

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. С.П. ТИМОШЕНКО НАН УКРАИНЫ

На правах рукописи

ВЕЛЬМАГИНА НАТАЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА

УДК 531.36

**БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ  
НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С  
КАЧЕНИЕМ, МОДЕЛИРУЮЩИХ КОЛЕСНЫЕ ЭКИПАЖИ**

01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,  
профессор

**Владимир Григорьевич Вербицкий**

**Киев 2016**

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	12
РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	25
2.1 О моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью.....	25
2.2 О методе анализа автоколебаний.....	29
2.2.1 Приближенный анализ автоколебаний на примере простейшей колебательной системы при наличии внешнего гармонического возбуждения.....	31
2.2.2 Приближенное определение характеристик автоколебаний динамической системы с двумя степенями свободы.....	36
2.2.3 Приближенный анализ автоколебаний на примере модели шасси самолета .....	37
РАЗДЕЛ 3. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛЯХ СТОЙКИ ШАССИ .....	43
3.1 Анализ автоколебаний колесного модуля при двух моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью .....	43
3.2 Бифуркации автоколебаний колесного модуля в окрестности прямолинейного режима движения.....	49
3.2.1 Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению.....	49
3.2.2 Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний.....	52
3.2.3 Оценка амплитуд автоколебаний с учетом пяточных моментов.....	56

3.3 Анализ автоколебаний колесной сцепки в круговом режиме движения.....	58
3.3.1 Анализ стационарных круговых состояний ведомого звена в нелинейной постановке.....	59
3.3.2 Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению.....	62
3.3.3 Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний....	63
3.3.4 Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования.....	65
3.4 Влияние структуры сил в задаче шимми стойки шасси .....	66
3.4.1 Оценка амплитуд автоколебаний в окрестности прямолинейного режима движения.....	69
3.4.2 Влияние структуры сил на амплитуды автоколебаний (случай с неполной диссипацией).....	72
3.5 Заключение.....	75

## РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ ДИВЕРГЕНТНЫХ И ФЛАТТЕРНЫХ БИФУРКАЦИЙ МОДЕЛИ ЭКИПАЖА С УПРАВЛЯЕМЫМ КОЛЕСНЫМ МОДУЛЕМ.....

4.1 Бифуркационное множество модели экипажа с управляемым колесным модулем.....	81
4.2 Анализ условий устойчивости прямолинейного режима движения по линейному приближению.....	85
4.3 Оценка амплитуд автоколебаний в окрестности прямолинейного режима движения.....	87
4.4 Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования.....	87
4.5 Заключение.....	90

РАЗДЕЛ 5. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕМОНОТОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УВОДА НА МНОГООБРАЗИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МОДЕЛИ ЭКИПАЖА С ЗАКРЕПЛЕННЫМ РУЛЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ.....	91
5.1 Анализ многообразия особых точек системы, построение бифуркационное множества .....	93
5.2 Характерные фазовые портреты системы и качественная картина структуры областей притяжения.....	99
5.3 Управляемость нелинейной модели автомобиля.....	101
5.4 Заключение.....	104
 ВЫВОДЫ.....	 106
 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	 107
 <i>Приложение 1.</i> Анализ колебаний в окрестности прямолинейного режима движения в задаче шимми стойки шасси.....	 119
<i>Приложение 2.</i> Построение фазового портрета модели автомобиля.....	122
<i>Приложение 3.</i> Анализ многообразия особых точек системы, построение бифуркационного множества модели колесного экипажа с жестко закрепленным рулевым управлением.....	125
<i>Приложение 4.</i> Анализ колебаний в зоне флаттерной неустойчивости модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем.....	131

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность проблемы.**

Работа посвящена анализу устойчивости нелинейных механических систем с качением, реальным прототипом которых являются колесные экипажи.

Необходимость в проведении исследований по данной тематике вызвана, в первую очередь, широким использованием в практике проектирования колесных экипажей методов анализа устойчивости и управления. Появление шимми, к сожалению, остается в большинстве случаев «неожиданным» для разработчиков авиационной и колесно-транспортной техники явлением. «...As a concluding remark it can be stated that despite a long history, landing gear shimmy remains a relevant problem today.» [107] («...В заключительном замечании можно констатировать, что, несмотря на долгую историю, шимми шасси остается актуальной задачей и сегодня»).

Это, на наш взгляд, с одной стороны связано с объективными трудностями исследования многопараметрических задач, а с другой - в результате использования несовершенных (с точки зрения универсальности) моделей взаимодействия упругого колеса с опорной поверхностью в различных режимах качения, соответствующих реальным эксплуатационным условиям.

Одной из необходимых предпосылок возникновения автоколебаний является подвод энергии в систему извне. Таким «пусковым механизмом», как правило, является наличие позиционных неконсервативных сил в системе, роль которых в моделях колесных экипажей с упругим пневматиком выполняют силы увода (аналог следящих сил).

Явление увода упругого колеса было впервые рассмотрено в работе Брулье в 1925 г и в дальнейшем использовалось при исследовании задач

шимми (самовозбуждающиеся колебания катящихся колес, возникающие в стойке шасси самолета или подвеске автомобиля) многими авторами как представителями теоретического направления М.В. Келдыш, Г.В. Аронович, И.И. Метелицын, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев, Л.Г. Лобас, Н.В. Расејка, R.S. Sharp, I.J.M. Besselink, S. Evangelou, D.J.N. Limebeer, так и инженерами-исследователями авиационного и автомобильного транспорта Б. фон Шлиппе, Р.Ф. Дитрих, К.С. Колесников, В.С. Гоздек, В.И. Гончаренко, Б.М. Шифрин.

В работах Ю.И. Неймарка, Н.А. Фуфаева [86] получили развитие модели колесных экипажей, учитывающие как голономную, так и неголономную постановки задач [6, 54] о движении колесного экипажа, активно используемые в дальнейшем многими авторами: И.В. Новожилов, А.М. Формалинский, Ю.Г. Мартыненко, Л.Г. Лобас, Н.В. Никитина, С.А. Зегжда, J.M. Papadopoulos, A. Ruina, A.L. Schwab.

Применение методов теории бифуркаций в задачах устойчивости нелинейных моделей колесных экипажей берет начало с 90х годов в работах Hans Troger, Alois Steindl [120].

Анализ вещественных бифуркаций для моделей экипажей с монотонными зависимостями сил увода достаточно полно был рассмотрен в работах Л.Г. Лобаса, В.Г. Вербицкого [32, 33, 34, 70]. В последнее время значительное число работ связано с анализом влияния немонотонных зависимостей сил увода и уточнений поликомпонентной модели сухого трения В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов [44, 45], А.А. Киреенков [55].

В связи с этим, актуальным является развитие методов приближенного анализа автоколебаний механических систем (берущих свое начало в работах Н.Н. Боголюбова, Л.И. Мандельштама, Ю.А. Митропольского, А.Ю. Ишлинского, Я.Г. Пановко [17, 76, 49, 88]), позволяющих учесть специфику различных нелинейностей, как физических (сил увода и стабилизирующего момента), так и нелинейностей, порождаемых нелинейной природой самих уравнений движения колесного экипажа.

### **Связь работы с научными программами, планами, темами.**

Исследования, результаты которых приведены в диссертационной работе, проводились в соответствии с научной темой Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины «Современные проблемы колебаний, стойкости и управляемости элементов механических систем при динамических нагрузках» (№ ДР 0112U000251) и в соответствии с планами научно-исследовательской работы ДААТ «Исследования стойкости и анализ автоколебаний элементов шасси колесных машин» (№ ДР 0113U003591).

### **Цель и задание исследования.**

Основной целью работы является развитие единообразного подхода к анализу как дивергентной, так и флаттерной потери устойчивости нелинейных систем с качением на основе классификаций каспидных особенностей: «складка», «сборка», «бабочка».

Так в работе рассмотрен ряд задач, связанных с развитием приближенного метода анализа автоколебаний автономных нелинейных механических систем (для которых реализуется сценарий потери устойчивости, отвечающий теореме Андронова-Хопфа), а также задача качественного анализа множества стационарных режимов и условий реализации опасной-безопасной границы устойчивости нелинейных моделей колесного экипажа на основе построения соответствующих бифуркационных множеств. А именно:

- реализация приближенного метода анализа автоколебаний в случае движения колесной сцепки «рояльного типа» в круговых режимах, а также для двухстепенной модели стойки шасси с учетом неустановившегося увода в прямолинейном режиме (с анализом влияния структуры сил на характер автоколебаний);

- задача сравнительного анализа наиболее распространенных моделей описания взаимодействия колеса с опорной поверхностью (модели И. Рокара и модификации модели М.В. Келдыша) при автоколебаниях шимми;

- задача анализа автоколебаний для колесного экипажа с учетом инерционности и «упругой связи» передней стойки с его корпусом;
- задача качественного анализа множества стационарных режимов модели экипажа и их устойчивости с немонотонными характеристиками сил увода;
- задача анализа смены свойств поворачиваемости модели колесного экипажа, учитывающей нелинейность сил бокового увода.

*Объектом исследования* являются автоколебания механических систем с качением, описанных системами нелинейных дифференциальных уравнений.

*Предметом исследования* является задача анализа автоколебаний нелинейных механических систем, с использованием теории бифуркации.

*Методы исследований.* Методы динамики систем связанных тел, качественной теории дифференциальных уравнений; теории бифуркации динамических систем; теории нелинейных колебаний.

**Научная новизна полученных результатов** заключается в следующем:

- впервые построены уточненные математические модели колесных экипажей (за счет обобщения характеристик силового взаимодействия упругого колеса с опорной поверхностью);
- развит эффективный численно-аналитический метод исследования дивергентных и флаттерных бифуркаций стационарных состояний механических систем с качением;
- проведен качественный анализ структуры разбития фазовой плоскости траекториями, при изменении двух управляемых параметров модели колесного экипажа, с учетом наиболее общих геометрических характеристик сил увода и стабилизирующих моментов;
- показана возможность использования двух моделей взаимодействия колеса с опорной поверхностью (аксиоматика И. Рокара или модели



М.В. Келдиша) при анализе автоколебаний шимми в нелинейной постановке;

- получены условия возникновения автоколебаний в аналитическом виде при движении колесной сцепки в прямых и круговых участках движения;
- рассмотрено влияние разных типов аппроксимации нелинейных зависимостей сил увода и стабилизирующего момента на интенсивность автоколебаний колесного модуля.

**Практическое значение полученных результатов.** Полученные в диссертации результаты имеют в первую очередь теоретическое значение. Теоретическое значение полученных в работе результатов заключается в возможности их использования при исследовании механических систем с качением, которые описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений. Предложенные методы исследования, с использованием теории бифуркации, могут быть использованы во многих задачах анализа автоколебаний нелинейных механических систем.

Практическое значение, полученных в работе результатов, заключается в том, что они могут также быть использованы на стадии конструирования колесных экипажей с целью обеспечения их безопасной эксплуатации и при проектировании автоматизированных систем управления.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается корректностью постановок исходных задач; использованием качественной теории дифференциальных уравнений, теории бифуркации динамических систем, теории нелинейных колебаний; применением апробированного метода приближенного анализа автоколебаний механических систем и согласованностью с известными результатами.

**Апробация результатов диссертации.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на таких научных

конференциях: 3-й Международной конференции «Нелинейная динамика – 2010», Харьков, 2010г.; Международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 2012 г.; XIV Международной научной конференции им. ак. М. Кравчука, Киев, 2012 г.; Международной научной практической конференции «Управления высокоскоростными подвижными объектами и профессиональная подготовка операторов сложных систем», Кировоград, 2012 г.; Международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, в 2013 г.; 2 международной заочной научно - практической конференции «Наука вчера, сегодня, завтра», Новосибирск, 2013г.

Отдельные положения диссертации докладывались на научных семинарах отдела прикладной механики Института прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, 2010 – 2014гг.), отдела устойчивости процессов Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (Киев, 2015г.). Диссертация в завершеном виде докладывалась и обсуждалась на научном семинаре отдела устойчивости процессов Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (Киев, 2016г.).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 13 научных работ, среди которых 7 статей опубликовано в специализированных изданиях, 6 работ в сборниках материалов и трудов международных научных конференций.

**Личный взнос диссертанта.** Опубликованные работы с достаточной полнотой отображают содержание диссертации. Среди опубликованных научных работ три [24, 28, 29] являются самостоятельными. В работах [18, 20, 25, 27], написанных в соавторстве с научным руководителем доктором физ.-мат. наук, профессором В.Г. Вербицким, соавтору принадлежат

теоретические положения, которые положены в постановку задач, проверка и обсуждение результатов. В работе [25] В.Г. Вербицкому принадлежит общий замысел проведения исследований, уравнения движения, выражение условий устойчивости в пространстве параметров, диссертанту принадлежит численно-аналитическое исследование бифуркаций предельного цикла. В работах [22, 23, 26] соавторам В.Г. Вербицкому и В.Г. Хребту принадлежат экспериментальная проверка и обсуждение результатов; диссертанту принадлежит анализ поворачиваемости модели колесного экипажа, геометрическая интерпретация условий безопасной потери устойчивости стационарных движений.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Вербицкому за постоянное внимание к работе, помощь и полезные советы при написании диссертационной работы.

## РАЗДЕЛ 1

### ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящем разделе приводится краткий обзор известных результатов по теории устойчивости механических систем с качением, прототипами которых являются колесные безрельсовые экипажи, а также методов используемых при решении этих задач; формулируются цель и задачи исследования; обосновывается ее актуальность.

Основы теории устойчивости движения механических систем были заложены в фундаментальных работах А.М. Ляпунова, в тоже время весомый вклад в развитие качественных методов исследования устойчивости динамических систем принадлежит А. Пуанкаре.

Эффективность идеи второго метода Ляпунова была продемонстрирована в работах его многочисленных последователей: Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Н.Н. Баутина, В.И. Зубова, Е.В. Румянцева, И.В. Матросова, А.А. Мартынюка, Йошизава, Руша, Лилы и других [105, 75, 12, 47, 96, 81, 82, 78, 79, 80, 97, 14, 60, 66].

В Украине работы по исследованию устойчивости автомобилей приобрели последующее развитие [37-40, 68-73, 78-80, 109], что стало возможным благодаря работам Л.Г. Лобаса, А.А. Мартынюка, Н.В. Никитиной, В.И. Гончаренко и других, проводимым в Институте механики НАН Украины.

Одна из устоявшихся в практике исследований моделей колесного экипажа базируется на плоской велосипедной схеме, которая учитывает нелинейные упругие свойства колеса (в частности, нелинейный увод). В этом случае характерно сосуществование нескольких стационарных режимов, а полное понимание динамических свойств модели невозможно без представления общей качественной картины разбиения фазового

пространства траекториями системы, что в свою очередь предполагает определение: положения особых точек, отвечающих стационарным режимам; локальных свойств устойчивости особых точек (устойчивость по А.М. Ляпунову [74]); глобальные свойства устойчивости особых точек (определение границ области притяжения устойчивых особых точек и характера поведения в окрестности неустойчивых особых точек). Локально (в малой окрестности особой точки) возможен как дивергентный характер потери устойчивости, так и флаттерный (первому отвечает монотонная расходимость фазовых траекторий от особой точки, во втором случае колебательный). Устойчивые автоколебательные режимы в динамике колесных экипажей получили название колебаний шимми (исследование автоколебаний относится к задачам глобального анализа).

Важным обобщением известного понятия из теории экипажа – критической скорости прямолинейного движения (отвечает дивергентному характеру потери устойчивости, известны аналитические выражения для модели одиночного экипажа и седельного автопоезда [95, 102, 106, 108, 119]) является понятие бифуркационного множества. Оно определяет критическую скорость кругового режима, отвечающего определенному углу поворота управляемых колес. Типичной и самой простой реализацией бифуркационного множества в окрестности прямолинейного режима является полукубическая парабола, однако рецепты построения бифуркационных множеств в аналитическом виде даже для случая одиночного экипажа отсутствовали (точка заострения соответствует критической скорости прямолинейного движения). Результаты Н. Troger, R. Scheidl, A. Stribersky, V. Kasani, K. Zeman базировались на численном методе продолжения по двум параметрам, не имеющего альтернативы при усложнении расчетной схемы экипажа, однако, как оказалось, даже для плоской велосипедной модели двухзвенного автопоезда возможно получение обозримого с точки зрения анализа влияния параметров соотношения, отвечающего за характер безопасности границы области устойчивости

прямолинейного режима движения в пространстве параметров по Н.Н. Баутину.

Отметим одну из наиболее близких по подбору моделей и основной проблематике работу [106], в которой поиск параметров стационарных режимов и анализ их устойчивости на основе строгих аналитических методов теории устойчивости, разработанных для линейных дифференциальных уравнений. Для анализа нелинейных моделей использовалось аналоговое моделирование, что сравнимо по конечному эффекту с численным интегрированием системы, что, следовательно, не давало в полной мере понять общую картину динамических качеств системы при изменении ее параметров, а также выделить критический набор характерных параметров, отвечающих за существенное изменение в поведении системы (то, что мы называем критическим множеством параметров, или бифуркационным множеством). На развитие, собственно, подходов нелинейного анализа, использующих результаты теории бифуркаций, была нацелена работа [70], в которой развивались подходы анализа одно-двух параметрического множества стационарных режимов моделей колесных экипажей, учитывающие нелинейный монотонный характер сил увода.

Построение равновесных поверхностей стационарных режимов указывали на реализацию анонсированных теорией гладких отображений особенностей Уитни – складок и сборок, а также давали объяснение смены характера устойчивости на основе бифуркаций рождения-слияния пары или тройки стационарных режимов. При анализе автоколебаний стойки шасси, традиционно для задач нелинейных колебаний, использовалось приближенное представление сил увода в виде первых двух-трех членов разложения в ряд Тейлора. Последнее исключает учет влияния реальной геометрии сил увода.

Второй возможный сценарий потери устойчивости движения экипажа связан с автоколебаниями управляемых колес (флаттерная потеря устойчивости).

С точки зрения современного анализа вопроса, шимми - это интенсивные самовозбуждающиеся колебания колес, которые проявляются в виде крутильных движений колес в горизонтальной плоскости (их вращения), которые сопровождаются другими движениями в продольной вертикальной плоскости. Постоянная поддержка этих колебаний зависит в первую очередь от наличия упругого пневматика (есть много моделей для описания взаимодействия колеса с абсолютно ровной и идеально шероховатой горизонтальной плоскостью, учитывающие подвод энергии в систему за счет неконсервативных позиционных сил) и особого сочетания таких параметров системы, как жесткость рулевого управления, коэффициент демпфирования в системе рулевого управления и момент инерции колеса относительно оси поворота.

В эксплуатационной практике принято, что свойство устойчивости к возникновению автоколебаний должна выполняться при уменьшении крутильной жесткости на 20% и уменьшении демпфирования в 1,5 раза (запас устойчивости).

В целом, задачу о возникновении шимми можно разбить на две части - задача определения границы устойчивости в пространстве параметров (линейная задача) и задачу определения характера потери устойчивости (опасная-безопасная), а также определение характеристик автоколебаний (амплитуда, частота), требующее рассмотрение нелинейной постановки задачи.

Ранее [68] были получены аналитические соотношения, позволяющие «в первом приближении» оценить рациональные численные значения определяющих параметров управляемого колесного модуля, однако следует учесть, что в этих работах не учитывались углы установки колес (развал-схождение) и некоторые характерные черты нелинейных зависимостей бокового увода, в том числе характеристики жесткостной неоднородности (конической и угловой).

Еще одной из поставленных задач является разработка метода приближенного нахождения характеристик автоколебаний управляемой оси автомобиля, который был бы «чувствительным» к экспериментально полученным характеристикам жесткостной неоднородности (конической и угловой) колеса и определял их допустимые границы с точки зрения безопасности движения.

Большой вклад в развитие унифицированных моделей взаимодействия колеса с опорной поверхностью внес Б.М. Шифрин, в частности, наиболее точных (М. Келдыша, Джима-Никравеша-Пацейки-Шарпа, Бидермана-Шумаева), которые в явной или неявной формах учитывают, как зоны адгезии, так и скольжения в пятке контакта. Так Б.М. Шифриным была получена модификация модели Бидермана-Шумаева (когда увод сопровождается продольным скольжением), пригодная для изучения неустановившегося увода в случае периодического изменения продольных сил в пятке контакта [99].

К важным новым теоретическим достижениям автора относится установление условий качения колеса с незначительным верчением [18, 23] (в этом случае можно пренебречь моментом трения в пяте контакта), что было подтверждено расчетами с использованием моделей М.В. Келдыша, Джима-Никравеша-Пацейки-Шарпа. На примере велосипедной модели экипажа, указано на возможность применения этого предположения при анализе устойчивости автомобиля с зафиксированным рулевым управлением.

### **Взаимодействие колеса с опорной поверхностью.**

При изучении вопроса устойчивости движения автомобиля невозможно обойтись без изучения связей между колесами автомобиля и опорной поверхностью. Проблемам качения пневматических колес автомобиля и самолета был посвящен ряд исследований, основывающихся на различных подходах к выбору моделей и набора параметров, характеризующих взаимодействие колеса с опорной поверхностью.



Впервые на явления упругой деформации при качении и на их последствия обратил внимание Осборн Рейнольдс. Затем в 1925 году автомобилистами (Г. Брулье) было обнаружено явление бокового псевдоскольжения (или поперечного упругого скольжения, или бокового увода). Боковой увод легко наблюдать на автомобилях. Если закрепить каким-то образом рулевое управление и слегка нажать на педаль газа, чтобы придать автомобилю некоторую скорость, тогда автомобиль опишет круг. Если прибавить газ, то автомобиль опишет круг большего радиуса. Следует подчеркнуть, что боковой увод наблюдается у баллонного колеса, которое катится без проскальзывания. Это явление обусловлено наличием у колеса деформируемой периферии. Под действием боковых сил, например на повороте (центробежные силы), колесо упруго отклоняется и катится «криво» в направлении, образующем угол с геометрической плоскостью недеформированного колеса, которая совпадает с видимым направлением качения.

Теория нестационарного качения, объединяющая явления продольного и бокового псевдоскольжений применительно к движению локомотива, была развита Ф.М. Картером. Картер феноменологически ввел линейные соотношения для продольной и боковой составляющих реакции в области контакта в функции от соответствующих псевдоскольжений.

Далее с целью «вписать» новое явление в рамки теоретической механики предлагалось рассматривать недеформируемые колеса, снабженные свойством упругого скольжения и бокового увода. При такой схематизации пропадает кинематическое уравнение связи, которое накладывается на баллонное колесо при его качении без проскальзывания и содержит величину поперечной деформации пневматика. Но в уравнениях движения появляется член, связанный с наличием поперечной силы, которая пропорциональна углу увода. Рокар сформулировал свою гипотезу увода в случае отсутствия наклона колеса. Таким образом, эта гипотеза применима лишь при изучении движения таких экипажей, оси колес которых остаются

всегда параллельными плоскости дороги. Поэтому область использования гипотезы Рокара является довольно ограниченной. Она не охватывает, например, движений велосипеда и мотоцикла, переднего колеса шасси самолета при упругой стойке, передних колес автомобиля при учете наклона осей шкворней и т.д.

Теории Рокара и Картера являются теориями линейного увода, когда боковая сила связана с углом увода линейным образом. Когда приложенное усилие становится равным силе, способной преодолеть сухое трение между материалом колеса в отсутствие качения и землей, то возникает полное боковое скольжение. Однако опытные данные показывают, что зависимость силы от величины увода носит нелинейный характер, и существует участок частичного проскальзывания, разделяющий линейный участок и участок полного скольжения. Таким образом, гипотеза увода справедлива лишь для достаточно малых величин угла увода. Тем не менее, многими исследователями принимается предположение о линейной зависимости между боковыми силами и углами увода.

Теория качения пневматика Ж.Х. Грейдануса является более полной по сравнению с теорией Рокара. В качестве параметров, характеризующих деформацию пневматика, выбираются отклонение «средней» точки линии контакта от своего равновесного положения и угол поворота касательной к линии качения в «точке контакта». Эти параметры определяют силы и моменты взаимодействия шины с дорогой и участвуют в формулировке неголономных связей.

Более полная концепция качения упругого колеса предложена М.В. Келдышем. Его подход позволяет описать простыми математическими средствами сложные механические явления, которые имеют место в контакте колеса с дорогой. Боковая сила связана с углом увода в виде дробно-иррациональной зависимости.

Наиболее полная эмпирическая модель взаимодействия колеса с опорной поверхностью представлена в работах Н.В. Расејка, E. Bakker [113,

114], так называемая «Магическая формула колеса». Появляется возможность в единообразной форме задавать боковую силу увода и пяточный момент как функции угла увода, а также продольную силу в пятне контакта как функцию полного проскальзывания. Существенным затруднением при ее использовании является необходимость определения большого числа эмпирически полученных коэффициентов.

### **Бифуркации рождения и слияния стационарных режимов и предельных циклов.**

#### *Понятие бифуркации*

Понятие бифуркации (раздвоение) в теории динамических систем охватывает все эффекты, связанные с качественными изменениями, происходящими в системе при изменении параметров: рождение-исчезновение стационарных режимов, предельных циклов. В первом случае говорят о действительных бифуркациях, в случае рождения-исчезновения предельного цикла о комплексных бифуркациях. Понятие бифуркационное множество (дискриминантное множество) определяет множество значений управляемых параметров, при которых происходят бифуркации [7, 93]. При пересечении параметром бифуркационного множества в системе происходит изменение или числа стационарных состояний, или предельных циклов [42, 63, 103, 111]. Существует определенный набор структурно устойчивых особенностей таких множеств, например, складка (fold); точка возврата (cusp); ласточкин хвост (swallowtail); бабочка (butterfly), реализующихся неустраняемым образом в случае малых структурных изменений системы. Так, складка (точка поворота) устойчивым образом реализуется в одномерном пространстве параметров; сборка – в двумерном пространстве. Ласточкин хвост и бабочка в пространстве управления  $R^3$  и  $R^4$  соответственно (при наличии свойств симметрии бабочка может реализовываться и в трехмерном пространстве параметров). Приложения теории особенностей в задачах анализа динамических систем получили название теории катастроф

(Р. Том) – конечные скачки в состоянии системы при бесконечно малых флуктуациях ее параметров.

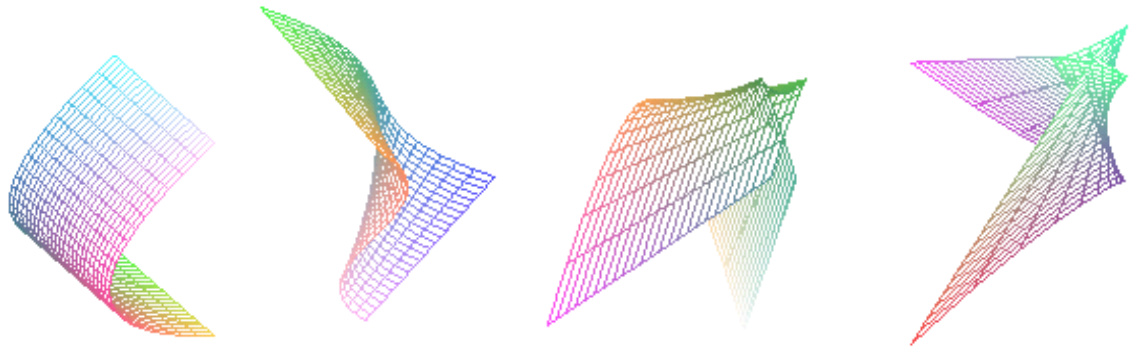


Рис.1.1 Первые четыре катастрофы по терминологии Р.Тома: складка (fold), сборка (casp), ласточкин хвост (swallowtail), бабочка (butterfly).

### Анализ вещественных бифуркаций с помощью индекса Пуанкаре особой точки.

На рис.1.2 представлена схема реализации бифуркации вилки.

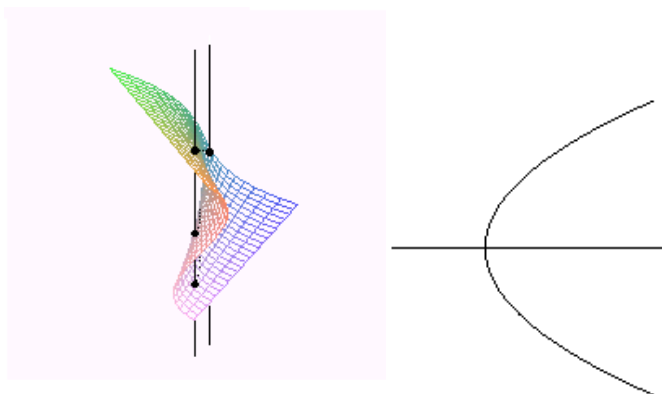


Рис.1.2

Реализуемые для случая «вилки» бифуркации слияния и рождения могут быть представлены в символическом виде

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Здесь первая цифра верхнего индекса особой точки равна числу корней характеристического уравнения с отрицательными действительными частями, вторая – с положительными. Тогда индекс Пуанкаре  $j(O^{2,0})=1$ , а  $j(O^{1,1})=-1$ . Имеет место «закон сохранения» суммы индексов Пуанкаре левой и правой частей символического равенства (до и после бифуркации).

Для кривой стационарных состояний с точкой поворота бифуркации слияния и рождения могут быть представлены в символическом виде (рис.1.3)

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$



Рис.1.3

Точке поворота (точке слияния или рождения) соответствует двукратный стационарный режим «седло-узел». Появление точек поворота для систем с одним управляющим параметром, в отличие от рассмотренной выше «вилки», является случаем общего положения (устойчивым образом реализуется при малых структурных изменениях системы). Случай «вилки» для систем с одним управляющим параметром может реализовываться лишь при выполнении дополнительных условий симметрии. В случае общего положения «вилка» распадается (следствие структурной неустойчивости) на две кривые, у одной из которых имеется точка поворота (рис. 1.4).



Рис.1.4. В случае общего положения и лишь одного управляющего параметра бифуркация вилки структурно неустойчива.

Свойства устойчивости кратных стационарных режимов, определяется соответствующими ляпуновскими величинами, номер которых определяется

кратностью стационарного режима. При этом условиям мягкой-жесткой потери устойчивости по Н.Н. Баутину [12] отвечает простая геометрическая картина слияния рождения одной или более пар стационарных режимов с противоположными индексами Пуанкаре.

Рассмотрим систему уравнений

$$f_i(x, \theta, \nu) = 0, x \in R^n, (i = 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

решения которой определяют множество стационарных состояний динамической модели (правые части уравнений движения модели зависят от двух скалярных параметров). Бифуркационным значениям параметров  $(\nu^*, \theta^*)$  отвечают кратные решения  $x^*$  системы (1.1). Якобиан системы обращается в нуль во всех точках критического множества  $x^*$ :

$$J = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{x^*} = 0, \quad x^* \in M_{kp}.$$

Если ранг матрицы Якоби равен  $n-1$  (имеется ровно одно нулевое собственное значение матрицы линеаризации), то поверхность стационарных состояний в окрестности соответствующей критической точки  $x^*$  в случаях “общего положения” является складкой или сборкой. Система (1.1) вместе с последним уравнением задает критическое множество на многообразии стационарных состояний (представляет собой параметризованную гладкую кривую). При этих предположениях будет возможным применение численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам. В точках «поворота» («гладких точках возврата») критического множества происходит исчезновение устойчивого стационарного состояния через бифуркацию складки, «каспу» («точке возврата») отвечает смена устойчивости стационарного состояния в начале координат (при  $\theta = 0, \nu = \nu_{kp}^+$ ).

При наличии малых возмущений, нарушающих симметрию динамической системы с двумя управляющими параметрами, «касп» не исчезает (смещается, теряя симметричность) – следствие структурной устойчивости. Конечные значения возмущений могут привести к

«организации» новой особенности, например, четырехкратному режиму (особенности ласточкин хвост).

Вообще говоря, любые качественные изменения в картине стационарных состояний при изменении управляемых параметров системы связаны с появлением-исчезновением пары особых точек, или в общем случае с возникновением-расщеплением  $k$ -кратной особой точки (вещественными бифуркациями). При этом поверхность стационарных состояний (равновесная поверхность) в малой окрестности данного  $k$ -кратного стационарного режима описывается соответствующей катастрофой из серии « $A_k$ » классификации И.В. Арнольда [7].

### **Влияние структуры сил на устойчивость механических систем.**

Теорема Лагранжа дала начало направлению, которое можно назвать анализом влияния структуры сил на устойчивость механических систем. В теории устойчивости продолжает активно развиваться направление, связанное с анализом структуры сил и ее влиянием на устойчивость линейных механических систем [43, 46, 48, 52, 58, 62, 63, 84, 85, 110]. Одними из первых результатов в этом направлении были теоремы Томсона-Тэта-Четаева о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость линейной консервативной системы, сюда же можно отнести теоремы Рэля, а также классические результаты И.И. Метелицына [83] для случая неконсервативных систем.

Проблемы устойчивости и колебаний неконсервативных систем возникают при проектировании конструкций в машиностроении, авиации, ракетной технике и т.д. большое количество работ по устойчивости неконсервативных систем относится к аэроупругости [50].

Наибольшую известность среди неконсервативных задач получил парадокс дестабилизации или эффект Циглера. Это явление изучалось в работах В.В. Болотина, Я.Г. Пановко, Г. Циглера, С.А. Агафонова, А.П. Сейраняна, О.Н. Кириллова [88, 1, 100, 56, 57] и других ученых [9, 10].

Отсутствие критерия существования Циглера объясняется алгебраической сложностью задачи.

