

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. директора Інституту механіки  
ім. С.П. Тимошенка НАН України  
академік НАН України



Володимир НАЗАРЕНКО

\_\_\_\_\_ 2026 року

**ПРОГРАМА ВСТУПНОГО ІСПИТУ  
В АСПРАНТУРУ ДЛЯ ЗДОБУТТЯ  
НАУКОВОГО СТУПЕНЯ ДОКТОРА ФІЛОСОФІЇ  
ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ F1 «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»  
В ІНСТИТУТІ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА НАН УКРАЇНИ**

Розглянуто Вченою радою Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України  
14 квітня 2026 року, протокол № 4

**Київ -2026**

# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

## Вступ

Основні поняття, задачі кінематики. Кінематика точки. Загальні принципи кінематики системи. В'язі. Ступені вільності. Узагальнені координати, швидкості та прискорення. Кінематика твердого тіла. Основні теореми про скінченні переміщення твердого тіла. Основні поняття і аксіоми динаміки. Закони Ньютона. Задачі динаміки.

## Варіаційні принципи

Поняття про варіаційні принципи механіки. Принцип Даламбера-Лагранжа. Принцип Журдена. Принцип Гауса та його фізичний зміст. Принцип Гамільтона-Остроградського. Принцип Мопертюї-Лагранжа.

## Статика. Геометрія мас

Статика довільної механічної системи. Загальне рівняння статички. Статика твердого тіла. Необхідні і достатні умови рівноваги твердого тіла. Теорема Пуансо. Центр мас. Момент інерції. Момент інерції системи відносно осі. Тензор та еліпсоїд інерції.

## Основні теореми і закони динаміки

Основні динамічні величини механічної системи. Теореми про зміну основних динамічних величин системи. Теорема про зміну кількості руху. Теорема про зміну кінетичного моменту. Теорема про зміну кінетичної енергії.

## Динаміка твердого тіла

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Рівняння руху, динамічні рівняння Ейлера. Перші інтеграли. Рівняння руху важкого твердого тіла навколо нерухомої точки та їх перші інтеграли. Основна формул гіроскопії.

## Елементи небесної механіки

Задача двох тіл. Рівняння руху. Інтеграл площ. Закони Кеплера та інтеграл Лапласа. Рівняння орбіти. Залежність орбіти від величини початкової швидкості. Перша та друга космічні швидкості.

## **Диференціальні рівняння аналітичної динаміки**

Рівняння Лагранжа (другого роду). Рівняння Лагранжа у випадку потенціальних сил. Функція Лагранжа. Теорема про зміну повної механічної енергії голономної системи. Канонічні рівняння Гамільтона. Гіроскопічні сили, дисипативні сили, функція Релея. Рівняння Якобі. Рівняння Рауса. Функція Рауса.

## **Інтегрування рівнянь динаміки**

Множник системи рівнянь. Диференціальне рівняння для множника. Інваріантність множника. Останній множник Якобі. Системи з циклічними координатами. Пониження порядку системи диференціальних рівнянь з циклічними координатами за допомогою рівнянь Рауса. Дужки Пуассона та перші інтеграли. Теорема Якобі-Пуассона. Метод Якобі інтегрування рівнянь руху. Рівняння Гамільтона-Якобі. Характеристична функція Гамільтона. Розділення змінних.

## **Розповсюдження методів динаміки дискретних систем на механіку суцільних середовищ**

Перехід від дискретної системи до неперервної. Рівняння Лагранжа для неперервних систем. Канонічні рівняння Гамільтона. Закони збереження та дужки Пуассона. Опис за допомогою варіаційних принципів.

## **Теорія коливань та стійкості руху**

Положення стійкої рівноваги. Теорема Лагранжа-Дирихле. Малі коливання системи біля положення стійкої рівноваги Теорема Ляпунова про стійкість та нестійкість. Теорема Четаєва про нестійкість.

## **Рекомендована література.**

1. Бар'яхтар В. Г., Бар'яхтар І. В., Гермаш Л. П., Довгий С. О. Механіка. – К.: Наукова Думка, 2011.
2. Булгаков В.М., Головач І.В., Черниш О.М. та ін. Теоретична механіка. Навчальний посібник – Київ: НУБіПУ, 2023.

