

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С. П. ТИМОШЕНКА

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. директора Інституту механіки  
ім. С.П. Тимошенка НАН України  
академік НАН України



Володимир НАЗАРЕНКО

*Назаренко* 2022 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Механіка деформівного твердого тіла**

для здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти  
«доктора філософії»

галузь знань	<b>11 Математика та статистика</b>
спеціальність	<b>113 «Прикладна математика»</b>
вид дисципліни	<b>обов'язкова</b>

КИЇВ – 2022

**Розробники:**

Пров. наук. співробітник

відділу механіки руйнування матеріалів

д-р фіз.-мат. наук \_\_\_\_\_ Михайло СЕЛІВАНОВ

Ст. наук. співробітник

відділу механіки руйнування матеріалів

к-т фіз.-мат. наук \_\_\_\_\_ Юрій ЧОРНОІВАН

**Робочу програму узгоджено науково-методичною радою**

Протокол від 3 травня 2022 р. № 6

Голова науково-методичної ради \_\_\_\_\_

**Робочу програму затверджено Вченою радою Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України**

Протокол від 10 травня 2022 року № 4

Голова Вченої ради \_\_\_\_\_ Володимир НАЗАРЕНКО

**Робочу програму узгоджено з гарантом освітньо-наукової програми (керівником програми) 113 «Прикладна математика» 3 травня 2022 р.**

Гарант освітньо-наукової програми \_\_\_\_\_ Володимир НАЗАРЕНКО

**Пролонговано Вченою радою Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка:**

Навчальні роки пролонгації	Голова Вченої ради Імех НАНУ	підпис	№ протоколу	Дата протоколу
20__/20__				
20__/20__				
20__/20__				
20__/20__				

## 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Вид дисципліни	обов'язкова
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Загальний обсяг кредитів / годин	4/180
Курс	2
Семестр	3, 4
Кількість змістових модулів з розподілом	2
Кількість кредитів	6
Обсяг академічних годин, в тому числі	180
Лекції	34
Практичні заняття	34
Самостійна робота	112
Форма підсумкового контролю	залік, екзамен

## 2. МЕТА, ЗАВДАННЯ ТА ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Робоча програма навчальної дисципліни «**Механіка деформівного твердого тіла**» є нормативним документом, який розроблено на основі освітньо-наукової програми, далі ОНП, (затверджена Вченою радою Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України., протокол № 5 від 26 грудня 2017 року) підготовки здобувачів третього освітньо-наукового рівня вищої освіти відповідно до навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика».

Навчальна дисципліна «Механіка руйнування» є складовою циклу професійної підготовки фахівців третього освітньо-наукового рівня “доктор філософії”

**Передумова вивчення.** Курс є обов'язковим для аспірантів і вивчаються на першому курсі аспірантури. Студенти повинні володіти методами математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, диференціальної геометрії, математичної обчислювальної математики та методами математичного моделювання систем та процесів.

**Метою навчальної дисципліни** «Механіка деформівного твердого тіла» є набуття знань та вмінь розв'язання комплексних проблем в галузі механіки деформівного твердого тіла шляхом здобуття ними компетентностей, необхідних для виконання *самостійних* та *оригінальних наукових досліджень*, результати яких мають наукову новизну, теоретичне та практичне значення.

**Головними завданнями** вивчення навчальної дисципліни «Механіка деформівного твердого тіла» є формування знань, практичних навичок та

компетентностей, потрібних для проведення самостійних кваліфікованих наукових досліджень:

- Загальні компетентності: ЗК1 – ЗК6 (відповідно до переліку загальних компетентностей ОНП).
- Спеціальні (фахові) компетентності: СК1 – СК7 (відповідно до переліку спеціальних компетентностей ОНП).
- Загальні програмні результати навчання: ПРН1 – ПРН6, ПРН11 (відповідно до переліку програмних результатів навчання ОНП).

**Програмні результати навчання за дисципліною (вимоги до знань та вмінь):**

В результаті вивчення навчальної дисципліни аспірант повинен

*знати:*

- принципи сучасної механіки, включаючи її основні поняття, алгоритми аналізу поведінки твердих тіл за різних умов навантаження;
- поведінку твердих тіл у різних масштабах (припущення про суцільне середовище, основні рівняння, тензорний аналіз та математичне формулювання проблем механіки твердого тіла);
- скінченно-елементний аналіз (СЕА) (володіти принципами та застосуваннями СЕА, включаючи створення сітки, задання граничних умов та інтерпретацію результатів);
- механічну поведінку різних матеріалів (властивості матеріалів, конститутивні моделі та їх застосування до реальних інженерних проблем); як різні матеріали, такі як метали, полімери та композити, реагують на зовнішні сили.
- експериментальні методи (як проводити експерименти, вимірювати механічні властивості та аналізувати експериментальні дані), що має важливе значення для перевірки теоретичних моделей і отримання розуміння поведінки в реальному світі.
- розширені числові методи (на додаток до СЕА, аспіранти повинні знати інші чисельні методи, пов'язані з механікою деформівного твердого тіла, такі як методи граничних інтегральних елементів, безсіткові методи або методи дискретних елементів);
- числові алгоритмами, аналіз помилок і конвергенцію, що має вирішальне значення для точного та ефективного моделювання;
- про можливість широкого застосування Механіки деформівного твердого тіла в різних галузях техніки, таких як цивільне будівництво, машинобудування, аерокосмічна інженерія та матеріалознавство; як принципи механіки твердого тіла можна застосовувати в різних контекстах і як співпрацювати з експертами з інших дисциплін;
- правила техніки безпеки та вказівки під час проведення експериментів або роботи з небезпечними матеріалами; етична поведінка, чесність і відповідальна дослідницька практика є важливими для успішної кар'єри в академічних або промислових колах.

*вміти:*

- аналізувати складні задачі механіки твердого тіла, використовуючи передові математичні та обчислювальні методи;
- проектувати та оптимізувати конструкції та компоненти на основі розуміння поведінки матеріалу, умов навантаження та вимог до ефективності; застосовувати інженерні принципи для розробки безпечних, ефективних і рентабельних проектів.
- проводити незалежні дослідження в галузі механіки деформівного твердого тіла; виявляти прогалини в дослідженнях, формулювати дослідницькі питання, планувати експерименти чи моделювання, а також збирати й аналізувати дані; генерувати нові знання та робити оригінальний внесок у цю сферу.
- проводити експерименти для підтвердження теоретичних моделей і дослідження механічної поведінки матеріалів і конструкцій; працювати з лабораторним обладнанням, приладами вимірювання, збору даних та аналізу, пов'язаними з механікою деформівного твердого тіла;
- використовувати числові методи, такі як СЕА, для моделювання та аналізу поведінки складних структур; обирати відповідні моделі, застосовувати граничні умови, інтерпретувати результати моделювання та оцінювати точність і обмеження чисельного моделювання;
- чітко та лаконічно формулювати складні концепції та результати досліджень (це включає в себе написання наукових робіт, підготовку технічних звітів, проведення презентацій та участь в академічних дискусіях);
- ефективно співпрацювати з експертами з різних галузей, таких як матеріалознавство, цивільна інженерія чи машинобудування; інтегрувати знання з багатьох дисциплін для вирішення складних проблем;
- володіти сильними навичками критичного мислення та здатністю застосовувати свої знання для вирішення складних проблем; аналізувати та інтерпретувати дані, визначати ключові фактори, що впливають на поведінку твердих тіл і розробляти інноваційні рішення для складних інженерних проблем;
- брати участь у безперервному навчанні та професійному розвитку, бути в курсі останніх досягнень у механіці твердих тіл, відвідувати конференції, практикуми та семінари, а також робити внесок у наукову спільноту через публікації та співпрацю;
- критично переглядати та аналізувати існуючу літературу, формулювати дослідницькі питання, проектувати експерименти чи симуляції, збирати та інтерпретувати дані та ефективно передавати результати досліджень за допомогою наукового тексту та презентацій.
- дотримуватися етичних принципів у своїй дослідницькій та професійній практиці; виконувати свою роботу сумлінно, чесно та з повагою до інтелектуальної власності; віддавати пріоритет питанням безпеки під час експериментальної роботи та забезпечувати дотримання правил і процедур безпеки.