Приведем положения теорем Томсона-Тэта о влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия линейной механической системы:

- 1) равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, может быть стабилизировано добавлением гироскопических сил только в том случае, если степень неустойчивости (число отрицательных коэффициентов у квадратичной формы потенциальной энергии) четная;
- 2) равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, остается устойчивым при добавлении диссипативных сил (с полной или неполной диссипацией) и (или) гироскопических сил;
- 3) равновесие, устойчивое при одних консервативных силах, становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией, а также диссипативных сил с полной диссипацией и гироскопических сил;
- 4) равновесие, неустойчивое при одних консервативных силах, не может быть стабилизировано при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил, если последние обладают полной диссипацией.

Неконсервативные позиционные силы, как правило, имеют дестабилизирующий эффект (разрушают устойчивость равновесия линейной системы), но в некоторых случаях могут привести к стабилизации.



## РАЗДЕЛ 2

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основная часть настоящей работы посвящена анализу устойчивости нелинейных механических систем с качением, реальным прототипом которых являются колесные экипажи. Приведем кратко известные факты, которые будут использоваться в дальнейшем.

#### 2.1 О моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью.

При составлении математических моделей, описывающих системы с качением, возникает вопрос об определении взаимодействия катящегося колеса и опорной поверхности.

Среди разных вариантов феноменологических теорий качения упруго деформированных колес [64] наибольшее распространение получила известная аксиоматика И. Рокара [95]. Ее общее признание объясняется как простотой, так и достаточно точным совпадением результатов, полученных экспериментально, с теоретическими результатами, полученными в результате такого подхода.

В соответствие с гипотезой увода И. Рокара **поперечная сила (сила увода), действующая при отклонении траектории качения эластичного колеса от плоскости колеса на угол  $\delta$  (явление увода), пропорциональна углу увода:**

$$Y = k \cdot \delta. \quad (2.1)$$

$k$  — коэффициент сопротивления уводу, определяемый экспериментально;

$\delta$  — угол увода (угол между направлением качения колеса и его центральной продольной плоскостью).

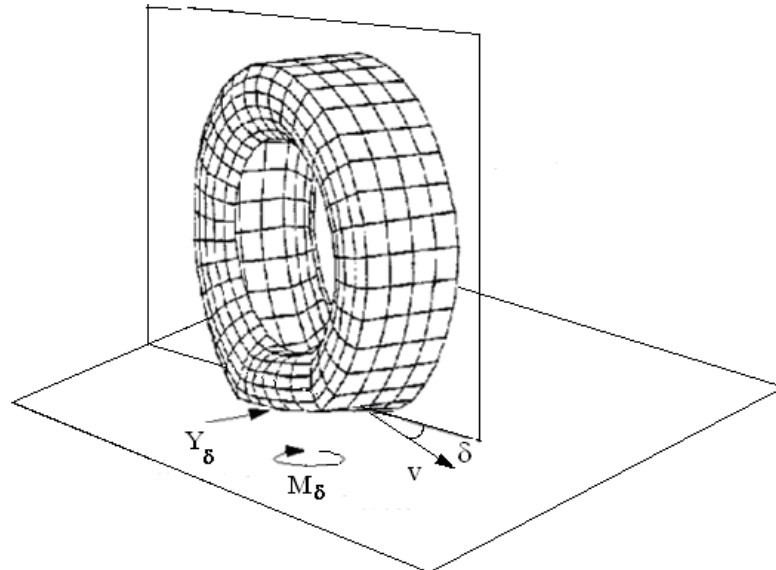


Рис. 2.1 Схема качения колеса с уводом.

Сила увода имеет природу сил трения, потому направлена в сторону, противоположную поперечному проскальзыванию; она смещена относительно оси колеса в продольном направлении, это порождает **стабилизирующий момент**, стремящийся развернуть колесо так, чтобы продольная плоскость колеса совпала с вектором скорости его центра.

#### *Аппроксимация сил бокового увода.*

Как показывают экспериментальные исследования, зависимость боковой реакции от угла увода может быть, как монотонной, так и с падающими участками, что характерно для случая частичного или полного проскальзывания.

Соотношение (2.2) представляет монотонную аппроксимацию, была предложена в работах Неймарка, Фуфаева [86]. Зависимость вида (2.3) учитывает немонотонность сил увода, где параметры  $\gamma$ ,  $\beta$  подбираем для сохранения геометрических характеристик монотонных зависимостей.

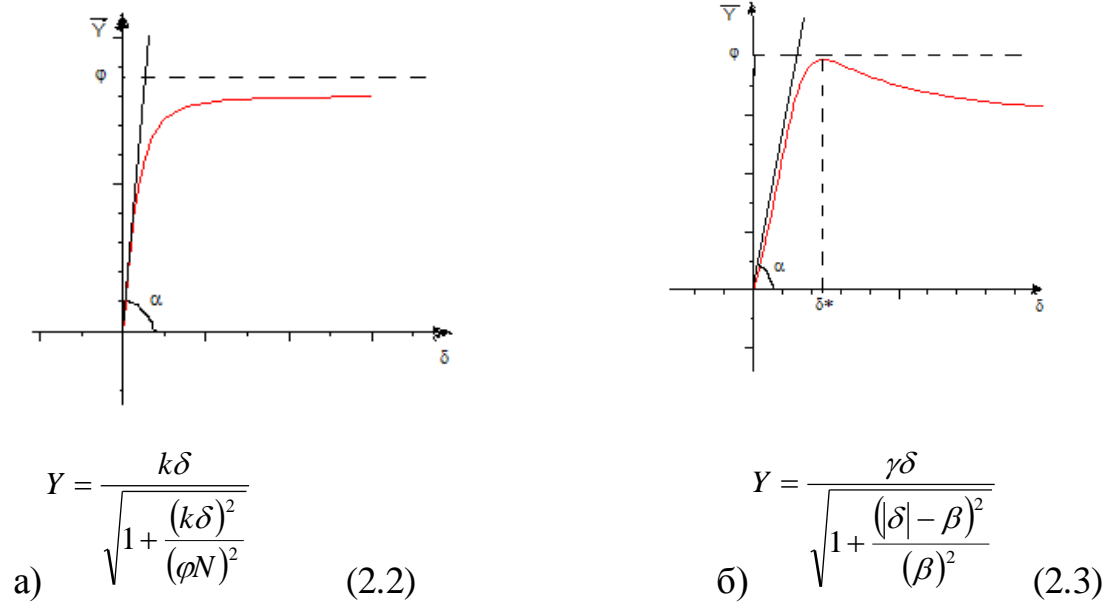


Рис.2.2. Зависимость силы увода от угла увода

(параметры  $\gamma = \sqrt{2}tg\alpha$ ,  $\beta = \frac{\varphi N}{2tg\alpha}$ )

$k$  – коэффициент сопротивления боковому уводу,

$N$  – реакция опоры,

$\varphi$  – коэффициент сцепления в поперечном направлении,

Зависимость силы увода с немонотонной характеристикой может быть также представлена в параметрической форме

$$Y = At/(t^2 + 1), \quad \delta = t/(B\sqrt{1 - (t/C)^2}) \quad (2.4)$$

Соотношение  $M_1 = A\delta$  и  $M_2 = A\delta/(B\delta^4 + C\delta^2 + 1)$  (2.5) представляет зависимость стабилизирующего момента в линейной и нелинейной постановке. Определяющие параметры момента функционально связаны с определяющими параметрами боковой силы, причем при некоторых углах увода момент может менять знак (рис.2.3), что влечет за собой нарушение стабилизирующего эффекта.

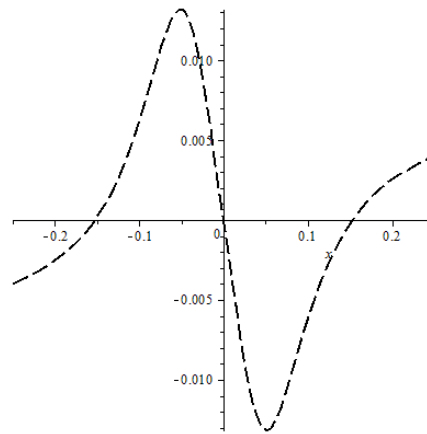


Рис. 2.3 График стабилизирующего момента.

Более полная концепция качения упругого колеса предложена М.В. Келдышем. Его подход позволяет описать простыми математическими средствами сложные механические явления, которые имеют место в контакте колеса с дорогой. **В соответствии с этой теорией кривизна траектории центра контакта шины  $O$  (рис.2.4) связана линейной зависимостью с боковой деформацией шины, угловой деформацией и углом наклона плоскости колеса к дороге (угла развала).** Указанные деформации возникают под действием соответствующих силовых воздействий – боковая сила, зависящая от линейной деформации шины и угла развала, пяточный момент, являющийся только функцией только угла скручивания, опрокидывающий момент, как функция от угла развала колеса и боковой деформации шины, что описывается следующим соотношением. Считаем, что угол развала отсутствует, тогда необходимо только четыре параметра, причем все они определяются экспериментальным путем.

$$F_y = ay; M_z = b\varphi; \quad (2.6)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории точки  $O$ ,  
 $y$  – деформация шины,  
 $\varphi$  – угол скручивания,  
 $a$  – коэффициент боковой жесткости колеса в поперечном направлении,

$b$  – крутильная жесткость (препятствует скручиванию относительно вертикальной оси)

$\alpha, \beta$  – кинематические параметры, входящие в уравнение кинематической связи.

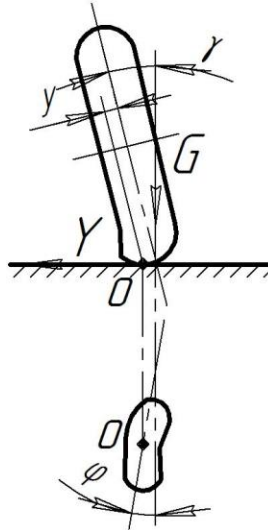


Рис. 2.4 Схема качения автомобильной шины.

В работе будет установлена связь между этих двух теорий.

## 2.2 О методе анализа автоколебаний.

Одной из особенностей нелинейных систем является возможность существования изолированных замкнутых траекторий (предельных циклов). Наиболее распространенный случай возникновения бесконечно малых предельных циклов связан со сценарием Андронова-Хопфа, который регламентируется теоремой Хопфа (на границе области колебательной неустойчивости системы линейного приближения отслаивается предельный цикл). Свойства устойчивости предельного цикла локально (на границе области колебательной неустойчивости стационарного режима) определяются условиями мягкой-жесткой потери устойчивости данного стационарного режима по Н.Н. Баутину [11, 12].

Приведем достаточные условия возникновения бесконечно малых предельных циклов.

**Теорема (Хопфа).** Пусть система

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R^1$$

имеет положение равновесия  $x=0$  при любых значениях параметра  $\alpha$ . Далее, пусть матрица линейного приближения при значениях  $\alpha$  в некоторой окрестности  $\alpha_0$  имеет пару комплексно сопряженных собственных значений  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \xi(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ , причем

$$\xi(\alpha_0) = 0, \quad \omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0, \quad \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha_0) \neq 0.$$

Кроме того, предположим, что остальные  $n-2$  собственных значений имеют ненулевые вещественные части.

Тогда при  $\alpha = \alpha_0$  от нулевого положения равновесия ответвляется однопараметрическая система замкнутых траекторий, отвечающих периодическим решениям периода  $T(\alpha) \approx 2\pi / \omega_0$ . Замкнутые траектории могут ответвляться либо при  $\alpha < \alpha_0$ , либо при  $\alpha > \alpha_0$ .

Эта бифуркация типична при изменении одного управляемого параметра системы: мягкая (безопасная) потеря устойчивости стационарного состояния по Н.Н. Баутину сопровождается рождением бесконечно малого устойчивого предельного цикла, который ограничивает рост возмущений; жесткой (опасной) потере устойчивости стационарного состояния отвечает стягивание к нему неустойчивого предельного цикла, который разрушает его устойчивость.

Периодические изменения обобщенных координат, которые отвечают предельному циклу, могут быть далекими от гармонических (синусоидальных), тем не менее, в инженерных приложениях зачастую достаточно знания лишь их обобщенных характеристик - амплитуды и периода, которые могут быть получены на основе предположений о близости исходных нелинейных колебаний к таковым (гармоническим) в некоторых малых характерных временных интервалах [15, 16, 34, 59].

### 2.2.1 Приближенный анализ автоколебаний на примере простейшей колебательной системы при наличии внешнего гармонического возбуждения.

В основу метода положена известная процедура теории нелинейных колебаний [88] в соответствии с которой, в первом приближении, периодическое решение нелинейного уравнения

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + F(x) = P_0 \sin \omega t \quad (2.7)$$

ищут в виде

$$x = a \sin(\omega t - \alpha), \quad (2.8)$$

где  $a$  - амплитуда,  $\alpha$  - запаздывание фазы (далее берется  $x = a \sin \omega t$ , а в уравнении (2.7) правая часть - в виде  $P_0 \sin(\omega t + \alpha)$ ).

Предполагается, что периодическое решение уравнения (2.7) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону с частотой внешнего возмущения, имея некоторое запаздывание по фазе. В соответствующие моменты фазовые переменные и их производные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \omega t = \frac{\pi}{2}: \quad & x = a; \quad \dot{x} = 0; \quad \ddot{x} = -a\omega^2; \quad \sin(\omega t + \alpha) = \cos \alpha; \\ \omega t = 0: \quad & x = 0; \quad \dot{x} = a\omega; \quad \ddot{x} = 0; \quad \sin(\omega t + \alpha) = \sin \alpha; \\ & -a\omega^2 m + F(a) = P_0 \cos \alpha; \\ & ka\omega = P_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти допущения накладывают ограничения на вид зависимости, которая определяет нелинейную силу упругости - она должна представляться нечетной функцией. Из системы нелинейных конечных уравнений (2.9) определяют искомую амплитуду  $a$  (определяющее уравнение может иметь несколько решений)

$$(-a \cdot \omega^2 \cdot m + F(a))^2 + (k \cdot a \cdot \omega)^2 = P_0^2.$$

В частном случае, когда нелинейная восстанавливающая сила задана кубикой (имеем *осциллятор Дуффинга* с гармоническим возмущением)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x\right) + 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}x\right) + \Omega^2 x^3 = P0 \sin(\omega t + \phi),$$

решения определяются кубическим уравнением

$$\Omega^4 AA^3 - 2\omega^2 \Omega^2 AA^2 + (\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2) AA - P_0^2 = 0$$

Дополним этот результат построением бифуркационного множества – множества параметров, при которых имеются кратные решения амплитудного уравнения (эта ситуация аналогична рождению-исчезновению кратных стационарных состояний в случае вещественных бифуркаций)

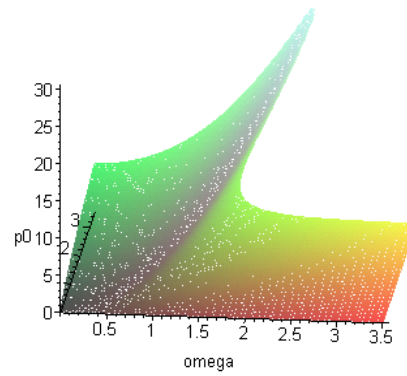
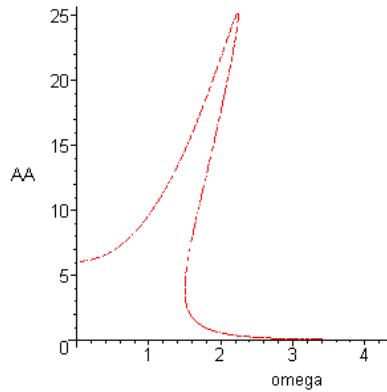
$$DISC := 4 \frac{\omega^6 P0^2}{\Omega^{10}} - \frac{16 \omega^{10} \gamma^2}{\Omega^{12}} - \frac{27 P0^4}{\Omega^8} + \frac{144 P0^2 \gamma^2 \omega^4}{\Omega^{10}} - \frac{128 \gamma^4 \omega^8}{\Omega^{12}} - \frac{256 \omega^6 \gamma^6}{\Omega^{12}}.$$

Так, поверхность катастрофы сборки и соответствующее ей критическое множество в пространстве параметров – касп естественным образом появляются и в случае комплексных бифуркаций (рис. 2.5).

Дискриминантное множество делит плоскость параметров на две области: параметрам внутри каспа соответствуют три замкнутые траектории (две устойчивые и одна неустойчивая); параметрам из другой области – одна замкнутая траектория (устойчивый предельный цикл).

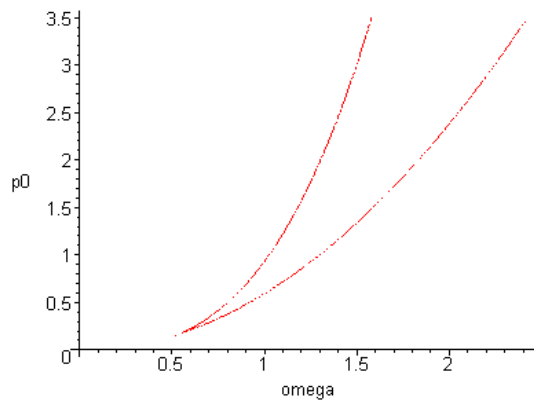
Этот подход возможно распространить для анализа автоколебаний, возникающих в нелинейных автономных системах.



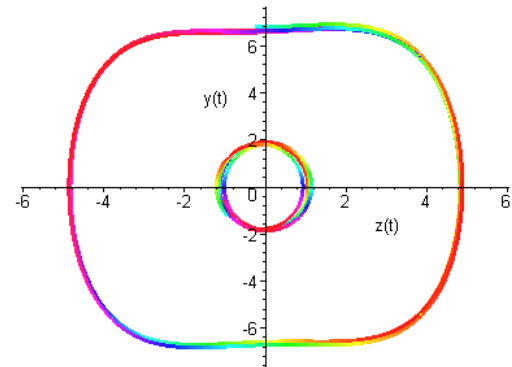


а) - амплитудно-частотная характеристика имеет две точки поворота

б) - поверхность установившихся колебаний имеет особенность сборки



в) - дискриминантное множество с точкой возврата



г) - в системе реализуются два устойчивых режима колебаний

Рис. 2.5

Рассмотрим систему с одной степенью свободы (отвечает условиям теоремы Хопфа), в которой реализуется отслоение бесконечно малого предельного цикла - случай мягкой потери устойчивости начала координат

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x(x^2 + y^2) + \alpha x - y; \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -y(x^2 + y^2) + \alpha y + x;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^2 + y^2) = -2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \alpha).$$

При всех значениях параметра  $\alpha$  в системе имеется единственная особая точка – в начале координат с индексом Пуанкаре  $j = +1$ . Устойчивость начала координат в некритических случаях определяется системой линейного приближения. Корни характеристического уравнения при  $\alpha < 0$  комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью – имеет место устойчивый фокус; при  $\alpha > 0$  комплексно-сопряженные корни с положительной действительной частью – имеет место неустойчивый фокус.

Каноническая функция Ляпунова указывает на глобальную устойчивость начала координат при  $\alpha \leq 0$ ; на наличие устойчивого предельного цикла (окружности радиуса  $\sqrt{\alpha}$ ) при  $\alpha > 0$ . При  $\alpha = 0$  из начала координат рождается устойчивый предельный цикл, а в начале координат появляется неустойчивый фокус. Возмущения (отклонения от начала координат) ограничиваются предельным циклом  $x^2 + y^2 = \alpha$ .

устойчивость начала координат,  $\alpha < 0$     потеря устойчивости начала координат,  $\alpha > 0$

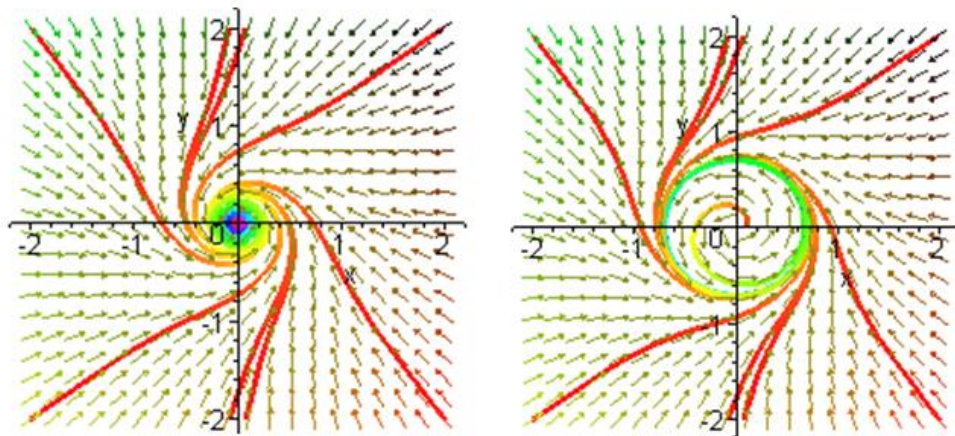


Рис. 2.6 - случай мягкой потери устойчивости

Ниже представлена реализация приближенного метода определения характеристик автоколебаний для системы (2.10).

Предполагается, что периодическое решение системы (2.10) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin(\omega t + \varphi)$$

где  $a$  - амплитуда,  $\varphi$  - запаздывание фазы.

Система (2.10) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} a \cos(\omega t) \cdot \omega + a \sin(\omega t) \cdot (a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t + \varphi)) - \alpha \cdot a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + \varphi) = 0 \\ b \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega + b \sin(\omega t + \varphi) \cdot (a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t + \varphi)) - \\ - \alpha \cdot b \sin(\omega t + \varphi) - a \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

В характерные моменты времени  $\omega t = 0$  и  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  получим систему конечных уравнений, отвечающих периодическому решению системы в характерные моменты времени:

$$a\omega + b \sin \varphi = 0;$$

$$b \cos \varphi \cdot \omega + b^3 \sin^3 \varphi - \alpha \cdot b \sin \varphi = 0 \quad (2.11)$$

$$a(a^2 + b^2 \cos^2 \varphi) - \alpha \cdot a + b \cos \varphi = 0;$$

$$-b \sin \varphi \cdot \omega + b \cos \varphi (a^2 + b^2 \cos^2 \varphi) - \alpha \cdot b \cos \varphi - a = 0$$

Для проведения удобства вычислений считаем:  $bs = b \sin \varphi$  и  $bc = b \cos \varphi$ ; решаем систему вида (2.11) относительно переменных  $a$ ,  $\omega$ ,  $bs$ ,  $bc$ .

Из линейной комбинации второго и четвертого уравнений системы получаем  $bc^2 = -a \cdot bs \cdot \omega - a^2$ , подставляя полученное соотношение во второе уравнение системы, имеем уравнение вида  $-a^2 bs \cdot \omega - \alpha \cdot a + bc = 0$ .

Исключаем неизвестные  $bs$ ,  $bc$ , разрешая систему вида

$$a\omega + bs = 0,$$

$$-a^2 bs \cdot \omega - \alpha a + bc = 0.$$

Получаем  $bs = -a\omega$ ,  $bc = -a^3 \omega^2 + \alpha \cdot a$ , тогда из третьего и второго уравнений системы (2.11) находим круговую частоту  $\omega^2 = \frac{\alpha}{a^2}$

и амплитудное уравнение  $\frac{a^2 - \alpha}{a^2} = 0$ ,  $a^2 - \alpha = 0$ , (2.12)

имеющее решение при неотрицательных значениях параметра  $\alpha$ .

Амплитуда по второй переменной:  $bs^2 = (a\omega)^2$ ,  $bc=0$ ,  $b^2=\alpha$ ; частота автоколебаний  $\omega=1$ , что соответствует утверждению теоремы Хопфа.

Полученные оценки полностью согласуются с положениями теоремы Хопфа и результатами глобального анализа системы (2.10) на основе МФЛ.

### 2.2.2 Приближенное определение характеристик автоколебаний динамической системы с двумя степенями свободы.

Рассмотрим структурное представление системы

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \tau y + p(V)\dot{y} + f_1(y) &= n\psi; \\ \ddot{\psi} + \tau\psi + p(V)\dot{\psi} + f_2(y) &= -\tilde{m}y, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $V \in R^1$  - характерный параметр, все коэффициенты системы неотрицательные величин,  $f_{1,2}(y)$  - нелинейные функции, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с линейными членами при  $y \rightarrow 0$ .

Из анализа системы линейного приближения следует, что нулевое решение теряет устойчивость при нарушении условия

$$p^2(V_{kp}) > \tilde{m}n / \tau.$$

Критическое значение параметра  $V = V_{kp}$ :  $p^2(V_{kp}) = \tilde{m}n / \tau$ , потеря устойчивости связана с прохождением пары комплексно-сопряженных корней через мнимую ось.

Полагая, что правая часть первого уравнения системы (2.13) играет роль периодического возмущения с неизвестной амплитудой и частотой

$$\psi = P_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

периодический отклик будем искать в виде  $y = A \sin \omega t$  (определению подлежат величины  $P_0$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $A$ ). В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\begin{aligned} \omega t = \pi/2: \quad y &= A; \quad \dot{y} = 0; \quad \ddot{y} = -A\omega^2; \\ \psi &= P_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -P_0\omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0\omega^2 \cos \alpha; \\ \omega t = 0: \quad y &= 0; \quad \dot{y} = A\omega; \quad \ddot{y} = 0; \\ \psi &= P_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = P_0\omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0\omega^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Для определения параметров автоколебательного режима имеем систему

$$\begin{cases} -A\omega^2 + \tau A - nP_0 \cos \alpha + f_1(A) = 0; \\ -P_0\omega^2 \cos \alpha + \tau P_0 \cos \alpha - pP_0\omega \sin \alpha + \tilde{m}A + f_2(A) = 0; \\ pA\omega = nP_0 \sin \alpha; \\ -P_0\omega^2 \sin \alpha + \tau P_0 \sin \alpha + pP_0\omega \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

После исключения неизвестных  $P_0$ ,  $\alpha$  из первых двух уравнений системы (2.14), получим соотношение, которое связывает между собой усредненную частоту периодического решения и его амплитуду

$$\omega^2 = \tau + f_1(A)/2A;$$

и уравнение, определяющее амплитуду автоколебаний

$$(\tilde{m}n - p^2\tau)A = f_1^2(A)/4A + p^2 f_1(A)/2 - n f_2(A). \quad (2.15)$$

Множество параметров, при которых имеются кратные решения определяющего уравнения, называется бифуркационным множеством (бифуркационным значениям параметров соответствует рождение или слияние нескольких автоколебательных режимов).

Приближенное соотношение (2.15) дает возможность построить бифуркационное множество; определить условия существования периодических решений системы (2.13) и их амплитуды.

Бифуркационные значения параметров могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} \left[ \frac{f_1^2(a)}{4a} + \frac{p^2 f_1(a)}{2} - n f_1(a) \right]' = (\tilde{m}n - p^2\tau), \\ \frac{f_1^2(a)}{4a} + \frac{p^2 f_1(a)}{2} - n f_1(a) = (\tilde{m}n - p^2\tau)a. \end{cases}$$

Как видно из определяющего уравнения, автоколебательный режим либо рождается при  $p^2(V_{kp}) = \tilde{m}n / \tau$ , либо исчезает, что согласуется с фактом реализации бифуркации Андронова – Хопфа при  $V = V_{kp}$ .

### 2.2.3 Приближенный анализ автоколебаний на примере модели шасси самолета.

Подход приближенного анализа автоколебаний, применяемый в работе, можно рассматривать как конструктивную иллюстрацию к приведенной

теореме Хопфа. Проиллюстрируем его на примере модели шасси самолета, которая учитывает лишь одну степень свободы по углу поворота относительно вертикальной стойки (рис.2.7). Данный метод, использован в разделах 3, 4 и 5.

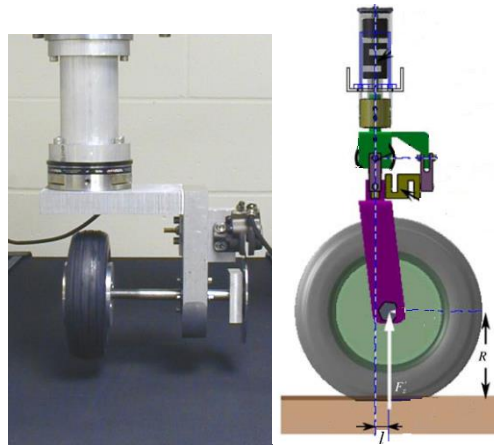


Рис. 2.7

$$\sigma \cdot \dot{\delta} + V \cdot \delta - V \cdot \psi - l \cdot \dot{\psi} = 0; \quad (2.16)$$

$$F \cdot \ddot{\psi} + c \cdot \psi + k \cdot \dot{\psi} + l \cdot Y(\delta) = 0,$$

где  $\delta$  – угол увода колеса,

$V$  – скорость невозмущенного движения,

$\sigma$  – параметр релаксации,

$l$  – вынос колеса,

$F$  – момент инерции относительно оси вращения стойки,

$c$  – жесткость при колебаниях колесной сцепки относительно вертикальной оси вращения, проходящей через точку сцепки  $O$ ,

$k$  – демпфирование при колебаниях колесной сцепки относительно вертикальной оси вращения, проходящей через точку сцепки  $O$ ,

$Y(\delta)$  – нелинейная сила увода.

Математическая модель шасси самолета имеет вид (2.16). Первое уравнение системы отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода. Во втором уравнении (уравнение вращательного движения относительно оси стойки) представлены конструктивные параметры системы.

Предполагается, что периодическое решение системы (2.16) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе  $\delta = a \sin \omega t$ ;  $\psi = p_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , здесь  $a$ ,  $p_0$  - амплитуды,  $\varphi$  - запаздывание фазы,  $\omega$  - круговая частота (выбираем для неосновной переменной для удобства реализации метода).

В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения в виде (2.17)

$$\begin{aligned} \omega t = \pi/2: \quad & \delta = a; \quad \dot{\delta} = 0; \quad \ddot{\delta} = -a\omega^2; \\ & \psi = P_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -P_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \cos \alpha; \\ \omega t = 0: \quad & \delta = 0; \quad \dot{\delta} = a\omega; \quad \ddot{\delta} = 0; \\ & \psi = P_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = P_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В этом случае параметры автоколебаний ( $a$ ;  $p_0$ ;  $\omega$ ;  $\varphi$ ) определяются из системы конечных уравнений

$$\begin{cases} \sigma a \omega - V p_0 \sin(\varphi) - l p_0 \cos(\varphi) \omega = 0; \\ Va - V p_0 \cos(\varphi) + l p_0 \omega \sin(\varphi) = 0; \\ -F p_0 \sin(\varphi) \omega^2 + c p_0 \sin(\varphi) + k p_0 \cos(\varphi) \omega + \frac{\kappa p_0 \cos(\varphi) \omega}{V} - l Y(0) = 0; \\ -F p_0 \omega^2 \cos(\varphi) + c p_0 \cos(\varphi) - k p_0 \sin(\varphi) \omega - \frac{\kappa p_0 \sin(\varphi) \omega}{V} - l Y(a) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

После исключения неизвестных  $p_0$ ,  $\varphi$  и  $\omega$  из первых трех уравнений системы (2.18), получим соотношение (2.19), которое определяет амплитуду периодического решения

$$\begin{aligned} -FakV^3 + FV^2Y(a)l^2 - FV^2Y(a)\sigma l - FV^2\kappa a - k^2a\sigma V^2 + \\ + VY(a)k\sigma l^2 - 2V\kappa a c \sigma - Va\sigma^2 c k + Y(a)\kappa\sigma l^2 - a\sigma^2 c k - \kappa^2 a \sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

В результате построения кривой, соответствующей соотношению (2.19) (рис.2.8), получим интервал скорости, в котором реализуются автоколебания, которые в свою очередь определяют интервал колебательной неустойчивости, что возможно проверить используя критерий Раусса-Гурвица.

Соотношение (2.20), полученное именно таким образом, совпадает с соотношением (2.19) в случае, если  $a=0$ .

$$\sigma \cdot k^2 \cdot V + \sigma \cdot k \cdot l^2 \cdot C_1 + \sigma^2 \cdot k \cdot c + V^2 \cdot F \cdot k + V \cdot F \cdot l^2 \cdot C_1 - V \cdot \sigma \cdot F \cdot l \cdot C_1 = 0, \quad (2.20)$$

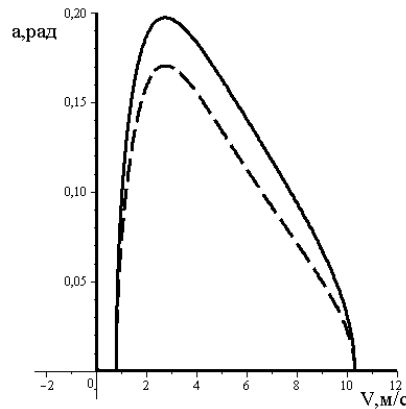


Рис. 2.8. Амплитудные кривые.

*Реализация данного метода справедлива для любой нелинейной функции  $Y(\delta)$ , при этом появляется возможность исследовать приближенное представление функции.* Например, для данной системы проведена оценка амплитуды автоколебаний (рис.2.8), когда нелинейная функция имеет различное представление: монотонной зависимости силы увода соответствует пунктирная амплитудная кривая, немонотонной зависимости – непрерывная. На основе *амплитудного уравнения может быть получено бифуркационное множество, разбивающее плоскость конструктивных параметров на области с различным числом автоколебаний.*

Результаты, полученные на основе приближенного метода, проверяются путем численного интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений.

***Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования.***

Для исходных нелинейных уравнений численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при



характерных численных значениях конструктивных параметров. Рисунок 5 иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при  $l < -c/C_1$  (в частности  $l = -0.12м$ ,  $V = 2.5 м/с$ ). Пунктирной кривой соответствует монотонная зависимость силы увода (начальное возмущение по углу отклонения от невозмущенного положения  $\psi_0 = 0.45 рад$ ).

