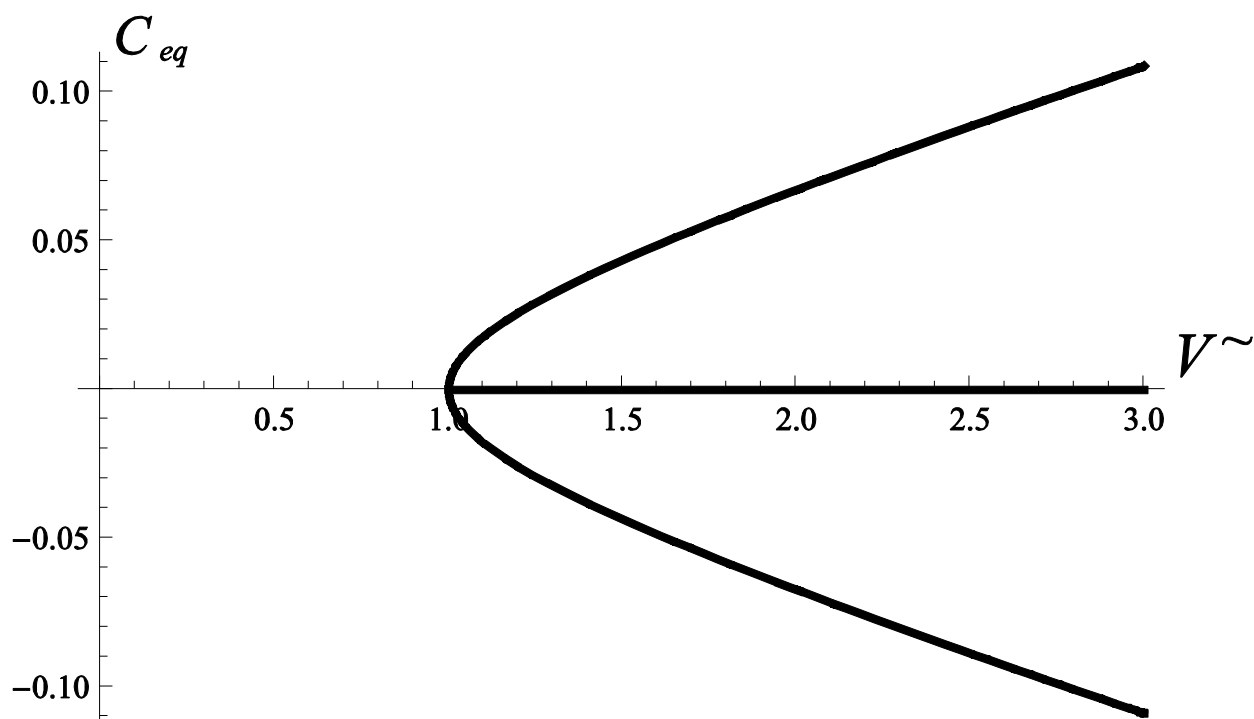


Рис. 4.5. Значення трьох амплітуд, відповідних до положень альтернативної рівноваги в залежності від безрозмірної швидкості.

На рис. 4.5 показані амплітуди для верхнього та нижнього стійких положень рівноваги, а також рівна нулю амплітуда, відповідна початковому прямолінійному положенню рівноваги, котре на за критичних швидкостях течії рідини стає нестійким.

Для чіткого уявлення наведемо ряд форм трубопроводу в альтернативних положеннях рівноваги при різних швидкостях течії рідини.

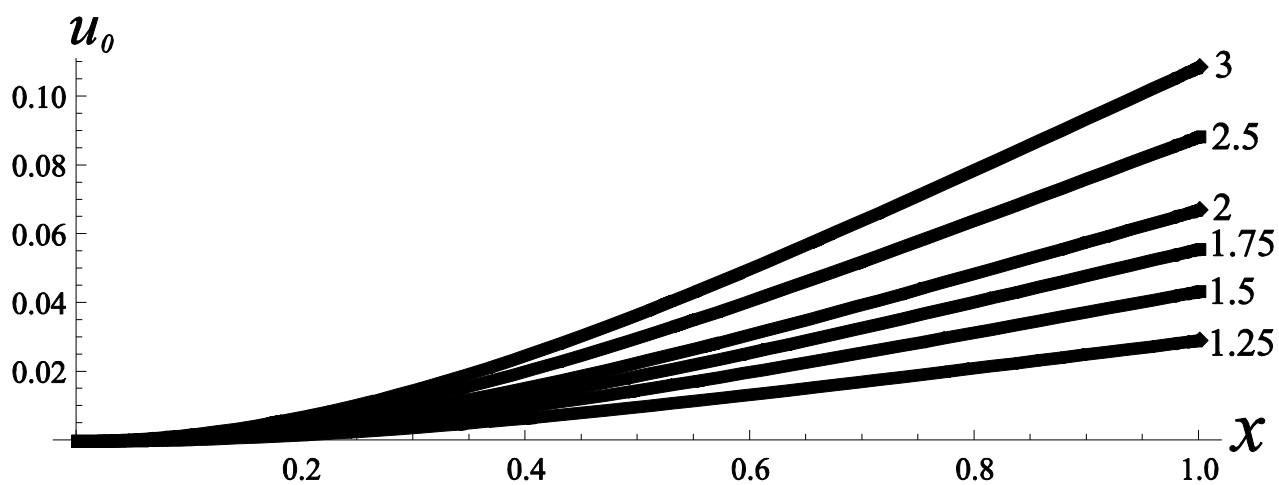


Рис. 4.6. Форми трубопроводу в альтернативних положеннях рівноваги при швидкостях течії рідини $V = 1.25 \cdot V_{кр}^1$, $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$, $V = 1.75 \cdot V_{кр}^1$, $V = 2 \cdot V_{кр}^1$, $V = 2.5 \cdot V_{кр}^1$, $V = 3 \cdot V_{кр}^1$.

4.2. Класифікація точок рівноваги, відповідних до прямолінійного положення трубопроводу на різних швидкостях течії рідини за теорією стійкості

Розглядаємо лінійну частину чотиримодової моделі системи трубопровід-рідина, яка враховує дію сил Кориоліса.

Будемо проводити класифікацію режимів коливань трубопроводу шляхом аналізу стійкості рівноваги прямолінійної форми трубопроводу, тобто стійкості нульового рішення системи за Ляпуновим.

Для цього шляхом пониження порядку диференціальних рівнянь, система перших чотирьох рівнянь динаміки системи трубопровід-рідина (2.25) зводиться до матричного вигляду, далі проводиться аналіз власних значень цієї системи на різних швидкісних режимах течії рідини.

Нижче наведені графіки залежності двох перших власних значень λ_1 та λ_2 в чотиримодовій системі трубопровід-рідина в залежності від безрозмірної швидкості течії рідини $V^{\sim} = V/V_{кр}^1$.

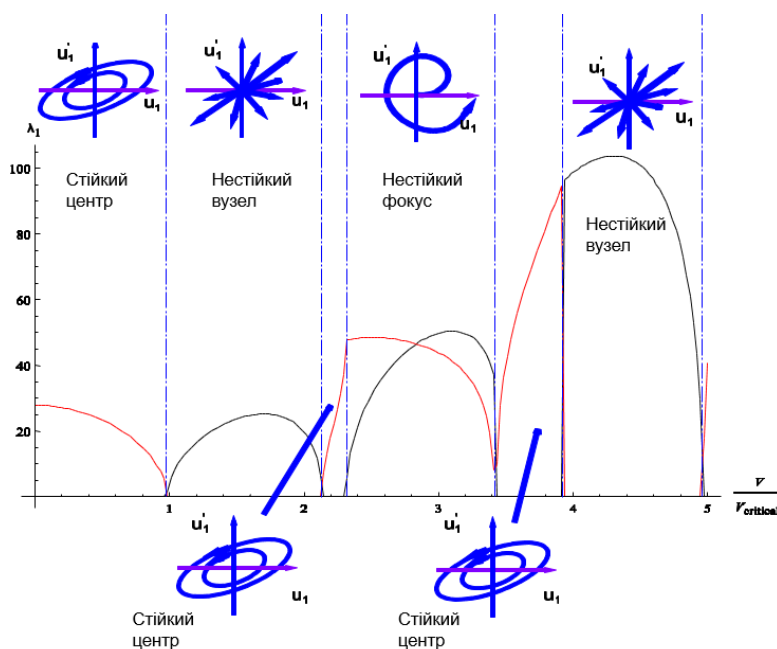


Рис. 4.7. Залежність дійсної та уявної частин першого власного числа чотиримодової системи трубопровід-рідина із урахуванням дії сили Кориоліса від безрозмірної швидкості.

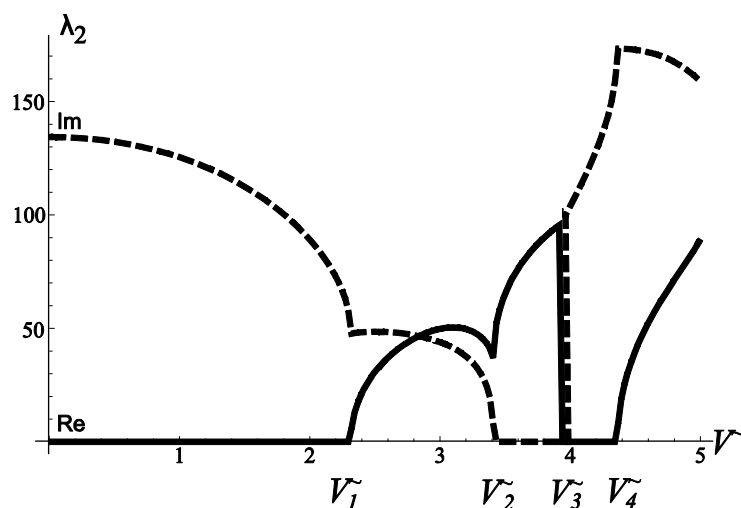


Рис. 4.8. Залежність дійсної та уявної частин другого власного числа чотиримодової системи трубопровід-рідина із урахуванням дії сили Кориоліса від безрозмірної швидкості.

На рис. 4.7, 4.8 характерними точками відмічено біфуркації, які відбуваються в системі трубопровід-рідина при зміні швидкості течії рідини. Точки біфуркацій розділяють різні режими коливань трубопроводу, які характеризуються стійкістю прямолінійного положення рівноваги трубопроводу з рідиною. Класифікація режимів проведена згідно загальної класифікації точок рівноваги динамічних систем за першим методом Ляпунова (аналіз власних значень) [(50), (105), (106)].