### 3. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

#### *Змістовний модуль 1*

#### **Тема 1. Огляд механіки деформівного твердого тіла.**

Постановка задачі механіки деформівного твердого тіла.

#### **Тема 2. Основні рівняння механіки деформівного твердого тіла.**

Математичний опис зміни форми твердих тіл. Математичний опис внутрішніх сил у твердих тілах. Рівняння руху та рівноваги твердих тіл, що деформуються. Робота напружень: принцип віртуальної роботи.

#### **Тема 3. Конститутивні моделі: співвідношення між напруженнями та деформаціями.**

Загальні вимоги до конститутивних рівнянь. Термодинамічні обмеження. Об'єктивність. Стабільність Друкера. Лінійно-пружна поведінка матеріалу. Гіпопружність: пружні матеріали з нелінійною залежністю напруження–деформація при малій деформації. Узагальнений закон Гука: пружні матеріали піддаються невеликим розтягненням, але великим поворотам. Гіперпружність: залежна від часу поведінка каучуку та пінополіуретану при великих деформаціях. Лінійні в'язкопружні матеріали: залежна від часу поведінка полімерів при малих деформаціях. Незалежна від швидкості малих деформацій пластичність: метали, навантажені поза межею текучості. В'язкопластичність малих деформацій: повзучість і деформація кристалічних твердих тіл з високою швидкістю деформації. Залежна від швидкості великих деформацій пластичність. В'язкопружність за великих деформацій. Моделі критичного стану ґрунтів. Конститутивні моделі монокристалів металів. Конститутивні моделі контактуючих поверхонь і меж розділу твердих тіл.

#### **Тема 4. Розв'язки простих крайових і початкових задач.**

Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних лінійних задач пружності. Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних пружнопластичних задач. Сферично-симетричний розв'язок квазістатичних задач пружності великих деформацій. Прості динамічні розв'язки для лінійно-пружних матеріалів.

#### **Тема 5. Розв'язки для лінійно-пружних тіл.**

Загальні положення. Функція Ейрі лінійних задач статички для плоского напруженого стану та плоскої деформації. Розв'язання статичних лінійних за-

дач плоскої деформації методом комплексної змінної. Розв'язки тривимірних статичних задач лінійної пружності. Розв'язки узагальнених плоских задач для анізотропних лінійно-пружних тіл. Розв'язки динамічних задач для ізотропних лінійно-пружних тіл. Енергетичні методи розв'язування статичних задач лінійної пружності. Теореми взаємності та їх застосування. Енергія дислокацій у пружних твердих тілах. Метод Релея–Рітца для оцінки власної частоти пружного тіла. Теорія поля ліній ковзання. Граничні теореми в пластичності та їх застосування.

### *Змістовний модуль 2*

#### **Тема 6. Розв'язки для пластичних тіл.**

Теорія поля ліній ковзання. Граничні теореми в пластичності та їх застосування.

#### **Тема 7. Скінченно-елементний аналіз: вступ.**

Керівництво по використанню програмного забезпечення скінченних елементів. Проста скінченно-елементна програма.

#### **Тема 8. Скінченно-елементний аналіз: теорія та реалізація.**

Узагальнений МСЕ для статичної лінійної пружності. МСЕ для динамічної лінійної пружності. МСЕ для нелінійних (гіпопружних) матеріалів. МСЕ для великих деформацій: гіперпружні матеріали. МСЕ для в'язкопластичності. Розширені формулювання елементів: несумісні режими, спрощене інтегрування та гібридні елементи.

#### **Тема 9. Моделювання руйнування матеріалу.**

Короткий опис механізмів руйнування та втоми при статичному та циклічному навантаженні. Руйнування при монотонному навантаженні. Руйнування при циклічному навантаженні. Критерії руйнування та втоми на основі напружень та деформацій. Моделювання руйнування ростом тріщини: лінійно-пружна механіка руйнування. Енергетичні методи в механіці руйнування. Механіка пластичного руйнування. Лінійно-пружна механіка руйнування інтерфейсів.

#### **Тема 10. Розв'язки для стрижнів, балок, мембран, пластин, оболонок.**

Попередня інформація: діадичні позначення векторів і тензорів. Рух і деформація тонких стрижнів. Спрощені варіанти загальної теорії деформівних стрижнів. Точні розв'язки простих задач з пружними стрижнями. Рух і дефо-

рмація тонких оболонок: загальна теорія. Спрощені варіанти загальної теорії оболонок: плоскі пластини та мембрани. Розв'язки простих задач з мембранами, пластинами та оболонками.

#### 4. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ (РОЗПОДІЛ ГОДИН)

№	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самост. робота
<i>Змістовний модуль 1</i>				
1	Огляд механіки деформівного твердого тіла	1	-	2
2	Основні рівняння механіки деформівного твердого тіла	1	2	6
3	Конститутивні моделі: співвідношення між напруженнями та деформаціями	8	8	24
4	Розв'язки простих крайових і початкових задач	4	4	12
5	Розв'язки для лінійно-пружних тіл	6	6	18
<i>Змістовний модуль 2</i>				
6	Розв'язки для пластичних тіл	2	2	8
7	Скінченно-елементний аналіз: вступ	2	2	12
8	Скінченно-елементний аналіз: теорія та реалізація	2	2	10
9	Моделювання руйнування матеріалу	4	4	12
10	Розв'язки для стрижнів, балок, мембран, пластин, оболонок	4	4	12
Всього годин за курс		34	34	112



## 5. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### *Змістовний модуль 1*

**Тема 1.** Огляд механіки деформівного твердого тіла.

**Лекція 1.1.** Постановка задачі з механіки деформівного твердого тіла.

Вибір об'єкта обчислень. Визначення геометрії твердого тіла. Визначення навантаження. Вирішення того, яку фізику включити в модель. Визначення поведінки матеріалу. Представницька задача початкового значення в механіці деформівного твердого тіла. Вибір методу аналізу.

### *Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.

2. Опрацювання матеріалу який винесено на самостійне вивчення:

- Історія виникнення та розвитку механіки деформівного твердого тіла.