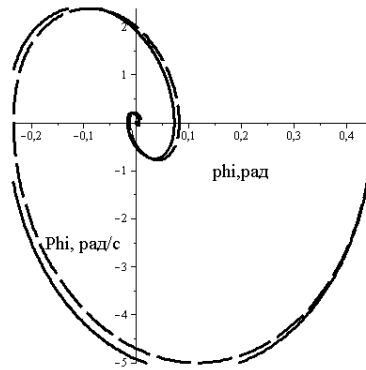


Рис.2.9

Случай флаттерной неустойчивости при  $l = 0.1м$ ,  $V = 2.5 м/с$  представлен на рисунке 2.10. Фазовые траектории, полученные численным интегрированием, наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис.2.10, а, б – случай монотонной зависимости сил увода; рис.2.10, в – иллюстрирует характеристики устойчивого предельного цикла при монотонной зависимости сил увода (пунктир) и немонотонной (непрерывная)).

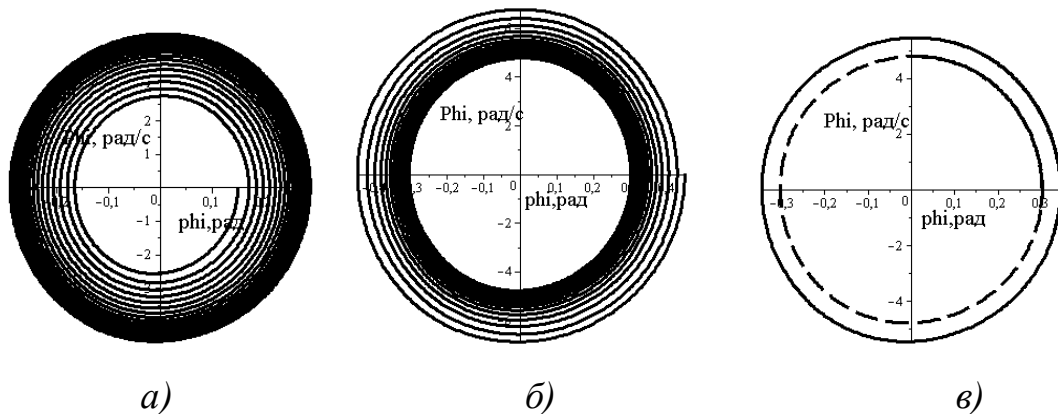


Рис. 2.10

На рисунке 2.11 представлены амплитуды автоколебаний, полученные по переменной  $\delta$  (рис.2.11, *a* – соответствует немонотонной зависимости сил увода; рис.2.11, *б* – соответствует монотонной зависимости сил увода).

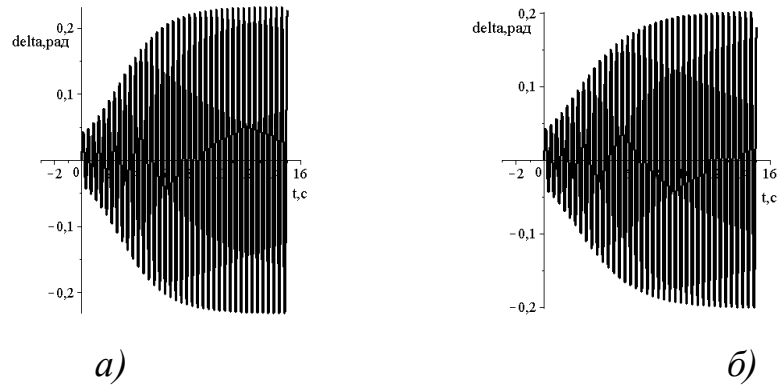


Рис.2.11

Результаты, полученные на основе численного интегрирования, указывают на достаточно хорошее согласование с результатами, полученными на основе приближенного численно-аналитического подхода.

## РАЗДЕЛ 3

### **АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛЯХ СТОЙКИ ШАССИ**

Явление шимми – это интенсивные самовозбуждающиеся колебания катящихся колес, проявляющиеся в виде крутильных движений колес в горизонтальной плоскости (их верчения), которые сопровождаются другими движениями из продольной вертикальной плоскости [40, 67].

Шимми элементов шасси в первую очередь связано с наличием упругого пневматика, который при определенных условиях «трансформирует» часть подводимой к транспортному средству энергии в энергию крутильных колебаний колеса и стойки.

В целом задачу о возникновении шимми можно разбить на две части – задачу определения границы устойчивости в пространстве параметров (линейная задача) и задачу определения характеристик автоколебаний (амплитуда, частота), что требует учета нелинейных характеристик взаимодействия.

#### **3.1 Анализ автоколебаний колесного модуля при двух моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью.**

Анализ условий возникновения автоколебаний был и остается предметом исследования многих авторов как представителей теоретического направления [8,53,67,86,99,118,117], так и инженеров-исследователей авиационного и автомобильного транспорта [36,40, 90-92,113,107,116,112]. При определении характеристик боковой реакции упругого колеса с опорной поверхностью наибольшее распространение получили две постановки: модельная (теория М.В. Келдыша [53]) и феноменологическая (аксиоматика И. Рокара [95]).

На рис. (3.1) представлена колесная сцепка, имеющая одну степень свободы и учитывающая наличие пяточного момента и эффект неустановившегося увода.

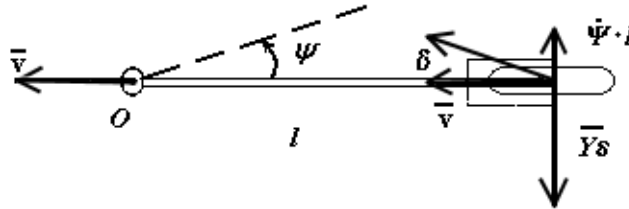


Рис.3.1. Общий вид колесной сцепки

В системе (3.1) представлена модель взаимодействия колеса с опорной поверхностью по И. Рокару [117].

$$\sigma \dot{\delta} + V \delta - V \psi - l \dot{\psi} = 0; \quad (3.1)$$

$$F \ddot{\psi} + k \cdot \dot{\psi} + c \cdot \psi + l \cdot Y(\delta) + M(\delta) = 0.$$

Первое уравнение отвечает кинематической связи, принятой в теории неустановившегося увода:

$\delta$  – угол увода колеса (угол между вектором скорости центра колеса и продольной плоскостью симметрии колеса);

$V$  – скорость невозмущенного движения;

$\sigma$  – параметр релаксации.

Сила увода  $Y(\delta)$  имеет характер функции насыщения, при малых углах увода представима в виде линейной функции  $Y = -k_{\delta} \cdot \delta$ , где  $k_{\delta}$  – коэффициент сопротивления уводу;  $M(\delta)$  – стабилизирующий пяточный момент, представлен в виде линейной функции угла увода  $M = -b \cdot \delta$ .

Конструктивные параметры системы:

$F$  – момент инерции относительно оси вращения стойки,

$k$  – коэффициент демпфирования,

$l$  – вынос колеса, предполагается положительным (вынос назад),

$c$  – крутильная жесткость стойки относительно вертикальной оси.

Уравнения возмущенного движения колесной сцепки, соответствующие модели М.В. Келдыша [53, 86], имеют вид (3.2)

$$\begin{aligned} V \cdot \varphi + \dot{y} + V \cdot \psi + l \cdot \dot{\psi} &= 0; \\ -\alpha \cdot V \cdot y + \beta \cdot V \cdot \varphi + \dot{\varphi} + \dot{\psi} &= 0; \\ F \ddot{\psi} + k \cdot \dot{\psi} - l \cdot F_y(y) - M_z(\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $y$  – боковая деформация пневматика,

$\varphi$  – угловая деформация пневматика ( $\delta = -\varphi$  – связь с углом увода),

$F_y$  – боковая сила,  $M_z$  – пяточный момент.

В этом случае для описания модели требуется четыре параметра:

$a_y$  – коэффициент жесткости колеса в поперечном направлении ( $F_y = a_y \cdot y$  – поперечная сила в линейном приближении),

$b$  – крутильная жесткость колеса ( $M_z = b \cdot \varphi$  – пяточный момент относительно вертикальной оси),

$\alpha, \beta$  – кинематические параметры, входящие в уравнения кинематических (неголономных) связей.

Если формально принять соотношение  $\delta = -y/\sigma$ , которое, вообще говоря, справедливо при качении колеса с установившимся уводом, то учитывая соотношение между  $\delta, \varphi$ , из физических соображений получим  $Y(\delta) = -F_y(y)$  (система (3.2) вырождается в систему (3.1)).

Как показано в [99], параметр релаксации определяется отношением кинематических параметров  $\sigma = \beta/\alpha$  (это же соотношение следует из второго уравнения системы (3.2) при предположении о реализации установившегося увода), что дает возможность определить параметры модели И. Рокара по параметрам модели М.В. Келдыша.

Далее учитывая согласованность параметров ( $k_\delta = a_y \cdot \sigma, \sigma = \beta/\alpha$ ), определим условия устойчивости по линейному приближению систем (3.1) и (3.2).

Граница области колебательной неустойчивости системы (1) задается соотношением (3.3) (условие обращения в нуль предпоследнего определителя Гурвица), в котором участвует приведенный коэффициент сопротивления уводу  $\tilde{k}_\delta = k_\delta + b/l$ , учитывающий влияние пяточного момента (формально соответствует увеличению номинального коэффициента сопротивления уводу)

$$V^2 F k + V(F l^2 \tilde{k}_\delta - \sigma F l \tilde{k}_\delta + \sigma k^2) + (\sigma k l^2 \tilde{k}_\delta + \sigma^2 k c) = 0. \quad (3.3)$$

Далее рассмотрены характерные особенности границы области устойчивости в пространстве характерных конструктивных параметров системы. Наличие положительных корней уравнения (3.3) относительно параметра  $V$  свидетельствует о наличии интервала колебательной неустойчивости в диапазоне от  $V_{\min}$  до  $V_{\max}$  ( $V_{\min}$ ,  $V_{\max}$  – корни уравнения). Такой интервал может существовать, если коэффициент при  $V$  в (3.3) меньше нуля (необходимое условие наличия интервала колебательной неустойчивости). При  $l < 0$  или  $l > \sigma$ , интервал колебательной неустойчивости отсутствует.

При  $l < \sigma$  колебательная неустойчивость может реализовываться в интервале  $l_1 < l < l_2$ , где  $l_1$  и  $l_2$  корни квадратного уравнения  $F l^2 \tilde{k}_\delta - \sigma F l \tilde{k}_\delta + \sigma k^2 = 0$ . При  $k=0$  интервал колебательной неустойчивости реализуется при  $l_1=0$ ,  $l_2=\sigma$ .

На границе интервала скорости, отвечающей паре чисто мнимых корней, в соответствии с теоремой Андронова-Хопфа происходит комплексная бифуркация (рождения-исчезновения) предельного цикла [77, 101].

Представим результаты анализа условий возникновения автоколебаний колесной сцепки на основе приближенного метода анализа автоколебаний.

Для системы (1) получены соотношения (3.4, 3.5), которые определяют усредненную частоту периодического решения

$$\omega^2 = \frac{V^2 k + V c (\sigma - l)}{F V (\sigma - l) - k l \sigma}; \quad (3.4)$$

и его амплитуду

$$-F a k V^3 + F V^2 \tilde{Y}(a) l^2 - F V^2 \tilde{Y}(a) \sigma l - k^2 a \sigma V^2 + V \tilde{Y}(a) k \sigma l^2 - V a \sigma^2 c k = 0, \quad (3.5)$$

где  $\tilde{Y}(a) = Y(a) + M(a)/l$  – нелинейная функция, учитывающая наличие пяточного момента.

Заметим, что подстановка в (3.5) линейной гипотезы увода приведет к выражению (3.3), определяющему границы колебательной неустойчивости – амплитудная кривая, примыкающая к оси абсцисс, соответствует устойчивым автоколебаниям, а вырезаемый ею интервал на оси продольной скорости движения соответствует области колебательной неустойчивости.

Для системы (3.2) аналогичным образом получена неявная функция, определяющая амплитуды автоколебаний по боковой деформации пневматика (отметим, что при  $k=0$  из выражения амплитудной кривой следуют известные условия устойчивости [86])

$$(-\beta + l \cdot \alpha)(\alpha \cdot \beta \cdot l + b \cdot a)(-b \cdot l + F \cdot \beta \cdot V^2) > 0.$$

Нелинейная зависимость боковой силы аппроксимировалась дробно иррациональной функцией

$$Y(\delta) = \frac{a_y \sigma \delta}{\sqrt{1 + \frac{(a_y \sigma \delta)^2}{(\phi \cdot N)^2}}} \text{ для системы (3.1), } Y(y) = \frac{a_y y}{\sqrt{1 + \frac{(ya)^2}{(\phi \cdot N)^2}}} \text{ для системы (3.2),}$$

где  $N$  – вертикальная реакция опоры,  $\phi$  – коэффициент сцепления в поперечном направлении.

Графики соответствующих амплитудных кривых (см. рис.3.2), получены с помощью пакета MAPLE для следующего набора числовых значений параметров:  $a_y=98100$  Н/м;  $\phi=0.4$ ;  $b=2943$  Н/м;  $l=0.25$  м;  $F=30$  кгм<sup>2</sup>;  $N=5000$  Н;  $k=57.3$  Нмс;  $c=0$ ;  $\alpha=60$  1/м<sup>2</sup>;  $\beta=20$  1/м.

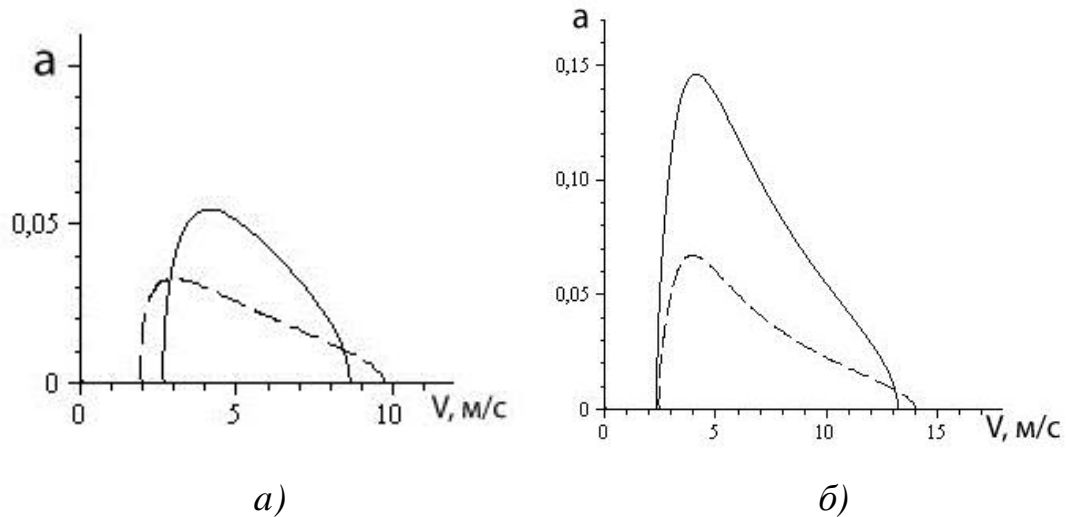


Рис.3.2. Сравнение амплитудных кривых систем (1) – пунктирная кривая и (2) – сплошная: а) случай  $b=0$ ; б) случай  $b \neq 0$ .

Поясним «видимое» рассогласование амплитудных кривых по их интенсивности – система (3.1) характеризуется автоколебаниями по углу увода, а амплитуды автоколебаний системы (3.2) отнесены к поперечной деформации пневматика (если их отнести к углу увода  $\delta = y/\sigma$ , амплитуды будут примерно равные – коэффициент пропорциональности  $1/\sigma = 3$ ).

Таким образом, при  $k=0$  структура области устойчивости в плоскости параметров  $(l, V)$  систем (3.1) и (3.2) не совпадает, при ненулевом параметре демпфирования процессы автоколебаний идентичны как по областям их возникновения, так и по интенсивности, что указывает на «тесную взаимосвязь» рассматриваемых моделей взаимодействия упругого колеса с опорной поверхностью. Учет пяточного момента приводит к расширению области автоколебаний, причем вид нелинейной зависимости пяточного момента на их интенсивность практически не влияет (существенны лишь линейные члены – линейный эффект); уменьшение коэффициента сцепления приводит к снижению интенсивности автоколебаний – нелинейный эффект.

Далее в работе будет использована феноменологическая аксиоматика И. Рокара – характеристики взаимодействия колеса с опорной поверхностью



– сила увода и пяточный момент считаются известными нелинейными зависимостями.

### **3.2 Бифуркации автоколебаний колесного модуля в окрестности прямолинейного режима движения.**

Уравнения возмущенного движения передней стойки представлены для случая вертикальной стойки

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\delta} + V \delta - V \psi - l \dot{\psi} &= 0 \\ F \ddot{\psi} + c \dot{\psi} + k \psi + l Y(\delta) + M(\delta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первое уравнение системы (3.6) отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода. Во втором уравнении системы (3.6) момент силы увода относительно оси стойки будет рассмотрен приближенно (учтено различное количество членов разложения нелинейной зависимости силы увода по углу увода).

#### **3.2.1 Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению.**

Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы был использован критерий Рауса-Гурвица. В случае учета пяточного момента граница области колебательной неустойчивости задается соотношением (3.7) (условие обращения в нуль предпоследнего определителя Гурвица), в котором участвует приведенный коэффициент сопротивления уводу  $\tilde{C}_1 = C_1 + A/l$ , учитывающий влияние пяточного момента

(формально соответствует увеличению номинального коэффициента сопротивления уводу)

$$V^2 F k + V(F l^2 \tilde{C}_1 - \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k^2) + (\sigma k l^2 \tilde{C}_1 + \sigma^2 k c) = 0. \quad (3.7)$$

Далее рассмотрены характерные особенности границы области устойчивости в пространстве характерных конструктивных параметров системы. Наличие положительных корней уравнения (3.7) относительно параметра  $V$  свидетельствует о наличии интервала колебательной неустойчивости в диапазоне от  $V_{\min}$  до  $V_{\max}$  ( $V_{\min}$ ,  $V_{\max}$  – корни уравнения). Такой интервал может существовать, если коэффициент при  $V$  в (3.7) меньше нуля (необходимое условие наличия интервала колебательной неустойчивости). При  $l < 0$  или  $l > \sigma$  интервал колебательной неустойчивости отсутствует; случай достаточно большого отрицательного выноса (вынос вперед) приводит к дивергентной неустойчивости [20].

При  $l < \sigma$  колебательная неустойчивость может реализовываться в интервале  $l_1 < l < l_2$ , где  $l_1$  и  $l_2$  корни квадратного уравнения  $F l^2 \tilde{C}_1 - \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k^2 = 0$ , границы интервала приближенно могут быть заданы соотношениями:  $l_1 = \frac{k^2}{F \tilde{C}_1}$  и  $l_2 = \sigma$ .

В случае, когда величина  $\tilde{C}_1$  на несколько порядков превышает все остальные параметры системы (что действительно имеет место в силу физического смысла, рассматриваемых параметров, исключение составляет параметр крутильной жесткости, величина которого теоретически может иметь такой же порядок), интервал колебательной неустойчивости может

быть приближенно получен как решение квадратного уравнения  $V^2 F k - V \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k l^2 \tilde{C}_1 = 0$  для любого значения выноса из интервала  $l_1 < l < l_2$ . Решения такого уравнения можно аппроксимировать выражениями, из которых следует расширение интервала неустойчивости при увеличении величины  $\tilde{C}_1$  (чем меньше порядок величины выноса, тем точнее оценка границ интервала колебательной неустойчивости):  $V_{\min} = \frac{k l}{F}$ ,  $V_{\max} = \frac{l \sigma \tilde{C}_1}{k}$ .

При возрастании параметра крутильной жесткости  $c$  (до порядка величины  $\tilde{C}_1$ ) интервал колебательной неустойчивости будет сужаться, что следует из анализа уравнения

$$V^2 F k - V \sigma F l \tilde{C}_1 + \sigma k l^2 \tilde{C}_1 + \sigma^2 k c = 0.$$

Таким образом, при фиксированных значениях параметров системы, увеличение вертикальной нагрузки на колесный модуль может привести к колебательной неустойчивости (если при меньших нагрузках система была устойчива, так как  $C_1 = N c_1$ ). Эти результаты согласуются с выводами работы [53] о возможности стабилизации колебательной неустойчивости при больших скоростях движения за счет увеличения положительного выноса (вынос назад) колесной сцепки.

Таким образом, характерной областью колебательной неустойчивости модели является интервал от  $V_{\min}$  до  $V_{\max}$ , где  $V_{\min}$ ,  $V_{\max}$  – корни уравнения (3.7), размеры которого увеличиваются при росте параметра  $\tilde{C}_1$ .

При  $V = V_{\min}$  линейное приближение теряет устойчивость – пара собственных значений проходит через мнимую ось. Тогда согласно теореме Андронова-Хопфа в системе реализуется замкнутая фазовая траектория (существует предельный цикл при  $V < V_{\min}$ , или при  $V > V_{\min}$ ). Условия устойчивости предельного цикла могут быть определены косвенно – при  $V < V_{\min}$  имеем неустойчивый предельный цикл, при  $V > V_{\min}$  – устойчивый. Аналогичные бифуркации предельного цикла происходят в системе при  $V = V_{\max}$ .

Характер (опасный-безопасный) границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [12], определяемый первым ляпуновским коэффициентом, носит локальный характер (справедлив в малой окрестности критического значения параметра  $V$ ). Ниже приведен подход, позволяющий проанализировать явление автоколебаний во всем интервале колебательной неустойчивости [34].

### 3.2.2 Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний.

Соотношения (3.8, 3.9) определяют усредненную частоту периодического решения системы (3.6)

$$\omega^2 = \frac{V^2 k + V c (\sigma - l)}{F V (\sigma - l) - k l \sigma} \quad (3.8)$$

и его амплитуду

$$-F a k V^3 + F V^2 \tilde{Y}(a) l^2 - F V^2 \tilde{Y}(a) \sigma l - k^2 a \sigma V^2 + V \tilde{Y}(a) k \sigma l^2 - V a \sigma^2 c k = 0, \quad (3.9)$$

где  $\tilde{Y}(a) = Y(a) + M(a)/l$  – нелинейная функция, учитывающая наличие пяточного момента. Уравнение (3.8) имеет физический смысл лишь в случае неотрицательной правой части, это возможно только при выполнении условия  $V > \frac{kl\sigma}{F(\sigma-l)}$ .

Проведем оценку амплитуды автоколебаний для случая, когда во втором уравнении системы (3.6)  $M(\delta) = 0$ , а сила увода представлена в виде монотонной зависимости  $Y(\delta) = C_1\delta / \sqrt{1 + (C_1\delta/\varphi N)^2}$ . Уравнение (3.9) будет иметь вид

$$-FakV^3 + FV^2Y(a)l^2 - FV^2Y(a)\sigma l - k^2a\sigma V^2 + VY(a)k\sigma l^2 - Va\sigma^2ck = 0 \quad (3.10)$$

Теоретический интерес представляет оценка амплитуд автоколебаний в случае различной точности аппроксимации сил увода (учет различного числа членов разложения в ряд Тейлора зависимости  $Y(a)$ ).

На рисунке 3.3 представлен график зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости: кривая 1 – сила увода аппроксимирована линейным и кубическим членами; кривая 2 – учитываются члены разложения до пятой степени включительно; кривая 3 – до членов седьмой степени включительно (результат подстановки численных значений следующего набора параметров:  $c_1=8$ ;  $\sigma=0.18$  м;  $l=0.05$  м;  $F=1.8$  кГм<sup>2</sup>;  $N=490$  Н;  $k=2.254$  Нмс;  $c=392$  Нм).

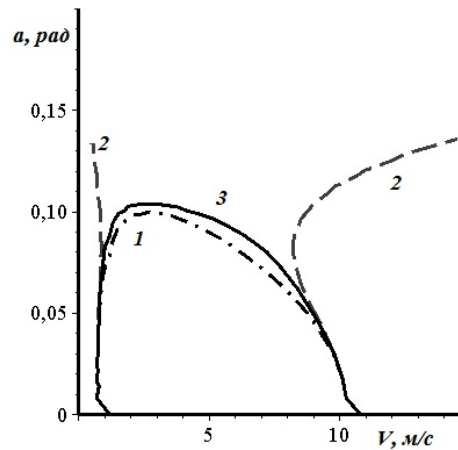


Рис. 3.3

При данном наборе численных значений параметров для случаев 1 - 3 невозмущенное движение системы неустойчиво в интервале скоростей от 0.78 м/с до 10.3 м/с, граница области устойчивости является безопасной – соответствует рождению устойчивого предельного цикла на левой границе, на правой границе его исчезновению. Результат, представленный на кривой 2 (рис. 3.3), интересен с точки зрения существования бифуркационного множества (бифуркационным значениям параметров соответствует рождение или слияние двух автоколебательных режимов, один из которых устойчивый, другой неустойчивый). Как следствие, в области устойчивости при  $V > 10.3$  м/с появляется неустойчивый предельный цикл, ограничивающий область притяжения невозмущенного движения.

Бифуркационные значения параметров могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} [FV^2 l^2 Y(a) - FV^2 \sigma l Y(a)]' = (FkV^3 - V\sigma^2 c k - k^2 \sigma V^2); \\ (FV^2 l^2 - FV^2 \sigma l) Y(a) = (FkV^3 - V\sigma^2 c k - k^2 \sigma V^2) a; \end{cases} \quad (3.11)$$

на основе метода продолжения по двум параметрам (например  $l$ ,  $V$ ), начальным условиям соответствовала бы точка поворота на амплитудной кривой.

Однако, в данном частном случае бифуркационное множество, может быть получено проще – как дискриминант полинома, представляющего амплитудное уравнение (3.10) (учитывались члены разложения функции  $Y(a)$  до пятой степени малости включительно). Определяющий полином имеет вид

$$\alpha_4 a^4 + \alpha_2 a^2 + \alpha_0 = 0, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -3FVC_1^5\sigma l + 3C_1^5k\sigma l^2 + 3FVC_1^5l^2, \\ \alpha_2 &= -4FVC_1^3l^2\varphi^2N^2 + 4FVC_1^3\sigma l\varphi^2N^2 - 4C_1^3k\sigma l^2\varphi^2N^2, \\ \alpha_0 &= (8FkV^2 + 8FVC_1l^2 + 8k^2\sigma V - 8FVC_1\sigma l + 8\sigma^2ck + 8C_1k\sigma l^2)\varphi^4N^4 \end{aligned}$$

Дискриминантом уравнения (3.12) является выражение

$$\begin{aligned} (6FkV^3 + 5FV^2C_1l^2 - 5FV^2C_1\sigma l + 6k^2\sigma V^2 + 5VC_1k\sigma l^2 + 6V\sigma^2ck)(FV^3k + \\ + FV^2C_1l - FV^2C_1\sigma l + k^2\sigma V^2 + VC_1k\sigma l^2 + V\sigma^2ck) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Соотношение (3.13) при выбранных численных значениях параметров системы определяет бифуркационное множество (рис. 3.4), которое делит плоскость параметров  $(l, V)$  на области с различным числом автоколебательных режимов: одним неустойчивым (внешняя окрестность внешней замкнутой кривой); двумя – устойчивым и неустойчивым (область

между замкнутыми кривыми); во внутренней области автоколебания отсутствуют.

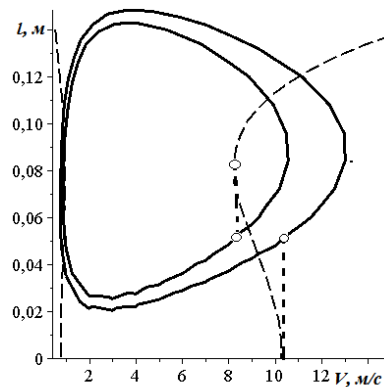


Рис. 3.4

Из рисунка 3.4 видно, что для амплитудной кривой, соответствующей значению выноса  $l=0,05$  м, пара автоколебательных режимов существует в интервале скорости от 8 м/с до 10,2 м/с (левый интервал не рассматривается из-за его малости). Проектируя характерные точки амплитудной кривой на бифуркационное множество, получим точки пересечения, которые имеют одну и ту же ординату  $l=0,05$  м, что подтверждает корректность полученного бифуркационного множества (все точки бифуркационного множества проходятся при изменении параметра выноса от 0,02 м до 0,145 м).

### 3.2.3 Оценка амплитуд автоколебаний с учетом пяточных моментов.

Проведем оценку амплитуды автоколебаний для случая, когда динамическая система (3.6) учитывает наличие пяточного момента. Пяточный момент представляет собой момент силы увода относительно проекции центра оси колеса на опорную поверхность. Рассмотрен случай как



линейной зависимости  $M_1 = A\delta$ , так и исходной нелинейной зависимости пяточного момента  $M_2 = A\delta/(B\delta^4 + C\delta^2 + 1)$ , сила увода в обоих случаях представлена в виде нелинейной монотонной зависимости  $Y(\delta) = C_1\delta/\sqrt{1+(C_1\delta/\varphi N)^2}$ .

На рисунке 3.5 представлены графики зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости: кривые 1 – динамическая система (3.6) учитывает наличие пяточного момента  $M_1$  по линейному приближению, 2 – пяточный момент  $M_2$  представлен в виде нелинейной зависимости; кривая 3 – пяточный момент отсутствует (результат подстановки численных значений следующего набора параметров:  $c_1=8$ ;  $\sigma=0.18$  м;  $l=0.1$ м;  $F_{zz}=1.8$ кгм<sup>2</sup>;  $N=490$ Н;  $k=2.254$  Нмс;  $c=392$ Нм).

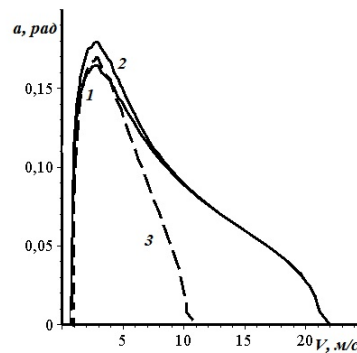


Рис. 3.5

Таким образом, учет пяточного момента приводит к значительному расширению области неустойчивости, что подтверждается при анализе условий устойчивости по линейному приближению. При этом, амплитудная кривая при различных представлениях пяточного момента практически не изменяется, то есть при анализе автоколебаний достаточно учитывать лишь линейную часть пяточного момента. В то же время следует указать на

возможное искажение картины наблюдаемых автоколебаний (рис.3.3) при приближенном представлении сил бокового увода.

### 3.3 Анализ автоколебаний колесной сцепки в круговом режиме движения.

Колесная сцепка (рис.3.6 – колесная сцепка в круговом режиме движения) может быть прототипом как управляемого колесного модуля, так и самоориентируемых колесных опор различных транспортных средств.

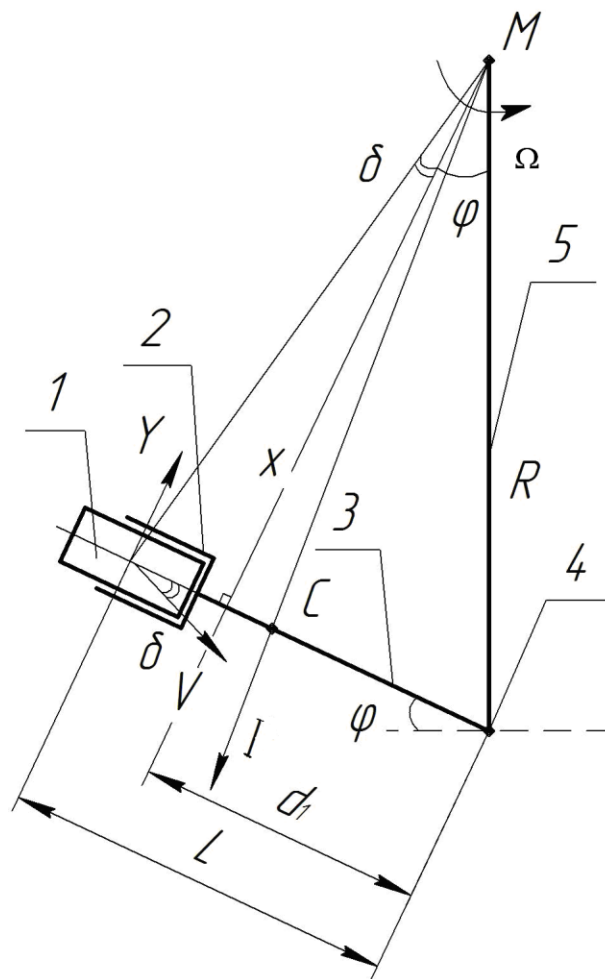


Рис. 3.6. Колесная сцепка в круговом режиме движения:  
 1 – колесо; 2 – ступица; 3—ведомое звено; 4 – шарнир;  
 5 – водило;  $\varphi$  - угол "складывания"

### 3.3.1 Анализ стационарных круговых состояний ведомого звена в нелинейной постановке.

Пусть точка  $O$  (см. рис.3.7) движется по окружности радиуса  $r$  с постоянной угловой скоростью. Обозначим расстояние до мгновенного центра  $M$  вращения той точки  $F$  продольной оси  $B_1O$  ведомого звена, скорость которой направлена вдоль оси величиной  $x = v \cdot \cos \psi \cdot \Omega^{-1}$ . Стационарный режим системы определяется уравнением (3.14), определяющим условие равновесия относительно точки сцепки (равенство нулю момента внешних сил относительно точки  $O$ )

$$v \cdot d_1 \cdot m \cdot \cos \psi \cdot \Omega = l \cdot Y(\delta), \quad (3.14)$$

где

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{v \cdot \sin \psi + l \cdot \Omega}{v \cdot \cos \psi}.$$

Тогда особые точки системы (стационарные состояния ведомого звена) удовлетворяют соотношению

$$M_1(x) = m \cdot d_1 \cdot \Omega^2 \cdot x = l \cdot Y(\delta(x)) = M_2(x). \quad (3.15)$$

При различных положениях точки  $B_1$  на окружности радиуса  $l$  геометрическое место точек  $F$  есть окружность диаметра  $r=OM$ , проходящая через точки  $O$  и  $M$  (так как  $OF \perp MF$ ). Установим, при каких значениях параметров  $v$  и  $\Omega$  уравнение (3.15) имеет решения, сколько их и какие они (устойчивые или неустойчивые).