Режими коливань для першої форми (точка рівноваги відповідна прямолінійному положенню трубопроводу рис. 4.7):

- 0 - $V^{\sim 1}$ - стійкий центр;
- $V^{\sim 1}$ - $V^{\sim 2}$ - нестійкий вузол;
- $V^{\sim 2}$ - $V^{\sim 3}$ - стійкий центр;
- $V^{\sim 3}$ - $V^{\sim 4}$ - нестійкий фокус;
- $V^{\sim 4}$ - $V^{\sim 5}$ - стійкий центр;
- $V^{\sim 5}$ - $V^{\sim 6}$ - нестійкий вузол.

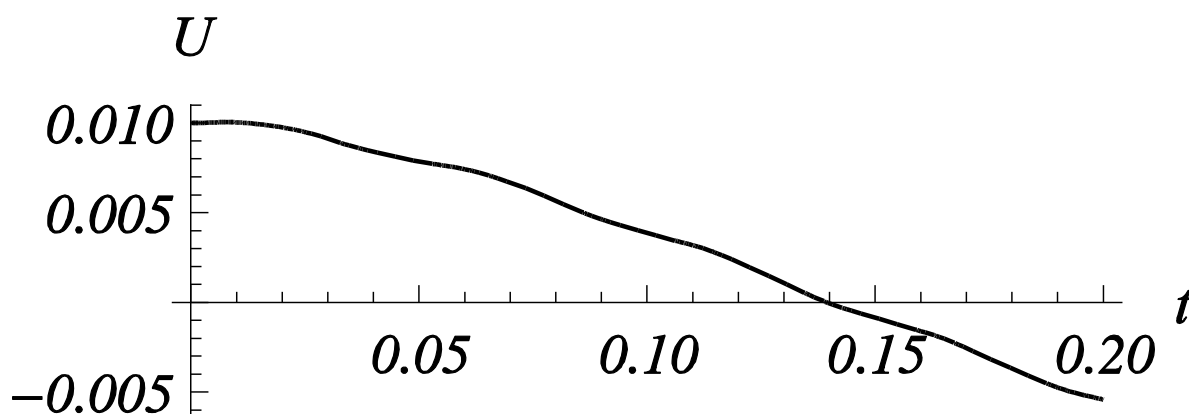
Режими коливань для другої форми (точка рівноваги відповідна прямолінійному положенню трубопроводу рис. 4.8):

- 0 - $V^{\sim 1}$ - стійкий центр;
- $V^{\sim 1}$ - $V^{\sim 2}$ - нестійкий фокус;
- $V^{\sim 2}$ - $V^{\sim 3}$ - нестійкий вузол;
- $V^{\sim 3}$ - $V^{\sim 4}$ - стійкий центр;
- $V^{\sim 4}$ - нестійкий фокус;

Слід відзначити, що безпосередньо відповідною для першої форми точкою біфуркації – є лише перша точка біфуркації при досягненні першої критичної швидкості течії рідини $V^{\sim} = V/V_{кр}^1 = 1$. Усі інші точки біфуркацій є фактично проєкціями біфуркацій, що відбуваються на вищих формах на першу форму коливань.

Завдяки присутності нелінійних механізмів в динамічній системі трубопровід-рідина у нестійких режимах коливань амплітуди власних форм коливань трубопроводу не зростають до нескінченості. Система просто переходить у сусідні атрактори альтернативних точок рівноваги, відповідних непрямолінійним положенням рівноваги трубопроводу. Питання стійкості альтернативних точок рівноваги та класифікація режимів коливань навколо альтернативних криволінійних положень рівноваги трубопроводу – є предметом окремого дослідження і в даній роботі не розглядається.

Нижче на рис. 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 преведені порівняльні графіки переміщення та кута повороту вільного кінця трубопроводу, перерізної сили та згинного моменту у точці консольного закріплення на докритичному режимі ($V^{\sim} = V/V_{кр}^1 = 0.9$) та закритичному режимі ($V^{\sim} = V/V_{кр}^1 = 1.1$).



а

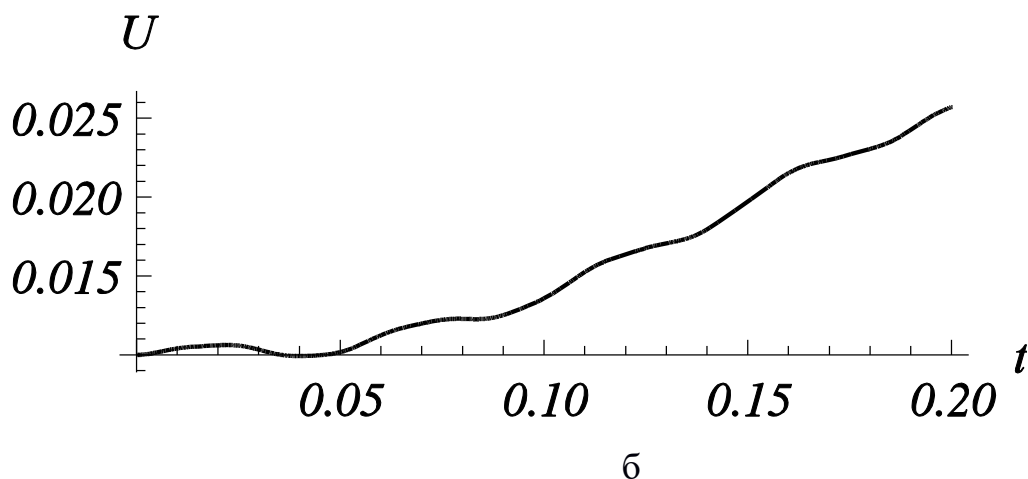


Рис. 4.9. Переміщення вільного кінця трубопроводу а – докритичний режим течії рідини, б – за критичний режим течії рідини.

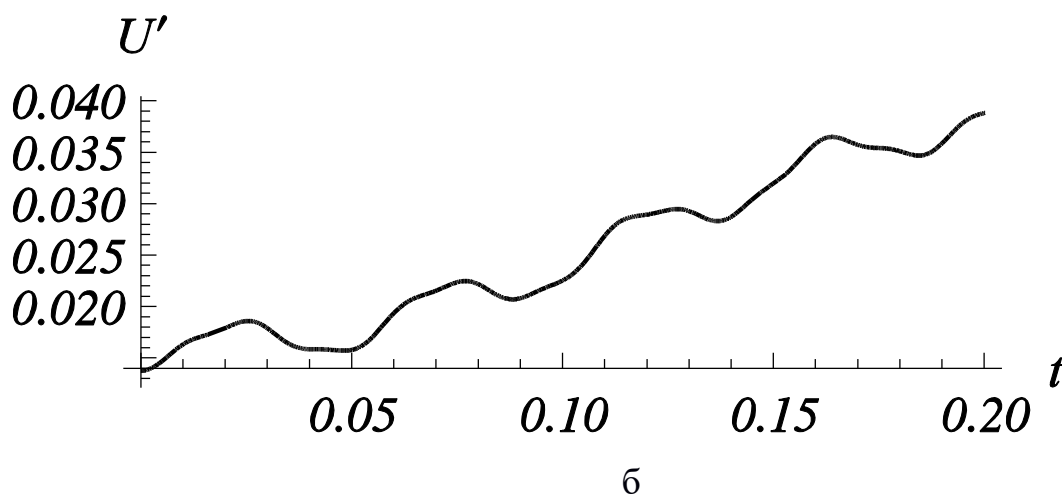
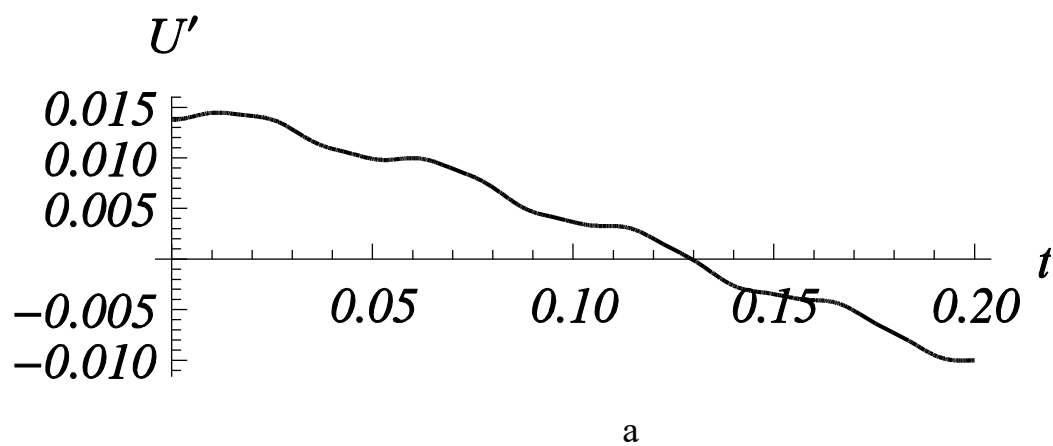
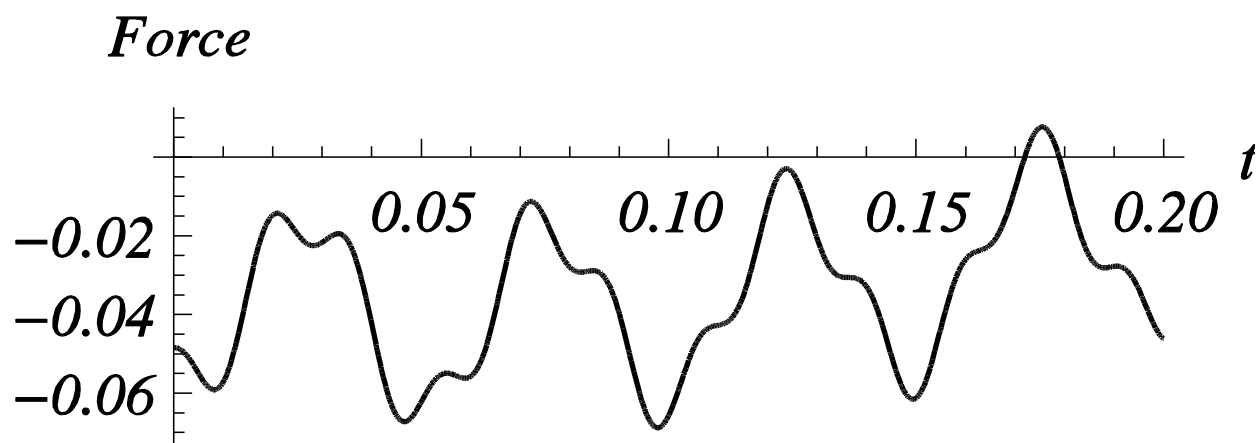
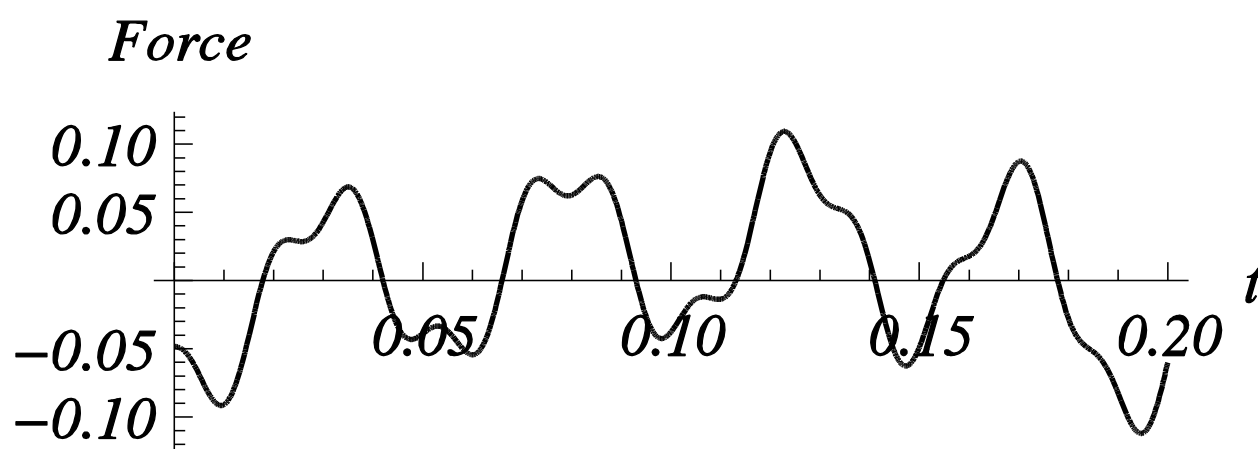