3. Булгаков В.М., Калетнік Г.М., Гриник І.В., Адамчук В.В., Тіщенко Л.М., Черниш О.М., Яременко В.В. Теоретична механіка в прикладах і завданнях / за ред. акад. НААН В.М. Булгакова. – К.: Аграр. наука, 2014.
4. Булгаков В.М., Яременко В.В., Черниш О.М., Березовий М.Г. Теоретична механіка. Підручник. – К. Центр учбової літератури, 2017.
5. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
6. Пастушенко С. І., Руденко О.Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки: навч. посіб. – у 2-х ч. – Ч. І. Статика. Кінематика. – Вінниця, 2006.
7. Пастушенко С. І., Руденко О.Г., Іщенко В. В., Масюткін Є.П. Практикум з теоретичної механіки: навч. посіб. – у 2-х ч. – Ч. II. Динаміка. – Вінниця, 2007.
8. Штефан Н. І., Гнатейко Н. В., Бабаєв О. А. Теоретична механіка. Варіаційні принципи аналітичної механіки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів напрямів підготовки: 6.050503 «Машинобудування» та 6.050502 «Інженерна механіка» всіх форм навчання. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016.
9. Штефан Н. І., Гнатейко Н. В., Федоров В. М., Бабаєв О. А. Теоретична механіка. Статика твердого тіла [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017.
10. Giorgilli A. Notes on Hamiltonian Dynamical Systems. London: Cambridge University Press, 2022.
11. Vollmer J. Theoretical Mechanics – Lecture Notes by Jürgen Vollmer, Fakultät für Physik und Geowissenschaften, Universität Leipzig – 2022.

# **МЕХАНІКА ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА**

## **Вступ**

Предмет механіки деформівного твердого тіла. Основні гіпотези та принципи. Проблеми теорії пружності, теорії пластичності, повзучості та їх значення для техніки.

## **Елементи теорії тензорів.**

Вектори та діадки. Тензорний закон зміни компонент. Головні осі тензора. Кульовий тензор та девіатор. Формула Гамільтона-Келі.

## **Теорія деформацій**

Вектор переміщень. Тензор деформації Гріна. Механічний зміст компонент тензора Гріна. Мала деформація. Головні напрямки, головні деформації, інваріанти. Відносна зміна об'єму при деформації. Розклад вектору переміщення. Девіатор деформації. Визначення переміщень за компонентами тензора деформації Коші. Умови сумісності Сен-Венана. Швидкість деформації.

## **Теорія напружень**

Поверхневі та об'ємні сили. Фундаментальна теорема Коші. Тензор напружень. Тензор Піоли. Закони руху Коші. Тензор функцій напружень. Теорема про взаємність нормальних складових. Поверхня напружень, інваріанти. Знаходження головних дотичних напружень. Круги Мора. Гідростатичний та девіаторний напружений стан. Октаедричні напруження.

## **Фізичні рівняння механіки деформівного твердого тіла**

Зв'язок компонентів напружень з компонентами деформацій для лінійно пружного тіла – узагальнений закон Гука. Пружний потенціал. Зведення числа пружних сталих для різних випадків симетрії будови тіла. Випадок ізотропного тіла, модулі пружності ізотропного тіла. Гіпотеза Дюамеля-Неймана при неізотермічному деформуванні. Поняття про рівняння стану для пружно-пластичного напруженого стану та в'язко-пружного деформування. Теорія малих пружно-пластичних деформацій, найпростіші моделі в'язко-пружних тіл (середовища Фойгта, Максвелла, Кельвіна).

## **Постановка задач теорії пружності**

Зведення основних груп рівнянь лінійної теорії пружності. Задачі теорії пружності. Рівняння Ламе. Постановка задачі теорії пружності в напруженнях. Визначення переміщень за відомим об'ємним розширенням та обертанням. Подання загального розв'язку статичних рівнянь теорії пружності у формі Папковича – Нейбера. Подання загального розв'язку однорідних рівнянь Ламе у формі Гальоркіна. Принцип Сен-Венана.

## **Загальні теореми теорії пружності**

Потенціальна енергія пружного тіла. Теорема про енергію деформації пружного тіла (теорема Клапейрона). Теорема єдиності розв'язку задачі теорії пружності (теорема Кірхгофа). Теорема взаємності робіт (Бетті – Максвелла).

## **Варіаційні принципи**

Принцип можливих переміщень. Принцип можливих сил. Варіаційний принцип Райснера. Наближені методи, що ґрунтуються на варіаційному рівнянні. Наближений метод, заснований на варіаційному рівнянні Кастиліано.

## **Плоскі задачі теорії пружності та задачі згину тонких пластинок**

Плоска деформація та узагальнений плоский напружений стан. Функція напружень Ері. Представлення розв'язку через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі. Розв'язок плоских задач для однозв'язних областей методом конформних відображень. Розв'язок найпростіших задач про дію зосередженої сили на півплощину, задача Ламе для порожнистого циліндра. Гіпотези Кірхгофа в задачах згину тонких пластинок. Рівняння згину тонких пластинок, формулювання граничних умов. Розв'язок Нав'є для шарнірно-закріпленої прямокутної пластинки.