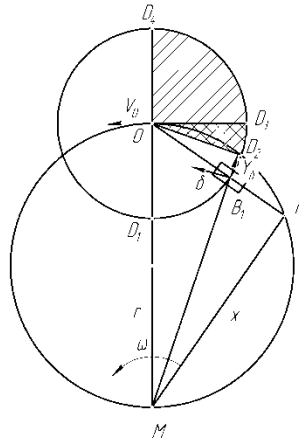


Рис. 3.7.

Рассмотрим случай  $r > l$ . Обозначим  $R = \sqrt{r^2 - l^2}$ . Если точка  $B_1$  принадлежит дугам  $D_1D_2$ ,  $D_2D_3$ ,  $D_3D_4$ ,  $D_4D_1$  окружности радиуса  $l = OB_1$  (рис.3.7), то для соответствующих значений угла увода  $\delta(x)$  имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{l - \sqrt{r^2 - x^2}}{x} < 0, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{l + \sqrt{r^2 - x^2}}{x} > 0, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{l + \sqrt{r^2 - x^2}}{x} > 0, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{l - \sqrt{r^2 - x^2}}{x} < 0. \end{aligned}$$

Особые точки могут быть лишь в областях I-II. При обходе против часовой стрелки величина  $x$  увеличивается в области I от значения  $\sqrt{r^2 - l^2}$  до максимального значения  $r$ , в области II - уменьшается от  $r$  до 0. При таком же обходе областей I-II угол  $\delta$  увеличивается от 0 до  $\pi/2$ .

Стационарные состояния колесной сцепки соответствуют точкам пересечения кривых  $M_1 = M_1(x)$  и  $M_2 = M_2(x)$ . Число этих состояний в двух первых областях определяется расположением кривой  $M_2 = M_2(x)$  относительно ломаной  $M_1 = M_1(x)$  (рис.3.8). На этом рисунке показаны возможные случаи поведения особых точек при изменении угловой скорости  $\Omega$ . При малых значениях есть лишь одна особая точка  $A_1$  в области I (ломаная 1). С увеличением  $\Omega$  при некотором значении  $\Omega = \Omega_0$  на границе областей I-II возникает кратная особая точка (ломаная 2), которая при  $\Omega > \Omega_0$  распадается на две особые точки  $S$  (в области I) и  $A_2$  (в области II) – ломаная 3. При дальнейшем увеличении  $\Omega$  точки  $A_1$  и  $S$  движутся на встречу,

сливаясь при  $\Omega = \Omega_1$  (ломаная 4). При  $\Omega > \Omega_1$  в области I особых точек нет, есть лишь в области II (ломаная 5). Таким образом, имеются бифуркации рождения стационарных состояний (на границе областей I-II) и их слияния (в области I).

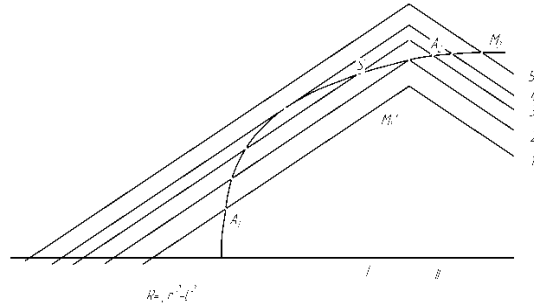


Рис. 3.8

Условия устойчивости и анализ автоколебаний, рассматриваемой системы, в прямолинейном движении были рассмотрены в 2.2.

Уравнения движения колесной сцепки в круговом режиме имеют вид (3.16) (будем предполагать, что углы складывания достаточно малы, при этом тригонометрические функции рассмотрены приближенно:  $\sin \psi \approx \psi$ ,  $\cos \psi \approx 1$ )

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \dot{\delta} + v \cdot \delta - v \cdot \psi - l \cdot (\dot{\psi} + \Omega) &= 0; \\ F_{zz} \cdot \ddot{\psi} + c \cdot \psi + k \cdot \dot{\psi} + l \cdot Y(\delta) - l \cdot m \cdot v \cdot \Omega &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Первое уравнение системы (3.16) отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода, здесь  $\delta$  – угол увода колеса;  $v$  – скорость движения точки сцепки O;  $\sigma$  – параметр релаксации,  $\Omega$  – угловая скорость радиус-вектора MO (рис.3.8). Во втором уравнении системы (3.16) момент силы увода относительно точки сцепки будет рассмотрен приближенно (с точностью до кубического приближения), конструктивные параметры системы: момент инерции  $F_{zz}$  относительно точки сцепки; параметры  $c$ ,  $k$  определяют жесткость и демпфирование при колебаниях колесной сцепки.

### 3.3.2 Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению.

Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Уравнения в вариациях и соответствующее ему характеристическое уравнение были получены в окрестности невозмущенного кругового режима движения  $\delta = \delta_0$ ,  $\psi = \psi_0$ .

В данном случае необходимое условие устойчивости невозмущенного движения, положительность всех коэффициентов характеристического уравнения, может быть нарушено.

Так как первый определитель  $\Delta_1 > 0$ , а  $\Delta_3 = \Delta_2 \cdot A_3$ , анализ флаттерной неустойчивости сводится к проверке знака  $\Delta_2$  и  $A_3$ . Численным методом, с использованием пакета Maple, найдем границы в плоскости параметров  $(l, v)$ , где нарушаются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (рис.3.9).

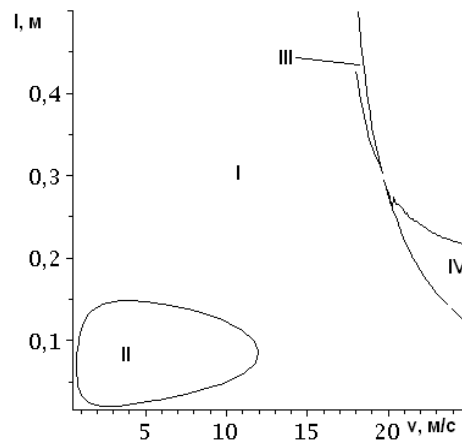


Рис.3.9.

Область I – соответствует области устойчивости (автоколебания отсутствуют). В области II, III наличие пары комплексно-сопряженных собственных значений с положительной действительной частью предопределяет развитие флаттерной (колебательной) неустойчивости. В

области IV имеется хотя бы одно положительное собственное значение, предопределяющее дивергентный характер неустойчивости.

Положение и размеры области неустойчивости могут существенно изменяться в зависимости от конкретных численных значений, как других конструктивных параметров, так и группы эксплуатационных параметров (последние, например вертикальная нагрузка, могут иметь широкий диапазон возможных значений), что осложняет выбор рациональных значений конструктивных параметров, обеспечивающих устойчивость невозмущенного движения во всех возможных условиях эксплуатации. Характер (опасный-безопасный) границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [12], определяемый первым ляпуновским коэффициентом, носит локальный характер.

### 3.3.3 Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний.

Предполагаем, что периодическое решение системы (3.16) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе  $\delta = \delta_0 + a \sin \omega t$ ;  $\psi = \psi_0 + p_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ,

здесь  $a$  - амплитуда,  $\varphi$  - запаздывание фазы, где  $\delta_0 = \frac{\Omega \cdot l \cdot (m \cdot v^2 + c)}{v(l \cdot C_1 + c)}$ ,

$\psi_0 = -\frac{\Omega \cdot l(m \cdot v^2 - l \cdot C_1)}{v(l \cdot C_1 + c)}$  значения фазовых переменных, соответствующих круговому стационарному режиму (найденны на основе уравнений линейного приближения).

В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\omega t = \pi/2: \quad \delta = \delta_0 + a; \quad \dot{\delta} = 0; \quad \ddot{\delta} = -a\omega^2;$$

$$\psi = \psi_0 + p_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -p_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -p_0 \omega^2 \cos \alpha;$$

$$\omega t = 0: \quad \delta = \delta_0; \quad \dot{\delta} = a\omega; \quad \ddot{\delta} = 0;$$

$$\psi = \psi_0 + p_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = p_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -p_0 \omega^2 \sin \alpha.$$

В этом случае параметры автоколебаний ( $a$ ;  $p_0$ ;  $\omega$ ;  $\varphi$ ) определяются из системы конечных уравнений

$$\begin{cases} \sigma a \omega + V \delta_0 - V(\psi_0 + p_0 \sin(\varphi)) - l(p_0 \cos(\varphi) \omega + \Omega) = 0; \\ V(\delta_0 + a) - V(\psi_0 + p_0 \cos(\varphi)) + l(p_0 \omega \sin(\varphi) + \Omega) = 0; \\ -F p_0 \sin(\varphi) \omega^2 + c(\psi_0 + p_0 \sin(\varphi)) + k p_0 \cos(\varphi) \omega - lY(0) - lmv\Omega = 0; \\ -F p_0 \omega^2 \cos(\varphi) + c(\psi_0 + p_0 \cos(\varphi)) - k p_0 \sin(\varphi) \omega - lY(a) - lmv\Omega = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Исключим неизвестный  $p_0$ ,  $\varphi$  из первых двух уравнений системы (3.17). Из оставшихся двух уравнений системы (3.17) составляется результат (исключается неизвестная  $\omega$ ), определяющий неявную зависимость амплитуды автоколебаний от параметра скорости движения  $v$ .

Амплитудная кривая была получена для случая, когда сила увода аппроксимируется линейным и кубическим членами разложения в ряд Тейлора. На рисунке 3.10 представлен график зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости (получен для следующего набора численных значений параметров:  $C_1=8$ ;  $\sigma=0.18$  м;  $l=0.05$ м;  $F=1.8$ кгм<sup>2</sup>;  $N=490$ Н;  $k=2.254$  Нмс;  $c=392$ Нм;  $m=50$ кг;  $r=40$ м;  $\Omega = v/r$  1/с).

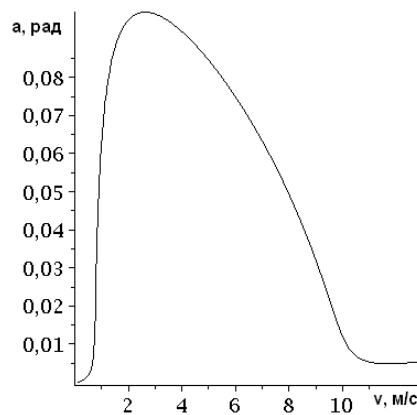


Рис.3.10

Численно полученная амплитудная кривая имеет незначительные отклонение от границ интервала неустойчивости (теоретически границы интервала неустойчивости  $v = 0.78$  м/с,  $v = 11.9$  м/с должны совпадать с «началом» и «концом» амплитудной кривой), это несоответствие может быть



связано с погрешностью определения стационарного кругового режима (был получен для линеаризованной системы).

### 3.3.4 Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования.

Для исходных нелинейных уравнений численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при характерных численных значениях конструктивных параметров. Рисунок 3.11 иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при  $l=0.18м$ ,  $v=25 м/с$ .

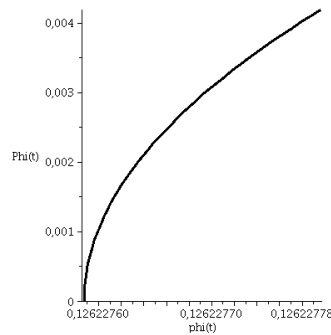


Рис.3.11

Случай флаттерной неустойчивости при  $l=0.05м$ ,  $v=6 м/с$  представлен на рисунке 3.12. Фазовые траектории, полученные численным интегрированием по переменной  $\psi$ , наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис.3.12, а, б). Рисунок 3.12, в иллюстрирует развитие колебаний по переменной  $\delta$ .

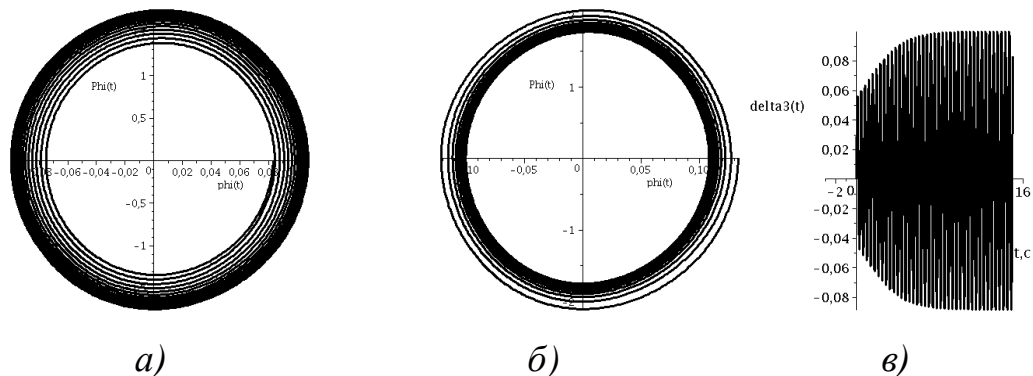


Рис. 3.12

Радиус круговой траектории рассмотрен в этом случае был достаточно большой ( $\sim 40$  м.), что дает возможность сопоставить данные результаты с предыдущими, полученными для прямолинейного движения. Погрешность, возникающая в случае численного интегрирования около 10-20 %.

Таким образом, описанный подход дает возможность провести анализ автоколебаний нелинейной модели колесной сцепки, моделирующей опорные стойки колесных транспортных систем, в окрестности кругового движения.

### **3.4 Влияние структуры сил в задаче шимми стойки шасси.**

Проведем анализ устойчивости и автоколебаний передней «неуправляемой» стойки, имеющей свободу поворота по двум каналам – рысканья и крена относительно продольной оси корпуса [30]. Рассмотрим влияние характерных параметров системы на область колебательной неустойчивости и амплитуды автоколебаний.

В работе [68] был проведен анализ влияния структуры сил на устойчивость невозмущенного прямолинейного движения модели колесной сцепки с двумя степенями свободы (варьировались числовые значения характерных конструктивных параметров, отвечающих различным по математической классификации группам сил). В данной задаче проведен анализ автоколебаний в нелинейной постановке.

Пусть  $\theta$  и  $\psi$  – углы поворота установки шасси вокруг оси стойки и оси крена соответственно, тогда схематически передняя стойка экипажа представлена на рис.3.13.

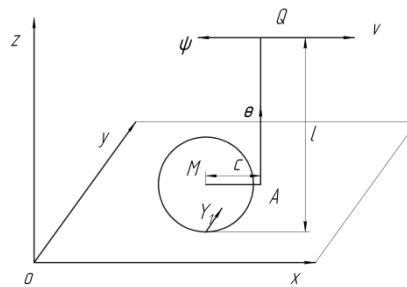


Рис. 3.13

Уравнения движения ноги шасси в окрестности прямолинейного движения при нулевом выносе ( $c=0$ ) имеют вид [70] (для полноты постановки добавлен пяточный момент  $M(\alpha)$ , возникающий в пятне контакта колеса с опорной поверхностью при качении с уводом):

$$\begin{aligned} B \cdot \ddot{\theta} + \chi_1 \cdot \dot{\theta} + h \cdot \dot{\theta} - \frac{I \cdot v}{r} \dot{\psi} + M(\alpha) &= 0; \\ C \cdot \ddot{\psi} + \chi \cdot \dot{\psi} + h_1 \cdot \dot{\psi} + \frac{I \cdot v}{r} \dot{\theta} + l \cdot Y(\alpha) &= 0; \\ \alpha &= \theta + \frac{\dot{\psi} \cdot l}{v}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В системе (3.18) учтены следующие параметры:

$B, C$  – осевые моменты инерции стойки относительно оси вращения и оси крена соответственно;

$I$  – центральный осевой момент инерции колеса относительно собственной оси вращения;

$r$  – радиус колеса;

$v$  – скорость невозмущенного движения;

$\chi, \chi_1$  – коэффициенты крутильной жесткости колесного модуля;

$h, h_1$  – параметры, определяющие демпфирование при колебаниях;

$l$  – расстояние от плоскости дороги до оси крена.

Силы увода и пяточный момент рассматриваются в виде нелинейных зависимостей угла увода  $\alpha$ :  $Y(\alpha) = k\alpha / \sqrt{1 + (k\alpha/\varphi N)^2}$ , где  $k$  – коэффициент сопротивления боковому уводу,  $N$  – вертикальная реакция опоры,  $\varphi$  –

коэффициент сцепления в поперечном направлении;

$$M(\alpha) = \mu\alpha / (\mu_4 \alpha^4 + \mu_2 \alpha^2 + 1).$$

Линеаризованные уравнения возмущенного движения колесного модуля имеют весь спектр сил по общепринятой математической классификации – инерционные, диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные

$$A\ddot{x} + (D + vG)\dot{x} + (K + lP)x = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} h_1 + \frac{k \cdot l^2}{v} & \frac{\mu \cdot l}{2v} \\ \frac{\mu \cdot l}{2v} & h \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I}{r} - \frac{\mu \cdot l}{2v^2} \\ -\left(\frac{I}{r} - \frac{\mu \cdot l}{2v^2}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \chi & \frac{k \cdot l}{2} \\ \frac{k \cdot l}{2} & \chi_1 + \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$A$ ,  $D$ ,  $K$  – симметричные матрицы коэффициентов инерционных, диссипативных и потенциальных сил, а  $G$ ,  $P$  – кососимметрические матрицы коэффициентов гироскопических и неконсервативных позиционных сил.

Наличие в системе двух характерных параметров, определяющих величины гироскопических членов (в зависимости от скорости движения) и неконсервативных позиционных (от высоты стойки) дает возможность при линейном анализе применить общие теоремы о влиянии структуры сил на устойчивость невозмущенного движения.

Известные результаты [1-3, 31, 38, 51, 115] об условиях стабилизации линейных механических систем, которые находятся под воздействием сил произвольной математической структуры, гарантируют устойчивость при достаточно большой полной диссипации и положительной определенности матрицы консервативных сил, либо достаточно больших потенциальных силах и положительной определенности матрицы диссипативных сил, на

которую наложено некоторое дополнительное условие [31]. Наличие же достаточно больших позиционных неконсервативных сил, как правило, приводит к потере устойчивости линейной системы общего вида. Однако, в случае конечных сил, возможны механизмы стабилизации или потери устойчивости, которые приводят к неоднозначной трактовке влияния структуры сил на устойчивость линейной системы.

В областях флаттерной неустойчивости возможно возникновение устойчивых одночастотных автоколебаний (один из механизмов их возникновения – бифуркация Андронова – Хопфа [78]). Вопрос о характере потери устойчивости (опасная-безопасная по Н.Н. Баутину [12]) может быть решен на основе анализа амплитудной кривой и характеристик устойчивости линеаризованной модели. Далее предложен приближенный подход нахождения амплитудной кривой в виде неявной функции параметров системы, что, в свою очередь, связано с условием разрешимости некоторой вспомогательной системы нелинейных конечных уравнений.

### 3.4.1 Оценка амплитуд автоколебаний в окрестности прямолинейного режима движения.

Для реализации приближенного метода оценки амплитуд автоколебательной системы введем дополнительное дифференциальное уравнение, которое соответствует теории неустановившегося увода  $\sigma \cdot \dot{\alpha} + v \cdot \alpha - v \cdot \theta - l \cdot \dot{\psi} = 0$ .

Тогда система (3.18) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \dot{\alpha} + v \cdot \alpha - v \cdot \theta - l \cdot \dot{\psi} &= 0 \\ B \cdot \ddot{\theta} + \chi_1 \cdot \theta + h \cdot \dot{\theta} - \frac{I_1 \cdot v}{r} \dot{\psi} + M(\alpha) &= 0 \\ C \cdot \ddot{\psi} + \chi \cdot \psi + h_1 \cdot \dot{\psi} + \frac{I_1 \cdot v}{r} \dot{\theta} + l \cdot Y(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Предполагается, что периодическое решение системы (3.19) в окрестности момента наибольшего отклонения от положения равновесия и в окрестности момента, когда отклонения равны нулю, изменяется по

гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе  $\alpha = a \sin \omega t$ ,  $\psi = p_0 \sin(\omega t + \varphi_\psi)$ ,  $\theta = q_0 \sin(\omega t + \varphi_\theta)$ , здесь  $a$ ,  $p_0$ ,  $q_0$  - амплитуды,  $\omega$  - круговая частота автоколебаний,  $\varphi_\psi$ ,  $\varphi_\theta$  - фазы запаздывания.

В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\omega t = \pi/2: \quad \alpha = a, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \ddot{\alpha} = -a\omega^2,$$

$$\psi = p_0 \cos \varphi_\psi, \quad \dot{\psi} = -p_0\omega \sin \varphi_\psi, \quad \ddot{\psi} = -p_0\omega^2 \cos \varphi_\psi,$$

$$\theta = q_0 \cos \varphi_\theta, \quad \dot{\theta} = -q_0\omega \sin \varphi_\theta, \quad \ddot{\theta} = -q_0\omega^2 \cos \varphi_\theta.$$

$$\omega t = 0: \quad \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = a\omega, \quad \ddot{\alpha} = 0,$$

$$\psi = p_0 \sin \varphi_\psi, \quad \dot{\psi} = p_0\omega \cos \varphi_\psi, \quad \ddot{\psi} = -p_0\omega^2 \sin \varphi_\psi,$$

$$\theta = q_0 \sin \varphi_\theta, \quad \dot{\theta} = q_0\omega \cos \varphi_\theta, \quad \ddot{\theta} = -q_0\omega^2 \sin \varphi_\theta,$$

подставляя эти соотношения в систему (3.19), получим систему шести конечных уравнений относительно искомым параметров автоколебаний  $(a, p_0, q_0, \omega, \varphi_\psi, \varphi_\theta)$ .

После исключения неизвестных  $p_0, q_0, \varphi_\psi, \varphi_\theta$  из первых четырех уравнений системы, два оставшихся уравнения являются полиномами относительно амплитуды  $a$  и круговой частоты  $\omega$ . Составляя их результат (исключается неизвестная круговая частота  $\omega$ ), получим неявную функцию, определяющую амплитуду автоколебаний в зависимости от конструктивных параметров системы и скорости движения  $v$ .

На рисунке 3.14 представлены амплитудные кривые при следующих численных значениях параметров:  $N=5000 \text{ Н}$ ;  $k=42700 \text{ Н}$ ;  $B=9,81 \text{ кг*м}^2$ ;  $h=37,3 \text{ Н*м*с}$ ;  $h_1=981 \text{ Н*м*с}$ ;  $\chi=421100 \text{ Н*м}$ ;  $\chi_1=12160 \text{ Н*м}$ ;  $C=165 \text{ кг*м}^2$ ;  $I_1=11,8 \text{ кг*м}^2$ ;  $r=0,4 \text{ м}$ ;  $l=0,85 \text{ м}$ ;  $\phi=0,7$ ;  $\mu=0.3742771659$ ;  $\mu_2=71.4533726$ ;  $\mu_4=39122.6523$ :

а) – сила увода аппроксимирована линейным и кубическим членами

$$Y(\alpha) = k\alpha - \frac{k^3\alpha^3}{2N^2\varphi^2}, \text{ кривая 1 учитывает наличие пяточного момента, кривая 2}$$

учитывает его отсутствие;

б) – сила увода представляет дробно-иррациональную зависимость  $Y(\alpha) = k\alpha(1+k^2\alpha^2/N^2\varphi^2)^{-1/2}$ , кривая 1 учитывает наличие пяточного момента, кривая 2 учитывает его отсутствие.

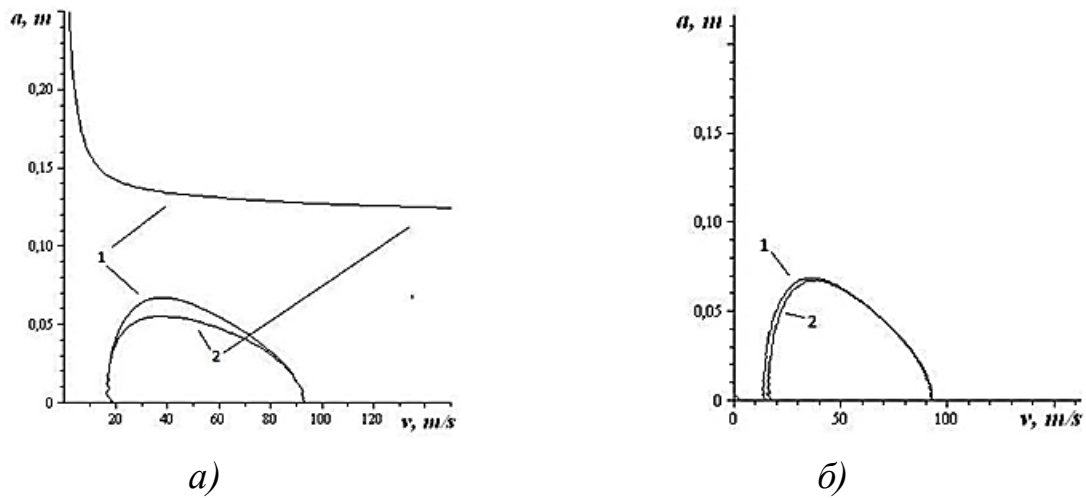


Рис.3.14

Таким образом, приближенная аппроксимация силы увода приводит к наличию ветви неустойчивых автоколебаний (рис. 3.14, а кривая 3), в случае задания силы увода в виде дробно-иррациональной зависимости ветвь неустановившихся автоколебаний отсутствует (рис. 3.14, б). Влияние пяточного момента может приводить как к незначительному расширению области неустойчивости (рис. 3.14), так и к существенным качественным изменениям области автоколебаний в зависимости от характеристик демпфирования (рис. 3.15).

*Замечание.* При реализации метода анализа автоколебаний системы (3.18), вообще говоря, можно избежать введения дополнительного дифференциального уравнения (описывающего неустановившийся увод колеса). Третье уравнение системы (3.18) дает возможность ввести формально избыточную переменную  $\alpha$ , а два дополнительных конечных уравнения, возникающих в этом случае:

$$v \cdot q_0 s + l \cdot p_0 c \cdot \omega = 0 \quad \text{и} \quad v \cdot q_0 c - l \cdot p_0 s \cdot \omega = a \cdot v,$$

где  $q_0 s = q_0 \sin(\varphi_\theta)$ ,  $p_0 c = p_0 \cos(\varphi_\psi)$ ,  
 $q_0 c = q_0 \cos(\varphi_\theta)$ ,  $p_0 s = p_0 \sin(\varphi_\psi)$ ,

обеспечивают выполнение лишь следующего соотношения для линейной комбинации двух гармоник с одинаковыми частотами (что и требовалось для реализации метода)

$$a \sin \omega t = q_0 \sin(\omega t + \varphi_\theta) + \frac{l}{v} \omega \cdot p_0 \cos(\omega t + \varphi_\psi),$$

так как

$$\begin{aligned} v \cdot q_0 \sin(\omega t + \varphi_\theta) + l \cdot \omega \cdot p_0 \cos(\omega t + \varphi_\psi) = \\ = (v \cdot q_0 s + l \cdot p_0 c \cdot \omega) \cos(\omega t) + (v \cdot q_0 c - l \cdot p_0 s \cdot \omega) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Предложенный подход дает возможность определять области возникновения устойчивых и неустойчивых автоколебаний - кривая, примыкающая к оси абсцисс, соответствует устойчивым автоколебаниям, а вырезаемый ею интервал на оси продольной скорости движения соответствует области колебательной неустойчивости, что дает возможность параллельно проанализировать влияние структуры сил на устойчивость линейной системы.

Непротиворечивость полученных результатов была подтверждена на основе критерия Рауса-Гурвица.

### **3.4.2 Влияние структуры сил на амплитуды автоколебаний (случай с неполной диссипацией).**

В предыдущих задачах было рассмотрено влияние коэффициентов соответствующих конструктивных параметров на интервал области неустойчивости. Используемый метод указывает на полное согласование полученных результатов с ранее полученными результатами при исследовании по линейному приближению с использованием критерия Рауса-Гурвица при условиях неполной диссипации в системе (либо  $h=0$ , либо  $h_1=0$ ).

Используя приближенный метод анализа автоколебаний были получены следующие результаты:

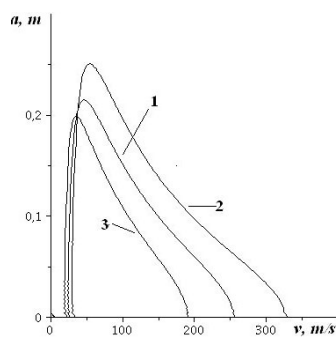
если  $h_1=0$ , тогда



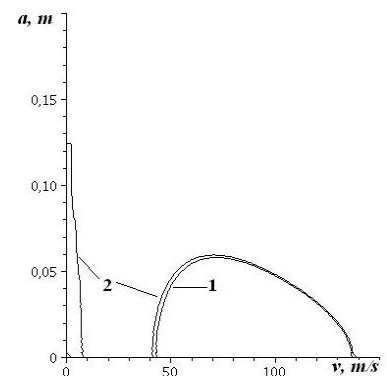
- 1) увеличение демпфирования по углу поворота относительно вертикали приводит к уменьшению области неустойчивости и интенсивности автоколебаний, первая часть выводов согласуется с общими теоремами о влиянии структуры сил. Влияние пяточного момента при этом проявляется незначительно;
- 2) увеличение параметра неконсервативных позиционных сил  $l$  (высоты стойки) приводит к увеличению области неустойчивости по скорости и росту интенсивности автоколебаний (рис.3.15, а: кривая 1 соответствует  $l=0.85$  м., кривая 2 -  $l=1.1$  м., кривая 3 -  $l=0.6$  м.), что соответствует выводам из общих теорем о влиянии структуры сил;
- 3) увеличение момента инерции колеса приводит к уменьшению области колебательной неустойчивости и амплитуд автоколебаний;
- 4) влияние параметра релаксации ( $\sigma \neq 0$ ) – увеличение  $\sigma$  приводит к уменьшению области колебательной неустойчивости и амплитуд автоколебаний (рис. 3.15, д: кривая 1 соответствует  $\sigma=0.45$ , кривая 2 -  $\sigma=0.5$ ); уменьшение коэффициента сцепления также приводит к уменьшению амплитуд автоколебаний (рис. 3.15, д: кривая 1 соответствует  $\varphi=0.7$ , кривая 3 -  $\varphi=0.4$ );  
если  $h=0$ , тогда
- 5) влияние пяточного момента в этом случае характеризуется появлением дополнительной области автоколебаний при малых скоростях (до  $7,3$  м/с), «основная» область автоколебаний (существовала в диапазоне  $42,7$  м/с  $< v < 136,7$  м/с) при этом практически не изменяется (рис.3.15, б: сплошная кривая соответствует отсутствию пяточного момента, пунктирная – его наличию);
- б) увеличение крутильной жесткости (относительно вертикальной оси) приводит к увеличению области колебательной неустойчивости и амплитуд автоколебаний, вообще говоря, это не противоречит положениям теоремы о влиянии структуры сил, так как в данном случае отсутствует полная диссипация. Область автоколебаний, связанная с

наличием пяточного момента практически не изменяется, но при достаточно больших значениях крутильной жесткости она «поглощается» областью автоколебаний, определяемой одной боковой силой (рис.3.15, в: кривая 1 соответствует  $\chi_I=12160 \text{ Н}^*\text{м}$ , кривая 2 -  $\chi_I=20160 \text{ Н}^*\text{м}$ , кривая 3 -  $\chi_I=4160 \text{ Н}^*\text{м}$ , кривая 4 -  $\chi_I=32160 \text{ Н}^*\text{м}$ );

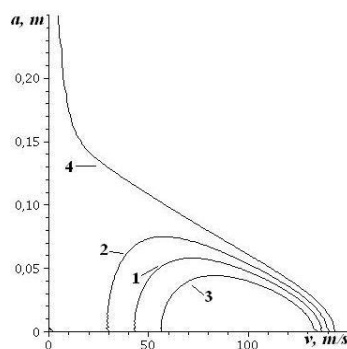
- 7) увеличение крутильной жесткости (относительно продольной оси) приводит к уменьшению области и интенсивности автоколебаний, область автоколебаний, связанная с наличием пяточного момента практически не изменяется (рис.3.15, г: кривая 1 соответствует  $\chi=421100 \text{ Н}^*\text{м}$ , кривая 2 -  $\chi_I=501100 \text{ Н}^*\text{м}$ , кривая 3 -  $\chi_I=361100 \text{ Н}^*\text{м}$ );
- 8) изменение параметра релаксации ( $\sigma \neq 0$ ) приводит к тем же результатам, что и в пункте 4 (рис. 3.15,е: кривая 1 соответствует  $\sigma=0.45$ , кривая 2 -  $\sigma=0.5$ ), то же характер влияния, что и в пункте 4 (рис. 3.15, е: кривая 1 соответствует  $\varphi=0.7$ , кривая 3 -  $\varphi=0.4$ ) сохраняется при вариациях коэффициента сцепления.