Рис. 4.10. Кут повороту вільного кінця трубопроводу а – докритичний режим течії рідини, б – за критичний режим течії рідини.

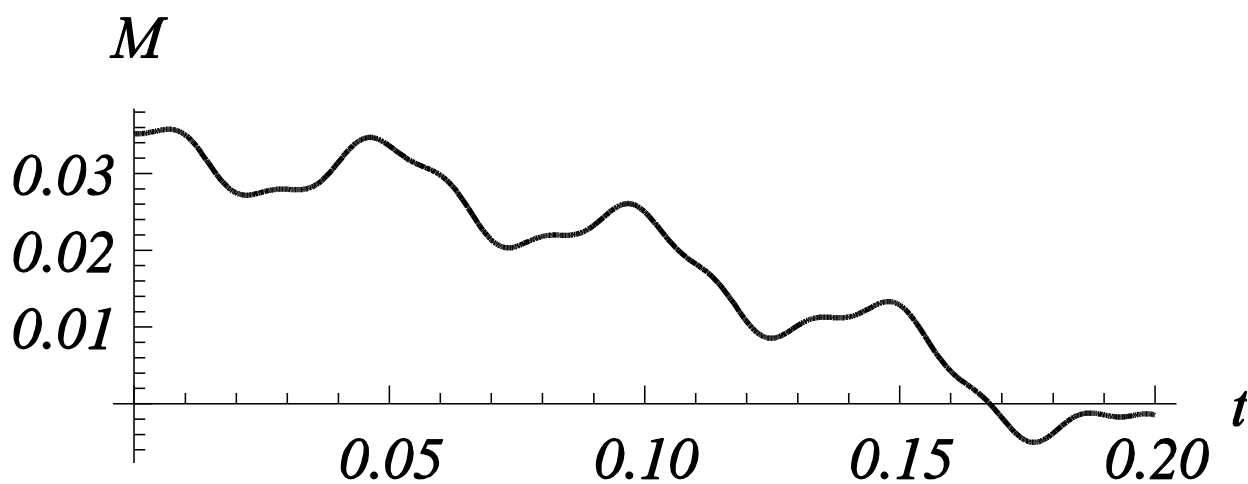


a



б

Рис. 4.11. Перерізна сила в точці консольного закріплення трубопроводу
а – докритичний режим течії рідини, б – за критичний режим течії рідини.



a

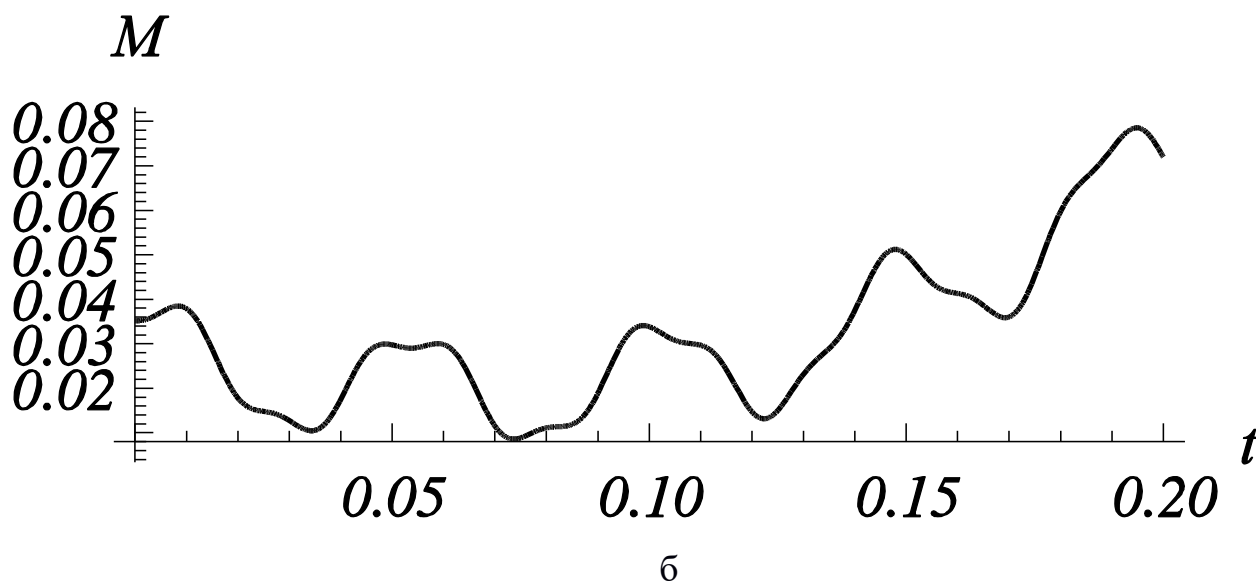
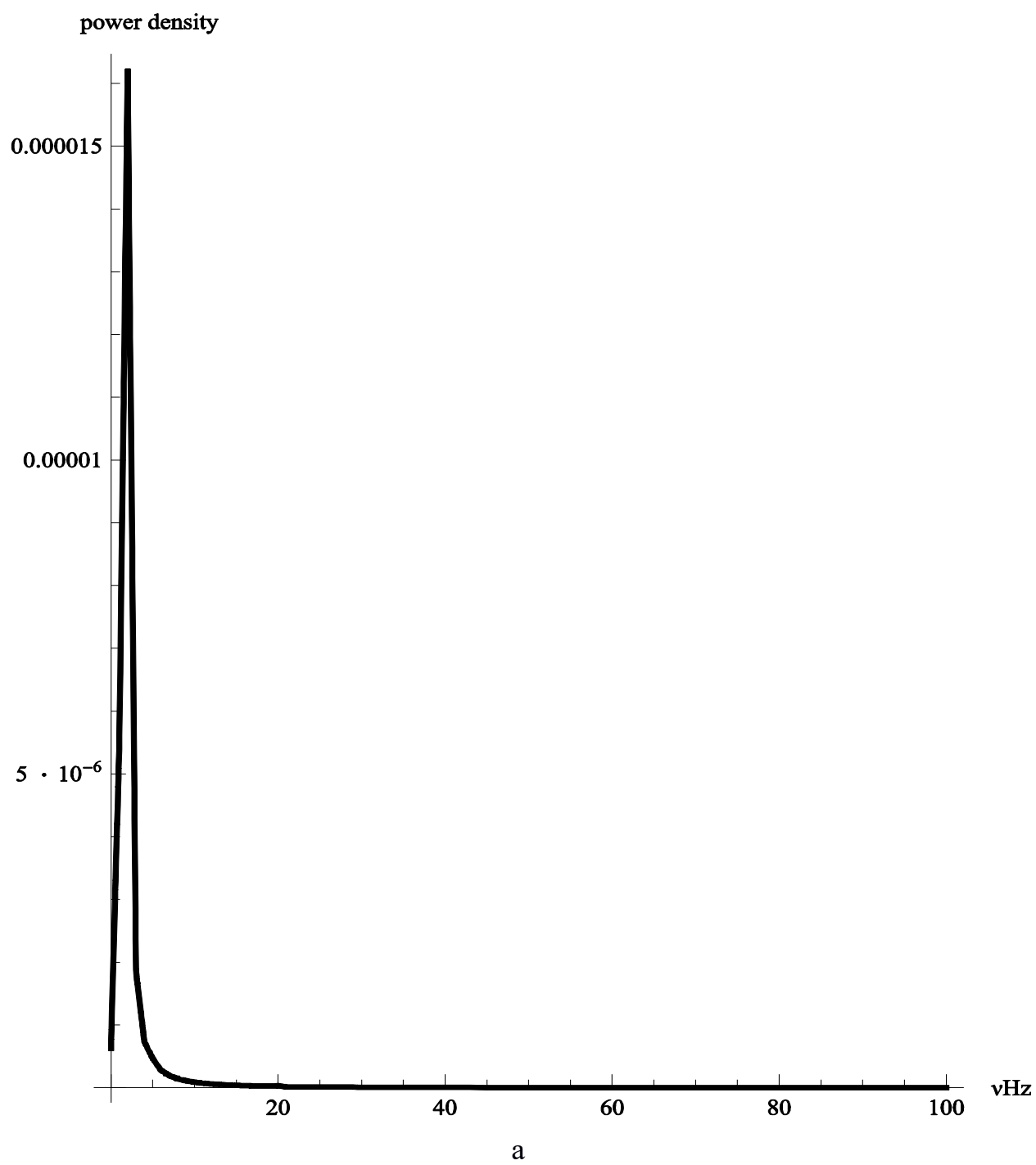
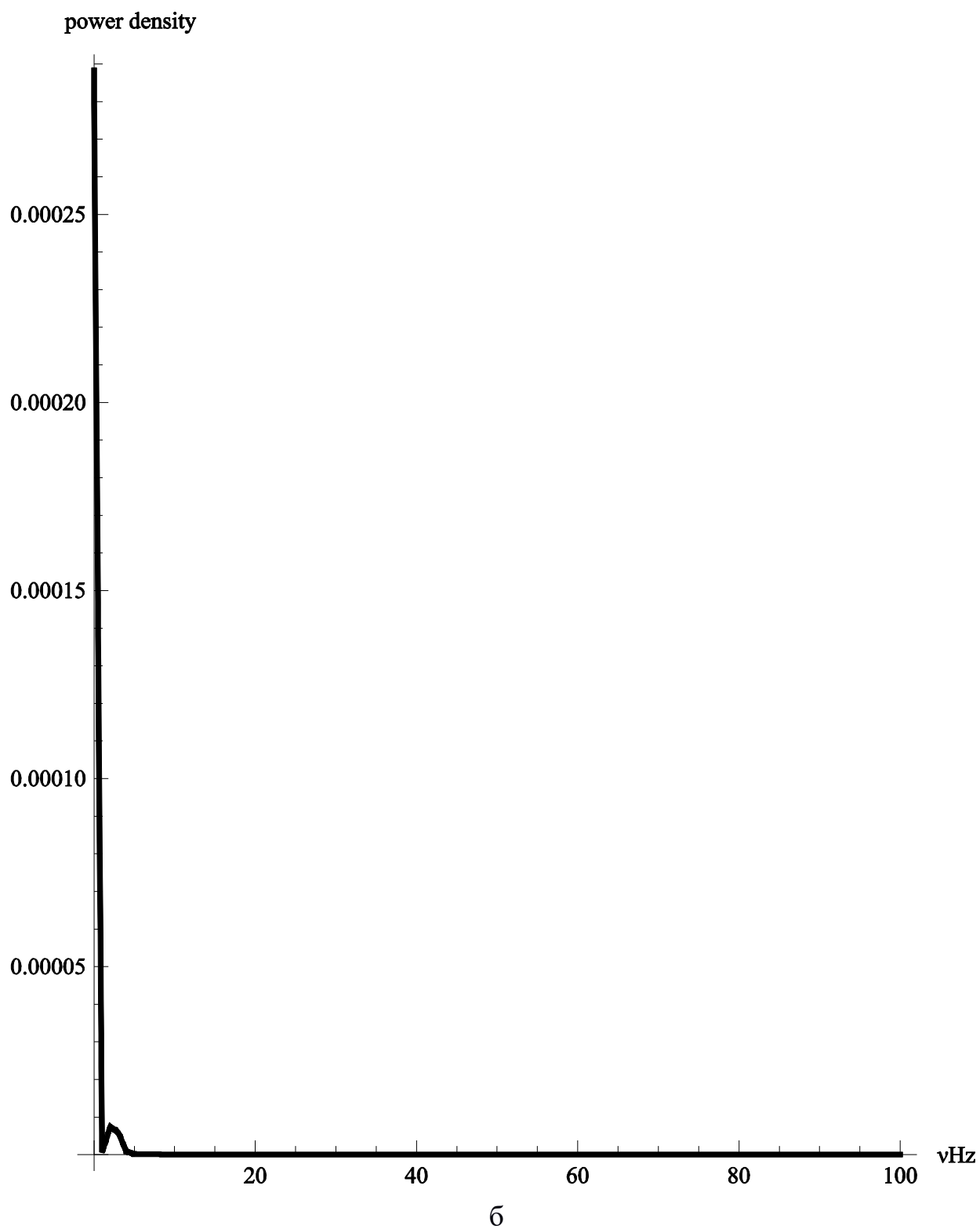