**Тема 2.** Основні рівняння механіки деформівного твердого тіла.

**Лекція 1.2** Математичний опис зміни форми твердих тіл.

Переміщення і швидкість. Тензори градієнта переміщення та градієнта деформації. Градієнт деформації в результаті двох послідовних деформацій. Якобіан градієнта деформації. Тензор деформацій Лагранжа. Ейлерів тензор деформацій. Нескінченно малий тензор деформацій. Інженерні деформації зсуву. Розкладання нескінченно малої деформації на об'ємну та девіаторну частини. Тензор нескінченно малого обертання. Головні значення та напрямки нескінченно малого тензора деформацій. Тензори деформацій Коші–Гріна. Тензор обертання та тензори розтягування вліво та вправо. Головні деформації. Узагальнені міри деформації. Градієнт швидкості. Тензор швидкості деформації та тензор вихору. Нескінченно мала швидкість деформації та швидкість обертання. Інші показники швидкості деформації. Рівняння сумісності нескінченно малих деформацій.

**Лекція 1.3.** Математичний опис внутрішніх сил у твердих тілах.

Поверхневі і внутрішні сили. Поверхнева сила, що діє на площини всередині твердого тіла. Тензор напруження Коші. Інші міри напруження: Кірхгофа, тензори номінальних і матеріальних напружень. Міри напружень для нескінченно малих деформацій. Головні напруження та напрямки. Гідростатичне, девіаторне та ефективне напруження фон Мізеса. Напруження біля зовнішньої поверхні або краю: граничні умови для напружень.

**Лекція 1.4.** Рівняння руху та рівноваги твердих тіл, що деформуються.

Лінійний баланс імпульсу в термінах напружень Коші. Рівновага кутового моменту в термінах напружень Коші. Рівняння руху через інші міри напружень.

**Лекція 1.5.** Робота напружень: принцип віртуальної роботи.

Робота напружень Коші. Швидкість механічної роботи за іншими мірами напружень. Швидкість механічної роботи при нескінченно малих деформаціях.

Принцип віртуальної роботи. Рівняння віртуальної роботи в термінах інших мір напружень. Рівняння віртуальної роботи для нескінченно малих деформацій.

*Практичне заняття 1.* Поділ рівнянь на групи. Основні типи задач та граничні умови, які їм відповідають. Запис рівнянь у векторній та координатній формі. Крайові умови різних типів. Формулювання крайових умов у сучасних системах інженерного проектування. Крайові умови у контактних задачах механіки деформівного твердого тіла. Тензорна форма запису основних співвідношень, які визначають напружено-деформований стан тіл. Застосування різних форм запису матричних співвідношень рівнянь рівноваги у сучасних системах комп'ютерної алгебри. Перетворення у тензорній формі запису рівнянь та граничних умов задач механіки деформівного твердого тіла в актуальній та фіксованій системі координат.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 1, 4, 5, 7, 12; додаткова – 18, 19.

**Тема 3.** Конститутивні моделі: співвідношення між напруженнями та деформаціями.

**Лекція 2.1.** Загальні вимоги до конститутивних рівнянь. Термодинамічні обмеження. Об'єктивність. Стабільність Друкера.

**Лекція 2.2.** Лінійно-пружна поведінка матеріалу.

Ізотропний, лінійно-пружний матеріал. Співвідношення напруження-деформація для ізотропних лінійно-пружних матеріалів: модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та коефіцієнт теплового розширення. Зведені рівняння напруження-деформації для плоскої деформації ізотропних твердих тіл. Типові значення густини та констант пружності ізотропних твердих тіл. Інші константи пружності: об'єму, зсуву і модуль Ламе. Фізична інтерпретація констант пружності для ізотропних твердих тіл. Густина енергії деформації ізотропних твердих тіл. Співвідношення напруження-деформація для загального анізотропного лінійно-пружного матеріалу: тензори пружної жорсткості та податливості. Фізична інтерпретація анізотропних пружних сталей. Густина енергії деформації для анізотропних лінійно-пружних тіл. Формули зміни базису для анізотропної пружності. Вплив симетрії матеріалу на співвідношення напруження-деформація для анізотропних матеріалів. Співвідношення напруження-деформація для лінійно-пружних ортотропних матеріалів. Співвідношення напруження-деформації для лінійно-пружного трансверсально-ізотропного матеріалу. Репрезентативні значення констант пружності трансверсально-ізотропних гексагональних щільно упакованих кристалів. Лінійні пружні співвідношення напруження-деформація для кубічних матері-

алів. Репрезентативні значення пружних властивостей кубічних кристалів і сполук.

**Лекція 2.3.** Гіпопружність: пружні матеріали з нелінійною залежністю напруження–деформація при малій деформації.

*Практичне заняття 2.* Базові типи матеріалів у сучасних системах інженерного та наукового проєктування. Визначення параметрів моделей пружної поведінки матеріалів за експериментальними даними. Набори параметрів, які потрібні для формулювання крайових задач за використання моделей у сучасних системах наукових досліджень.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 4, 13, 10, 11; додаткова – 16, 17.

**Лекція 3.1.** Узагальнений закон Гука: пружні матеріали піддаються невеликим розтягненням, але великим поворотам.

**Лекція 3.2.** Гіперпружність: залежна від часу поведінка каучуку та пінополіуретану при великих деформаціях.

Міри деформації, що використовуються в скінченній пружності. Міри напружень, що використовуються в скінченній пружності. Розрахунок залежності напруження від деформації за густиною енергії деформації. Примітка про абсолютно нестисливі матеріали. Специфічні форми густини енергії деформації. Калібрування нелінійної пружності. Репрезентативні значення властивостей матеріалу для каучуків.

**Лекція 3.3.** Лінійні в'язкопружні матеріали: залежна від часу поведінка полімерів при малих деформаціях.

Особливості залежної від швидкості малих деформацій реакції полімерів. Загальні конститутивні рівняння для лінійних в'язкопружних тіл. Пружинно-демпферна апроксимація модуля релаксації. Представлення рядом Проні модуля релаксації. Калібрування конститутивних законів для лінійних в'язкопружних тіл. Репрезентативні значення в'язкопружних властивостей полімерів.

**Лекція 3.4.** Незалежна від швидкості малих деформацій пластичність: метали, навантажені поза межею текучості.

Особливості непружного відгуку металів. Розкладання деформації на пружну та пластичну частини. Критерії текучості. Графічне зображення поверхні текучості. Закони деформаційного зміцнення. Закон пластичної течії. Стан пружного розвантаження. Повні інкрементні співвідношення напруження–деформація для пружно-пластичного твердого тіла, незалежного від швидкості деформацій. Типові значення межі текучості полікристалічних металів. Додавання пластичних складових рівнянь: принцип максимального пластич-

ного опору. Погляд на пластичні основні рівняння: постулат Друкера. Мікроскопічне поширення пластичної течії в металах.

**Лекція 4.1.** В'язкопластичність за малих деформацій: повзучість і деформація кристалічних твердих тіл з високою швидкістю деформації.

Особливості повзучості. Особливості поведінки високої швидкості деформації. Конститутивні рівняння в'язкопластичні малих деформацій. Репрезентативні значення параметрів для в'язкопластичних моделей повзучих тіл. Репрезентативні значення параметрів для в'язкопластичних моделей високошвидкісної деформації.