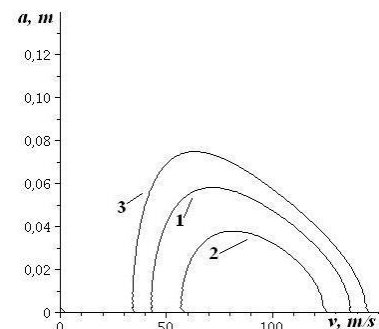
а)



б)



в)



г)

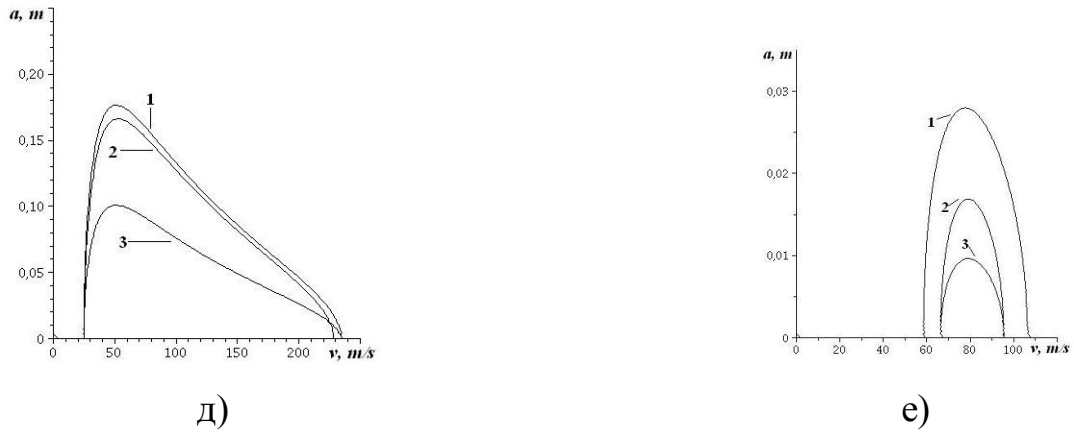


Рис. 3.15

Таким образом, развивается метод приближенного построения амплитудных кривых в задаче шимми передней «неуправляемой» стойки шасси, а именно – рассмотрена возможность введения избыточной переменной для реализации метода.

### 3.5 Заключение.

Пункт 3.1 посвящен сравнительному анализу устойчивости прямолинейного движения простейшей модели колесной сцепки (рояльной конструкции), имеющей свободу рысканья относительно вертикальной оси, для двух моделей взаимодействия колеса с опорной поверхностью в боковом направлении (нелинейной гипотезы увода И. Рокара и модели М.В. Келдыша, в которой учтен нелинейный характер боковой силы).

В пункте 3.2 проведен анализ влияния характерных параметров системы на область колебательной неустойчивости колесного модуля; рассмотрено влияние точности аппроксимации нелинейной зависимости силы увода и пяточного момента на характер автоколебаний, построено бифуркационное множество, разделяющее плоскость параметров на области с различным числом предельных циклов.

В пункте 3.3 приближенный метод анализа автоколебаний рассмотрен для колесной сцепки в круговом режиме движения.

В пункте 3.4 проведен анализ устойчивости и автоколебаний передней «неуправляемой» стойки, имеющей свободу поворота по двум каналам –

рысканья и крена относительно продольной оси корпуса. Рассмотрено влияние характерных параметров системы на область колебательной неустойчивости и амплитуды автоколебаний (проанализировано влияние структуры сил на области колебательной неустойчивости и характеристики автоколебаний в случае неполной диссипации).

## РАЗДЕЛ 4

### **АНАЛИЗ ДИВЕРГЕНТНЫХ И ФЛАТТЕРНЫХ БИФУРКАЦИЙ МОДЕЛИ ЭКИПАЖА С УПРАВЛЯЕМЫМ КОЛЕСНЫМ МОДУЛЕМ**

В данном разделе вопрос о смене характера потери устойчивости (опасной-безопасной) модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем решается на основе реализации численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам (при росте числа степеней свободы необходимо преодолевать лавинообразное увеличение объема вычислений) [70]. Далее проведена оценка амплитуд автоколебаний колесного модуля в области флаттерной неустойчивости прямолинейного движения.

Дивергентная потеря устойчивости прямолинейного стационарного режима движения экипажа в простейшем случае связана с реализацией бифуркации сборки. Прямолинейному режиму на фазовой плоскости соответствует начало координат, из которого при критической скорости либо рождается пара устойчивых стационарных состояний, либо приходит пара неустойчивых стационарных состояний и сливается с устойчивым прямолинейным режимом.

В случае симметричного экипажа с абсолютно жестким рулевым управлением существенными «внутренними» параметрами, влияющими на характер потери устойчивости, являются коэффициенты сцепления на осях – при уменьшении коэффициента сцепления на передней оси меняется характер опасности границы области устойчивости вследствие реализации катастрофы бабочки. Бифуркационное множество в этом случае имеет характерное сечение с тремя точками заострения (каспами) [32].

В [35] найдено аналитическое соотношение, которое приближенно определяет условие опасной-безопасной потери устойчивости прямолинейного движения модели колесного экипажа с управляемым

колесным модулем. К характерным параметрам, влияющим на условия безопасной потери устойчивости прямолинейного режима движения модели с жестким рулевым управлением, добавляется параметр крутильной жесткости колесного модуля.

**Постановка задачи.** На рис. 4.1 представлена расчетная схема модели экипажа с управляемым колесным модулем. Управляемый модуль шарнирно соединен с корпусом экипажа,  $\theta$  – угол между продольной осью корпуса и вертикальной продольной плоскостью колеса. На связку корпус-колесный модуль действует упругий восстанавливающий момент, стремящийся вернуть систему в положение  $\theta = \theta_0$ , где  $\theta_0$  – устанавливаемый оператором угол поворота колес переднего ряда;  $Y_i$  – приведенные поперечные силы (силы увода), действующие в пятне контакта колес с опорной поверхностью, определяются в соответствии с аксиоматикой И. Рокара; ось колеса удалена от оси шарнирного соединения на расстоянии выноса  $\lambda$  ( $\lambda < 0$  в случае, когда ось колеса располагается впереди точки шарнирного соединения звеньев);  $v$  – продольная составляющая скорости центра масс корпуса (поддерживается постоянной);  $a$ ,  $b$  – расстояния от центра масс (точка С) до точки крепления управляемого колесного модуля и задней оси соответственно;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты сопротивления уводу на осях;  $k$  – приведенный коэффициент жесткости управляемого модуля;  $h$  – коэффициент демпфирования по углу поворота управляемого модуля;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода;  $\theta_1$  – устанавливаемый угол поворота колес заднего ряда.

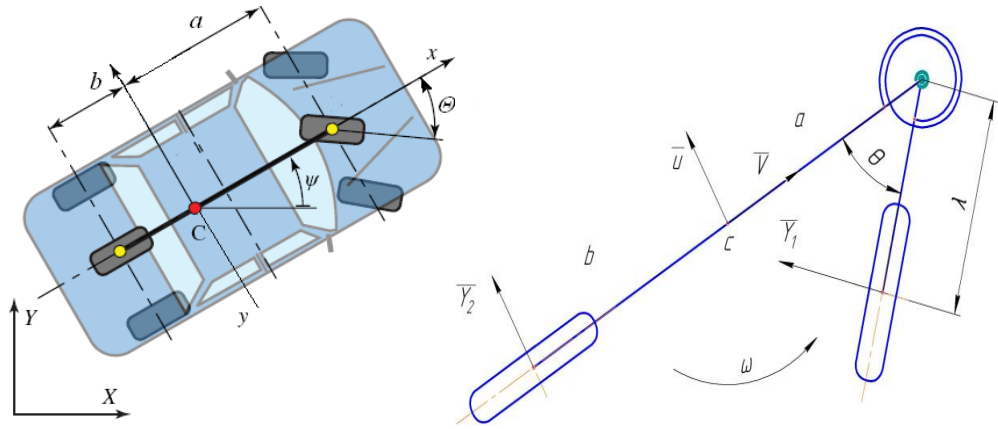


Рис.4.1. Расчетная схема экипажа.

Масса и момент инерции корпуса относительно центральной вертикальной оси соответственно  $m$ ,  $J$ ;  $m_1$ ,  $J_1$  – масса и момент инерции управляемого колесного модуля относительно центральной вертикальной оси, проходящей через ось колеса.

Система дифференциальных уравнений движения модели экипажа с управляемым колесным модулем (фазовые переменные  $u$ ,  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ) получена при предположениях принятых в [73]:

$$E_1 = -m(U + \omega \cdot v) + m_1 \cos \theta \lambda (\Omega + TT) - m_1 (a\Omega + \omega v + U) - m_1 \sin \theta \lambda (\omega^2 + \Theta^2 + 2\omega\Theta) + Y_1 \cos \theta + X_1 \sin \theta + Y_2 \cos \theta_1 - X_2 \sin \theta_1;$$

$$E_2 = -J\Omega + a m_1 \cos \theta \lambda (\Omega + TT) - a m_1 \sin \theta \lambda (2\omega\Theta + \omega^2 + \Theta^2) - a m_1 (a\Omega + \omega v + U) + h\Theta + kk(\theta - \theta_0) + Y_1 a \cos \theta + X_1 a \sin \theta - Y_2 b \cos \theta_1 - X_2 b \sin \theta_1; \quad (4.1)$$

$$E_3 = (J_1 + m_1 \lambda^2) TT + (J_1 + m_1 \lambda (\lambda - a \cos \theta)) \Omega - m_1 \lambda \cos \theta (U + v\omega) - m_1 \omega \sin \theta \lambda (u + a\omega) + h\Theta + kk(\theta - \theta_0) + Y_1 \lambda.$$

где  $m$ ,  $J$  – масса и момент инерции корпуса относительно центральной вертикальной оси соответственно,

$m_1$ ,  $J_1$  – масса и момент инерции управляемого колесного модуля относительно центральной вертикальной оси,

$U$  – производная поперечной составляющей скорости центра масс,

$\Omega$  – производная угловой скорости,

$\Theta$  – скорость изменения угла поворота управляемого модуля,

$TT$  – угловое ускорение управляемого модуля,

$\theta$  – угол между продольной осью корпуса и вертикальной продольной плоскостью колеса,

$\theta_0$  – устанавливаемый оператором угол поворота колес переднего ряда, в случае прямолинейного движения  $\theta_0 = 0$ ,

$Y_i$  – приведенные поперечные силы (силы увода),

$\lambda$  – вынос,

$v$  – продольная составляющая скорости ЦМ корпуса (поддерживается постоянной),

$a, b$  – расстояние от центра масс управляемого колесного модуля до точки крепления передней (управляемой) оси и задней оси соответственно,

$kk$  – приведенный коэффициент жесткости управляемого модуля,

$h$  – коэффициент демпфирования по углу поворота управляемого модуля,

$\theta_1$  – устанавливаемый угол поворота колес заднего ряда ( $\theta_1=0$ ).

где  $Y_i(\delta_i) = k_i \delta_i (1 + k_i^2 \delta_i^2 / N_i^2 \varphi_i^2)^{-1/2}$  – силы увода аппроксимируются монотонной зависимостью,

$k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты сопротивления уводу на осях,

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода,

$N_i$  – реакции опоры.

Считаем, что  $X_1=0$  – приведенная продольная сила на передней оси.



Условие дивергентной потери устойчивости прямолинейного режима найдено в общем виде в [71]:

$$v_{kp}^2 = \frac{k_1 k_2 k (a + b - \lambda)^2}{-m k_1 k_2 \lambda b + m \{k [k_1 (a - \lambda) - k_2 b]\} - k m_1 k_2 (a + b - \lambda)},$$

а условия опасной-безопасной потери устойчивости исследовались в [35].

#### 4.1 Бифуркационное множество модели экипажа с управляемым колесным модулем.

Стационарные состояния системы (4.1) (особые точки фазового пространства) удовлетворяют системе конечных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \dot{\omega} = \mathbf{0}, \ddot{\theta} = \mathbf{0}, \dot{\theta} = \mathbf{0}, \mathbf{u}, \omega, \theta \mathbf{v}, \theta_0) &= 0; \\ \mathbf{E}_2(\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \dot{\omega} = \mathbf{0}, \ddot{\theta} = \mathbf{0}, \dot{\theta} = \mathbf{0}, \mathbf{u}, \omega, \theta \mathbf{v}, \theta_0) &= 0; \\ \mathbf{E}_3(\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \dot{\omega} = \mathbf{0}, \ddot{\theta} = \mathbf{0}, \dot{\theta} = \mathbf{0}, \mathbf{u}, \omega, \theta \mathbf{v}, \theta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Система (4.2) имеет два управляющих параметра  $(v, \theta_0)$ . Метод продолжения по параметру, предложенный Шиохарой [61], дает возможность определить различные ветви равновесной кривой и оценить максимальное количество стационарных режимов в конечной области параметров управления.

В [70] рассматривается вопрос об эволюции стационарных состояний при изменении одного из управляющих параметров. Многообразие бифуркационных значений параметров  $(v^*, \theta_0^*)$ , которым соответствуют кратные стационарные режимы движения  $(u^*, \omega^*, \theta^*)$  системы (4.2) может быть найдено с помощью метода продолжения по двум параметрам. Условием реализации кратного стационарного режима  $(u^*, \omega^*, \theta^*)$  является

выполнение равенства 
$$E_4 \Big|_{(u^*, \omega^*, \theta^*, v^*, \theta_0^*)} = \frac{D(E_1, E_2, E_3)}{D(u, \omega, \theta)} \Big|_{(u^*, \omega^*, \theta^*, v^*, \theta_0^*)} = 0$$

(определитель якобиана системы (4.2) обращается в нуль).

Система (4.2) вместе с последним уравнением задает критическое множество стационарных состояний. Метод продолжения по двум параметрам приводит к вспомогательной системе дифференциальных уравнений

$$u' = D_1 \cdot \Delta, \quad \omega' = -D_2 \cdot \Delta, \quad \theta' = D_3 \cdot \Delta, \quad v' = -D_4 \cdot \Delta, \quad \theta_0' = D_5 \cdot \Delta,$$

$$\text{где } D_1 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(\omega, \theta, v, \theta_0)}, \quad D_2 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \theta, v, \theta_0)}, \quad D_3 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, v, \theta_0)},$$

$$D_4 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, \theta, \theta_0)}, \quad D_5 = \frac{D(E_1, E_2, E_3, E_4)}{D(u, \omega, \theta, v)}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2}}.$$

Стартовая точка для реализации метода продолжения  $(0, 0, 0, v_{\text{кр}}, 0)$ , где  $v_{\text{кр}}$  – критическая скорость прямолинейного режима движения экипажа, определяется из решения уравнения  $E_4|_{(u=0, \omega=0, \theta=0, \theta_0=0)} = 0$ .

На рисунке 4.2, б представлено бифуркационное множество, полученное численным интегрированием вспомогательной системы дифференциальных уравнений при следующем наборе числовых значений конструктивных параметров:  $a=1,45$  м;  $b=1,55$  м;  $\lambda=-0,00223$  м;  $k=400$  Н·м;  $m=2090$  кг;  $\varphi_1=0,8$ ;  $\varphi_2=0,8$ ;  $k_1=91500$  Н;  $k_2=61000$  Н;  $m_1=100$  кг;  $J_1=3,22$  кг·м<sup>2</sup>.

Бифуркационное множество делит плоскость управляющих параметров  $(v, \theta_0)$  на области с различным количеством стационарных режимов: во внутренней области (под «куполом» бифуркационного множества) три режима, во внешней – один. В точках бифуркационного множества (рис. 4.2, б) происходит вещественная бифуркация складки (слияния-рождения) пары стационарных режимов – устойчивого и неустойчивого. При фиксированной скорости  $v_i < v_{\text{кр}}$  и увеличении параметра  $\theta_0$  от нуля до  $\theta_0^*$  устойчивый симметричный стационарный режим  $\omega = \omega(v_i, \theta_0)$  перемещается из начала координат по равновесной кривой (рис. 4.2, а), в точке поворота  $M(\theta_0^*)$  происходит дивергентная потеря устойчивости. Точка поворота  $M$  делит

равновесную кривую на устойчивую (сплошная) и неустойчивую (пунктир) части (рис. 4.2, а). Проекция множества точек поворота на плоскость параметров управления  $(v, \theta_0)$  задает бифуркационное множество (рис. 4.2, б). При  $v_i = v_{kp}$  ( $\theta_0^* = 0$ ) имеем точку возврата. Потере устойчивости прямолинейного режима при данном числовом наборе значений конструктивных параметров отвечает бифуркация слияния (устойчивого и двух неустойчивых стационарных режимов). При закритической скорости прямолинейному режиму соответствует седловая особая точка, возмущения фазовых переменных в этом случае аperiodически растут – имеет место опасная потеря устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [12].

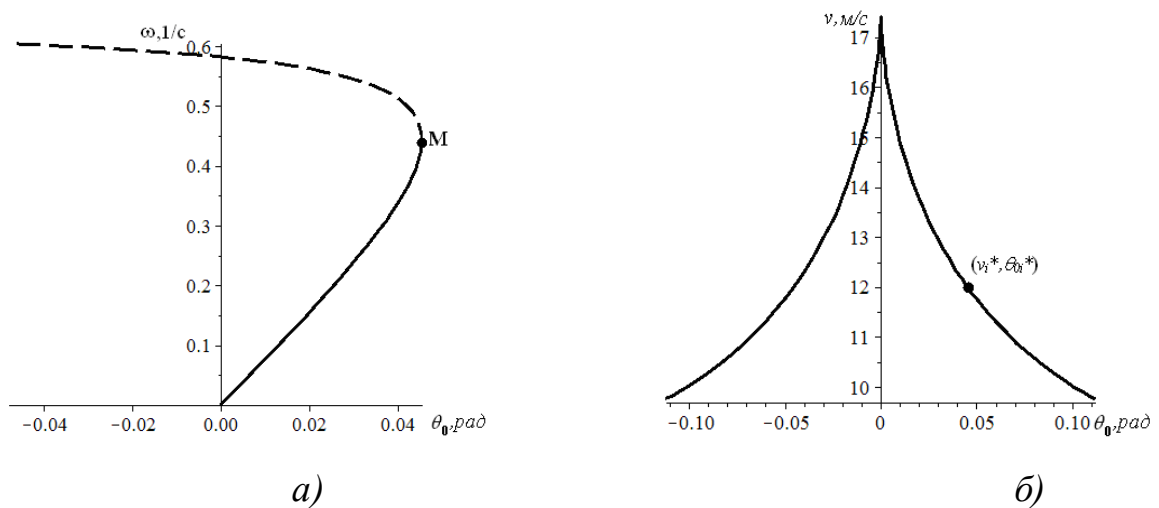


Рис. 4.2 а) равновесная кривая, полученная при  $v=12$  м/с;  
 б) бифуркационное множество модели экипажа с управляемым колесным модулем.

При уменьшении величины крутильной жесткости до  $k=40$  Н·м наблюдается существенное изменение характера бифуркационного множества (рис. 4.3, б), происходит процесс «выворачивания» сборки через реализацию бифуркации ласточкин хвост – имеются области с пятью, тремя и одним стационарными режимами. При скорости  $v < 6,3$  м/с имеется один

стационарный режим – устойчивый. Например, при скорости  $v=6$  м/с устойчивый стационарный режим существует, по крайней мере, в диапазоне  $-0,25 \text{ рад} < \theta_0 < 0,25 \text{ рад}$  (принадлежит равновесной полуветви без точек поворота, рисунок 3,а – первый квадрант). При закритической скорости  $v=8$  м/с равновесная кривая делится точкой поворота на устойчивую (сплошная) и неустойчивую (пунктир) части (рис. 4.3, а): в диапазоне  $-0,15 \text{ рад} < \theta_0 < 0,15 \text{ рад}$  могут реализовываться три стационарных режима – один неустойчивый, два устойчивых; в диапазоне  $0,15 \text{ рад} < |\theta_0| < 0,25 \text{ рад}$  – один устойчивый (принадлежат полуветви равновесных состояний, располагающейся во втором и первом квадрантах). Заметим, что ветви равновесных состояний для симметричного экипажа обладают свойством центральной симметрии.

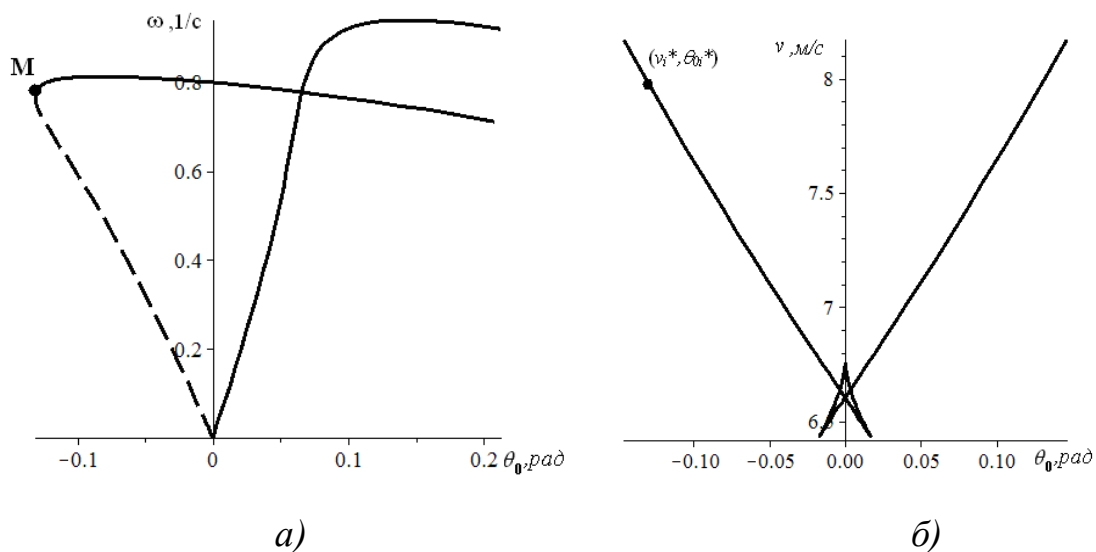


Рис.4.3 а) равновесные кривые, полученные при  $v=8$  м/с и  $v=6$  м/с;  
 б) бифуркационное множество модели экипажа с управляемым колесным модулем.

Из структуры бифуркационного множества (рис. 4.2,б) следует, что характер потери устойчивости прямолинейного стационарного режима при  $k=40$  Н·м безопасный по Н.Н. Баутину [12] – в верхнем касе происходит вещественная бифуркация слияния трех стационарных режимов –

устойчивого и двух неустойчивых, но в отличие от предыдущего случая ( $k=40 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ) имеется дополнительно пара устойчивых режимов, которые при закритической скорости ограничивают рост возмущений (фазовый поток «впадает» в бассейны притяжения двух устойчивых круговых режимов).

#### **4.2 Анализ условий устойчивости прямолинейного режима движения по линейному приближению.**

Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Аналитическое выражение, определяющее условие флаттерной неустойчивости, не позволяет сделать вывод о влиянии конкретных параметров модели на условия устойчивости из-за его громоздкости. Численным методом, с использованием пакета Maple, найдем границы в плоскости параметров  $(k, v)$ , где нарушаются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. На рисунке 4.3, *a* представлена характерная граница дивергентной и колебательной неустойчивости для случая отрицательного выноса передней стойки шасси. Ниспадающая граница отвечает паре чисто мнимых корней характеристического уравнения (область флаттерной неустойчивости лежит ниже), восходящая кривая – нулевому корню (область дивергентной неустойчивости лежит выше). Тогда при всех значениях крутильной жесткости  $k > 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и достаточно малой скорости движения имеет место флаттерная неустойчивость. При превышении некоторого порога по скорости попадаем в область асимптотической устойчивости, которая сменяется областью дивергентной неустойчивости при  $v > v_{\text{кр}}$ .

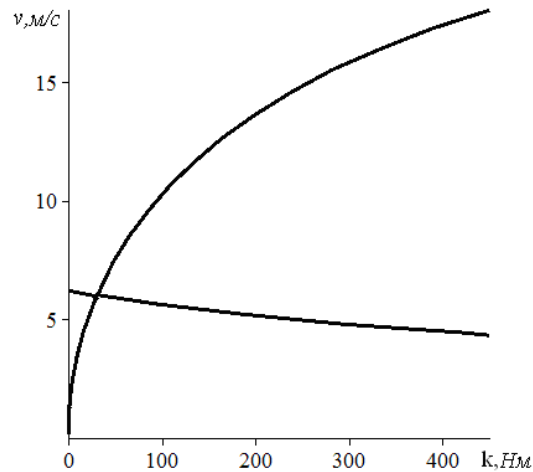
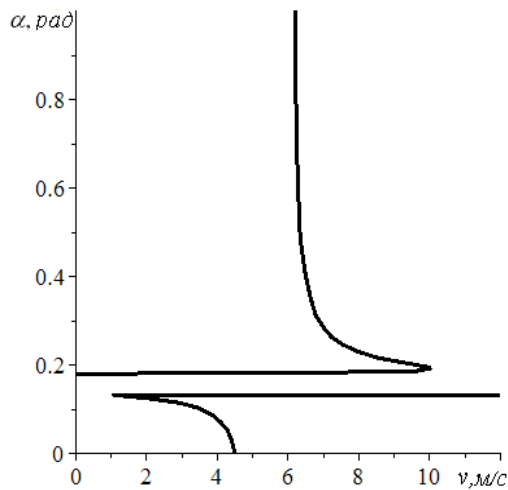


Рис.4.4. Граница дивергентной и колебательной неустойчивости в плоскости параметров  $(k, v)$ .

На границе интервала скорости, отвечающей паре чисто мнимых корней, в соответствии с теоремой Андронова-Хопфа происходит комплексная бифуркация (рождения-исчезновения) предельного цикла [77]. Ниже проведена оценка амплитуды автоколебаний в области флаттерной неустойчивости на основе подхода [34], реализованного ранее при исследовании автоколебаний отдельно взятой стойки шасси [20].

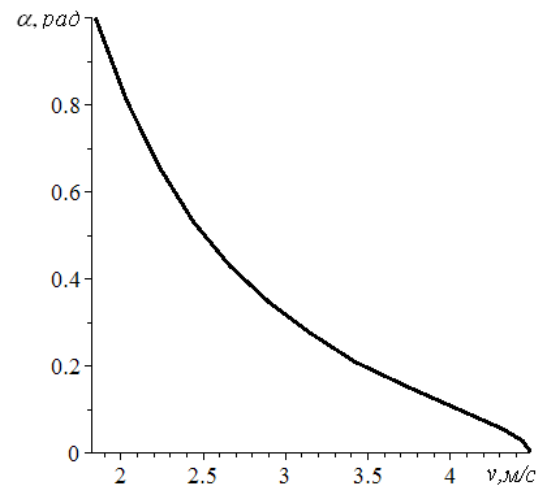
#### 4.3 Оценка амплитуд автоколебаний в окрестности прямолинейного режима движения.

В зоне флаттерной неустойчивости, применение приближенного метода автоколебаний, получены амплитудные кривые как для случая представления силы увода в виде дробно-иррациональной функции  $Y_1(\delta_1) = k_1 \delta_1 (1 + k_1^2 \delta_1^2 / (N_1^2 \phi_1^2))^{-1/2}$ , так и для случая ее приближенного представления – до членов третьего порядка включительно. Сила увода на задней оси представлялась в виде линейной функции  $Y_2(\delta_2) = k_2 \delta_2$ . На рисунке 4.5, а представлена амплитудная кривая для случая приближенного представления силы  $Y_1$ , на рисунке 4.5, б – для случая дробно-иррациональной зависимости (получено при указанных выше числовых значениях параметров).



$$a) Y_1(\delta_1) = k_1 \delta_1 - \frac{k_1^3 \delta_1^3}{2N_1^2 \varphi_1^2},$$

$$Y_2(\delta_2) = k_2 \delta_2,$$



$$b) Y_1(\delta_1) = k_1 \delta_1 (1 + k_1^2 \delta_1^2 / N_1^2 \varphi_1^2)^{-1/2}$$

$$Y_2(\delta_2) = k_2 \delta_2$$

Рис.4.5 Амплитудные кривые.

Результаты, полученные для двух случаев аппроксимации силы  $Y_1$ , имеют существенные качественные различия. Численное интегрирование исходной нелинейной системы (4.1) указывает на невозможность приближенного представления силы увода  $Y_1$  в виде линейного и кубического приближения. В то же время, принятые в ходе реализации приближенного анализа допущения не приводят к искажению качественной картины процесса автоколебаний при использовании исходной нелинейной зависимости силы увода  $Y_1$ .

#### 4.4 Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования.

Для исходных нелинейных уравнений (4.1) численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при характерных числовых значениях конструктивных параметров. Рисунок 4.6, а иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при  $k=400 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $v=25 \text{ м/с}$ . В этом случае экипаж выходит на одну из круговых

траекторий (рис. 4.6, б) при произвольно малых возмущениях (реализация левого-правого поворотов зависит от начальных возмущений).

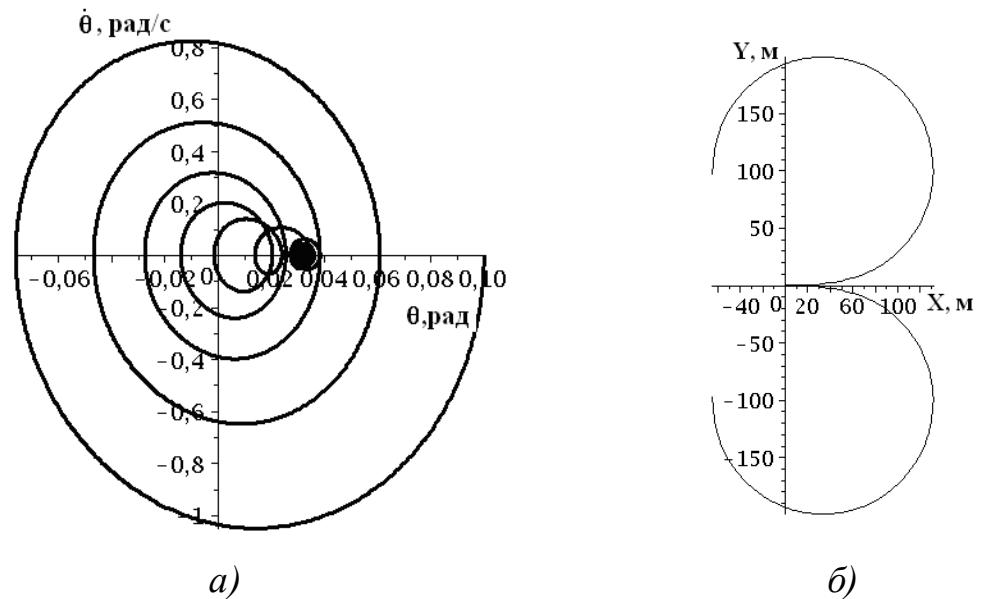


Рис.4.6 а) фазовая траектория в плоскости переменных  $(\theta, \dot{\theta})$  в случае дивергентной неустойчивости; б) возможные траектории движения центра масс в случае дивергентной неустойчивости.

Случай флаттерной неустойчивости имеем при  $k=400 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $v=4 \text{ м/с}$ : фазовые траектории в плоскости переменных  $(\theta, \dot{\theta})$  наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис. 4.7, а); на рисунке 4.7, б представлен график зависимости угла увода  $\delta_1$  от времени. Результаты, полученные на основе численного интегрирования, указывают на достаточно хорошее согласование с результатами, полученными на основе приближенного численно-аналитического подхода.



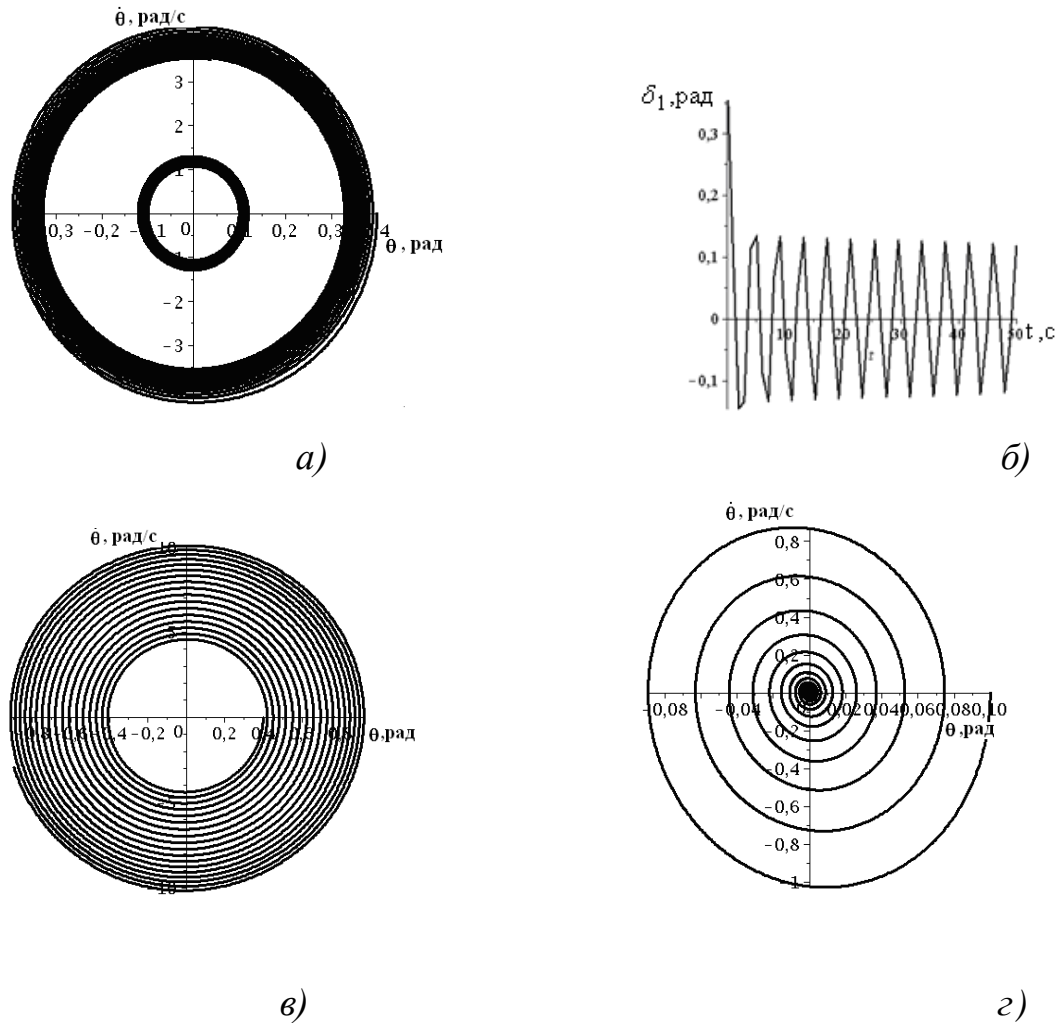


Рис. 4.7

а) фазовый портрет в окрестности предельного цикла в плоскости переменных  $(\theta, \dot{\theta})$ ; б) интегральная кривая, соответствующая предельному циклу; в) фазовая кривая соответствующая неограниченному росту возмущений, г) фазовая кривая, соответствующая области асимптотической устойчивости.