Рис. 4.12. Згинний момент у точці консольного закріплення трубопроводу а – докритичний режим течії рідини, б – за критичний режим течії рідини.

Цікавим може виявитись також аналіз спектру коливань вільного кінця трубопроводу, виконаний шляхом експрес перетворення Фур'є [(107)] функції переміщення вільного кінця $u_l(t) = u(l, t)$.

На рис. 4.12 представлені спектри коливань вільного кінця трубопроводу для різних швидкостей течії рідини.





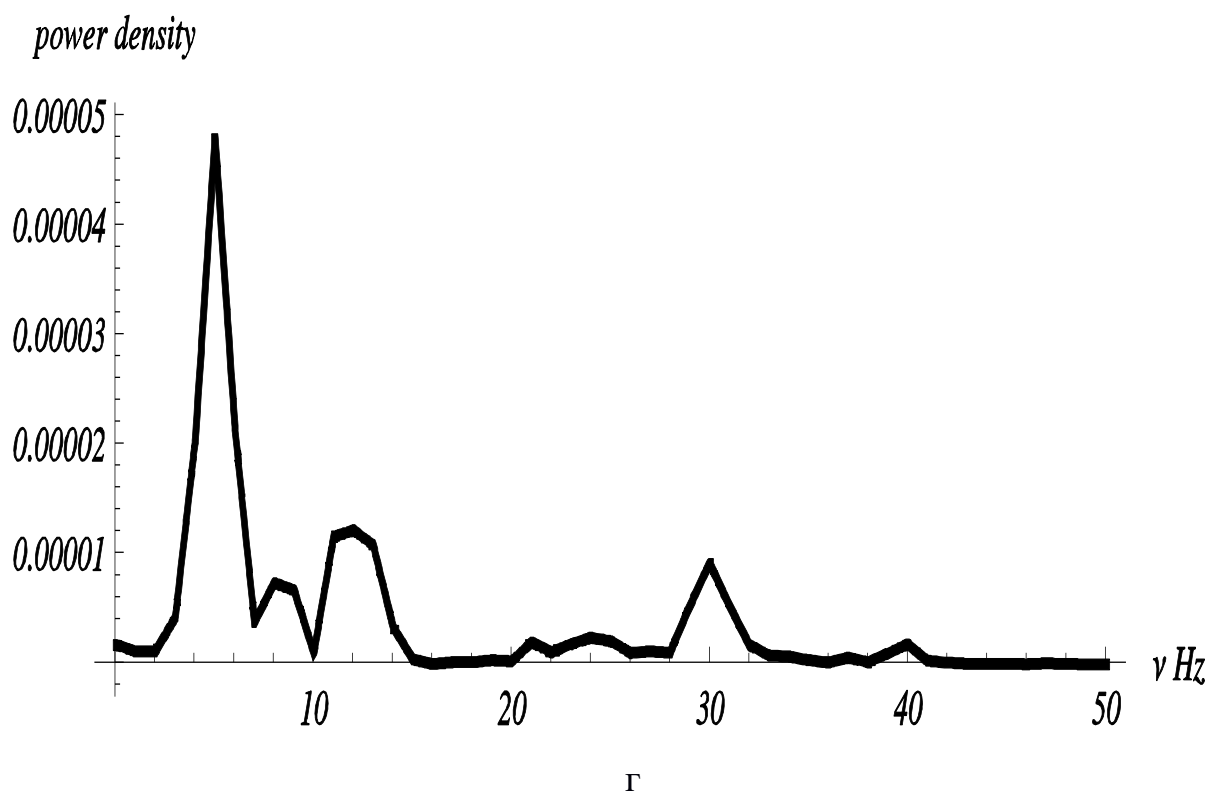
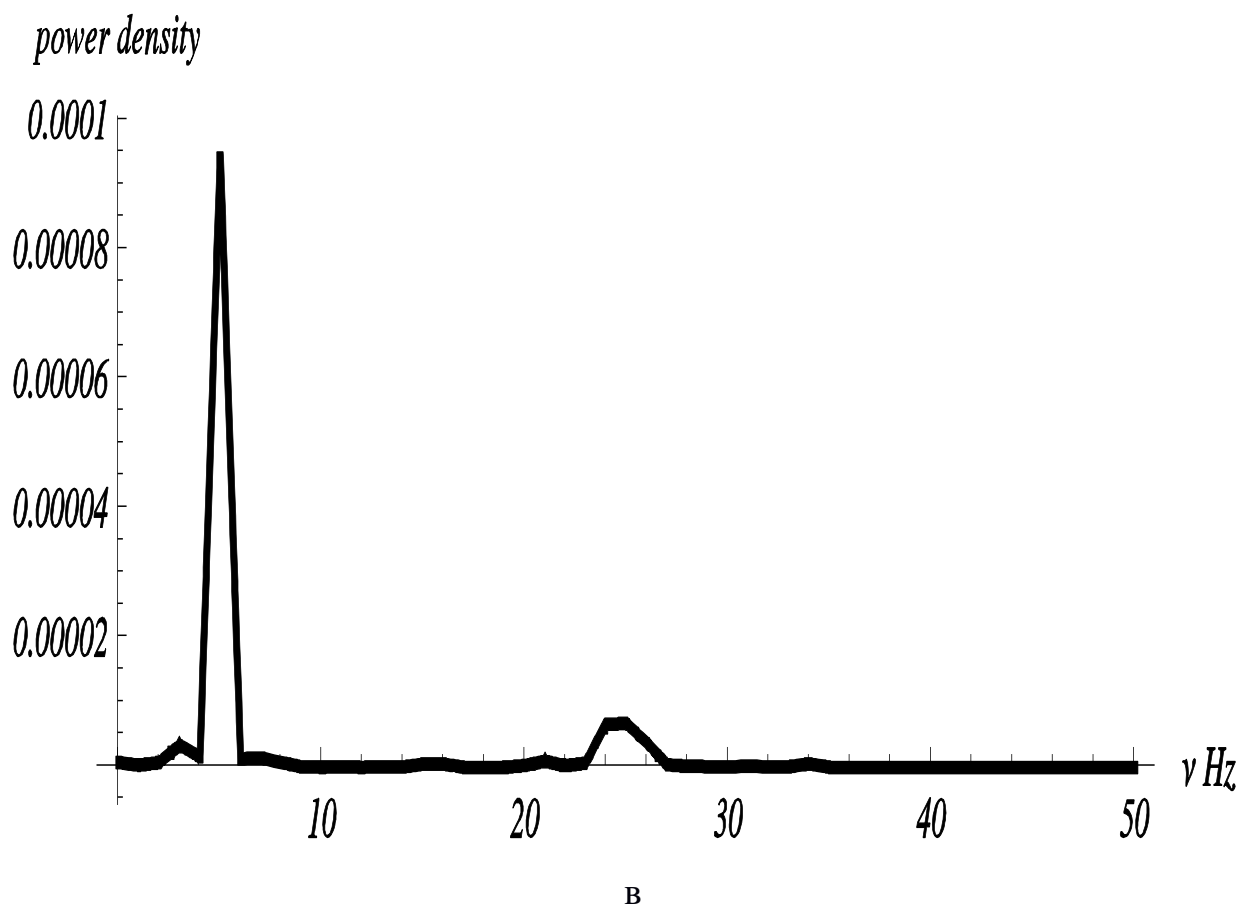


Рис. 4.12. Спектри коливань вільного кінця трубопроводу, отримані методом експрес перетворення Фур'є при швидкостях течії рідини: а) $V = 0.9 \cdot V_{кр}^1$, б) $V = 1.1 \cdot V_{кр}^1$, в) $V = 2.5 \cdot V_{кр}^1$, г) $V = 3 \cdot V_{кр}^1$.