**Лекція 4.2.** Залежна від швидкості великих деформацій пластичність.

Кінематика пластичності скінченних деформацій. Міри напружень для скінченної деформаційної пластичності. Пружне співвідношення напруження–деформація для пластичності скінченної деформації. Пластичний конститутивний закон для в'язкопластичності скінченної деформації.

**Лекція 4.3.** В'язкопружність за великих деформацій.

Кінематика в'язкопружності скінченної деформації. Міри напруження для в'язкопружності скінченної деформації. Зв'язок між напруженням, мірою деформації та густиною енергії деформації. Релаксація напруження. Репрезентативні значення параметрів матеріалу в в'язкопружній моделі скінченної деформації.

*Практичне заняття 4.* Тензорні форми запису реологічних рівнянь для лінійних та нелінійних моделей. Особливості використання реологічних моделей у сучасних системах комп'ютерного аналізу. Використання моделі в'язкопружного тіла для комп'ютерного аналізу задачі для стрижня.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 1, 3, 5, 10, 11, 12; додаткова – 15, 19.

**Лекція 5.1.** Моделі критичного стану ґрунтів.

Особливості поведінки ґрунтів. Основні рівняння для моделі Cam-clay. Застосування рівнянь критичного стану до простого 2D навантаження. Типові значення властивостей матеріалів для ґрунтів.

**Лекція 5.2.** Конститутивні моделі монокристалів металів.

Огляд деяких важливих понять з кристалографії. Особливості пластичного течії в монокристалах. Кінематичні описи, що використовуються в конститутивних моделях монокристалів. Міри напружень, що використовуються в пластичності кристалів. Пружне співвідношення напруження–деформація, що використовується в пластичності кристалів. Співвідношення пластичної деформації, що використовується в пластичності кристалів. Показові значення пластичних властивостей монокристалів.

**Лекція 5.3.** Конститутивні моделі контактуючих поверхонь і меж розділу твердих тіл.

Моделі когезійних зон для інтерфейсів. Моделі контакту та тертя між поверхнями.

*Практичне заняття 5.* Формулювання типових задач контактної механіки деформівного твердого тіла. Використання конститутивних моделей для комп'ютерного аналізу поведінки кристалів та інтерфейсів твердих тіл.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 2, 3, 14; додаткова – 19.

**Тема 4.** Розв'язки простих крайових і початкових задач.

**Лекція 6.1.** Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних лінійних задач пружності.

Зведення основних рівнянь лінійної пружності в декартових компонентах. Спрощені рівняння для сферично-симетричних задач лінійної пружності. Загальний розв'язок сферично-симетричної задачі лінійної пружності. Порожниста сфера під тиском. Гравітаційна сфера. Сфера зі стаціонарним тепловим потоком. Спрощені рівняння для осесиметричних задач лінійної пружності. Загальний розв'язок осесиметричної крайової задачі. Довгий (узагальнена плоска деформація) циліндр, що піддається внутрішньому і зовнішньому тиску. Кругла пластина, що обертається. Напруження, викликані невідповідністю між двома циліндрами.

**Лекція 6.2.** Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних пружно-пластичних задач.

Зведення визначальних рівнянь. Спрощені рівняння для сферично-симетричних задач. Пружна ідеально пластична порожниста куля, що піддається монотонно зростаючому внутрішньому тиску. Пружна ідеально пластична порожниста сфера, що піддається циклічному внутрішньому тиску. Спрощені рівняння для плоскої деформації осесиметричних пружно-ідеально пластичних твердих тіл. Довгий (плоский деформований) циліндр під внутрішнім тиском.

*Практичне заняття 6.* Моделювання осесиметричних тіл у комп'ютерних системах наукового аналізу. Визначення напружено-деформованого стану циліндра під внутрішнім тиском у комп'ютерній системі інженерного аналізу.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 5, 10, 13, 14; додаткова – 19.

**Лекція 7.1.** Сферично-симетричний розв'язок квазістатичних задач пружності великих деформацій.

Короткий опис основних рівнянь скінченної пружності в декартових компонентах. Спрощені рівняння для нестисливих сферично-симетричних тіл. Порожниста сфера під тиском, виготовлена з нестислової гуми.

**Лекція 7.2.** Прості динамічні розв'язки для лінійно-пружних матеріалів.

Поверхня, що піддається змінному в часі нормальному тиску. Поверхня, що піддається змінному в часі зсуву. Одномірний стрижень, що піддається торцевому навантаженню. Плоскі хвилі в нескінченному твердому тілі. Короткий опис швидкостей хвиль в ізотропних пружних тілах. Відбиття хвиль, що рухаються нормально до вільної поверхні. Відбиття та передача хвиль по нормалі до поверхні розділу. Простий приклад із поширенням плоскої хвилі: удар пластини. Експеримент.

*Практичне заняття 7.* Моделювання тіл із центральною симетрією у комп'ютерних системах наукового аналізу. Визначення напружено-деформованого стану сфери під внутрішнім тиском у комп'ютерній системі інженерного аналізу. Прості динамічні системи та їхній аналіз у системах інженерного проектування.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 4, 11, 13; додаткова – 16.

**Тема 5.** Розв'язки для лінійно-пружних тіл.

**Лекція 8.1.** Загальні положення.

Зведення основних рівнянь лінійної пружності. Альтернативна форма визначальних рівнянь: рівняння Нав'є. Суперпозиція та лінійність розв'язків. Єдиність та існування розв'язків лінійних рівнянь пружності. Принцип Сен-Венана.

**Лекція 8.2.** Функція Ейрі лінійних задач статки для плоского напруженого стану та плоскої деформації.

Функція Ейрі в прямокутних координатах. Демонстрація того, що функція Ейрі задовольняє визначальні рівняння. Функція Ейрі у циліндрично-полярних координатах. Функціональний розв'язок Ейрі для консолі з кінцевим навантаженням. Двовимірне лінійне навантаження, що діє перпендикулярно до поверхні нескінченного тіла. Двовимірне лінійне навантаження, що діє паралельно поверхні нескінченного тіла. Довільний тиск, що діє на плоску поверхню. Рівномірний нормальний тиск, що діє на смужку. Напруження біля вершини тріщини.

**Лекція 8.3.** Розв'язання статичних лінійних задач плоскої деформації методом комплексної змінної.

Розв'язання задач теорії пружності методом комплексної змінної. Демонстрація того, що комплексозмінний розв'язок задовольняє визначальні рівняння. Комплексозмінний розв'язок для сили вздовж поперечної лінії в нескінченному твердому тілі (плоска деформація). Комплексозмінний розв'язок для крайової дислокації в нескінченному твердому тілі. Циліндричний отвір у нескінченному твердому тілі під віддаленим навантаженням. Тріщина в нескінченному пружному твердому тілі при віддаленому навантаженні. Поля біля вершини тріщини на біматеріальній межі. Жорсткий плоский індентор в контакті з півпростором без тертя. Параболічний (циліндричний) індентор без тертя в контакті з півпростором. Контакт вздовж лінії між двома неконформними пружними тілами без тертя. Ковзний контакт між двома шорсткими пружними циліндрами. Дислокація біля поверхні півпростору.