Рисунок 4.7, г иллюстрирует практическую неограниченность области притяжения невозмущенного прямолинейного движения при  $v=8$  м/с. При  $k=400$  Н·м,  $v=2$  м/с (рис. 4.7, в) реализуется колебательная неустойчивость с неограниченным ростом возмущений. Таким образом, результаты численного интегрирования полностью подтверждают качественную картину развития автоколебаний в окрестности прямолинейного движения экипажа, полученную на основе приближенного аналитического подхода.

#### **4.5 Заключение.**

В данном разделе, для модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем, получена оценка количества стационарных режимов движения в окрестности критической скорости прямолинейного движения. На основе построения бифуркационного множества сделан вывод о характере потери устойчивости (опасный-безопасный) прямолинейного стационарного режима по Н.Н. Баутину. Получено аналитическое выражение, определяющее амплитуду автоколебаний модели экипажа как функцию продольной скорости движения.

## РАЗДЕЛ 5

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕМОНОТОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УВОДА  
НА МНОГООБРАЗИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МОДЕЛИ  
ЭКИПАЖА С ЗАКРЕПЛЕННЫМ РУЛЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

В данном разделе развиваются графо-аналитический способ построения бифуркационного множества и качественные методы анализа устойчивости стационарных режимов движения модели колесного экипажа с жестко закрепленным рулевым управлением; также рассмотрена смена свойств управляемости на основе анализа модели колесного экипажа, которая учитывает нелинейность сил бокового увода; получена обобщенная зависимость, определяющая «кривую управляемости». Рассмотрена модель двухосного экипажа с жестким рулевым управлением (учитывающая нелинейные зависимости сил увода, имеющих ниспадающие участки), для которой характерна только дивергентная потеря устойчивости. Проанализировано множество стационарных режимов и их типы (вопрос устойчивости исследовался на основе теории индексов Пуанкаре); представлены характерные фазовые портреты.

Математическую модель экипажа можно представить в виде динамической системы

$$\dot{x} = f(x, \theta, v), \quad (5.1)$$

ее стационарные состояния определяются решением системы нелинейных уравнений

$$f_i(x, \theta, v) = 0, \quad x \in R^n, \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.2)$$

Система имеет два управляющих параметра: скорость продольного движения  $v$ ; угол поворота передних управляемых колес  $\theta$ . В работах [70, 104] рассматривается вопрос об эволюции стационарных состояний при изменении управляющих параметров. Бифуркационным значениям

параметров  $(v^*, \theta^*)$  соответствуют кратные решения  $x^*$  системы (5.2). Якобиан системы обращается в нуль во всех точках критического множества  $x^*$ :

$$J = \left\| \partial f_i / \partial x_j \right\|_{x^*} = 0, \quad x^* \in M_{кр}.$$

Система (5.2) вместе с последним уравнением задает критическое множество на многообразии стационарных состояний. В точках критического множества происходит исчезновение устойчивого стационарного состояния (этим точкам соответствуют либо точки складки – двухкратные решения системы (5.2), либо сборки – трехкратные решения системы (5.2) [7]).

Представляет интерес анализ устойчивости нелинейной модели экипажа во всей плоскости управляющих параметров. Он может быть проведен на основе информации о структуре бифуркационного множества, разбивающего плоскость параметров на области с различным количеством стационарных режимов. Однако процедура построения бифуркационного множества в случае зависимости сил бокового увода с явно выраженным максимумом потребует некоторого развития – это связано с существованием нескольких ветвей бифуркационного множества.

Рассмотрим систему, состоящую из корпуса с жестко закрепленной задней колесной осью и переднего колесного модуля, его поворот относительно корпуса жестко фиксируется (задается параметром  $\theta$ ). Система находится под воздействием боковых реакций опорной поверхности – упругие колеса могут катиться под некоторым углом (углом увода) к плоскости симметрии колеса (за счет упругой деформации в пятне контакта), при этом возникают поперечные силы со стороны опорной поверхности, препятствующие боковому проскальзыванию колеса (силы увода). Рассматриваемая система не учитывает пяточных моментов, так как их величины на порядок меньше моментов, порождаемых боковыми силами относительно центра масс экипажа.

Пусть  $m$  – масса экипажа;  $J$  – центральный момент инерции системы

относительно вертикальной оси;  $a, b$  - расстояние от центра масс экипажа до середины передней и задней колесных осей соответственно.

Уравнения плоскопараллельного движения велосипедной двухосной схемы экипажа (вертикальная продольная плоскость, проходящая через середины колесных осей, является плоскостью симметрии) с постоянной продольной составляющей скорости центра масс имеют вид

$$\begin{cases} m(\dot{u} + \omega v) = Y_1 \cos \theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 \cos \theta - Y_2 b; \\ \delta_1 = \theta - \operatorname{arctg} \frac{u + a\omega}{v}, \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-u + b\omega}{v}. \end{cases} \quad (5.3)$$

где

$u$  - поперечная составляющая скорости центра масс экипажа;

$\omega$  - угловая скорость экипажа, относительно вертикальной оси;

$\delta_1, \delta_2$  – приведенные углы увода, на передней и задней осях соответственно;

$Y_1$  и  $Y_2$  – приведенные боковые силы увода, как функции углов увода, на передней и задней осях соответственно.

Силы увода определяются эмпирически и могут быть представлены различными аналитическими зависимостями. В данном разделе рассматриваются зависимости вида:

$$Y_i = \frac{\gamma_i \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{(|\delta_i| - \beta_i)^2}{(\beta_i)^2}}}, \quad (5.4)$$

которые учитывают немонотонность сил увода (в отличие от монотонных зависимостей при достаточно большом значении угла увода функция имеет ниспадающие участки).

### **5.1 Анализ многообразия особых точек системы, бифуркационное множество.**

Нахождение стационарных режимов движения (особых точек) сводится к решению системы:

$$\begin{aligned}
-\frac{\nu}{g}\omega + \frac{\cos(\theta)\bar{Y}_1(\delta_1)b}{l} + \frac{\bar{Y}_2(\delta_2)a}{l} &= 0; \\
\cos(\theta)\bar{Y}_1(\delta_1) - \bar{Y}_2(\delta_2) &= 0,
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

где  $\bar{Y}_i(\delta_i) = Y_i(\delta_i)/N_i$  - безразмерные боковые реакции опорной плоскости на ось ( $N_i$  - вертикальная нагрузка на ось).

Далее проанализируем влияние новой «геометрии» зависимости сил увода на бифуркационное множество. Система (5.5) сводится к одному определяющему уравнению

$$\bar{Y}(\delta_2 - \delta_1) = \frac{\nu^2}{gl}(\theta + \delta_2 - \delta_1),
\tag{5.6}$$

в котором левая часть является нелинейной функцией, называемой в дальнейшем «неподвижной кривой», в правой части представлена прямая («подвижная прямая»). Точкам пересечения «неподвижной кривой» и прямой соответствуют стационарные режимы системы (5.2). При непрерывном изменении параметров  $\nu$  и  $\theta$  определяющее уравнение (5.6) задает отображение плоскости параметров  $\nu$  и  $\theta$  в равновесную поверхность. Бифуркационному множеству (критическому множеству) отвечают значения параметров  $\nu$ ,  $\theta$ , для которых «подвижная прямая» касается «неподвижной кривой». Тогда точкам перегиба исходной кривой  $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$  соответствуют точки возврата бифуркационного множества. Трехкратному решению на равновесной поверхности будет соответствовать особенность сборки, а двухкратному решению – складка.

В случае монотонной зависимости сил увода от угла увода, имеющей характер кривой насыщения, «неподвижная» кривая может иметь три точки перегиба, а соответствующее бифуркационное множество – три точки возврата. Немонотонные зависимости сил увода порождают дополнительные точки перегиба «неподвижной» кривой  $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$ , что приводит к усложнению бифуркационного множества.

Зависимость  $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$  определяется из соответствия  $\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2) = \bar{Y}$ .

Критические значения параметров  $\nu, \theta$  удовлетворяют условиям (5.7)

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{gl} &= \frac{dY}{d(\delta_2 - \delta_1)}; \\ \frac{Y}{\theta + \delta_2 - \delta_1} &= \frac{dY}{d(\delta_2 - \delta_1)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

тогда

$$\theta = Y \cdot Y' - (\delta_2 - \delta_1). \quad (5.8)$$

Таким образом, система (5.7) позволяет найти бифуркационное множество в параметрическом виде

$$\theta = \theta(\delta_2 - \delta_1), \quad \nu = \nu(\delta_2 - \delta_1). \quad (5.9)$$

Иногда в качестве параметра целесообразно взять не  $(\delta_2 - \delta_1)$ , а  $\bar{Y}$ . В этом случае исходными зависимостями являются  $Y_1 = f_1(\delta_1)$  и  $Y_2 = f_2(\delta_2)$ , разрешив их относительно  $\delta_i$ , находим  $\delta_1 = F_1(Y_1)$ ,  $\delta_2 = F_2(Y_2)$ . Определяющее уравнение (6) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{gl}{\nu^2} \cdot Y - \theta = G(Y), \quad (5.10)$$

где  $G(Y) = F_2(Y) - F_1(Y)$ .

Из условий касания «неподвижной» кривой и «подвижной» прямой

$$\begin{aligned} \frac{gl}{\nu^2} &= \frac{dG}{d(Y)}; \\ \frac{\theta + G(Y)}{Y} &= \frac{dG}{d(Y)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

получим параметрические уравнения бифуркационного множества в виде

$$\theta = \theta(Y), \quad \nu = \nu(Y)$$

$$\begin{aligned} \theta &= Y \cdot G'(Y) - G(Y); \\ \nu &= \sqrt{\frac{gl}{G'(Y)}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Далее перейдем к процедуре формирования функции  $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$  в случае немонотонных зависимостей  $Y_i(\delta_i)$ . Для выбранных ранее численных значений параметров  $\beta, \gamma$  определим функции  $F_i(Y)$ , для этого, разрешая соотношения (5.9) относительно  $\delta_i$ , получим по две однозначной ветви,

«сшиваемых» в точках поворота (рис. 5.1):

$$f_{11} = \frac{0.12(-|Y| + \sqrt{0.6272879344 - Y^2})Y}{-Y^2 + 0.3136439672}, \quad f_{21} = \frac{0.15(-|Y| + \sqrt{0.5744942192 - Y^2})Y}{-Y^2 + 0.2872471096},$$

$$f_{12} = \frac{0.12(Y + \sqrt{0.6272879344 - Y^2})Y}{Y^2 - 0.3136439672}, \quad f_{22} = \frac{0.15(Y + \sqrt{0.5744942192 - Y^2})Y}{Y^2 - 0.2872471096}.$$

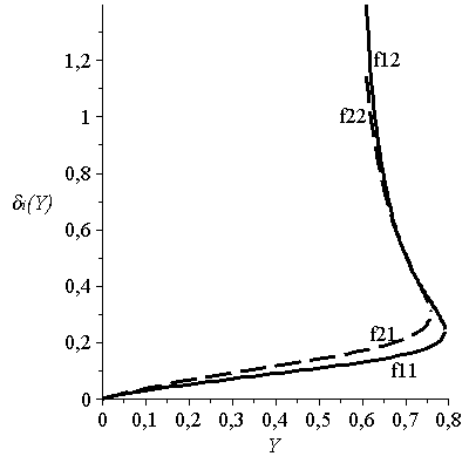


Рис. 5.1.

В свою очередь, функция  $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$  определяется как разность соответствующих однозначных ветвей  $f_{ij}$ , образуя три ветви (рис. 5.2).

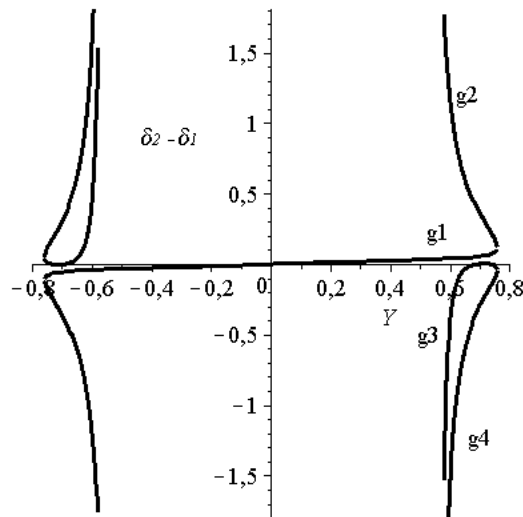


Рис.5.2.

Часть основной ветви до точки поворота получена из условия  $G(Y) = g_1 = f_{21} - f_{11}$ , вторая часть этой ветви определяется соотношением  $G(Y) = g_2 = f_{22} - f_{11}$ . Дополнительная ветвь «неподвижной кривой» появляется за счет ниспадающих участков зависимостей сил увода  $G(Y) = g_3 = f_{22} - f_{12}$ ;



$$G(Y) = g_4 = f_{21} - f_{12}.$$

Для каждой из ветвей функции  $G(Y)$  в соответствии с (5.12) получена двойственная кривая, представляющая часть бифуркационного множества (рис. 5.3). При пересечении критического множества параметров в точках общего положения, количество стационарных режимов изменяется на две единицы. На рисунке 5.3 указано количество стационарных режимов в различных областях плоскости управляемых параметров.

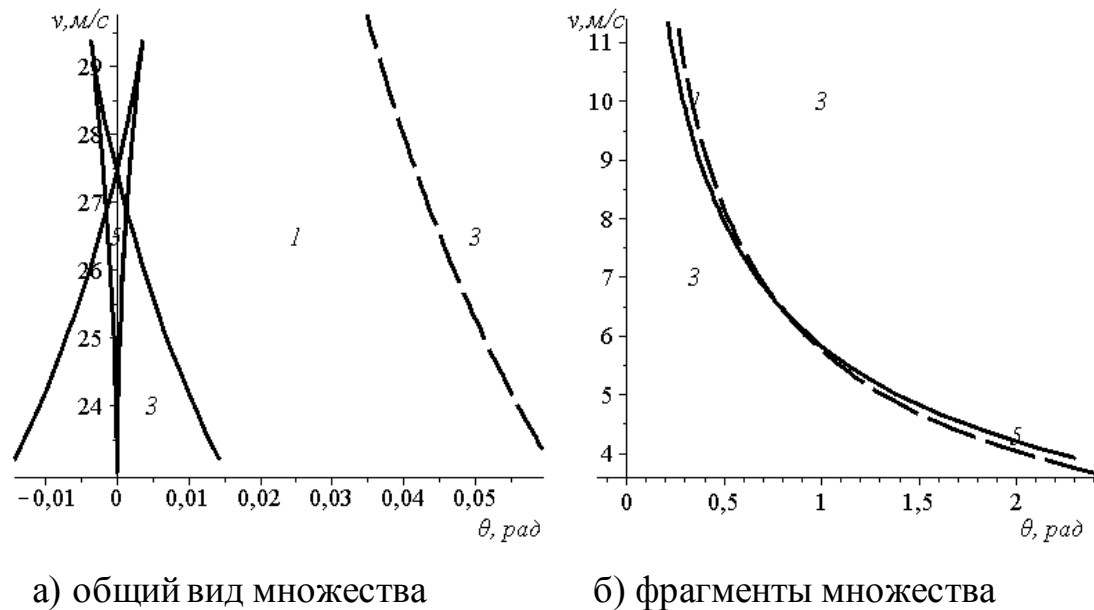


Рис. 5.3. Бифуркационное множество для модели экипажа с нелинейной немонотонной зависимостью сил увода от угла увода.

Проведем анализ устойчивости особых точек и их числа в различных областях бифуркационного множества.

Исследование устойчивости стационарных состояний сводится к анализу уравнения в вариациях

$$\ddot{\omega} + p\dot{\omega} + q\omega = 0, \quad p = -[\text{div}(P, Q)]_{(\omega^*, u^*)}, \quad q = [D(P, Q) / D(\omega, u)]_{(\omega^*, u^*)}.$$

Знак дивергенции векторного поля, заданного системой (5.3), однозначно

определяется в случае совпадения знаков  $\frac{dY_1}{d\delta_1}$  и  $\frac{dY_2}{d\delta_2}$ :

$$\operatorname{div}(P, Q) = -\frac{1}{v} \left[ \left( \frac{a^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_1}{d\delta_1} + \left( \frac{b^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_2}{d\delta_2} \right].$$

В особых точках, соответствующим выпуклым участкам зависимостей сил увода  $Y_1(\delta_1)$ ,  $Y_2(\delta_2)$  дивергенция векторного поля отрицательна, а для точек, соответствующим ниспадающим участкам – положительна. Так, для ветви  $g_3$  дивергенция векторного поля заведомо положительна, так как обе производные  $\frac{dY_1}{d\delta_1}$ ,  $\frac{dY_2}{d\delta_2}$  имеют отрицательный знак; для ветви  $g_1$  – отрицательна.

Из общей теории динамических систем [13, 40, 94, 98] следует, что устойчивость какой-либо особой точки (с индексом Пуанкаре  $j = +1$ ) не может измениться (предполагается, что дивергенция векторного поля отрицательна) до встречи с другой особой точкой с отрицательным индексом ( $j = -1$ ). В этом случае реализуется двукратный стационарный режим, что соответствует бифуркации складки.

На рисунке 5.4, *a* проиллюстрирован подход к анализу устойчивости стационарных режимов (при  $\theta = 0$  и вариации параметра продольной скорости  $v$ ) на основе понятия индекса Пуанкаре.

Прямолинейный режим устойчив при  $v < v^+$  ( $j=1$ ) и неустойчив при  $v > v^+$  ( $j=-1$ ). При  $v = v^+$  (рис. 5.4, *a*) в начало координат приходят две особые точки, образуя трехкратную особую точку; при  $v > v^+$  в начале координат имеется седловая особая точка (как следует из линейного анализа), следовательно, индекс Пуанкаре «подвижных» особых точек -  $j=-1$ . Анализ устойчивости круговых стационарных режимов движения представлен на рисунке 5.4, *б*. Сохраняя скорость постоянной  $v = \text{const}$ , будем варьировать лишь параметр  $\theta$ . При  $\theta = \theta_1$  на основной ветви  $g_1$ , а при  $\theta = \theta_2$  на дополнительной ветви  $g_3$  имеются двукратные особые точки. «Верхняя» определяет границу расположения устойчивых круговых режимов на ветви  $g_1$  при изменении параметра  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \theta_1$ ); «нижняя» отвечает рождению пары особых точек с противоположными по знаку индексами Пуанкаре при  $\theta = \theta_2$ .

При  $\theta > \theta_2$  этим особым точкам соответствуют неустойчивые круговые стационарные режимы – одна седловая, вторая неустойчивая в силу положительности дивергенции на ветви  $g_3$  (неустойчивый узел или фокус). Меняя оба управляющих параметра одновременно, можно получить случай, когда максимальное число особых точек равно пяти (рис. 5.4.в).

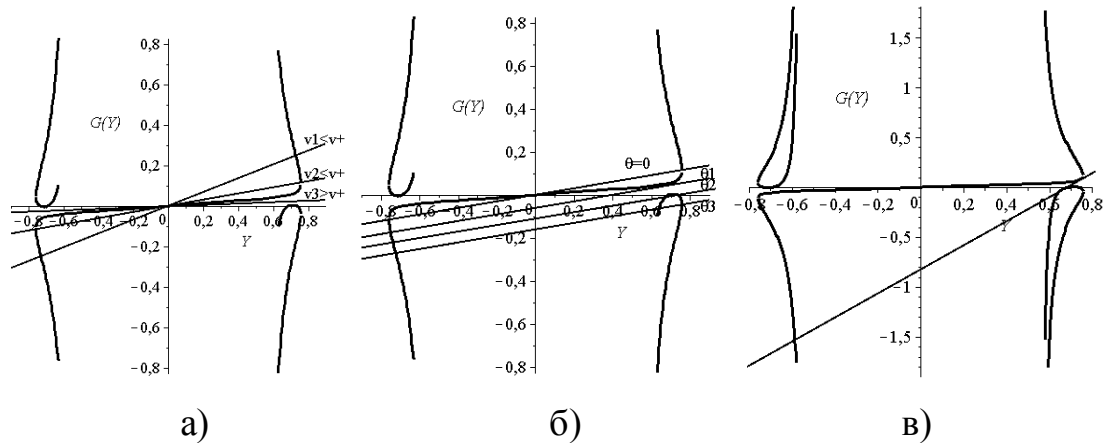


Рис. 5.4. а, б, в.

## 5.2 Характерные фазовые портреты системы и качественная картина структуры областей притяжения

Проведенный качественный анализ может быть конкретизирован с помощью построения фазовых портретов системы, соответствующих характерным значениям управляющих параметров. Это позволяет подтвердить число стационарных режимов и свойства их устойчивости в различных областях плоскости управляемых параметров (рис. 5.5).

Построение фазового портрета выполнено для следующего набора численных значений параметров:

$\varphi_1 = 0.8$ ,  $\varphi_2 = 0.8$  - коэффициенты сцепления на осях;

$a = 2.3$  м.,  $b = 2.7$  м. – расстояния от центра масс до точек крепления передней и задней осей соответственно;

$l = a + b = 5$  м.;

$k_1 = 23000$  Н/рад,  $k_2 = 15000$  Н/рад – коэффициенты бокового увода;

$m = 1317$  м. – масса экипажа;

$N_1 = \frac{mgb}{a+b} = 696.564$  Н,  $N_2 = \frac{mga}{a+b} = 5937.036$  Н – реакции опорной поверхности

для передней и задней осей;

$q_1 = \frac{k_1}{N_1} = 3.300$ ,  $q_2 = \frac{k_2}{N_2} = 2.526$  – безразмерные коэффициенты сопротивления

уводу;

$v^* = \sqrt{\frac{glq_1q_2}{q_1 - q_2}} = 22.98$  м/с – критическая скорость прямолинейного движения

без учета пяточных моментов.

Фазовый портрет, представленный на рисунке 5.5, а, соответствует случаю трех круговых стационарных режимов, один из которых устойчивый ( $v < v^*$ ,  $\theta < \theta_1$ ). Случай появления особых точек на дополнительной ветви  $g_3 g_4$  ( $\theta = \theta_3$ ) соответствует фазовому портрету на рисунке 5.5, б.

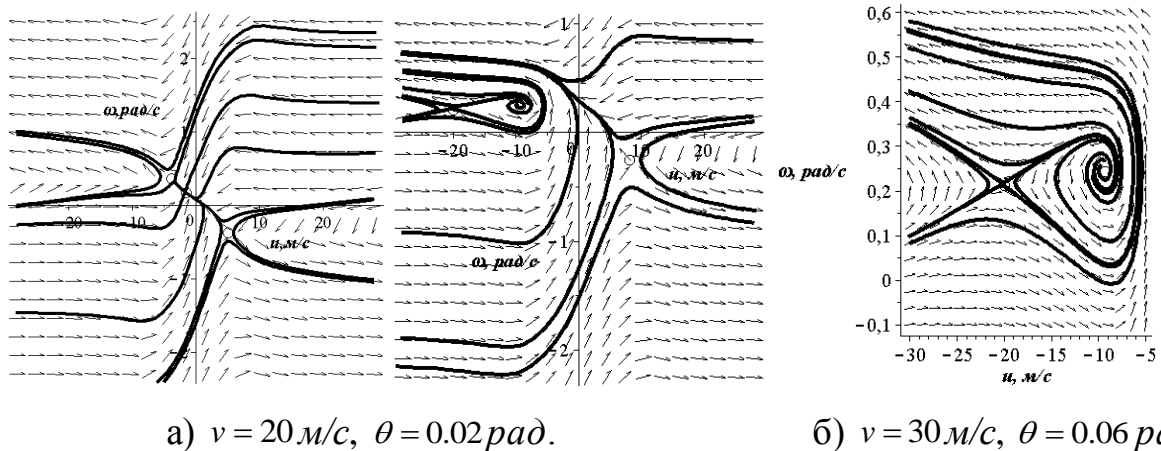


Рис. 5.5 - Фазовые портреты, иллюстрирующие динамическое поведение модели в различных областях бифуркационного множества.

В этом случае все стационарные состояния (два седла и фокус) неустойчивые, седло-фокус во втором квадранте - отвечают «ниспадающим» участкам зависимостей сил увода как функций углов увода. Характер фазового портрета для случая реализации пяти стационарных режимов легко представить, объединив рисунок 5.5, а) и фрагмент седло-фокус из рисунка 5.5, б).

### 5.3 Управляемость нелинейной модели автомобиля.

Известно, что для линейной модели автомобиля с упругими по И. Рокару колесами характеристика управляемости (1 – недостаточная, 2 – нейтральная, 3 – избыточная) определяется соотношением безразмерных коэффициентов сопротивления увода на передней и задней осях: 1 -  $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$ ; 2 -  $\bar{k}_2 = \bar{k}_1$ ; 3 -  $\bar{k}_2 < \bar{k}_1$ .

При движении автомобиля по окружности радиуса  $R$  с различными значениями параметра скорости  $V$  (продольная составляющая скорости ЦМ) угол Аккермана должен оставаться постоянным

$$l/R = \theta + \delta_2 - \delta_1. \quad (5.13)$$

Тогда значение угла поворота управляемых колес определяется соотношением

$$\theta = l/R + (\delta_1 - \delta_2). \quad (5.14)$$

При текущем значении параметра  $Y$  соответствующее значение разности  $(\delta_2 - \delta_1)$  определяется функцией  $G(Y)$ , обратной к функции  $Y(\delta_2 - \delta_1)$ .

Исходными являются зависимости  $Y_1 = Y_1(\delta_1)$ ,  $Y_2 = Y_2(\delta_2)$ . Разрешив их относительно  $\delta_i$ , находим  $\delta_1 = F_1(Y)$ ,  $\delta_2 = F_2(Y)$ , а  $(\delta_2 - \delta_1) = G(Y) = F_2(Y) - F_1(Y)$ .

Определив функцию  $G(Y)$ , получим из соотношения (5.14):

$$\theta = l/R - G(Y). \quad (5.15)$$

В рамках линейной гипотезы увода ( $\delta_2 - \delta_1 = (\frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{\bar{k}_1 \bar{k}_2}) \cdot Y$ ) приходим к ранее известному соотношению [5]

$$\theta = l/R + (\frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{\bar{k}_1 \bar{k}_2}) a_y / g. \quad (5.16)$$

Однако, смену свойств управляемости автомобиля, происходящую иногда на практике (рис. 5.6, б), невозможно объяснить на основе линейной

гипотезы увода. В работах [19, 21, 23] предпринята попытка объяснить этот факт на основе анализа нелинейной велосипедной модели (учитывающей нелинейность сил бокового увода в виде  $\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{k}_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}$  [70]). В данной случае рассмотрен случай немонотонных зависимостей, имеющих характер функции насыщения  $\bar{Y}_i(\delta_i) = \gamma_i \delta_i \cdot (1 + (|\delta_i| - \beta_i)^2 / \beta_i^2)^{-1/2}$ . Параметры  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  подбираем из соображений сохранения геометрических характеристик монотонных зависимостей,  $\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{k}_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}$ , что обеспечит постоянство критической скорости прямолинейного движения, согласованность максимальных значений безразмерных сил увода:  $\gamma_i = \bar{k}_i \cdot \sqrt{2}$ ,  $\beta_i = \varphi_i / (2 \cdot \bar{k}_i)$ .

Для случая зависимостей указанного типа, определяющих силы увода, получены аналитические условия изменения свойств управляемости модели автомобиля: для модели с недостаточной поворачиваемостью ( $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$ ) условием перехода (недостаточная поворачиваемость – избыточная поворачиваемость) является условие  $\varphi_1 > \varphi_2$ ; для модели с избыточной поворачиваемостью ( $\bar{k}_2 < \bar{k}_1$ ) условием перехода (избыточная поворачиваемость – недостаточная поворачиваемость) является условие  $\varphi_1 < \varphi_2$ .

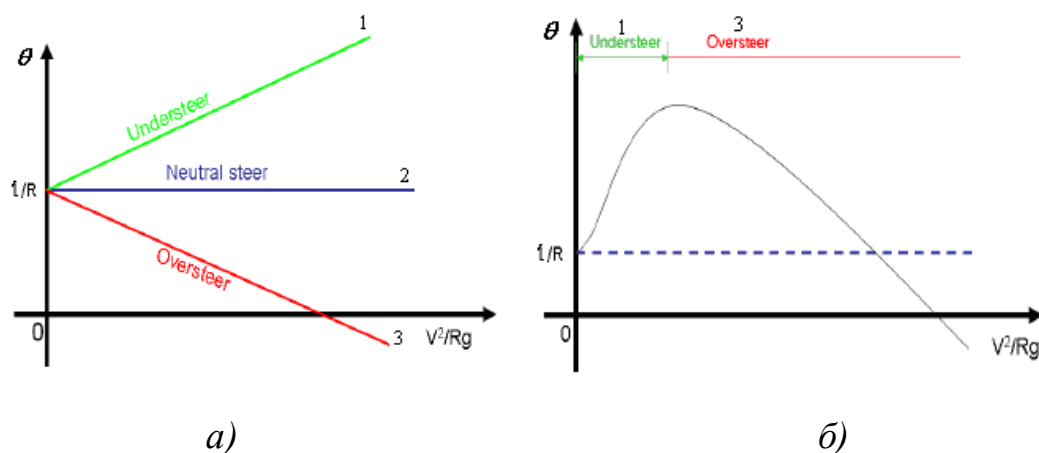


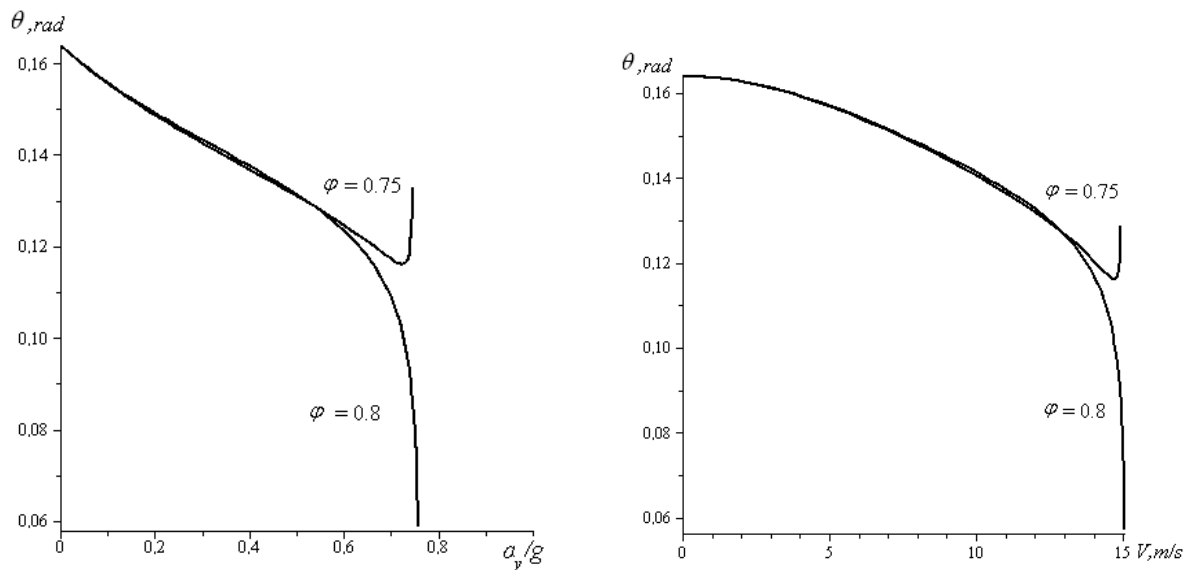
Рис. 5.6. а) диаграмма управляемости, соответствующая линейной гипотезе увода; б) виртуальная смена свойств управляемости модели автомобиля.

Далее для конкретных численных значений параметров модели автомобиля (с избыточной поворачиваемостью) построим диаграмму управляемости. Расстояние между передней и задней осями  $l = 5$  м.

Безразмерные коэффициенты сопротивления увода:  $\bar{k}_1 = 3,300$ ;  $\bar{k}_2 = 2,526$ . Выражение критической скорости прямолинейного движения и его численное значение:

$$V_{kp} = \sqrt{9,8 \cdot l \cdot \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 / (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)} = 22,98 \text{ м/с.}$$

иллюстрируется влияние вариации коэффициента сцепления в боковом направлении на передней оси  $\varphi_1 = \{0,8, 0,75\}$  (коэффициент сцепления в боковом направлении на задней оси остается фиксированным  $\varphi_2 = 0,8$ ) на диаграмму управляемости ( $R = 30,5$  м) в случае нелинейной гипотезы увода.