По аналізу біфуркаційної картини (рис. 4.7) можна зробити висновок, що в за критичній області є так звані «островки стійкості», тобто режими на яких система демонструє коливальний характер навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги трубопроводу. Цей факт також підтверджено розрахунками, зокрема на рис. 4.4в та 4.4г видно, що коливання в за критичній області за першими двома формами відбуваються навколо нульового положення тобто навколо точки рівноваги, відповідної до прямолінійної форми рівноваги трубопроводу.

Того ж висновку можна дійти і аналізуючи спектри коливань вільного кінця трубопроводу. На рис. 4.12б чітко розпізнаний перший пік, відповідний до першої форми знаходиться в нулі, тобто частота відповідна першій формі при швидкості течії рідини $V = 1.1 \cdot V_{кр}^1$ дорівнює нулю, що, в свою чергу, свідчить про нестійкий режим коливань по першій формі.

На рис. 4.12в та 4.12г при ще більших швидкостях течії рідини, тобто при за критичних режимах, пік відповідний коливанням за першою формою лежить в околі приблизно п'яти та шести Гц відповідно. Це свідчить про коливальний характер руху трубопроводу по першій формі у закритичних режимах.

Цікавим також є той факт, що для спектрального аналізу коливань вільного кінця трубопроводу використовувалась трьохмодова модель системи трубопровід-рідина, але при швидкості течії рідини $V = 3 \cdot V_{кр}^1$ (рис. 4.12г) спектр є дуже зашумленим. В спектрі чітко можна розрізнити лише пік, відповідний першій формі коливань, пік відповідний другій формі коливань по висоті можна порівняти із сторонніми піками, природа яких не відома.

4.3. Аналіз впливу сил Кориоліса та нелінійних силових факторів на поведінку трубопровода з рідиною при докритичних та закритичних режимах течії рідини

При розгляді рівнянь руху динамічної системи трубопровід-рідина, можна відмітити такі значимі члени рівнянь (2.25):

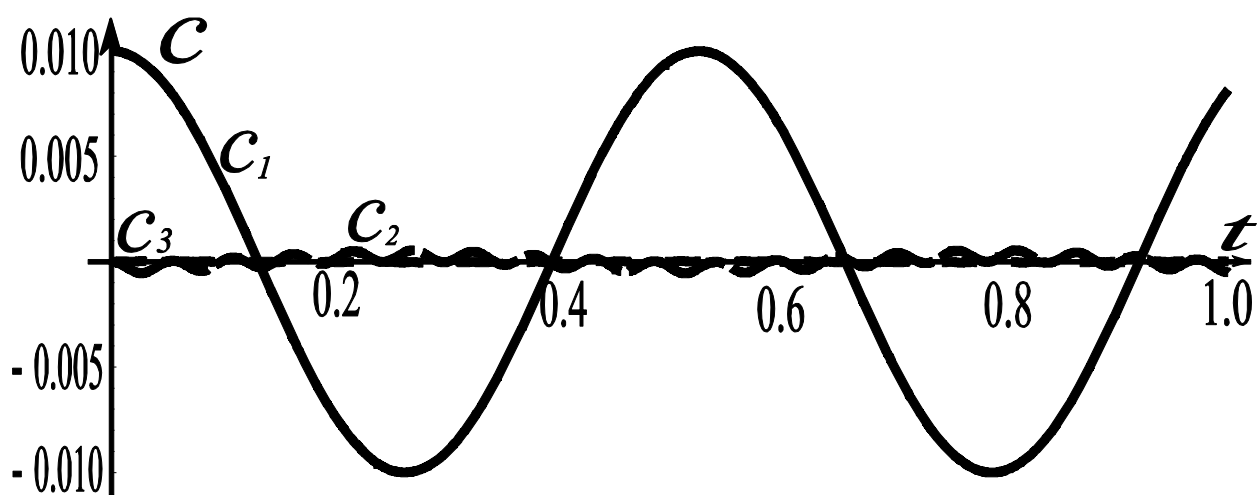
$$\frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ir}^1 - \beta_{ri}^1)$$

це член який відповідає силі Кориоліса.

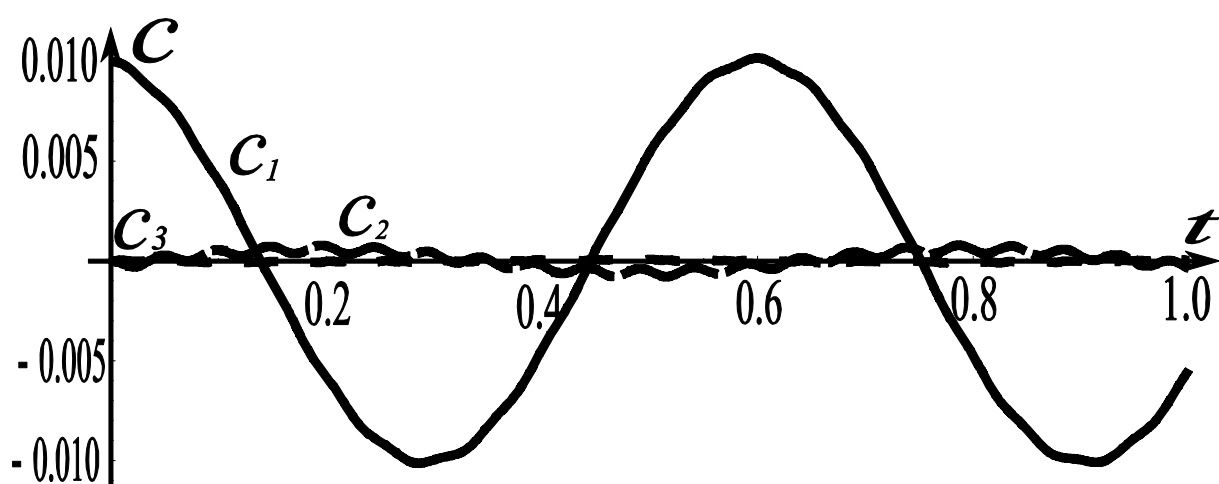
Члени з квадратурами d_{jkir}^2 , d_{ijkir}^6 , d_{ijkir}^4 відповідають нелінійним силовим факторам у динамічній системі трубопровід рідина.

Проведемо аналіз впливу сил Кориоліса та нелінійних силових факторів на поведінку системи трубопровід-рідина. Для цього поетапно будемо розглядати два швидкісних режими течії рідини – докритичний при $V = 0.9 \cdot V_{кр}^1$, та закритичний при $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$.

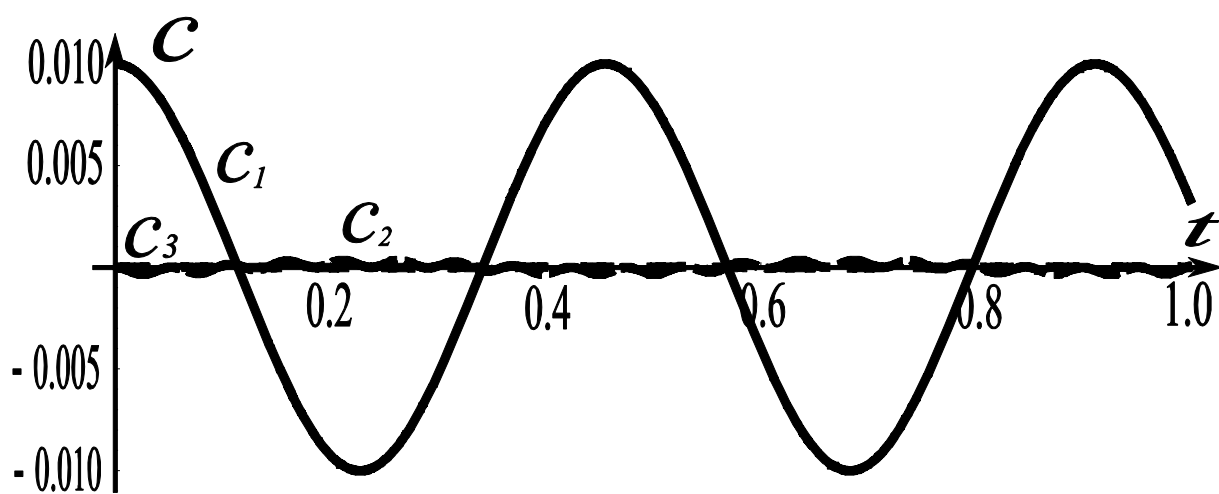
На кожному режимі будемо розглядати чотири варіанти системи трубопровід-рідина – цілком лінійна система без урахування сил Кориоліса, лінійна система з урахуванням дії сил Кориоліса, нелінійна система без урахування сил Кориоліса та система, в якій враховані усі силові фактори [(108)]. Графіки амплітудних параметрів перших трьох власних форм для усіх чотирьох варіантів для докритичного режиму течії рідини показано на рис. 4.13.