*Практичне заняття 8.* Перевірка принципу Сен-Венана у системах інженерного проектування. Розв'язання базових задач контактної механіки деформівного твердого тіла у сучасних системах наукового аналізу.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 3, 4, 5, 9; додаткова – 16.

**Лекція 9.1.** Розв'язки тривимірних статичних задач лінійної пружності.

Представлення потенціалу Папковича–Нойбера для тривимірних розв'язків для ізотропних твердих тіл. Демонстрація того, що розв'язок Папковича–Нойбера задовольняє визначальне рівняння. Зосереджена сила в нескінченному твердому тілі. Зосереджена сила, нормальна до поверхні нескінченного півпростору. Зосереджена сила, дотична до поверхні нескінченного півпростору. Задача Ешелбі про включення. Пружно неузгоджене еліпсоїдне включення в нескінченному твердому тілі під дією віддаленого напруження. Сферична порожнина в нескінченному твердому тілі під дією віддаленого напруження. Циліндричний індентор з плоским торцем у контакті з пружним півпростором. Контакт без тертя між двома пружними сферами. Площа контакту, тиск, жорсткість і межа пружності для загальних неконформних контактів. Співвідношення переміщення навантаження–площа контакту для осесиметричних контактів довільної форми.

**Лекція 9.2.** Розв'язки узагальнених плоских задач для анізотропних лінійно-пружних тіл.

Визначальні рівняння пружності для анізотропних твердих тіл. Представлення Штро для полів в анізотропних твердих тілах. Демонстрація того, що представлення Штро задовольняє визначальні рівняння. Власні значення

Штроха та матриці анізотропії для кубічних матеріалів. Вироджені матеріали. Фундаментальна матриця пружності. Ортогональні властивості матриць Штро  $a$  і  $b$ . Тензори Барнетта–Лоте та тензор імпедансу. Корисні властивості матриць в анізотропній пружності. Формули зміни базису для матриць, що використовуються в анізотропній пружності. Інтегралі Барнетта–Лоте. Представлення Штро для стану рівномірного напруження. Лінійне навантаження та дислокація в нескінченному анізотропному твердому тілі. Навантаження вздовж лінії та дислокація під поверхнею анізотропного півпростору.

**Лекція 9.3.** Розв'язки динамічних задач для ізотропних лінійно-пружних тіл. Потенціали Лява динамічних розв'язків для ізотропних твердих тіл. Миттєво прикладений тиск на поверхню сферичної порожнини в нескінченному твердому тілі. Хвилі Релея. Хвилі Лява. Пружні хвилі в хвилеводах.

*Практичне заняття 9.* Задання умов крайової задачі для анізотропного тіла у сучасних системах наукового аналізу. Базові задачі з аналізу розповсюдження хвиль у стрижневих конструкціях.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 1, 4; додаткова – 17, 19.

**Лекція 10.1.** Енергетичні методи розв'язування статичних задач лінійної пружності.

Визначення потенціальної енергії лінійно-пружного твердого тіла при статичному навантаженні. Принцип стаціонарності та мінімуму потенціальної енергії. Задача про одноосний стиск циліндра, розв'язана енергетичними методами. Варіаційне отримання балочного рівняння. Енергетичні методи розрахунку жорсткості.

**Лекція 10.2.** Теореми взаємності та їх застосування.

Твердження та доведення теореми про взаємність. Простий приклад із застосуванням теореми про взаємність. Формули, що зв'язують внутрішні та граничні значення величин поля. Класичні розв'язки для переміщення та напруження, викликаних тривимірною дислокаційною петлею в нескінченному твердому тілі.

**Лекція 10.3.** Енергія дислокацій у пружних твердих тілах.

Класичний розв'язок потенційної енергії ізольованої дислокаційної петлі в нескінченному твердому тілі. Несингулярна теорія дислокацій. Енергія дислокаційної петлі в напруженому скінченному пружному твердому тілі. Енергія двох взаємодіючих дислокаційних петель. Рушійна сила руху дислокації: формула Піча–Келера.

**Лекція 10.4.** Метод Релея–Рітца для оцінки власної частоти пружного тіла.

Форми мод і власні частоти; ортогональність форм мод і принцип Релея. Оцінка власної частоти вібрації балки методом Релея–Рітца.



*Практичне заняття 10.* Обчислення енергетичних характеристик Перетворення у тензорній формі запису рівнянь та граничних умов задач механіки деформівного твердого тіла в актуальній та фіксованій системі координат.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 4, 11, 13; додаткова – 16.

**Тема 6.** Розв'язки для пластичних тіл.

**Лекція 11.1.** Теорія поля ліній ковзання.

Інтерпретація поля лінії ковзання. Виведення методу поля ліній ковзання. Приклади розв'язків поля лінії ковзання для крайових задач.

**Лекція 11.2.** Граничні теореми в пластичності та їх застосування.

Визначення пластичної дисипації. Принцип мінімальної пластичної дисипації. Теорема верхньої межі пластичного колапсу. Приклади застосування теореми про верхню межу. Теорема про нижню межу пластичного колапсу. Приклади застосування теореми про нижню межу пластичного колапсу. Теорема про нижню межу шейкдауну. Приклади застосування теореми про нижню межу шейкдауну. Теорема про верхню межу шейкдауну. Приклади застосування теореми про верхню межу шейкдауну.

*Практичне заняття 11.* Постановка задач пружно-пластичного деформування у сучасних комп'ютерних системах інженерного проєктування. Розв'язання пружно-пластичної задачі для двохопорної балки.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 6, 10, 14; додаткова – 15.

**Тема 7.** Скінченно-елементний аналіз: вступ.

**Лекція 12.1.** Метод скінченних елементів, базові принципи.

Сітка скінченних елементів для 2D або 3D компонента. Вузли та елементи в сітці. Спеціальні елементи: балки, пластини, оболонки, кроквяні елементи. Властивості матеріалу. Граничні умови. Обмеження контактуючих поверхонь та інтерфейсів. Початкові умови та зовнішні поля. Процедури розв'язання та прирости часу. Вивід результатів. Одиниці виміру в скінченно-елементних обчисленнях. Використання розмірного аналізу для спрощення СЕА. Спрощення СЕА шляхом масштабування визначальних рівнянь.

**Лекція 12.2.** Проста скінченно-елементна програма.

Скінченно-елементна сітка та зв'язність елементів. Глобальний вектор переміщення. Функції інтерполяції елементів. Деформації елемента, напруження та щільність енергії деформації. Матриця жорсткості елементів. Глобальна матриця жорсткості. Граничне навантаження. Глобальний вектор залишкової сили. Мінімізація потенційної енергії. Усунення заданих переміщень. Розв'язання. Постообробка. Приклад коду СЕА.

*Практичне заняття 12.* Типи скінченних елементів. Вивчення ефективності розв'язання базових задач механіки ізотропного деформівного тіла залежно від використання різних схем комп'ютерного аналізу.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 2, 4; додаткова – 16, 19.