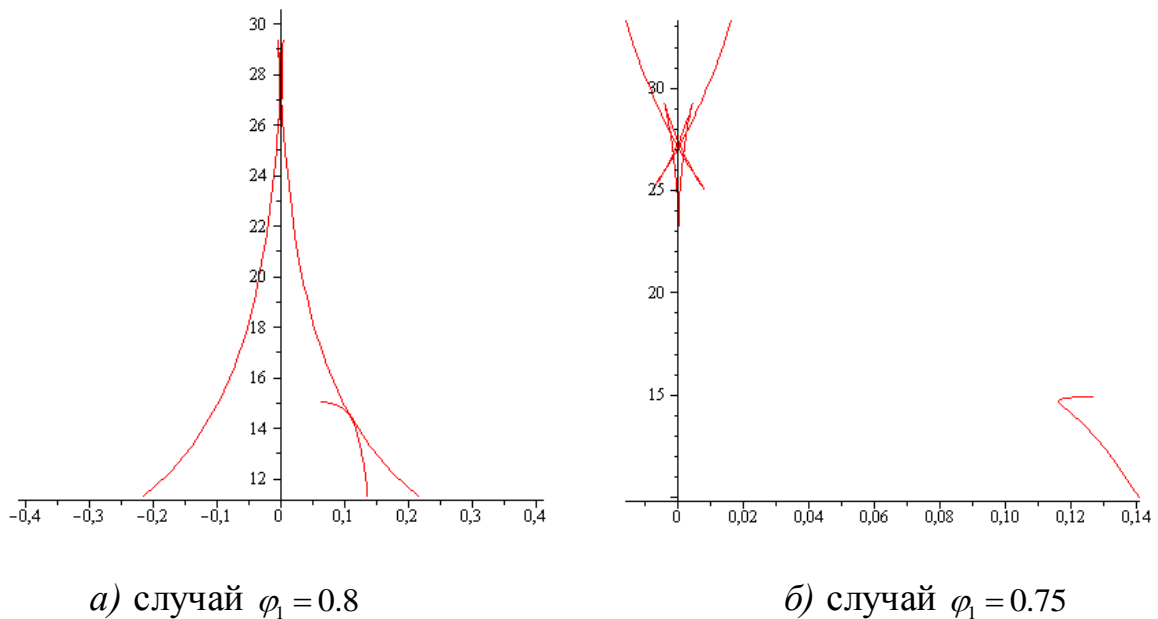


а) – зависимость  $\theta = \theta(a_y/g)$ ;

б) – зависимость  $\theta = \theta(V)$

Рис. 5.7. Диаграммы управляемости для случая нелинейной гипотезы увода при различных значениях коэффициента сцепления в боковом направлении на передней оси.

Приведем значения параметра удельного бокового ускорения, при которых меняется характер управляемости автомобиля: для случая  $\varphi_1 = 0,75$  получаем значения  $\bar{Y} = 0,72$ ,  $V = 14,7$  м/с.



а) случай  $\varphi_1 = 0.8$

б) случай  $\varphi_1 = 0.75$

Рис. 5.8. Диаграммы устойчивости в плоскости управляемых параметров модели.

При реализации стационарного кругового режима движения ( $R = 30.5$  м) с возрастающими значениями продольной скорости ЦМ, потеря устойчивости происходит при скорости  $v = 14.38$  м/с (рис. 5.8, а); пунктирной части диаграммы управляемости соответствуют неустойчивые круговые режимы.

#### 5.4 Заключение.

В данном разделе рассмотрена модель двухосного экипажа с жестким рулевым управлением (учитывающая нелинейные зависимости сил увода, имеющих ниспадающие участки), для которой характерна только дивергентная потеря устойчивости.

В пункте 5.1 известный способ определения стационарных режимов движения колесного экипажа [89], дополненный алгоритмом построения бифуркационного множества в сочетании с методом индекса Пуанкаре, дал возможность провести предварительный анализ количества стационарных режимов и определить границы устойчивости в плоскости управляемых параметров в случае немонотонных зависимостей сил увода. Ниспадающие



участки сил увода привели к появлению дополнительных ветвей бифуркационного множества, что связано с качественными изменениями фазового портрета модели. В пункте 5.2 представлены характерные фазовые портреты системы.

В пункте 5.3 получены аналитические условия смены свойств управляемости модели автомобиля. Построены диаграммы управляемости для случая нелинейной гипотезы увода при различных значениях коэффициента сцепления в боковом направлении на передней оси.

Таким образом, проявляется связь между свойством безопасной-опасной потерей устойчивости прямолинейного движения и характера поворачиваемости (безопасная потеря устойчивости прямолинейного движения влечет переход от избыточной поворачиваемости к недостаточной).

## ВЫВОДЫ

Общие выводы по работе.

- Проведен качественный анализ структуры разбиения фазовой плоскости траекториям, при изменении двух управляющих параметров модели колесного экипажа, с учетом наиболее общих геометрических характеристик сил увода.
- Показана возможность использования двух моделей взаимодействия колеса с опорной поверхностью (аксиоматика И. Рокара или модели М. В. Келдиша) при анализе автоколебаний шимми в нелинейной постановке.
- Получены условия возникновения автоколебаний в аналитическом виде при движении колесной сцепки в прямых и круговых участках движения, рассмотрено влияние различных типов аппроксимации нелинейных зависимостей сил увода и стабилизирующего момента на интенсивность автоколебаний колесного модуля.
- Исследовано влияние структуры сил на интенсивность автоколебаний стойки шасси с двумя степенями свободы в нелинейной постановке.
- Исследована дивергентная и флаттерная потеря устойчивости прямолинейного режима движения нелинейной модели экипажа с управляемым колесным модулем на основе бифуркационного анализа, получена геометрическая интерпретация условий опасной-безопасной по Н. Н. Баутину границы устойчивости в пространстве параметров.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Агафонов С.А. Об устойчивости неконсервативных систем / С.А. Агафонов // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. – 1972. – № 4. – С. 87–90.
2. Агафонов С.А. Об устойчивости движения неконсервативных механических систем / С.А. Агафонов // ПММ. – 1992. – Т. 56. Вып. 2. – С. 212–217.
3. Агафонов С.А. Устойчивость неконсервативных систем и оценка области притяжения / С.А. Агафонов // ПММ. – 2003. – Т. 67. Вып. 2. – С. 239–243.
4. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкен. – М.: Физматгиз, 1950. – 916 с.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. – М: Наука, 1990. – 312 с.
6. Аппель П. Теоретическая механика / П. Аппель. – М.: Физматгиз, 1960. – Т.2.
7. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1990. – 3-е изд., доп.– 128 с.
8. Аронович Г.В. К теории шимми автомобиля и самолета / Г.В. Аронович // Прикладная математика и механика. – 1949. – 13, №5. – С. 477–488.
9. Байков А.Е. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе / А.Е. Байков, П.С. Красильников // ПММ. – 2010. – Т. 74. Вып. 1. – С. 74–88.
10. Байков А.Е. Предельный цикл при резонансе 1:2 в неконсервативной системе / А.Е. Байков // ПММ. – 2011. – Т. 75. Вып. 3. – С. 385–396.
11. Баутин Н.Н. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости / Н.Н. Байков // ПММ. – 1948. – Т.12. №. 6. – С. 691–728.

12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости / Н.Н. Баутин. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
13. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В.В. Белецкий. – М.: Издательство МГУ, 1975. – 308 с.
14. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Перевод с английского / Р. Беллман. – Москва: Издательская группа URSS, 2-е изд., 2003. – 216 с.
15. Бобылев Н.А. О приближенном построении автоколебаний в системах автоматического регулирования / Н.А. Бобылев, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 272. № 2. – С. 267–271.
16. Бобылёв Н.А. О методе гармонического баланса в задаче об автоколебаниях / Н.А. Бобылев, М.А. Красносельский // АиТ. –1984. – № 9. – С. 44–51.
17. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, – 1958. – 408 с.
18. Вельмагина Н.А. Бифуркационное множество модели двухосного экипажа с нелинейной немонотонной зависимостью сил увода / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2010 – Д., НАНУ ИПММ, 2010. – С. 131–139.
19. Velmagina N. The bifurcation set for a two-axes vehicle model with the non-linear dependence of slipping forces / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet // Тезисы докладов 3-й международной конференции «Нелинейная динамика – 2010», 21-24 сентября 2010г. – Х.: ООО «ЭДЭНА». – 2010. – С. 219–224.
20. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в прямолинейном режиме движения / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий //

Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2011 – Д., НАНУ ИПММ. – 2011. – С. 100–108.

21. Вельмагина Н.А. Бифуркационное множество нелинейной модели автомобиля / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий, В.Г. Хребет // XIV Міжнародна наукова конференція ім. ак. М.Кравчука, 19-21квітня, 2012 р., Київ: мат. конф. – К., НТУУ. – 2012. – Т.1. – С.95.
22. Вельмагіна Н.О. Аналіз автоколивань колісного модуля / Н.О. Вельмагіна, В.Г. Вербицький, В.Г. Хребет // Тезиси докладов міжнародної конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», «Тараповские чтения-2012». – Харьков. – 01-31 мая 2012. – С. 33.
23. Velmagina N. Steerability and stability of automobile non-linear model / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet, A. Kravchenko // 10 An international journal on motorization, vehicle operation, energy efficiency and mechanical engineering «ТЕКА commission of motorization and energetics in agriculture», vol.12, no 3. – Lublin – Lugansk 2012. – P. 77-84.
24. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в круговом режиме движения / Н.А. Вельмагина // Матеріали Міжнародної наукової практичної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», 15 – 16 листопада, 2012 р., Кіровоград, Вид-во КЛА НАУ. – 2012. – С. 302–304.
25. Вельмагина Н.А. Устойчивость и бифуркации стационарных режимов движения модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2012 – Д., НАНУ ИПММ. – 2012. – С. 125–134.
26. Velmagina N. Force structure impact on the wheel module stability and oscillation process / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet, A. Kravchenko // An international quarterly journal on motorization, vehicle operation,

- energy efficiency and mechanical engineering «ТЕКА commission of motorization and energetics in agriculture», vol.13, no 4. – Lublin, Rzeszow. – 2013. – P. 126–133.
27. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля при двух моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Материалы 2 международной заочной научно – практической конференции «Наука вчера, сегодня, завтра». 24 июля 2013г., – Новосибирск. – 2013. – С. 7–15.
  28. Вельмагина Н.А. Бифуркации автоколебаний колесного модуля в окрестности прямолинейного режима движения / Н.А. Вельмагина // Международный научный журнал «Прикладная механика», том 49(59), №6, август – сентябрь, 2013г. – Киев. – 2013. – Т.49(59). №6 – С. 113–120.
  29. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в круговом режиме движения. / Н.А. Вельмагина // Вісник Донецького Національного університета. Серія А: Природничі науки. Донецьк 2013 – Д., ДонНУ. – 2013. – С. 28–32.
  30. Вельмагина Н.А. Влияние структуры сил на устойчивость колесного модуля и процесс автоколебаний / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий, В.Г. Хребет // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», «Тараповские чтения-2013». – Харьков. – 29 сентября – 4 октября 2013г. – С. 73–74.
  31. Вербицкий В.Г. Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы / В.Г. Вербицкий // Прикладная механика. – Киев. – 1982. – Т.18, № 12. – С. 119–121.
  32. Вербицкий В.Г. Бифуркации стационарных состояний в системах с качением при постоянных силовых возмущениях / В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас // Прикладная математика и механика. – Киев. – 1994. – Т. 58, №5. – С. 165–170.

33. Вербицкий В.Г. Особенности многообразий стационарных состояний в окрестности симметричного решения динамической системы с симметрией / В.Г. Вербицкий // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С. 52–55.
34. Вербицкий В.Г. Приближенный анализ автоколебательной системы / В.Г. Вербицкий, М.Я. Садков // Доповіді НАН України. – 2001. – №10. – С. 48–52.
35. Вербицкий В. Введение в теорию устойчивости колесных экипажей и рельсового пути. Монография / В. Вербицкий, А. Новак, Э. Даниленко, М. Ситаж. – Д.: Вебер, 2007. – 255 с.
36. Гоздек В.С. О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентирующихся колес самолета / В.С. Гоздек // Тр. ЦАГИ. – 1964. – Вып. 917. – С. 1–30.
37. Гончаренко В.И. О поведении линейных неконсервативных систем / В.И. Гончаренко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 44–47.
38. Гончаренко В.И. О стабилизации движения линейных систем / В.И. Гончаренко // Прикладная механика. – Киев. – 1991. – Т. 27, №5. – С. 107–110.
39. Гончаренко В.И. О шимми колеса самолета на несимметричной подвеске / В.И. Гончаренко // Прикладная механика. – Киев. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 89–95.
40. Гончаренко В. И. Каноническое описание системы управления в задаче о шимми колес шасси самолета / В.И. Гончаренко // Прикладная механика. – Киев. – 2011. – Т. 47, №2 – С. 129–142.
41. Горр Г.В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко. – К.: Наук. Думка, 1984. – 288 с.

42. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
43. Жбанов Ю.К. К вопросу о теоремах И.И. Метелицына / Ю.К. Жбанов, В.Ф. Журавлев // ПММ. – 2001. – Т. 65. Вып. 3. – С. 541–543.
44. Журавлев В. Ф. О механизме явления шимми / В.Ф. Журавлев, Д. М. Климов // Докл. АН РФ. – 2009. – Т. 428, № 6. – С. 761–764.
45. Журавлев В. Ф. Теория явления шимми / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов // Изв. РАН, МГТ. – 2010. – № 3. – С. 22–29.
46. Зевин А.А. К теории линейных неконсервативных систем / А.А. Зевин // ПММ. – 1988. – Т.52, №3. – С. 386–391.
47. Зубов В.И. Устойчивость движения / В.И. Зубов. – М.: «Высшая школа», 1973. – 272 с.
48. Иванов А.П. Об устойчивости механических систем с позиционными неконсервативными силами / А.П. Иванов // ПММ. – 2003. – Т. 67. Вып. 5. – С. 707–712.
49. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел / А.Ю. Ишлинский. – М: Наука, 1986. – 416 с.
50. Каменков Г.В. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика / Г.В. Каменков. – М.: Наука, 1971. – 259 с.
51. Карапетян А.В. Об устойчивости неконсервативных систем / А.В. Карапетян // Вестн. МГУ. Сер. 1. математика, механика. – 1975. – № 4. – С. 109–113.
52. Карабан В.Н. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы / В.Н. Карабан, А.С. Беломытцев. – Киев: УМК ВО. 1990. – 168 с.
53. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Избранные труды. Механика / М.В. Келдыш. – М: Наука. – 1985. – С. 491–530.



54. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики / Н.А. Кильчевский, Г.Д. Нечипоренко, Л.М. Шальда. – Киев: Наук. Думка. 1975.
55. Киреенков А.А. Трехмерные модели трения / А.А. Киреенков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Вып. 4 – 2. – С. 174–176.
56. Кириллов О.Н. Парадокс дестабилизации / О.Н. Кириллов // Докл. РАН. – 2004. – Т. 395, № 5. – С. 614–620.
57. Кириллов О.Н. Об устойчивости неконсервативных систем с малой диссипацией / О.Н. Кириллов // Современная математика и ее приложения. – 2005. – Т. 36. – С. 107–117.
58. Клим В. Неравенство Метелицына и критерии устойчивости механических систем / В. Клим, А.П. Сейранян // ПММ. – 2004. – Т. 68. Вып. 2. – С. 225–233.
59. Красносельский А.М. О непрерывных ветвях циклов в системах с нелинеаризуемыми нелинейностями / А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский // Доклады Академии наук. – 2003. – Т. 389, №1, – С. 11–16.
60. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959. – 211с.
61. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем / Б.И. Крюков. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
62. Лахаданов В.М. О влиянии структуры сил на устойчивость движения / В.М. Лахаданов// ПММ. – 1974. – Т. 38. Вып. 2. – С. 246–253.
63. Лахаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем / В.М. Лахаданов // ПММ. – 1975. – Т. 39. Вып. 1. – С. 53–58.
64. Левин М.А. Теория качения деформируемого колеса / М.А. Левин, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 272 с.
65. Леонов Г.А. Циклы двумерных систем. Компьютерные вычисления, эксперименты / Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, Е.В. Кудряшова // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2008. – Вып. 3. – С. 216–250.

66. Литвинов А.С. Управляемость и устойчивость автомобиля / А.С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с.
67. Лобас Л.Г. Автоколебания колеса на ориентирующей стойке шасси с нелинейным демпфером / Л.Г. Лобас // Прикладная математика и механика. – 1981. – Т. 45, № 4. – С.80–87.
68. Лобас Л.Г. Влияние конструктивных параметров и скорости движения на шимми ориентирующихся колес / Л.Г. Лобас, Н.В. Никитина // Прикладная механика. – Киев. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 127–131.
69. Лобас Л.Г. Устойчивость прямолинейного качения связанных упругодеформируемых тел / Л.Г. Лобас, Л.Г. Лобас // Прикладная механика. – Киев. – 1984. – Т.20, №9 – С. 97–103.
70. Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий. – К.: Наук. думка, 1990. – 232 с.
71. Лобас Л.Г. Автоколебания двухзвенных систем с качением / Л.Г. Лобас, Ю.Л. Ващенко // Прикладная механика. – Киев. – 1991. – Т.27, №3. – С. 94-102.
72. Лобас Л.Г. О дивергентных бифуркациях в динамических системах с качением / Л.Г. Лобас, В.В. Завьялова // Прикладная механика. – Киев. – 1994. – Т. 30, №12. – С. 86–93.
73. Лобас Л.Г. Об устойчивости движения транспортных машин с учетом колебаний управляющего колесного модуля / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий // Прикладная механика. – Киев. – 1995. – Т. 31, №4. – С. 86 –93.
74. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике / А.М. Ляпунов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 632 с.
75. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
76. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 472 с.

77. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 366 с.
78. Мартынюк А.А. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин / А.А. Мартынюк, Л.Г. Лобас, Н.В. Никитина. – К.: Техника, 1981. – 224 с.
79. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения / А.А. Мартынюк. – Киев: Наук. думка, 1983. – 301 с.
80. Мартынюк А.А. Об устойчивости движения крупномасштабных систем / А.А. Мартынюк, В.И. Слынько // Дифференциальные уравнения. – 2002. – № 6. – С. 754–758.
81. Матросов В.М. Об устойчивости движения / В.М. Матросов // ПММ. – 1962. – Т. 26. Вып. 5. – С. 885–895.
82. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В.М. Матросов. – М.: Физматлит, 2001. – 380 с.
83. Метелицын И.И. Теория гироскопа. Теория устойчивости. Избранные труды / И.И. Метелицын. – М.: Наука, 1977. – 132 с.
84. Меркин Д.Р. Гироскопические системы / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
85. Меркин Д.Р. О методе и теоремах И.И. Метелицына / Д.Р. Меркин // ПММ. – 2001. – Т. 65. Вып. 3. – С. 536–540.
86. Неймарк Ю.И. Динамика неавтономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
87. Новожилов И.В. Фракционный анализ / И.В. Новожилов. – М.: МГУ, 1991. – 190 с.
88. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1964. – 316 с.
89. Певзнер Я.М. Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер. – М.: Машгиз, 1947. – 156 с.

90. Плахтиенко Н.П. Об устойчивости движения самолета по взлетно-посадочной полосе при ветровой нагрузке / Н.П. Плахтиенко, Б.М. Шифрин // Прикладная механика. – Киев. – 1999. – Т. 35, №10. – С.101–107.
91. Плахтиенко Н.П. Поперечные упруго-фрикционные вибрации движущегося по взлетно-посадочной полосе самолета / Н.П. Плахтиенко, Б.М. Шифрин // Прикладная механика. – Киев. – 2001. – Т. 37, №5. – С.136–143.
92. Плахтиенко, Н.П. О поперечных колебаниях шасси самолета / Н.П. Плахтиенко, Б.М. Шифрин // Проблемы прочности. – 2002. – №6. – С.79–88.
93. Постон Т. Теория катастроф и ее применение / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 607 с.
94. Рейссинг Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейссинг, Г. Сансоне, Р. Конти. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 320 с.
95. Рокар И. Неустойчивость в механике / И. Рокар. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1959. – 288 с.
96. Румянцев В.В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озинанер. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
97. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лулуа. – М: Мир, 1980г. – 302 с.
98. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем / А.Я. Савченко. – К.: Наукова думка, 1977. – 160 с.
99. Санников В.А. Явление возбуждения боковых колебаний катящегося пневматика при циклическом торможении / В.А. Санников // Изв. АН СССР. МТТ – 1989. – №3. – С. 17–23.

100. Сейранян А.П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем / А.П. Сейранян // Успехи механики. – 1990. – Т. 13, №2. – С. 89–124.
101. Серебрякова Н.Н. О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы, области устойчивости, где «безопасная» граница переходит в «опасную» / Н.Н. Серебряков // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 2. – С. 178–182.
102. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов / А.М. Формальский. – М.: Физматлит, 2014. – 232 с.
103. Хэссард Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
104. Холодниок М. Методы анализа нелинейных математических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
105. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике / Н.Г. Четаев. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
106. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля / Д.Р. Эллис. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
107. Besselink J.M. Shimmy of aircraft main landing gears / J.M. Besselink. – PhD thesis, Delft University of Technology, 2000. – 201 p.
108. Gillespie Fundamentals of Vehicle Dynamics / Gillespie, D. Thomas. – Society of Automotive Engineers, Inc. 1992 – 470 p.
109. Goncharenko V.I. Shimmy model of aircraft landing gear and quadratic forms / V.I. Goncharenko, A.Yu. Obolensky // European Conference for Aerospace Sciences "EUCASS". Proceedings of conference. July 04-07, 2005. – Moscow, Russia. – 2005. – P. 1–5.
110. Kooijman J. D. G. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects / J. D. G. Kooijman, J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina, A. L. Schwab // Science 332 (6027). – P. 339-342.

111. Kuznetsov Yuri A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Yuri A. Kuznetsov. -2<sup>nd</sup> ed. Wien; New York: Springer-Verlag, 1998. - 593 p.
112. Mi-Seon Yi. Non-linear shimmy analysis of a nose landing gear with friction / Yi. Mi-Seon, Bae. Jae-Sung, Hwang. Jae-Hyuk // Journal of the Korean society for aeronautical & space sciences. – 39, №7. – 2011. – P. 605-611.
113. Pacejka H.B. The wheel shimmy phenomenon / H.B. Pacejka // Doctoral Thesis, Delft University of Technology. – December 1966.
114. Pacejka H.B. Tyre and vehicle dynamics / H.B. Pacejka. - Butterworth-Heinemann, 2006. – 642 p.
115. Seyranian A.P. Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications / A.P. Seyranian, A.A. Mailybaev. – World Scientific, New Jersey, 2003. – 403 p.
116. B. von Schlippe Das Flattern eines bepneuten Rades / B. von Schlippe, R. Dietrich // Bericht 140 der Lilienthal Gesellschaft (1941), English translation: NACA TM 1365, 1954. – P. 125–147.
117. Somieski G. Shimmy analysis of a simple aircraft nose landing gear model using different mathematical methods / G. Somieski // Aerospace Science and Technology 8, 1997. – P. 545–555.
118. Sharp R.S. A comparison of tyre representations in a simple wheel shimmy problem / R.S. Sharp, C.J. Jones // Vehicle System Dynamics 9, 1980. – P. 45–57.
119. Troger H. A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of a tractor-semitrailer / H.Troger, K. Zeman // Vehicle System Dynamics. 1984. – v. 13, №. 4. – P. 161–172.
120. Troger H. Nonlinear stability and bifurcation theory / H.Troger, A. Steindl. – Wien; New York: Springer-Verlag, 1991. – 407 p.

**Анализ колебаний в окрестности прямолинейного режима  
движения в задаче шимми стойки шасси.**

> restart;

> psi:=p0\*sin(omega\*t+phi);

$$\psi := p0 \sin(\omega t + \phi)$$

> theta:=a\*sin(omega\*t);

$$\theta := a \sin(\omega t)$$

> Уравнения движения ноги шасси в окрестности прямолинейного движения

> EQ1:=B\*diff(theta,t\$2)+chi1\*theta+h\*diff(theta,t)-I1\*v/r\*diff(psi,t);

$$EQ1 := -B a \sin(\omega t) \omega^2 + \chi1 a \sin(\omega t) + h a \cos(\omega t) \omega - \frac{I1 v p0 \cos(\omega t + \phi) \omega}{r}$$

> EQ2:=C\*diff(psi,t\$2)+chi\*psi+h1\*diff(psi,t)+I1\*v/r\*diff(theta,t)+l\*Y;

$$EQ2 := -C p0 \sin(\omega t + \phi) \omega^2 + \chi p0 \sin(\omega t + \phi) + h1 p0 \cos(\omega t + \phi) \omega + \frac{I1 v a \cos(\omega t) \omega}{r} + l Y$$

> evalm(subs(t=0,EQ1));

$$h a \omega - \frac{I1 v p0 \cos(\phi) \omega}{r}$$

> e1:=h\*a\*omega-I1\*v\*p0c\*omega/r;

$$e1 := h a \omega - \frac{I1 v p0c \omega}{r}$$

> evalm(subs(omega\*t=Pi/2,EQ1));

$$-B a \omega^2 + \chi1 a + \frac{I1 v p0 \sin(\phi) \omega}{r}$$

> e2:=-B\*a\*omega^2+chi1\*a+I1\*v\*p0s\*omega/r;

$$e2 := -B a \omega^2 + \chi1 a + \frac{I1 v p0s \omega}{r}$$

> s:=solve({e1,e2},{p0s,p0c});

$$s := \left\{ p0c = \frac{h a r}{I1 v}, p0s = \frac{a r (B \omega^2 - \chi1)}{I1 v \omega} \right\}$$

> assign(s);

> evalm(subs(t=0,EQ2));

$$-C p0 \sin(\phi) \omega^2 + \chi p0 \sin(\phi) + h1 p0 \cos(\phi) \omega + \frac{I1 v a \omega}{r} + l Y$$

> e3:=-C\*p0s\*omega^2+chi\*p0s+h1\*p0c\*omega+I1\*v\*a\*omega/r;

$$e3 := -\frac{C a r (B \omega^2 - \chi1) \omega}{I1 v} + \frac{\chi a r (B \omega^2 - \chi1)}{I1 v \omega} + \frac{h1 h a r \omega}{I1 v} + \frac{I1 v a \omega}{r}$$

> evalm (subs(omega\*t=Pi/2,EQ2));

$$-C p0 \cos(\phi) \omega^2 + \chi p0 \cos(\phi) - h1 p0 \sin(\phi) \omega + l Y$$

> e4:=-C\*p0c\*omega^2+chi\*p0c-h1\*p0s\*omega+l\*Y;

$$e4 := -\frac{C h a r \omega^2}{I I v} + \frac{\chi h a r}{I I v} - \frac{h l a r (B \omega^2 - \chi l)}{I I v} + l Y$$

> factor(e3);

$$-\frac{1}{I I v \omega r} \left( a \left( C r^2 \omega^4 B - C r^2 \omega^2 \chi l - \chi r^2 B \omega^2 + \chi r^2 \chi l \right. \right. \\ \left. \left. - h l h r^2 \omega^2 - I I^2 v^2 \omega^2 \right) \right)$$

> pol1 :=  $C r^2 \omega^4 B - C r^2 \omega^2 \chi l - \chi r^2 B \omega^2 + \chi r^2 \chi l - h l h r^2 \omega^2 - I I^2 v^2 \omega^2$ ;

$$pol1 := C r^2 \omega^4 B - C r^2 \omega^2 \chi l - \chi r^2 B \omega^2 + \chi r^2 \chi l - h l h r^2 \omega^2 - I I^2 v^2 \omega^2$$

> factor(e4);

$$-\frac{C h a r \omega^2 - \chi h a r + h l a r B \omega^2 - h l a r \chi l - l Y I I v}{I I v}$$

> pol2 :=  $C h a r \omega^2 - \chi h a r + h l a r B \omega^2 - h l a r \chi l - l Y I I v$ ;

$$pol2 := C h a r \omega^2 - \chi h a r + h l a r B \omega^2 - h l a r \chi l - l Y I I v$$

> R := resultant(pol1, pol2,  $\omega$ );

$$R := \left( C r^2 B l^2 Y^2 I I^2 v^2 + C r^3 B l Y I I v \chi h a \right. \\ + C r^3 B l Y I I v h l a \chi l - h l h^2 r^3 C a l Y I I v \\ - h l h^3 r^4 C a^2 \chi - h l^2 h^2 r^4 C a^2 \chi l - h l^2 h r^3 a B l Y I I v \\ - h l^2 h^2 r^4 a^2 B \chi - h l^3 h r^4 a^2 B \chi l - C^2 r^3 \chi l h a l Y I I v \\ - C^2 r^4 \chi l^2 h a^2 h l - \chi r^3 B^2 h l a l Y I I v - \chi^2 r^4 B^2 h l a^2 h \\ - I I^3 v^3 C h a r l Y - I I^2 v^2 C h^2 a^2 r^2 \chi \\ - I I^2 v^2 C h a^2 r^2 h l \chi l - I I^3 v^3 h l a r B l Y \\ - I I^2 v^2 h l a^2 r^2 B \chi h - I I^2 v^2 h l^2 a^2 r^2 B \chi l \\ \left. + 2 \chi r^4 \chi l a^2 h C h l B \right)^2$$

> Амплитудное уравнение

$$AUR := C * r^2 * B * l^2 * Y^2 * I I^2 * v^2 + C * r^3 * B * l * Y * I I * v * \chi * h * a + C * r^3 * B * l * Y * I \\ I * v * h * l * a * \chi * l - h * l * h^2 * r^3 * C * a * l * Y * I I * v - h * l * h^3 * r^4 * C * a^2 * \chi - \\ h * l^2 * h^2 * r^4 * C * a^2 * \chi * l - h * l^2 * h * r^3 * a * B * l * Y * I I * v - h * l^2 * h^2 * r^4 * a^2 * B * \chi - \\ h * l^3 * h * r^4 * a^2 * B * \chi * l - C^2 * r^3 * \chi * l * h * a * l * Y * I I * v - \\ C^2 * r^4 * \chi * l^2 * h * a^2 * h * l - \chi * r^3 * B^2 * h * l * a * l * Y * I I * v - \chi^2 * r^4 * B^2 * h * l * a^2 * h - \\ I I^3 * v^3 * C * h * a * r * l * Y - I I^2 * v^2 * C * h^2 * a^2 * r^2 * \chi - \\ I I^2 * v^2 * C * h * a^2 * r^2 * h * l * \chi * l - I I^3 * v^3 * h * l * a * r * B * l * Y - \\ I I^2 * v^2 * h * l * a^2 * r^2 * B * \chi * h - I I^2 * v^2 * h * l^2 * a^2 * r^2 * B * \chi * l - \\ I I^2 * v^2 * h * l * a^2 * r^2 * B * \chi * h - \\ I I^2 * v^2 * h * l^2 * a^2 * r^2 * B * \chi * l + 2 * \chi * r^4 * \chi * l * a^2 * h * C * h * l * B :$$

> Числовые значения конструктивных параметров системы

> NI := 5000; kl := 42700; B := 9.81; h := 37.3;  $\chi l$  := 12160; C  
:= 165; hl := 981;  $\chi$  := 421100; II := 11.8; r := 0.4; l  
:= 0.85;  $\phi_1$  := 0.7;

> AUR;



$$26054.02349Y^2 v^2 - 5.1018398710^9 Y v a - 4.63678453710^{15} a^2 - 8.81413947310^6 v^3 a Y - 9.71435574710^{12} v^2 a^2$$

> Сила увода представляет дробно-иррациональную зависимость

$$Y := \frac{kI \cdot a}{\text{sqrt}\left(1 + \left(\frac{kI \cdot a}{\varphi_1 \cdot NI}\right)^2\right)};$$

$$Y := \frac{42700a}{\sqrt{1 + 148.8400000a^2}}$$

>  $KI := .5 * kI^3 / (\varphi_1 \cdot NI)^2$ ;

$$KI := 3.17773400010^6$$

> Сила увода аппроксимирована линейным и кубическим членами

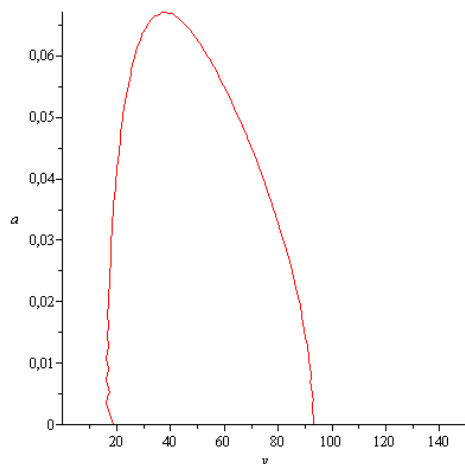
$$Y := kI * a - KI * a^3;$$

$$Y := 42700a - 3.17773400010^6 a^3$$

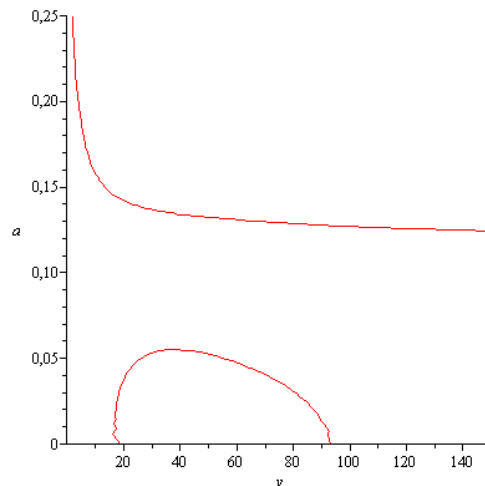
> Определение границ устойчивости по параметру скорости и амплитуд боковой деформации пневматика