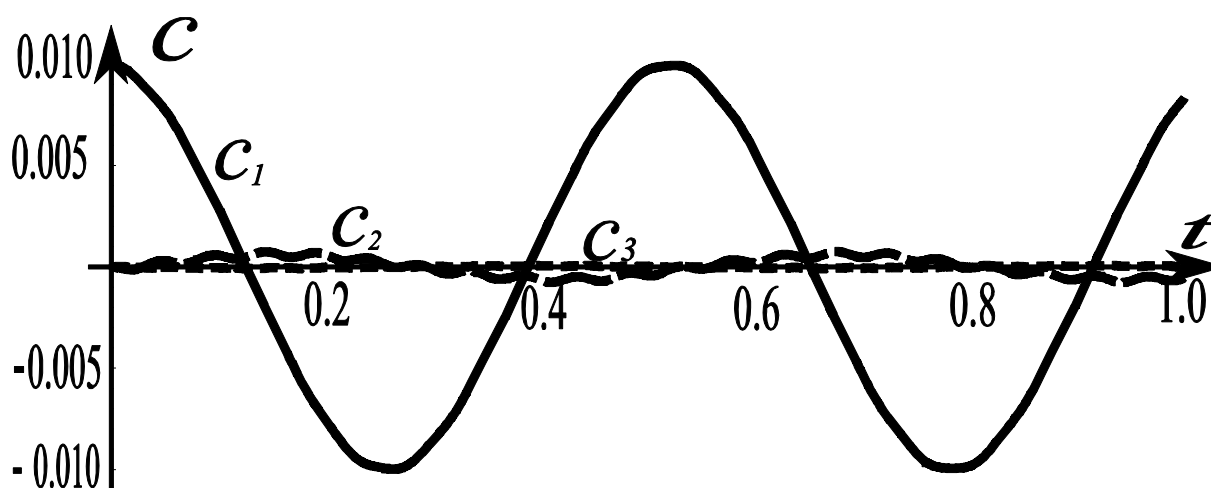
a



б



B

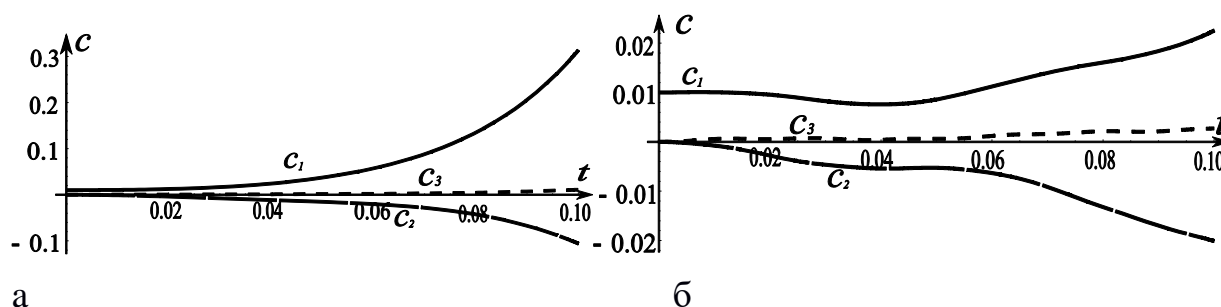


Г

Рис. 4.13. Амплітудні параметри перших трьох форм трубопровода $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ при швидкості течії рідини $V = 0.9 \cdot V_{кр}^1$ для чотирьох варіантів системи трубопровод-рідина: а) лінійна система б) лінійна система із урахуванням сил Кориоліса в) нелінійна система без урахування сил Кориоліса г) система з урахуванням усіх силових факторів.

Із рис. 4.13 можна заключити, що на докритичних швидкісних режимах течії рідини ані нелінійні силові фактори, ані сили Кориоліса значного вкладу у динамічну поведінку системи трубопровод-рідина не вносять. Видимим є лише той факт, що сила Кориоліса зменшує власні частоти коливань у системі.

Перейдемо до розгляду закритичного режиму течії рідини $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$ також для чотирьох варіантів системи. Графіки амплітудних параметрів перших трьох власних форм для усіх чотирьох варіантів для закритичного режиму течії рідини показано на рис. 4.14.



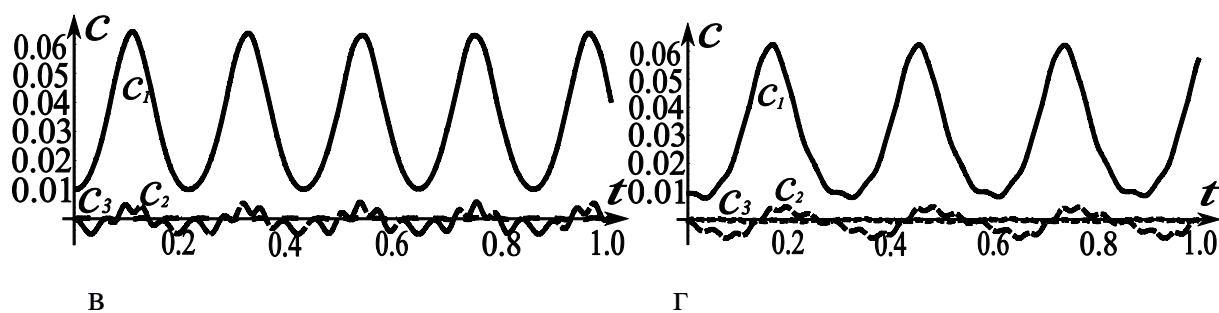


Рис. 4.14. Амплітудні параметри перших трьох форм трубопровода $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ при швидкості течії рідини $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$ для чотирьох варіантів системи трубопровод-рідина: а) лінійна система б) лінійна система із урахуванням сил Кориоліса в) нелінійна система без урахування сил Кориоліса г) система з урахуванням усіх силових факторів.

Наведені на рис. 4.14 графіки демонструють, що в за критичній області лінійна система трубопровід-рідина очікувано поводить себе нестійко – тобто амплітуди усіх трьох форм коливань з часом аперіодично зростають до нескінченності.

Також видно, що врахування дії сил Кориоліса не впливає на зміну стійкості системи ані у лінійному варіанті, ані у нелінійному варіанті. З усіх чотирьох графіків (рис. 4.14 а б в г) видно що в усіх чотирьох системах коливання за першою формою є нестійкими, тобто коливання у лінійній системі взагалі не відбуваються, а відбувається аперіодичне відхилення трубопроводу, а в нелінійній системі коливання відбуваються навколо альтернативного криволінійного положення рівноваги трубопроводу.

В свою чергу, взяття до уваги нелінійних факторів призводить до значної зміни поведінки системи трубопровід-рідина. Відбувається обмеження зони нестійкості нульового положення рівноваги зверху та знизу двома стійкими альтернативними положеннями рівноваги. Амплітуда першої форми вже не зростає аперіодично до нескінченності а попадає в зону атрактору сусіднього стійкого положення рівноваги.

Цікавим фактом є те, що при зміні початкового збурення з першої форми на другу, тобто при початковому відхиленні трубопроводу від положення

прямолинійної рівноваги по другій формі, характер впливу дії сили Кориоліса на нелінійну систему у закритичному режимі течії рідини стає суттєвим.

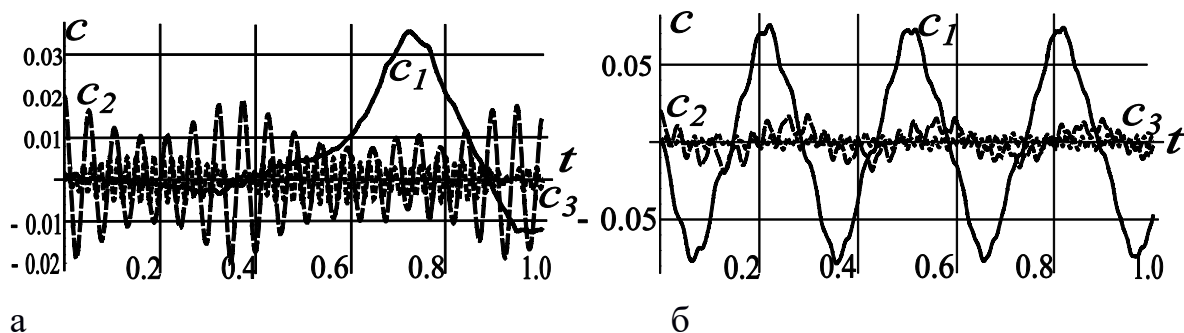


Рис. 4.15. Амплітудні параметри перших трьох форм трубопровода $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ при швидкості течії рідини $V = 1.5 \cdot V_{кр}^1$ для двох варіантів системи трубопровод-рідина: а) нелінійна система без урахування сил Кориоліса б) система з урахуванням усіх силових факторів.

Із рисунку 4.15 видно, що якщо збурення нелінійної системи відбувалося за другою власною формою, вплив сили Кориоліса стає суттєвим. При чому можна констатувати, що якщо сила Кориоліса на докритичних режимах течії рідини була основним фактором енергообміну між власними формами коливань і відповідала за взаємну модуляцію форм, тобто вносила елемент безладу у поведінку системи, на закритичних режимах сила Кориолісу являє собою основний стабілізаційний фактор. Як видно з рис. 4.15а без дії сили Кориоліса рух системи трубопровод-рідина за першою власною формою носить нерегулярний характер, а рис. 4.15б прийняття до уваги дії сили Кориоліса призводить до стабілізації та коливального характеру руху системи за першою власною формою.

4.4. Короткі висновки

Була досліджена біфуркаційна динаміка системи трубопровод-рідина, визначені основні режими коливань в системі при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини. Також виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова.

В результаті такого аналізу було визначено існування «островків стійкості» в за критичній області швидкостей течії рідини, що є значним результатом. Для підтвердження існування «островків стійкості» було проведено безпосереднє моделювання поведінки системи в визначених областях швидкостей течії рідини, де було отримано підтвердження можливості коливань навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги за першою формою.

Також для підтвердження отриманих результатів був проведений спектральний аналіз коливань вільного кінця трубопроводу при різних швидкісних режимах течії рідини у системі, який також допоміг визначити стійкі та нестійкі режими коливань, та підтвердити наявність «островків стійкості» в за критичній області швидкостей течії рідини.

Також був проаналізований вплив сили Кориоліса на поведінку системи трубопровід-рідина, який показав значимість взяття до уваги цього фактору і ще раз продемонстрував правомірність та доцільність використання для аналізу моделі, побудованої в другому розділі.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісній течії рідини, яка орієнтована на дослідження задач динаміки трубопроводу в околі втрати стійкості прямолінійної форми і здатна надійно видавати результати як для докритичних швидкісних режимів течії рідини, так і для закритичних режимів. Модель враховує більшість відомих нелінійних механізмів і їх взаємний вплив на систему.
2. На основі методу модальної декомпозиції побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопровід–рідина для довільної кількості власних форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги дванадцять власних форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в закритичних режимах течії рідини. Засобами символічної математики, реалізованими у програмному пакеті Mathematica , систему диференціальних рівнянь аналітично було приведено до форми Коші.
3. Для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем розроблено і реалізовано модель динамічної системи та програмний пакет засобами програмного середовища Mathematica із застосуванням найбільш передових інструментів адаптивного неявного аналізу диференціальних рівнянь, реалізованих у даному середовищі. Достовірність побудованої моделі підтверджується повною відповідністю результатів для випадку відсутності течії рідини та відповідністю частини результатів дослідженням інших авторів.
4. Було проведено дослідження впливу на систему трубопровід–рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості. Ідея такого демпферу полягала у тому, що за рахунок нелінійності буде відбуватися інтенсивний перерозподіл енергії коливань між власними формами, тобто буде відбуватися відкачка енергії із нижчих форм, коливання яких мають найбільшу амплітуду і представляють найбільшу небезпеку, до вищих

форм де можуть бути швидко задемпфовані. Але в процесі аналізу таких демпферів було виявлено їх низьку ефективність.