**Тема 8.** Скінченно-елементний аналіз: теорія та реалізація.

**Лекція 13.1.** Узагальнений МСЕ для статичної лінійної пружності.

Огляд принципу віртуальної роботи. Інтегральна (слабка) форма визначальних рівнянь лінійної пружності. Інтерполяція поля переміщення та поля віртуальної швидкості. Рівняння скінченних елементів. Проста 1D реалізація МСЕ. Короткий опис 1D процедури скінченних елементів. Приклад коду МСЕ і розв'язку. Узагальнення 1D МСЕ на 2D і 3D випадки. Функції інтерполяції для 2D елементів. Функції інтерполяції для 3D елементів. Об'ємні інтеграли для жорсткості та сили в термінах нормованих координат. Схеми числового інтегрування для 2D і 3D елементів. Зведення формул для матриць жорсткості елементів і сил. Зразок 2D/3D лінійного пружностатичного МСЕ коду.

**Лекція 13.2.** МСЕ для динамічної лінійної пружності.

Огляд визначальних рівнянь динамічної лінійної пружності. Отримання визначальних рівнянь за допомогою принципу віртуальної роботи. Скінченно-елементні рівняння руху лінійно-пружних тіл. Інтегрування Ньюмарка за часом для еластодинаміки. 1D реалізація схеми Ньюмарка. Приклад 1D динамічного МСЕ коду та розв'язку. Матриці зосереджених мас. Приклад 2D та 3D динамічного лінійно-пружного коду та розв'язку. Модальний метод інтегрування по часу. Власні частоти та форми мод. Приклад 1D коду з модальною динамікою. Приклад коду 2D і 3D МСЕ для обчислення форм режиму та власних частот.

**Лекція 13.3.** МСЕ для нелінійних (гіпопружних) матеріалів.

Зведення визначальних рівнянь. Визначальні рівняння в термінах принципу віртуальної роботи. Рівняння скінченних елементів. Розв'язування рівнянь скінчених елементів за допомогою ітерацій Ньютона–Рафсона. Дотичні модулі для гіпопружного тіла. Короткий опис процедури Ньютона–Рафсона для

гіпопружних тіл. Що робити, якщо ітерації Ньютона–Рафсона не збігаються. Варіації ітерації Ньютона–Рафсона. Приклад гіпопружного коду МСЕ.

**Лекція 13.4.** МСЕ для великих деформацій: гіперпружні матеріали.

Зведення визначальних рівнянь. Визначальні рівняння з точки зору принципу віртуальної роботи. Рівняння скінченних елементів. Розв’язок з використанням послідовних ітерацій Ньютона–Рафсона. Дотична жорсткість для неогуківського матеріалу. Оцінка інтегралів граничних поверхневих сил. Приклад гіперпружного коду скінченних елементів.

**Лекція 13.4.** МСЕ для в'язкопластичності.

Зведення визначальних рівнянь. Визначальні рівняння в термінах принципу віртуальної роботи. Рівняння скінченних елементів. Інтегрування пластичного закону напруження–деформації. Матеріальна дотична. Розв’язання з використанням послідовних ітерацій Ньютона–Рафсона. Приклад коду МСЕ для малої пластичної деформації.

**Лекція 13.5.** Розширені формулювання елементів: несумісні режими, спрощене інтегрування та гібридні елементи.

Блокування зсуву та елементи несумісного режиму. Об’ємне блокування і зменшені елементи інтегрування. Гібридні елементи для моделювання майже нестисливих матеріалів.

*Практичне заняття 13.* Постановка та розв’язання задач механіки деформівного твердого тіла у межах МСЕ з використанням різних ітеративних схем. Забезпечення збіжності з використанням різних засобів сучасних комп’ютерних систем наукового аналізу.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 2, 4, 13; додаткова – 16, 19.

**Тема 9.** Моделювання руйнування матеріалу.

**Лекція 14.1.** Короткий опис механізмів руйнування та втоми при статичному та циклічному навантаженні. Руйнування при монотонному навантаженні. Руйнування при циклічному навантаженні.

**Лекція 14.2.** Критерії руйнування та втоми на основі напружень та деформацій.

Критерії руйнування крихких тіл і композитів на основі напруження. Імовірнісні методи проектування крихкого руйнування (статистика Вейбулла). Критерій статичної втоми крихких матеріалів. Основні закономірності руйнування крихких матеріалів. Критерії пластичного руйнування. Пластичне руйнування локалізацією деформації. Критерії руйнування високоцикловою втомою при циклічному навантаженні сталої амплітуди. Критерії руйнування малоцикловою втомою. Критерії руйнування при циклічному навантаженні зі змінною амплітудою.

**Лекція 14.3.** Моделювання руйнування ростом тріщини: лінійно-пружна механіка руйнування.

Поля в околі вершини тріщини в ізотропному лінійно-пружному твердому тілі. Припущення та застосування феноменологічної лінійно-пружної механіки руйнування. Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень. Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень методом скінченних елементів. Вимірювання в'язкості руйнування. Типові значення в'язкості руйнування. Стабільний розрив: криві  $K_I$  і стійкість до тріщин. Критерії змішаного руйнування. Розростання тріщин статичної втоми. Циклічний ріст тріщини втоми. Пошук тріщин у конструкціях.

*Практичне заняття 14.* Моделювання тріщин у сучасних системах комп'ютерного проєктування. Постановка задач механіки руйнування з використанням різних моделей тріщини. Збіжність комп'ютерного аналізу у задачах механіки руйнування.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 3, 10; додаткова – 15, 19.

**Лекція 15.1.** Енергетичні методи в механіці руйнування.

Визначення швидкості вивільнення енергії в вершині тріщини для лінійно-пружних твердих тілах. Швидкість вивільнення енергії як критерій руйнування. Зв'язок швидкості виділення енергії з коефіцієнтом інтенсивності напружень. Зв'язок між швидкістю виділення енергії та податливістю. Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень за допомогою податливості. Інтегральні вирази для потоку енергії до вершини тріщини.  $J$ -інтеграл Райса. Розрахунок швидкості вивільнення енергії за допомогою  $J$ -інтеграла.

**Лекція 15.2.** Механіка пластичного руйнування.

Модель когезійної зони Дагдейла–Баренבלата текучості біля вершині тріщини. Поля в вершині тріщини Хатчінсона–Райса–Розенгрена для стаціонарної тріщини тілі зі степеневим зміцненням. Механіка пластичного руйнування на основі  $J$ -інтеграла.

**Лекція 15.3.** Лінійно-пружна механіка руйнування інтерфейсів.

Поля в околі вершини тріщини на межі фаз. Феноменологічна теорія руйнування інтерфейсу. Коефіцієнти інтенсивності напружень для деяких міжфазних тріщин. Вибір шляху тріщини.

*Практичне заняття 15.* Обчислення енергетичних характеристик процесу руйнування у сучасних комп'ютерних системах наукового моделювання. Ріст тріщини та застосування різних критеріїв росту при інженерному аналізі базової задачі із розповсюдження тріщини нормального відриву у ізотропній пластині.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 3, 10, 15; додаткова – 19.