## **Методи розв'язку тривимірних задач теорії пружності**

Загальні форми представлення розв'язків. Розв'язок Гальоркіна та Папковича-Нейбера. Явний вигляд розв'язку осесиметричних задач для довгого циліндра та сфери. Задача Ламе для порожнистої сфери. Поняття про наближені варіаційні та чисельні методи розв'язку задач теорії пружності. Метод Рітца і метод Бубнова-Гальоркіна.

## **Розповсюдження пружних хвиль і теорія стаціонарних**

### **коливань пружного тіла**

Хвилі зсуву та розширення у пружному середовищі. Кінематичні та динамічні умови на поверхні розриву. Плоскі хвилі. Поздовжні коливання стрижня та пластини. Передавання енергії. Сферичні хвилі. Циліндричні хвилі. Плоска задача теорії хвиль. Поверхневі хвилі Релея та Лява. Відбиття пружних хвиль. Концентрація динамічних напружень біля круглого отвору в тонкій пружній пластинці. Концентрація динамічних напружень біля круглого жорсткого диска в пружній пластинці.

### **Механіка руйнування**

Задача Гріффітса. Коефіцієнти інтенсивності напружень. Силовий та енергетичні критерій руйнування. J-інтеграл. Поправка Ірвіна на пластичність. Моделі тріщини Дагдейла та Баренבלата, когезійна модель тріщини.

### **Теорія пластичності**

Визначальні співвідношення теорії пластичності. Деформаційні теорії та теорії пластичної течії. Принцип Мізеса. Асоційований закон. Вид асоційованого закону за умови пластичності Мізеса. Умови пластичності Треска та Мізеса.

Термодинамічні співвідношення теорії пластичності. Повна система рівнянь для пружно-ідеально-пластичного середовища в теорії Прандтля – Рейса. Основні поняття теорії пластичності на прикладі простого розтягу-стиску стрижня. Межа пружності (межа текучості); навантаження та розвантаження; пластичні та пружні деформації; зміцнення. Ідеалізовані діаграми простого розтягування для а) ідеально-пластичного матеріалу; б) жорстко-ідеально-пластичного матеріалу; в) жорстко-пластичного матеріалу, що зміцнюється. Основні поняття теорії пластичності у випадку довільного напруженого стану: поверхня навантаження (текучості), критерій текучості, умова пластичності; навантаження та розвантаження; пружні та пластичні деформації; ідеально-пластичні тіла та тіла зі зміцненням; параметри зміцнення. Задача про

трубу під впливом внутрішнього тиску у разі виникнення у ній пластичних деформацій.

### **Рекомендована література**

1. Бабенко А.Є. Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О. Теорія пружності. Частина 1: Підручн. Основа, Київ, 2009.
2. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Луцьк: Надстир'я. – 2007.
3. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т., Теорія пружності: Підручн. у 3-х томах. РВВ ЛНТУ, Луцьк, 2012.
4. Бородачов М.М., Савченко М.І. Теорія пружності та пластичності: навчальний посібник. НАУ, Київ, 2006.
5. Будак В.Д., Жук Я.О. Механіка суцільних середовищ. Іліон, Миколаїв, 2011.
6. Гребенюк С.М., Гоменюк С.І., Клименко М.І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон: Гельветика. – 2017.
7. Зражевський Г.М., Чисельні методи в задачах механіки. Частина II. Механіка суцільного середовища. Розв'язання граничних задач. Підручник. Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2020.
8. Лавренюк М. Моделі механіки деформівного твердого тіла неоднорідних середовищ: Навчальний посібник. КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, 2012
9. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник. – Київ: Вища школа, 2002.
10. Asaro R.J., Lubarda V.A., Mechanics of Solids and Materials. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2006.
11. Bechtel S.E., Lowe R.L., Fundamentals of Continuum Mechanics with Applications to Mechanical, Thermomechanical, and Smart Materials. Elsevier, UK, 2015.
12. Coman C.D., Continuum Mechanics and Linear Elasticity: An Applied Mathematics Introduction, Springer Nature B.V., 2020.
13. Dormieux L., Kondo D. Micromechanics of Fracture and Damage. Wiley, Hoboken, 2016.
14. Itskov M. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics. Fourth Edition. Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015.
15. Oliver X., Agelet de Saracibar C., Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems, Second Edition, 2017.

16. Reddy J.N., An Introduction to Continuum Mechanics with Applications. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2008.