5. Була досліджена біфуркаційна динаміка системи трубопровід-рідина, визначені основні режими коливань в системі при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини. Також виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова.
6. Найбільш важливим практичним результатом є визначення існування «островків стійкості» в закритичній області швидкостей течії рідини. Для підтвердження існування «островків стійкості» було проведено безпосереднє моделювання поведінки системи в визначених областях швидкостей течії рідини, де було отримано підтвердження можливості коливань навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги за першою формою.

Одержані в дисертаційній роботі результати можна застосовувати у задачах коливань трубопроводів з різними типами закріплень, метод можна застосувати для вивчення перехідних процесів в задачах динаміки трубопроводів з рідиною довільної форми та складних трубопровідних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ibrahim R. A. Overview of Mechanics of Pipes Conveying Fluids—Part I: Fundamental Studies / R. A. Ibrahim // Vol. 132
<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/S2012/EP/MaterialsforStudents/Mardness/Ibrahim2011-P1.pdf>. : Journal of Pressure Vessel Technology, 2010. P.034001-0340032.
2. Tijsseling A. S. Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems:sources, solutions andunsolved problems / A.S. Tijsseling // . : Eindhoven University of Technology,Report for EDF, 2002. 50 p.
3. Лимарченко В. О. Вимушені коливання трубопроводів з рідиною на вібруючій основі / В.О. Лимарченко, С.В. Москотін // №2. : Збірник матеріалів наукової школи-семінару «Сучасні математичні методи досліджень в механіці», Адверта , 2012. С. 63-66.
4. Лимарченко В.О. Динаміка трубопроводу з рідиною на вібруючій основі / В.О. Лимарченко // . №15. : Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології , 2012. С. 40-48.
5. Лимарченко В.О. Задача про вимушені нелінійні коливання трубопроводу з швидкісною течією рідини / В.О. Лимарченко // №3. : Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка , 2012. С. 79-82.
6. Лимарченко В.О. Коливання трубопроводу з рідиною при комбінованому вібраційному збудженні / В.О. Лимарченко // т. 16 №3. : Нелінійні коливання, 2013. С. 367-373 .
7. Лимарченко В.О. Нелінійні коливання трубопроводу з рідиною при поздовжній вібрації основи трубопроводу / В.О. Лимарченко // №2. : Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка , 2013. С. 63-82.

8. Лимарченко В.О. Параметричні коливання трубопроводу з рідиною / В.О. Лимарченко // т. 9 №1. : Збірник праць Інституту математики НАН України , 2012. С. 176-187.
9. Лимарченко В.О. Поведінка трубопроводу на рухомій основі при імпульсному збуренні коливань / В.О. Лимарченко // №3. : Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2013. С. 169-172 .
10. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный. // Москва : ГИТТЛ, 1951. 225 с.
11. La Rocca M. Steady and unsteady motion of one-component two-phase bubbly flow in 1-D Geometry / Michele La Rocca, Paolo Mele, Gino Voccardi. // № 41. б.м. : Meccanica, 2006. P.483-499.
12. Васина В. Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью / В.Н. Васина // №1. : Вестник Московского энергетического института, 2007. 5-12 с.
13. Горошко О. О. Двохвильові процеси в механічних системах / О.О. Горошко, А.Г. Дем'яненко, С.П. Киба // : Київ, Либідь, 1991. 188 с.
14. Семенова И. И. Математические модели в описании колебаний и разрушения подводных трубопроводов: обзор / И.И. Семенова // №13. Омск : Омский научный вестник, 2000. С. 121-122. .
15. Borglund, D. On the optimal design of pipes conveying fluid / D. Borglund // 12. . : Journal of Fluids and Structures., 1998. P. 353-365.
16. Сухарев М. Г. Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии / А.А. Атавин, А.М. Карасевич, М.Г. Сухарев // под общ. ред. М.Г.Сухарева . б.м. : ГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. 320 с. .
17. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир // . : М: Наука, 1976. 416 с.

18. Гуляев В. И. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем: учебное пособие для вузов / В.И. Гуляев., В.А. Баженов, С.Л. Попов // . : М:Выш.шк., 1989. 383 с.
19. Зефирова В. Н. Исследование собственных частот прямолинейного трубопровода / В.Н. Зефирова, В.В. Колесов, А.И. Милославский // . №1. : МТТ, 1985. С.179–188.
20. Ильгамов, М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ / М.А. Ильгамов // . №1. : М: Наука, 1969. 182 с.
21. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. / В.Д. Кубенко // . : Киев: Наукова думка , 1979. 184 с.
22. Paidoussis, M. P. Dynamics And Stability Of Pinned-clamped and Clamped-pinned Cylindrical Shells Conveying Fluid / A. K. Misra, S. S. T. Wong, M. P. Paidoussis // №15. : Journal of Fluids and Structures, 2001. P.1153-1166.
23. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости / В.А. Светлицкий.// Москва : Машиностроение, 1982. 280 с. .
24. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости / А. С. Вольмир // М: Наука, 1976. 416 с.
25. Митропольский Ю. А. Математическое моделирование упругих систем с односторонним внешним воздействием / Ю.А. Митропольский, О.С. Лимарченко, Дж. Матараццо, Л. Тоскано // . №5. Київ : Проблемы управления и информатики, 2001. С.48-70 .
26. Cowley, S. J. On the Wavetrains Associated with Elastic Jumps on Fluid-filled Elastic Tubes / S. J. Cowley. // 36(3). : The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1983. Issue P.289-312.
27. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / В.И. Феодосьев // Т.Ю. Москва : Инж. сб. – Изд-во АН СССР Т.Ю., 1951. С.169-170.

28. Бондарь Н. Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем / Н.Г. Бондарь // : Киев, Будивельник, 1971. 140 с.
29. Stangl, M. Applying Lagrange equations and Hamilton's principle to vibrations of fluid conveying pipes / M. Stangl, N.A. Beliaev, A.K. Belyaev, H. Irschik.// No.39. St. Petersburg, Russia : Proceedings of XXXIII Summer School APM, 2005. P.269–275.
30. Гуляев В. И. Критичні стани циліндричних оболонок під дією відцентрових та слідкуючих осьових навантажень / В.И. Гуляев, П.З. Луговий, І.Л. Соловійов // . №3. : Доповіді НАН України, 2009. С.72–77.
31. Paidoussis, M. P. A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram/ M.P. Paidoussis, A. Sarkar, C. Semler // . №280. . : Journal of Sound and Vibration, 2005. P.141–157.
32. Paidoussis, M. P. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion / M.P. Paidoussis, M. Wadham-Gagnon, C. Semler .// №23. . : Journal of Fluids and Structures, 2007. P.545–567.
33. Paidoussis, M. P. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: Dynamics of the system with intermediate spring support / M.P. Paidoussis, C. Semler, M. Wadham-Gagnon, S. Saaid // . №23. : Journal of Fluids and Structures, 2007. P.569–587.
34. Paidoussis, M. P. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass / M.P. Paidoussis, Y. Modarres-Sadeghi, C. Semler, M. Wadham-Gagnon // . №23. Journal of Fluids and Structures, 2007. P.589–603.
35. Paidoussis, M. P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow V1/ Paidoussis M. P. // . Amsterdam, The Netherlands : Academic Press, 1998. 572 p.

36. Paidoussis, M. P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow V2 / Paidoussis M. P.// . Amsterdam, The Netherlands : Academic Press, 2004. 806 p.
37. Paidoussis, M. P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics / M.P. Paidoussis.// №310. . : Journal of Sound and Vibration, 2008. P.462–492.
38. Paidoussis, M. P. Three-dimensional oscillations of a cantilever pipe conveying fluid / Michael P. Paidoussis, Yahya Modarres-Sadeghi, Christian Semler // . №43. : International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007. P.18–25.
39. Paidoussis, M. P. Three-dimensional oscillations of a cantilever pipe conveying fluid / Michael P. Paidoussis, Yahya Modarres-Sadeghi, Christian Semler . // №43. : International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007. P.18–25.
40. Gregory, R. W. Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid. I. Theory / Gregory R. W., Paidoussis M. P. // . –Vol. 293.– No. 1435. . : Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1966. P. 528-542.
41. Sarkar, A. A cantilever conveying fluid: coherent modes versus beam modes / A. Sarkar, M.P. Paidoussis // . No.39. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2004. P.467–481.
42. Paidoussis, M. P. A compact limit-cycle oscillation model of a cantilever conveying fluid / A. Sarkar, M.P. Paidoussis .// No.17. Journal of Fluids and Structures, 2003. P.525–539.
43. Nawaf, M. Bou-Rabee. A Multiparameter, Numerical Stability Analysis of a Standing Cantilever Conveying Fluid / Nawaf M. Bou-Rabee, Louis A. Romero, Andrew G. Salinger. // Vol. 1. No. 2. SIAM J. : APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS, 2002. P. 190–214.

44. Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания. / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда // : Москва "Наука", 1987. 424 с.
45. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. / В. С. Анищенко // Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 224 с.
46. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. М. Хайкин // . 2 изд., доп. Москва : ГИФМЛ, 1959 916 с.
47. Wang, L. In-plane vibration analyses of curved pipes conveying fluid using the generalized differential quadrature rule / Wang Lin , Ni Qiao // . N. 86. : Computers and Structures, 2008. P.133–139.
48. Modarres-Sadeghi Y, Y. Nonlinear dynamics of extensible fluid-conveying pipes, supported at both ends / Modarres-Sadeghi Y., Paidoussis M.P.// No.25. Journal of Fluids and Structures, 2009. P.535-543.
49. Nikolic´, M. Bifurcations in non-linear models of fluid-conveying pipes supported at both ends / Nikolic´ M., Rajkovic´ M. // . №22. Journal of Fluids and Structures, 2002. P. 173–195.
50. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин // М.: Наука, 1966. -530 с..
51. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В.И. Арнольд // 3 изд., доп. Москва : Наука, 1990. стр. 128 с.
52. Томсон Дж. М.Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. / Дж.М.Т. Томпсон // . Москва : Мир, 1985. стр. 256 с. .
53. Уивер Ю. О динамической устойчивости трубы с протекающей жидкостью / Ю. Уивер // Сер. Е. №2. Москва : Труды Американского Общества инженеров-механиков, 1973. С. 43-49.
54. Кадет В. В. Методы математической физики в решении задач нефтегазового производства / В.В. Кадет // М.:Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 148 с.