**Тема 10.** Розв'язки для стрижнів, балок, мембран, пластин, оболонки.

**Лекція 16.1.** Попередня інформація: діадичні позначення векторів і тензорів.

**Лекція 16.2.** Рух і деформація тонких стрижнів.

Змінні, що характеризують геометрію поперечного перерізу стрижня. Системи координат і величини, що характеризують деформацію стрижня. Додаткові міри деформації та корисні кінематичні співвідношення. Апроксимація переміщення, швидкості та прискорення в стрижні. Апроксимація градієнта деформації. Інші міри деформації. Кінематика стрижнів, що згинаються і скручуються в ненапруженому стані. Представлення сил і моментів у тонких стрижнях. Рівняння руху та граничні умови. Конститутивні рівняння, що зв'язують сили з мірами деформації пружних стрижнів. Енергія деформації пружного стрижня.

**Лекція 16.3.** Спрощені варіанти загальної теорії деформівних стрижнів.

Натягнута гнучка струна з невеликими поперечними прогинами. Пряма пружна балка з малими прогинами за відсутності осьової сили (теорія балок Ейлера–Бернуллі). Пряма пружна балка з невеликими поперечними прогинами і значним осьовим зусиллям.

*Практичне заняття 16.* Стрижневі конструкції у сучасних системах комп'ютерного моделювання. Розв'язання задачі про аналіз напружено-деформованого стану стрижневої ферми за допомогою системи інженерного проектування.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 3, 9, 10, 11, 13; додаткова – 17.

**Лекція 17.1.** Точні розв'язки простих задач з пружними стрижнями.

Вільні коливання прямої балки без осьової сили. Прогинання колони під дією гравітаційного навантаження. Форма спочатку прямого стрижня, який піддався кінцевій тязі після викривлення. Стрижень зігнутий і закручений у спіраль. Гвинтова пружина.

**Лекція 17.2.** Рух і деформація тонких оболонки: загальна теорія.

Системи координат і змінні, що характеризують деформацію оболонки. Вектори та тензорні компоненти в неортогональних базисах: коваріантні та контраваріантні компоненти. Додаткові міри деформації та кінематичні співвід-

ношення. Апроксимація поля переміщень і швидкостей. Апроксимація градієнта деформації. Інші міри деформації. Представлення сил і моментів в оболонках. Рівняння руху та граничні умови. Основні рівняння, що зв'язують сили з мірами деформації в пружних оболонках. Енергія деформації та кінетична енергія пружної оболонки.

**Лекція 17.3.** Спрощені варіанти загальної теорії оболонок: плоскі пластини та мембрани.

Плоскі пластини з малими відхиленнями поза площиною та незначним навантаженням у площині. Плоскі пластини з невеликими відхиленнями поза площиною та значним навантаженням у площині. Плоскі пластини з малими площинними і великими поперечними прогинами (теорія фон Кармана). Розтягнута плоска мембрана з невеликими прогинами поза площиною. Рівняння мембрани в циліндрично-полярних координатах.

**Лекція 17.4.** Розв'язки простих задач з мембранами, пластинами та оболонками.

Тонка кругла пластинка, зігнута за допомогою тиску на одну грань. Режими вібрації та власні частоти для круглої мембрани. Оцінка для основної частоти коливань плоскої прямокутної пластини з простою опорою. Вигин, викликаний непружною деформацією тонкої плівки на підкладці. Вигин круглої пластини, викликаний градієнтом температури по товщині. Втрата стійкості циліндричної оболонки під дією осьового навантаження. Кручення круглого циліндра з відкритими стінками. Аналіз теорії мембранної оболонки сферичного купола під дією гравітаційного навантаження.

*Практичне заняття 17.* Оболонки у сучасних системах комп'ютерного моделювання. Розв'язання задачі про напружено-деформований стан оболонки за допомогою системи інженерного проектування.

*Завдання для самостійної роботи*

1. Вивчення матеріалу лекції.
2. Опрацювання матеріалу лекції, який винесено на самостійне вивчення.

**Література:** основна – 6, 7, 10; додаткова – 16, 17.

## Самостійна робота аспіранта, її зміст та обсяг

№ з/п	Зміст самостійної роботи аспіранта	Обсяг СР (годин)
1	Опрацювання лекційного матеріалу	40
2	Підготовка до практичних занять	36
3	Опрацювання матеріалу, який винесено на самостійне вивчення	36
	<b>Всього</b>	<b>112</b>

## 6. СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТНЬО-НАУКОВОГО СТУПЕНЯ

### 6.1 Політика дотримання академічної доброчесності

Очікується, що аспіранти знайомі з основними принципами академічної доброчесності, самостійно виконують усі навчальні завдання, коректно посилаються на використані джерела інформації при написанні власного наукового або навчального дослідження, тощо. Неприпустимим є списування при написанні контрольних робіт та складанні заліку (у тому числі з використанням мобільних пристроїв). У разі виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі аспіранта вона не зараховується викладачем.

### 6.2 Політика щодо відвідування занять

Відвідування занять є обов'язковим компонентом навчального процесу. За об'єктивних причин (наприклад, міжнародне стажування, епідеміологічні обмеження тощо) навчання може відбуватись в он-лайн формі за погодженням із керівником курсу та керівником аспірантури.

### 6.3 Система рейтингових балів

Рейтинг аспіранта з даної дисципліни складається з балів, що він отримує протягом семестру за:

1. Експрес-контроль – 20 балів;
2. Активну роботу на практичних заняттях – 20 балів;
3. Модульні контрольні роботи – 20 балів (  $2 \times 10 = 20$  );
4. Залік – 40 балів (в кінці третього семестру);
5. Екзамен – 40 балів (в кінці четвертого семестру).

Заохочується представлення доповіді на наукових конференціях, семінарах, подання статті в журнал за тематикою курсу і додатково оцінюється у 10 балів.

*Експрес-контроль* проводиться з метою перевірки якості роботи аспіранта в аудиторії і самостійної роботи в позааудиторний час шляхом усного опитування чи самостійних письмових робіт тривалістю 10 – 30 хвилин, або індивідуальних домашніх завдань протягом семестру. Проводиться декілька разів за семестр (1-2) з максимальною сумарною оцінкою у 20 балів.

*Залік* складається аспірантом в аудиторний час в кінці третього семестру. На нього виносяться питання та завдання, кожне з яких оцінюється за бальною системою. Складання заліку є передумовою продовження вивчення даної дисципліни в наступному семестрі.

*Екзамен* складається аспірантом в аудиторний час в кінці четвертого семестру і на нього виносяться питання та завдання, кожне з яких оцінюється за бальною системою.

#### 6.4 Розрахункова шкала рейтингу

Максимальна сумарна кількість балів протягом семестру складає:  
 $20+20+20+40=100$  (балів).

Рейтинг RD аспіранта складається з рейтингу, одержаного протягом семестру з урахуванням додаткових балів. Аспіранти, які набрали протягом семестру менше 30 балів, зобов'язані підвищити свій рейтинг, інакше вони не допускаються до заліку з цієї дисципліни і мають академічну заборгованість. Для підвищення рейтингу вони отримують можливість написати додаткову контрольну роботу та виконати індивідуальні домашні завдання.

#### Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену	для заліку
90 – 100	<b>A</b>	відмінно	зараховано
82-89	<b>B</b>	добре	
74-81	<b>C</b>		
64-73	<b>D</b>	задовільно	
60-63	<b>E</b>		
35-59	<b>FX</b>	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	<b>F</b>	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни



**«Відмінно» А (90-100 балів)** – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу з можливими незначними недоліками

**«Добре» - В (82-89 балів)** – дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок.

**«Добре» - С (74-81 балів)** – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок.

**«Задовільно» - D (64-73 балів)** – виставляється аспіранту, який має знання тільки основного матеріалу, але не засвоїв його деталей, допускає неточності, неправильне тлумачення окремих елементів завдання та відчуває труднощі при виконанні практичних завдань.

**«Задовільно» - E (60-63 балів)** – достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь).

**«Незадовільно» - FX (35-59 балів)** - виставляється аспіранту, який дає необґрунтовані відповіді на запитання, допускає суттєві помилки у використанні понятійного апарату. Не простежується логічність та послідовність думки. Формулювання хаотичні та не усвідомлені.

**«Незадовільно» - F (1-34 балів)** - виставляється аспіранту, який не засвоїв зміст дисципліни, вміння та навички не набуті.

## **7. ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ**

1. Постановка задачі механіки деформівного твердого тіла.
2. Математичний опис зміни форми твердих тіл.
3. Математичний опис внутрішніх сил у твердих тілах.
4. Рівняння руху та рівноваги твердих тіл, що деформуються.
5. Робота напружень: принцип віртуальної роботи.
6. Загальні вимоги до конститутивних рівнянь. Термодинамічні обмеження. Об'єктивність. Стабільність Друкера.
7. Лінійно-пружна поведінка матеріалу.
8. Гіпопружність: пружні матеріали з нелінійною залежністю напруження–деформація при малій деформації.
9. Узагальнений закон Гука: пружні матеріали піддаються невеликим розтягненням, але великим поворотам.
10. Гіперпружність: залежна від часу поведінка каучуку та пінополіуретану при великих деформаціях.
11. Лінійні в'язкопружні матеріали: залежна від часу поведінка полімерів при малих деформаціях.
12. Незалежна від швидкості малих деформацій пластичність: метали, навантажені поза межею текучості.

13. В'язкопластичність малих деформацій: повзучість і деформація кристалічних твердих тіл з високою швидкістю деформації.
14. Залежна від швидкості великих деформацій пластичність.
15. В'язкопружність за великих деформацій.
16. Моделі критичного стану ґрунтів.
17. Конститутивні моделі монокристалів металів.
18. Конститутивні моделі контактуючих поверхонь і меж розділу твердих тіл.
19. Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних лінійних задач пружності.
20. Осе- та сферично-симетричні розв'язки квазістатичних пружнопластичних задач.
21. Сферично-симетричний розв'язок квазістатичних задач пружності великих деформацій.
22. Прості динамічні розв'язки для лінійно-пружних матеріалів.
23. Функція Ейрі лінійних задач статички для плоского напруженого стану та плоскої деформації.
24. Розв'язання статичних лінійних задач плоскої деформації методом комплексної змінної. Розв'язки тривимірних статичних задач лінійної пружності.
25. Розв'язки узагальнених плоских задач для анізотропних лінійно-пружних тіл.
26. Розв'язки динамічних задач для ізотропних лінійно-пружних тіл.
27. Енергетичні методи розв'язування статичних задач лінійної пружності.
28. Теореми взаємності та їх застосування.
29. Енергія дислокацій у пружних твердих тілах.
30. Метод Релея–Рітца для оцінки власної частоти пружного тіла.
31. Теорія поля ліній ковзання.
32. Граничні теореми в пластичності та їх застосування.
33. Теорія поля ліній ковзання.
34. Граничні теореми в пластичності та їх застосування.
35. Узагальнений МСЕ для статичної лінійної пружності.
36. МСЕ для динамічної лінійної пружності.
37. МСЕ для нелінійних (гіпопружних) матеріалів.
38. МСЕ для великих деформацій: гіперпружні матеріали.
39. МСЕ для в'язкопластичності.
40. Розширені формулювання елементів: несумісні режими, знижене інтегрування та гібридні елементи.
41. Механізми руйнування та втоми при статичному та циклічному навантаженні.
42. Руйнування при монотонному навантаженні.
43. Руйнування при циклічному навантаженні.
44. Критерії руйнування та втоми на основі напружень та деформацій.

45. Моделювання руйнування ростом тріщини: лінійно-пружна механіка руйнування.
46. Енергетичні методи в механіці руйнування.
47. Механіка пластичного руйнування.
48. Лінійно-пружна механіка руйнування інтерфейсів.
49. Попередня інформація: діадичні позначення векторів і тензорів.
50. Рух і деформація тонких стрижнів.
51. Спрощені варіанти загальної теорії деформівних стрижнів.
52. Точні розв'язки простих задач з пружними стрижнями.
53. Рух і деформація тонких оболонок: загальна теорія.
54. Спрощені варіанти загальної теорії оболонок: плоскі пластини та мембрани.
55. Розв'язки простих задач з мембранами, пластинами та оболонками.

## 8. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

### 8.1. Основні рекомендовані джерела

1. Asaro R.J., Lubarda V.A. Mechanics of solids and materials. – New York: Cambridge University Press, 2006. – 860 p.
2. Bechtel S.E., Lowe R.L. Fundamentals of continuum mechanics with applications to mechanical, thermomechanical, and smart materials. San Diego: Academic Press, 2015. – 330 p.
3. Bower A.F. Applied mechanics of solids. – Boca Raton: CRC Press, 2010. – 794 p.
4. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 580 с.
5. Будак В.Д., Жук Я.О. Механіка суцільних середовищ. Миколаїв: Іліон, 2011. – 160 с.
6. Гудрамович В.С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – Киев: Наукова думка, 2005. – 222 с.
7. Дубенець В.Г., Савченко О.В. Механіка деформівного твердого тіла (Курс лекцій. Частина 1). Чернігів: ЧНТУ, 2016. – 139 с.
8. Лурье А.И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
9. Мейз Д. Теория и задачи механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1974. – 319 с.
10. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник. – Київ: Вища школа, 2002. – 308 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
12. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – Москва: Физматлит, 2006. – 272 с.

13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1979. – 744 с.
14. Соколовский В.В. Теория пластичности. – Москва: Высшая школа, 1969. – 608 с.

## **8.2. Додаткові рекомендовані джерела**

15. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V.V. Asymptotical mechanics of composites. – Springer. – 2018. – 333 p.
16. Atanackovich T.M., Guran A. Theory of elasticity for scientists and engineers. – New York: Springer. – 2000. – 377 p.
17. M. Reza Eslami M.Z., Hetnarski R.B., Ignaczak J., Noda N., Sumi N., Tanigawa Y. Theory of elasticity and thermal stresses. Explanations, problems and solutions. Dordrecht: Springer. – 2013. – 789 p.
18. Herakovich C.T. A concise introduction to elastic solids. An overview of the mechanics of elastic materials and structures. Cham: Springer. – 2017. – 131 p.
19. Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Луцьк: Надстир'я. – 2007. – 400 с.