> *with(plots)* :

> *implicitplot(AUR = 0, v = 1 .. 150, a = 0 .. 0.15, numpoints= 1800)*;



$$Y := \frac{42700a}{\sqrt{1 + 148.8400000a^2}}$$



$$Y := 42700a - 3.17773400010^6 a^3$$

## Построение фазового портрета модели автомобиля

> *restart*:

Числовые значения конструктивных параметров системы

```
> m:=1317;
> J:=3050;
> fi1:=0.8;
> fi2:=0.8;
> a:=2.3;
> b:=2.7;
> l:=a+b;
> k1:=23000;-
> k2:=15000
> g:=9.8;
> N1:=m*g*b/(a+b);
> N2:=m*g*a/(a+b);
```

Угол управляемых колес

```
> tet:=0.06;
```

Продольная составляющая скорости центра масс

```
> v:=30.;
```

Углы увода и боковые силы увода

```
> de1:=tet-(u(t)+a*omega(t))/v;
> de2:=(-u(t)+b*omega(t))/v;
> Y2:=N2*2.526513230*de2*sqrt(2)/sqrt(1+(abs(de2)-.15)^2/.15^2);
> Y1:=N1*3.300062959*de1*sqrt(2)/sqrt(1+(abs(de1)-.12)^2/.12^2);
```

> Уравнения плоскопараллельного движения авто (в подвижной системе координат) при наличии боковой внешней силы момента внешних сил относительно вертикальной оси

```
> E1:=-v*omega(t)+(Y1+Y2)/m;
> E2:=(Y1*a-Y2*b)/J;
```

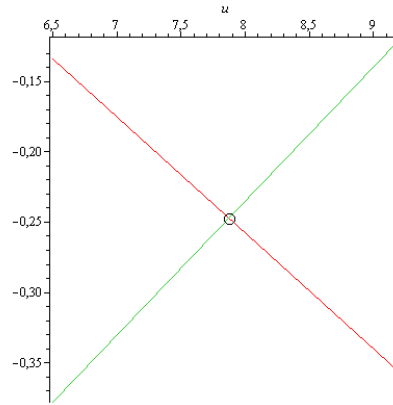
```
> with(DEtools):
```

> Анализ стационарных режимов

```
> ss1 := {u = 7.871807194, omega = -.2472388289};
> l11 := .4014387226-0.8240516256e-1*u;
> l12 := -.9971563579+0.9526624706e-1*u;
```

```
> with(plots):
```

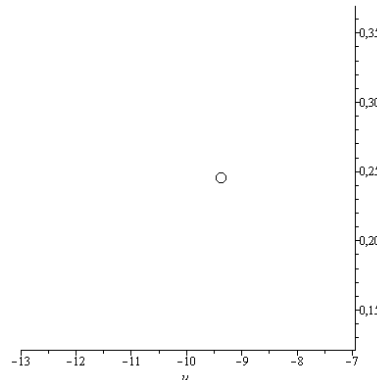
```
> C1:=pointplot([subs(ss1,[u,omega])],symbol=circle,symbolsize=22);
> B1:=plot([l11,l12],u=6.5..9.2):
> display(B1,C1);
```



```

> ss2 := {u = -9.392783714, omega = .2462405691};
> l21 := -0.2723556824e-2*u-(0.3512077688e-1*I)*u+.2206587889-
.3298818611*I;
> l22 := -0.2723556824e-2*u+(0.3512077688e-
1*I)*u+.2206587889+.3298818611*I;
> with(plots):
>
> C2:=pointplot([subs(ss2,[u,omega]),symbol=circle,symbolsize=22):
> B2:=plot([l21,l22],u=-13..-7):
> display(B2,C2);

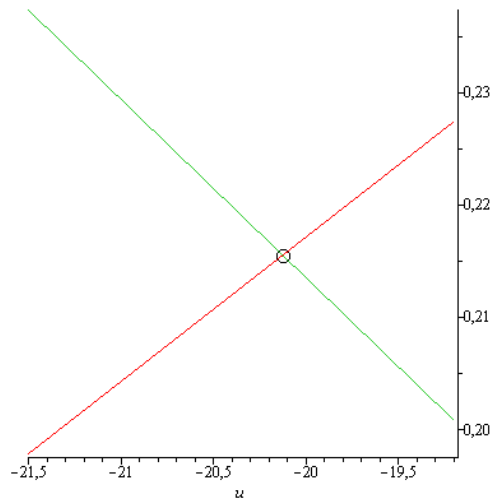
```



```

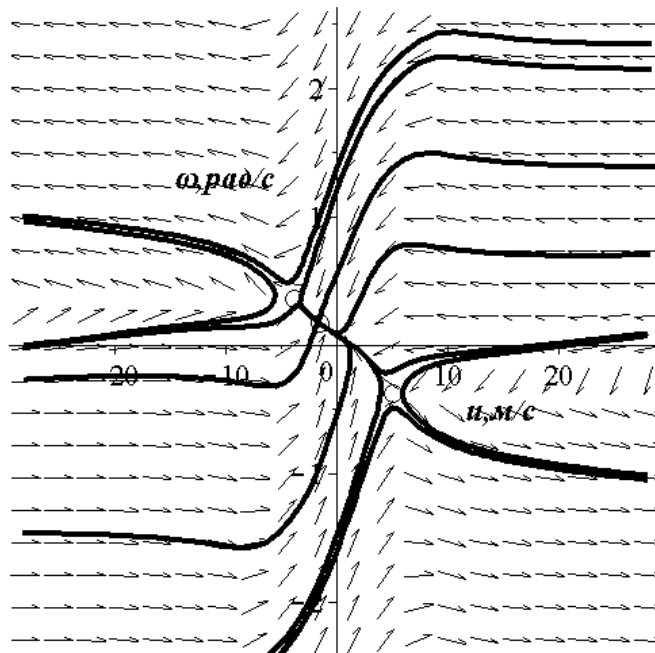
> ss3 := {u = -20.12615039, omega = .2155341863};
> l31:=.4745665571+0.1287043800e-1*u;
> l32:=-.1037406972-0.1586368368e-1*u;
> C3:=pointplot([subs(ss3,[u,omega]),symbol=circle,symbolsize=22):
> B3:=plot([l31,l32],u=-21.5..-19.2):
> display(B3,C3);

```



> Построение фазового портрета

```
A:=phaseportrait([D(u)(t)=E1,D(omega)(t)=E2],[u(t),omega(t)],t=-
10..25,[[0,8.12,-0.51],[0,10.0,0.],[0,10.,-0.25],[0,5.37,-0.28],[0,-7.5,0.24],[0,-
10.,0.],[0,20.05,0.21],[0,-21.14,0.25],[0,-23.55,0.18],[0,-13.,-
1.],[0,20.,1.5],[0,20.,0.85]],stepsize=.03,u=-28..28,omega=-
2.3..2.5,scene=[u(t),omega(t),colour=brown):
> with(plots):display(A,C1,C2,C3);
```



**Анализ многообразия особых точек системы, построение  
бифуркационного множества модели колесного экипажа с жестко  
закрепленным рулевым управлением**

> restart;

Числовые значения конструктивных параметров системы

> f1:=0.8;

> f2:=0.8;

> a:=2.3;

> b:=2.7;

> k1:=23000;

> k2:=15000;

> m:=1317;

> N1:=m\*9.8\*b/(a+b);

> N2:=m\*9.8\*a/(a+b);

> l:=a+b;

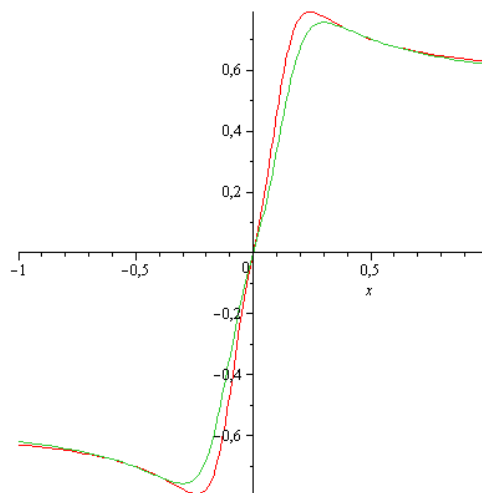
> q1:=k1/N1;

> q2:=k2/N2;

> Vkr:=sqrt(9.8\*(a+b)\*q1\*q2/(q1-q2));

> solve(y=q1\*x/sqrt(1+(abs(x)-b)^2/b^2),x);

> plot( $\left[ \left[ \frac{x \cdot 3.300062959 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{(\text{abs}(x) - 0.12)^2}{0.12^2}}}, \frac{x \cdot 2.526513230 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{(\text{abs}(x) - 0.15)^2}{0.15^2}}} \right], x = -1 .. 1 \right]$ );



>

> f11:=subs({a1 = 3.300062959\*sqrt(2), b1 = .12}, (-abs(x)+sqrt(2\*b1^2\*a1^2-x^2))\*x\*b1/(-x^2+b1^2\*a1^2));

> f21:=subs({a2 = 2.526513230\*sqrt(2), b2 = .15}, (-abs(x)+sqrt(2\*b2^2\*a2^2-x^2))\*x\*b2/(-x^2+b2^2\*a2^2));

$$\begin{aligned} > f12 := \text{subs} \left( \{a1 = 3.300062959 * \text{sqrt}(2), b1 \sim .12, Y = x\}, \right. \\ & \quad \left. \frac{(Y + \sqrt{-Y^2 + 2 a1^2 b1 \sim^2}) Y b1 \sim}{Y^2 - a1^2 b1 \sim^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > f22 := \text{subs} \left( \{a2 = 2.526513230 * \text{sqrt}(2), b2 \sim .15, Y = x\}, \right. \\ & \quad \left. \frac{(Y + \sqrt{-Y^2 + 2 a2^2 b2 \sim^2}) Y b2 \sim}{Y^2 - a2^2 b2 \sim^2} \right); \end{aligned}$$

$$> f210 := \frac{0.15 (-\text{signum}(x) + \sqrt{0.5744942192 - x^2}) x}{-x^2 + 0.2872471096};$$

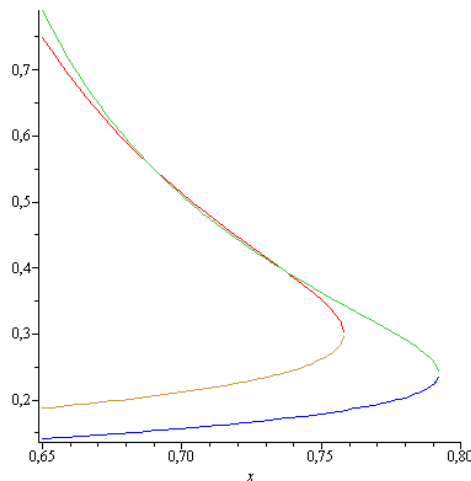
$$> f120 := \frac{0.12 (\text{signum}(x) \cdot x + \sqrt{0.6272879344 - x^2}) x}{-\text{signum}(x) \cdot (x^2 - 0.3136439672)}$$

$$> f220 := \frac{0.15 (\text{signum}(x) \cdot x + \sqrt{0.5744942192 - x^2}) x}{-\text{signum}(x) \cdot (x^2 - 0.2872471096)}$$

$$> f110 := \frac{0.12 (-\text{signum}(x) \cdot |x| + \sqrt{0.6272879344 - x^2}) x}{-\text{signum}(x) \cdot x^2 + 0.3136439672}$$

>

> plot({f11, f12, f21, f22}, x = 0.65..0.8);



Формирование функции  $G(Y) = \delta_2 - \delta_1$

> g2 := f21 - f11;

> g := f22 - f12;

> g3 := f22 - f11;

> g4 := f21 - f12;

> g40 := f210 - f120;

> g0 := f220 - f120;

> g30 := f220 - f110;

> A1 := plot([g, g3, g4], x = 0.6..0.8):

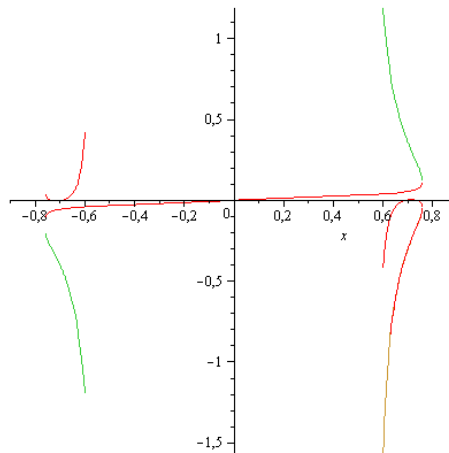
> A4 := plot([g4], x = 0.63..0.8):

> A3 := plot([g0, g30], x = -0.8..-0.6):

> A2 := plot([g2], x = -0.9..0.9):

*with(plots) :*

> *display(A1, A2, A3, A4);*



> Анализ многообразия стационарных режимов движения (особых точек)

> *A1:=plot([g,g3],x=0.6..0.8):*

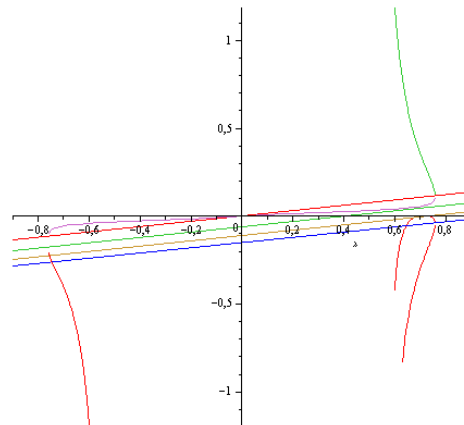
> *A3 := plot([g30],x=-0.8..-0.6) :*

> *A4 := plot([g4],x=0.63..0.8) :*

> *A2:=plot([9.81\*5\*x/(18\*18),9.81\*5\*x/(18\*18)-0.06,9.81\*5\*x/(18\*18)-0.11,9.81\*5\*x/(18\*18)-0.15,g2],x=-0.9..0.9):*

> *with(plots) :*

> *display(A1, A2, A3, A4);*



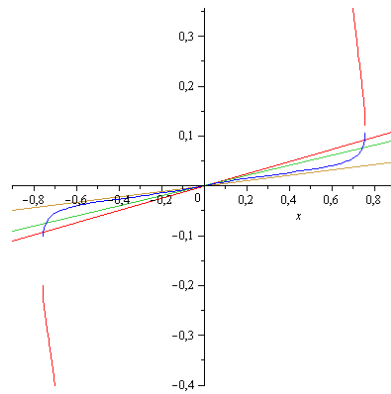
> *A1:=plot([g3],x=0.7..0.8):*

> *A3 := plot([g30],x=-0.8..-0.7) :*

> *A2:=plot([9.81\*5\*x/(20\*20),9.81\*5\*x/(22\*22),9.81\*5\*x/(30\*30),g2],x=-0.9..0.9):*

> *with(plots) :*

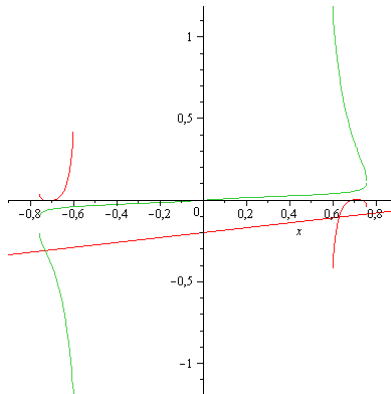
> *display(A1, A2, A3);*



```

> A1:=plot([g,g3],x=0.6..0.8):
> A3 := plot([g0,g30],x=-0.8..-0.6) :
> A2:=plot([9.81*5*x/(18*18)-0.2,g2],x=-0.9..0.9):
> with(plots) :
> display(A1,A2,A3);

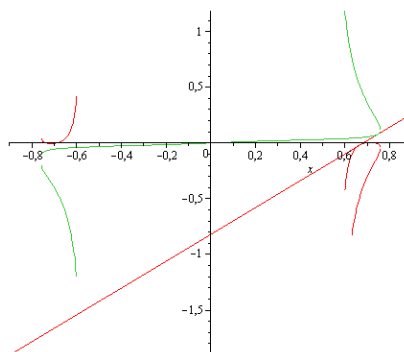
```



```

> A1:=plot([g,g3],x=0.6..0.8):
> A4 := plot([g4],x = 0.63..0.8) :
> A3 := plot([g0,g30],x=-0.8..-0.6) :
> A2:=plot([9.81*5*x/(6.38*6.38)-0.82,g2],x=-0.9..0.9):
> with(plots) :
> display(A1,A2,A3,A4);

```

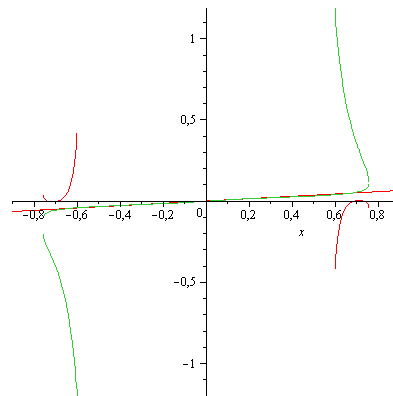


```

> A1:=plot([g,g3],x=0.6..0.8):
> A3 := plot([g0,g30],x=-0.8..-0.6) :
> A2:=plot([9.81*5*x/(26*26),g2],x=-0.9..0.9):
> with(plots) :
> display(A1,A2,A3);

```

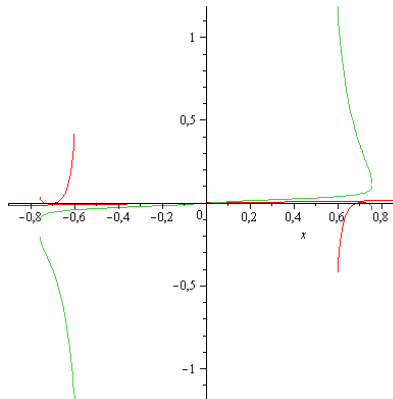




```

> A1:=plot([g,g3],x=0.6..0.8):
> A3 := plot([g0,g30],x=-0.8..-0.6) :
> A2:=plot([9.81*5*x/(55*55),g2],x=-0.9..0.9):
> with(plots) :
> display(A1,A2,A3);

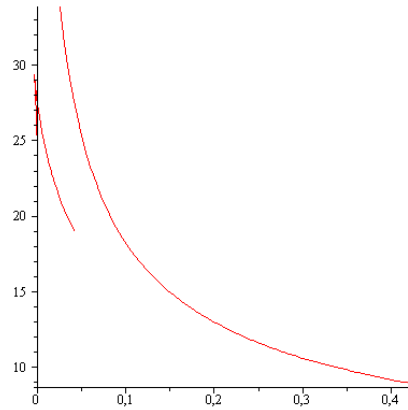
```



```

>
> Построение бифуркационного множества
> dg:=diff(g,x):
> dg0 := diff(g0,x) :
> ddg:=diff(dg,x):
> dg2:=diff(g2,x):
> dg4:=diff(g4,x):
> fsolve(ddg=0,x);
> evalf(subs(x=0,(x*dg-g)));
> B:=plot([x*dg-g,(9.8*(a+b)/dg)^0.5,x=0.68..0.71]):
> A:=plot([x*dg2-g2,(9.8*(a+b)/dg2)^0.5,x=0..0.65]):
> with(plots) :
> display(A,B);

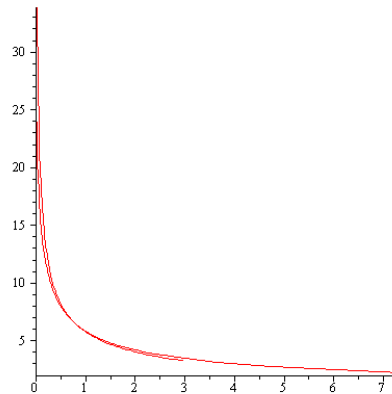
```



```

> B:=plot([x*dg-g,(9.8*(a+b)/dg)^0.5,x=0.63..0.71]):
> A:=plot([x*dg2-g2,(9.8*(a+b)/dg2)^0.5,x=0..0.758]):
> with(plots) :
> display(A,B);

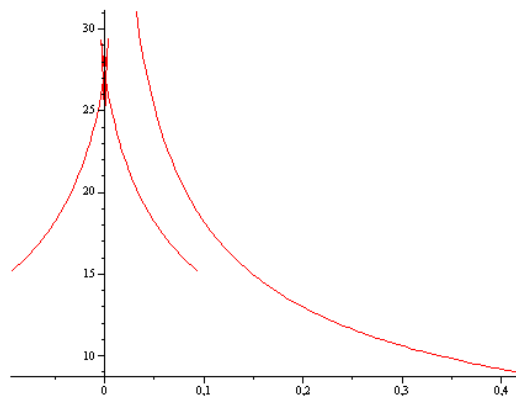
```



```

>
> B:=plot([x*dg-g,(9.8*(a+b)/dg)^0.5,x=0.68..0.7095]):
> A:=plot([x*dg2-g2,(9.8*(a+b)/dg2)^0.5,x=-0.69..0.69]):
> with(plots) :
> display(A,B);

```



**Анализ колебаний в зоне флаттерной неустойчивости модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем**

> restart;

> X1:=0; X2:=0; theta0:=0; theta1:=0;

Система уравнений движения модели экипажа с управляемым колесным модулем

> e1:=-

$$m*(U+omega*v)+m1*cos(theta)*lambda*Omega+m1*cos(theta)*lambda*TT+Y2*cos(theta1)-X2*sin(theta1)-2*m1*sin(theta)*omega*lambda*Theta-m1*a*Omega-m1*omega*v-m1*sin(theta)*lambda*omega^2-m1*sin(theta)*lambda*Theta^2-m1*U+cos(theta)*Y1+sin(theta)*X1;$$

> e2:=-

$$J*Omega+a*m1*cos(theta)*lambda*Omega+a*m1*cos(theta)*lambda*TT-2*a*m1*sin(theta)*omega*lambda*Theta-m1*a^2*Omega-a*m1*omega*v-a*m1*sin(theta)*lambda*omega^2-a*m1*sin(theta)*lambda*Theta^2-a*m1*U+a*cos(theta)*Y1+a*sin(theta)*X1+h*Theta+kk*(theta-theta0)-b*Y2*cos(theta1)-b*X2*sin(theta1);$$

> e3:=(J1+m1\*lambda^2)\*TT+(J1+m1\*lambda\*(lambda-a\*cos(theta)))\*Omega-m1\*lambda\*cos(theta)\*U-m1\*lambda\*v\*omega\*cos(theta)-m1\*lambda\*omega\*u\*sin(theta)-m1\*a\*lambda\*omega^2\*sin(theta)+h\*Theta+kk\*(theta-theta0)+lambda\*Y1;

> Линеаризация уравнений

> cos(theta):=1; sin(theta):=theta;

> e1:=-

$$m*(U+omega*v)+m1*cos(theta)*lambda*Omega+m1*cos(theta)*lambda*TT+Y2-0*2*m1*sin(theta)*omega*lambda*Theta-m1*a*Omega-m1*omega*v-0*m1*sin(theta)*lambda*omega^2-0*m1*sin(theta)*lambda*Theta^2-m1*U+cos(theta)*Y1;$$

$$e1 := -m (U + \omega v) + m1 \lambda \Omega + m1 \lambda TT + Y2 - m1 a \Omega - m1 \omega v - m1 U + Y1$$

> e2:=-

$$J*Omega+a*m1*cos(theta)*lambda*Omega+a*m1*cos(theta)*lambda*TT-0*2*a*m1*sin(theta)*omega*lambda*Theta-m1*a^2*Omega-a*m1*omega*v-0*a*m1*sin(theta)*lambda*omega^2-0*a*m1*sin(theta)*lambda*Theta^2-a*m1*U+a*cos(theta)*Y1+h*Theta+kk*theta-b*Y2;$$

$$e2 := -J \Omega + a m1 \lambda \Omega + a m1 \lambda TT - m1 a^2 \Omega - a m1 \omega v - a m1 U + a Y1 + h \Theta + kk \theta - b Y2$$

> e3:=(J1+m1\*lambda^2)\*TT+(J1+m1\*lambda\*(lambda-a\*cos(theta)))\*Omega-  
 m1\*lambda\*cos(theta)\*U-m1\*lambda\*v\*omega\*cos(theta)-  
 0\*m1\*lambda\*omega\*u\*sin(theta)-  
 0\*a\*m1\*sin(theta)\*lambda\*omega^2+h\*Theta+kk\*theta+lambda\*Y1;

$$e3 := (J1 + m1 \lambda^2) TT + (J1 + m1 \lambda (\lambda - a)) \Omega - m1 \lambda U \\ - m1 \lambda v \omega + h \Theta + k \theta + \lambda Y1$$

> E1:=delta1-theta+(u+a\*omega)/v;

$$E1 := \delta 1 - \theta + \frac{u + a \omega}{v}$$

> E2:=delta2-(-u+b\*omega)/v;

$$E2 := \delta 2 - \frac{-u + b \omega}{v}$$

> s:=solve({E1, E2},{u,omega});

$$s := \left\{ u = -\frac{v (\delta 2 a + b \delta 1 - b \theta)}{b + a}, \omega = -\frac{v (\delta 1 - \theta - \delta 2)}{b + a} \right\}$$

> assign(s);

> delta1:=alpha\*sin(nu\*t);

$$\delta 1 := \alpha \sin(v t)$$

> delta2:=p0\*sin(nu\*t+phid);

$$\delta 2 := p0 \sin(v t + phid)$$

> theta:=k0\*sin(nu\*t+phit);

$$\theta := k0 \sin(v t + phit)$$

> Delta1:=diff(delta1,t); Delta2:=diff(delta2,t); Theta:=diff(theta,t);

TT:=diff(Theta,t);

> U:=-v\*(Delta2\*a+b\*Delta1-b\*Theta)/(b+a);

> Omega:=-v\*(Delta1-Theta-Delta2)/(b+a);

Сила увода на задней оси представлена в виде линейной функции

> Y2:=k2\*delta2;

$$Y2 := k2 p0 \sin(v t + phid)$$

> e1; e2; e3;

> e11:=subs(t=0,e1);

> simplify(e11);

> e11:=m\*v\*p0c\*nu\*a+m\*v\*b\*alpha\*nu-m\*v\*b\*k0c\*nu-m\*v^2\*k0s-m\*v^2\*p0s-  
 m1\*lambda\*v\*nu\*alpha+m1\*lambda\*v\*nu\*k0c+m1\*lambda\*v\*nu\*p0c-  
 m1\*lambda\*k0s\*nu^2\*b-  
 m1\*lambda\*k0s\*nu^2\*a+k2\*p0s\*b+k2\*p0s\*a+m1\*a\*v\*nu\*alpha-  
 m1\*a\*v\*nu\*k0c-m1\*v^2\*k0s-m1\*v^2\*p0s+m1\*v\*nu\*b\*alpha-  
 m1\*v\*nu\*b\*k0c+Y1\*b+a\*Y1;

> e11:=subs(Y1=0,e11);

> e12:=subs(nu\*t=Pi/2,e1);

> simplify(e12);

```

> e12:=m*v*p0s*nu*a-m*v*b*k0s*nu-
m*v^2*alpha+m*v^2*k0c+m*v^2*p0c+m1*lambda*v*nu*k0s+m1*lambda*v*nu
*p0s+m1*lambda*k0c*nu^2*b+m1*lambda*k0c*nu^2*a-k2*p0c*b-k2*p0c*a-
m1*a*v*nu*k0s-m1*v^2*alpha+m1*v^2*k0c+m1*v^2*p0c-m1*v*nu*b*k0s-
Y1*b-a*Y1;
> e21:=simplify(subs(t=0,e2));

> simplify(e21);
> e21 :=-a*Y1*b-kk*k0s*b-kk*k0s*a+k2*p0s*b^2-a^2*Y1-
J*v*nu*alpha+J*v*nu*k0c+J*v*nu*p0c+a*m1*lambda*v*nu*alpha-
a*m1*lambda*v*nu*k0c-
a*m1*lambda*v*nu*p0c+m1*lambda*k0s*nu^2*a*b+m1*lambda*k0s*nu^2*a^2
-m1*a^2*v*nu*alpha+m1*a^2*v*nu*k0c+a*m1*v^2*k0s+a*m1*v^2*p0s-
m1*a*v*nu*b*alpha+m1*a*v*nu*b*k0c-h*k0c*nu*b-h*k0c*nu*a+k2*p0s*b*a;
> e21 := subs(Y1=0,e21);
> e22:=simplify(subs(nu*t=Pi/2,e2));

> simplify(e22);
> e22:=a*Y1*b+kk*k0c*b+kk*k0c*a-b^2*k2*p0c-b*k2*p0c*a-
a*m1*v^2*p0c+m1*a*v*nu*b*k0s-h*k0s*nu*b-
h*k0s*nu*a+J*v*nu*k0s+J*v*nu*p0s-a*m1*lambda*v*nu*k0s-
a*m1*lambda*v*nu*p0s-a*m1*lambda*k0c*nu^2*b-
a^2*m1*lambda*k0c*nu^2+m1*a^2*v*nu*k0s+a*m1*v^2*alpha-
a*m1*v^2*k0c+a^2*Y1;
> e31:=subs(t=0,e3);

> simplify(e31);
> e31:=k0s*nu^2*J1*b+k0s*nu^2*J1*a+k0s*nu^2*m1*lambda^2*b+k0s*nu^2*
m1*lambda^2*a+v*nu*J1*alpha-v*nu*J1*k0c-
v*nu*J1*p0c+v*nu*m1*lambda^2*alpha-v*nu*m1*lambda^2*k0c-
v*nu*m1*lambda^2*p0c-a*m1*lambda*v*nu*alpha+v*nu*a*m1*lambda*k0c-
m1*lambda*v*nu*b*alpha+m1*lambda*v*nu*b*k0c+m1*lambda*v^2*k0s+m1*
lambda*v^2*p0s-h*k0c*nu*b-h*k0c*nu*a-kk*k0s*b-kk*k0s*a-lambda*Y1*b-
lambda*Y1*a;
> e31 :=subs(Y1=0,e31);
> e32:=subs(nu*t=Pi/2,e3);

> simplify(e32);
> e32:=k0c*nu^2*J1*b+k0c*nu^2*J1*a+k0c*nu^2*m1*lambda^2*b+k0c*nu^2*
m1*lambda^2*a+v*nu*J1*k0s+v*nu*J1*p0s+v*nu*m1*lambda^2*k0s+v*nu*m
1*lambda^2*p0s-v*nu*a*m1*lambda*k0s-m1*lambda*v*nu*b*k0s-
m1*lambda*v^2*alpha+m1*lambda*v^2*k0c+m1*lambda*v^2*p0c+h*k0s*nu*b
+h*k0s*nu*a-kk*k0c*b-kk*k0c*a-lambda*Y1*b-lambda*Y1*a;
> s:=solve({e11,e31,e21,e32},{k0s,k0c,p0c,p0s});
> assign(s);

```

```

> with(linalg):
> e12:
> e22:
> simplify(e12):
> p1:=numer(%):
> simplify(e22):
> p2:=numer(%):

```

Числовые значения конструктивных параметров системы

```

> g:=9.81;a:=1.45;b:=1.55;lambda:=-
0.00223;m1:=100.;m:=2090.;kf:=0;k1:=91500;k2:=61000;h:=0;kappa1:=0.8;kappa2:=0.8;kk:=400;A:=a+0.5;B:=b+0.6;J:=0.35*m*a*b;J1:=3.22;KOL:=1.4;K1:=0.5*k1^3/(0.8*m*g*b/(a+b))^2;Z2:=m*g*(a-lambda)/l;

```

Приближенное представление силы  $Y_1$  – до членов третьего порядка включительно

```

> Y1:=k1*alpha-K1*alpha^3;
> p1;
> p2;
> p:=resultant(p1,p2,nu);
> p:=simplify(p/(v^8*alpha^6));

```

Амплитудное уравнение

```

> pp:=-2.810507002*10^13-1.215512062*10^13*v^8*alpha^2-
7.799323548*10^17*alpha^4+1.106132918*10^10*v^10+1.030833582*10^22*alpha^10-1.030339118*10^21*alpha^8+4.039413382*10^19*alpha^6-
1.042468525*10^11*v^8+2.528107300*10^15*v^4-
9.470076250*10^16*v^2+1.410436955*10^14*v^6+3.474157462*10^25*v^2*alpha^10+7.434170025*10^15*alpha^2-
7.280840642*10^19*v^8*alpha^10+8.807639900*10^13*v^10*alpha^4+4.338601382*10^21*v^6*alpha^10-
2.036832990*10^20*v^6*alpha^8+1.760995399*10^16*v^10*alpha^8-
2.630473585*10^17*v^8*alpha^6-2.051747749*10^15*v^10*alpha^6-
2.632529500*10^21*v^2*alpha^4+2.509130500*10^19*v^2*alpha^2-
1.064666938*10^24*v^4*alpha^10+3.10421538*10^8*v^10*alpha^10+8.714923805*10^17*v^6*alpha^4-
1.942756754*10^16*v^6*alpha^2+8.708011572*10^19*v^4*alpha^4-
7.749126010*10^17*v^4*alpha^2+1.363884532*10^23*v^2*alpha^6-
1.049203556*10^19*v^6*alpha^6-
4.569371650*10^21*v^4*alpha^6+3.788661885*10^15*v^8*alpha^4+1.130276858*10^23*v^4*alpha^8+7.318585465*10^18*v^8*alpha^8-
3.477627642*10^24*v^2*alpha^8-1.640513642*10^12*v^10*alpha^2;

```

Определение границ устойчивости по параметру скорости и амплитуд боковой деформации пневматика

> *with(plots):*

> *implicitplot(pp, v = 0 .. 10, alpha = 0 .. .35, color = black, font = [TIME, ROMAN, 14], labelfont = [TIME, ITALIC, 14], resolution = 600);*