55. Челомей С. В. О динамической устойчивости упругих систем при протекании через них пульсирующей жидкости / С.В. Челомей // №5. Москва : МТТ, 1984. С. 170-174 .
56. Ginsberg , J. H. The Dynamic Stability of a Pipe Conveying a Pulsative Flow / J.H. Ginsberg // . – Vol.11. : International Journal of Engineering Science, 1973. P. 1013-1024.
57. Jeong, W. B. Stability Analysis of Pipe Conveying Periodically Pulsating Fluid Using Finite Element Method / Jeong W.B., Seo Y.S., Jeong S.H., Lee S.H., Yoo W.S. // . Vol.49. № 4. : JSME International Journal, Series C, 2006. P.1116-1122.
58. Pramila, A. H. Undamped Cantilever Pipes Aspirating Fluid May Be Stable / Pramila A. // Vol. 25. No.4. б.м. : Rakenteiden Mekaniikka, 1992. P. 3-14.
59. Ишемгужин И. Е. Демпфирование параметрических колебаний трубопровода / И.Е. Ишемгужин, Т.И. Габбасов, И.А. Шаммазов, М.Р. Ситдииков, М.А. Кочекон // №3. : Электронный научный журнал нефтегазовое дело,, 2011. С. 84-93.
60. Нестеров С. В. Поперечные колебания трубопровода с равномерно движущейся жидкостью / С. В. Нестеров, Л. Д. Акуленко, Л. И. Коровина // . т. 427 №6. : Доклады Академии наук, 2009. С. 781-784 .
61. Соколов И. И. Свободные колебания криволинейных трубопроводов / И. И. Соколов // . №6. Строительство трубопроводов, 1981. С. 25-26 .
62. Duhan , J. New fluid velocity expression in an extensible semi-circular pipe conveying fluid / Duhan Jung, Jintai Chung, Hong Hee Yoo // . N 304. : Journal of Sound and Vibration, 2007. P.382–390.
63. Wang, L. Dynamical behaviors of a fluid-conveying curved pipe subjected to motion constraints and harmonic excitation / Wang Lin , Ni Qiao, Huang Yuying . N.306. : Journal of Sound and Vibration, 2007. стр. P.955–967.

64. Ганиев Р. Ф. Динамика систем твердых и упругих тел (Резонансные явления при нелинейных колебаниях) / Р. Ф. Ганиев, П. С. Ковальчук // : М:Машиностроение, 1980. 208 с.
65. Ковальчук П. С. Анализ нелинейного взаимодействия изгибных форм композитных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью / П.С. Ковальчук, Л.А. Крук // . №4. : Доповіді НАН України, 2007. С.65-71.
66. Крук Л. А. Нелінійні вимушені коливання ортотропних циліндричних оболонок, заповнених рухомою рідиною [Електронний ресурс] / Л.А. Крук // . №17ч.2. : Вісник Національного транспортного університету , 2008. стр.
http://www.nbuu.gov.ua/portal/natural/Vntu/2008_17_2/83.pdf.
67. Кикоть С. В. Вимушені коливання реологічного трубопроводу з потоком рідини / С.В. Кикоть // . №3. : Вісник Київського університету. Серія:фіз.-мат. науки., 2007. С. 80–88.
68. Кикоть С. В. Коливання реологічної труби під впливом потоку рідини / С.В. Кикоть // . №4. : Вісник Київського університету. Серія:фіз.-мат. науки., 2004. С. 89–96.
69. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К.Флетчер. // Москва : Мир, 1988. 352 с.
70. Хромушкин А. В. Параметрические колебания элементов конструкций летательных аппаратов / А.В. Хромушкин, С.В. Челомей, Г.А. Щеглов // . Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. часть 1- 40 с., часть 2 - 2000 - 24 с..
71. Селезнев В. Е. Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов // Москва : МАКС Пресс, 2007. 695 с. .
72. Селезнев В. Е. Методы и технологии численного моделирования газопроводных сетей / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов.// 2-е издание. Москва : КомКнига, 2005. 328 с. .

73. Drago , M. Pipeline simulation techniques / Drago Matko, Gerhard Geiger, Withold Gregoritza.// –Volume 52. – Issues 3. б.м. : Mathematics and Computers in Simulation, 2000. P. 211-230.
74. Stangl, M. An alternative approach for the analysis of nonlinear vibrations of pipes conveying fluid / Michael Stangl, Johannes Gerstmayr, Hans Irschik //. No.310. б.м. : Journal of Sound and Vibration, 2008. P.493-511.
75. Troger, H. Nonlinear stability and bifurcation theory / H. Troger, A. Steindl //. Vol. 6. No.3. Wien, Springer, 1991. 407 p.
76. Meijaard, J. P. Modelling of Fluid-Conveying Flexible Pipes in Multibody Systems/ MeijaardJ.P., HakvoortW.B.J. //. Lisbon, Portugal : Proceedings of the 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, September 2009.
77. Mittal, S. Parallel finite element simulation of 3D incompressible flows: Fluid-Structure Interactions / Mittal S., Tezduyar T.E.// . No.21. б.м. : International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995. P. 933-953.
78. Sanada, K. Simulation of pipeline dynamics using an optimized finite element model / Sanada K. //. No.39. б.м. : J Rob Mechatron.– Yokohama National Univ, 1999. P.283-288.
79. Padmanabhan, C. Finite element analysis of fluid–structure interaction in pipeline systems / B. Sreejitha, K. Jayaraja, N. Ganesana, C. Padmanabhan, P. Chellapandib, P. Selvarajb // . Volume 227. Issue 3. б.м. : Journal of Fluids and Structures, 2004. P. 313-322.
80. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л.Г.Лойцянский.// Москва : Наука, 1987. 840 с. .
81. Hallquist, John, O. LS-DYNA theory manual. б.м. : Livermore Software Technology Corporation, 2006. Pages, 680.
82. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, том 1 / Н.А. Кильчевский // : М: Наука, 1977. 480 с.
83. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, том 2 / Н.А. Кильчевский // : М: Наука, 1977. 544 с.

84. Лурье А. И. Аналитическая механика / А.И. Лурье // Москва : Физматлит, 1961. 824 с. .
85. Лимарченко О. С. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О. С.Лимарченко, Дж. Матаратцо, В. В. Ясинский // Киев : «ГНОЗИС», 2002. 304 с. .
86. Berkooz, G. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows / G. Berkooz, P. Holmes, J.L. Lumley // . 25. : Annu. Rev. Fluid Mech., 1993. P. 539–575.
87. Timokhin, O. P. Variational approach for investigation of pipelines with rapidly flowing liquid / V.O. Limarchenko, O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // . Extend Abstracts, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. Lviv-Brukhovychi : Ukrainian Academy of Sciences, Symposium "Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics", September 18-21, 2012. стр. С. 74-75.
88. Эдвардс Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / Ч.Г. Эдвардс, Д.Э. Пенни // Учебное пособие. 3-е издание. — М.: Вильямс, 2008. — 1104 с.
89. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский.// : М: Наука, 1974. 503 с.
90. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа/ Л.В. Канторович, В.И. Крылов.// . : Л.-М.:Физматгиз, 1962. 708 с.
91. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул // . : М: Мир, 1972. 274 с.
92. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский // Київ : «Наукова думка», 1971. 440 с.
93. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин// Москва : Наука, 1970. 512 с. .

94. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов/ С.Г. Михлин // Москва : Наука, 1966. 432 с. .
95. Василевский Ю. Е. Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости / Ю.Е. Василевский, О.С. Лимарченко // Комплексний аналіз і течії з вільними границями, Збірник праць Інституту математики НАН України. №4. : Київ: Інститут математики НАН України, 2006. 322-334 с.
96. Василевский Ю. Є. Вплив зміни швидкості течії рідини на нелінійний перерозподіл енергії при коливаннях трубопроводу / Ю.Е. Василевський, О.С. Лимарченко // . №3. : Вісник Київського університету. — Сер.: Фізико-математичні науки, 2009. 57-60 с.
97. Василевский Ю. Є. Механізми втрати експлуатаційної стійкості трубопроводу при швидкісній течії рідини / Ю.Є.Василевський, О.П. Ковальчук, О.С. Лимарченко // №91. : Киев-Харьков:Коммунальное хозяйство городов, Научно-технический сборник, 2010. 49-62 с.
98. Василевский Ю. Є. Нелінійна динаміка трубопроводу з рідиною в околі критичних швидкостей течії / Ю.Е. Василевський, О.С. Лимарченко // . №1. : Вісник Київського університету. — Сер.: Фізико-математичні науки, 2009. 41-46 с.
99. Бабаков И. М. Теория колебаний / И.М. Бабаков //: М: Наука, 1968. 560 с.
100. Yang, X. D. Comparison of Galerkin method and complex mode method in natural frequency analysis of tube conveying fluid / Yang X.-D., Jin J.-D. // . Volume 27 Issue 3. б.м. : Zhendong yu Chongji.– Journal of Vibration and Shock, 2008. P.80-86.
101. Kuiper, G. L. Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid / Kuiper G.L., Metrikine V.A.// . № 24. Journal of Fluids and Structures,, 2008. P.541-558.
102. Лимарченко О.С. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини / В.О. Лимарченко, О.П.

- Тімохін // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Науковий збірник 2011 Випуск 14, с. 73-77.
103. Лимарченко О.С. Варіаційний метод дослідження нелінійних задач динаміки трубопроводів з рідиною / В.О. Лимарченко, О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // . т. 9 №2. : Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології , 2012. С. 224-239.
104. Limarchenko O.S. Bifurcation dynamics of pipeline with liquid. / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2012, № 16, Р. 86-92
105. Бугров Я. С., Высшая математика. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский //Ростов На Дону : Феникс, 1998 г. с. 142.
106. Лимарченко О.С., Аналіз впливу сил Коріоліса і нелінійностей на динаміку трубопроводу. / О.С. Лимарченко, О.П. Тімохін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, № 3, 2014, С. 54-57.
107. Frigo, M., Johnson, S.G. FFTW: An Adaptive Software Architecture for the FFT. б.м. : Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1998. стр. pp. 1381-1384. Т. Vol.3.
108. Limarchenko O.S. Specific features of the dynamic behavior of a straight pipeline for supercritical velocities of the flow of liquid / O.S. Limarchenko, O.P. Timokhin // Journal of Mathematical Sciences, vol. 3, no. 223, P. 293-297.
109. Limarchenko O.S., Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O.S. Limarchenko, V.O. Limarchenko, M. Majid, O.P. Timokhin // Опір матеріалів і теорія споруд.— 2015.— no. 94.— P. 96–106.