


НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

ЯРЕМЧЕНКО Сергій Миколайович



УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ  
ЦИЛІНДРІВ ТА КУЛЬ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ НА  
ОСНОВІ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі обчислювальних методів Інституту механіки імені С.П. Тимошенка Національної академії наук України.

**Науковий консультант:** академік НАН України,  
доктор технічних наук, професор  
**Григоренко Ярослав Михайлович**,  
головний науковий співробітник  
відділу обчислювальних методів  
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка  
НАН України.

**Офіційні опоненти:** член-кореспондент НАН України,  
доктор фізико-математичних наук, професор  
**Жук Ярослав Олександрович**,  
завідувач кафедри теоретичної та прикладної  
механіки Київського національного  
університету ім. Тараса Шевченка  
доктор фізико-математичних наук, доцент,  
старший науковий співробітник  
**Рожок Лілія Степанівна**,  
доцент кафедри теоретичної та прикладної  
механіки Національного транспортного  
університету, м.Київ  
доктор технічних наук,  
старший науковий співробітник  
**Чирков Олександр Юрійович**,  
провідний науковий співробітник  
відділу чисельних і експериментальних  
методів дослідження конструкційної міцності  
Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка,  
м. Київ

Захист відбудеться 28 вересня 2021 р. о 13.30 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 211.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504.

Автореферат розіслано “20” серпня 2021 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,  
доктор фізико-математичних наук



О.П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Широке застосування товстостінних оболонкових конструкцій циліндричної і сферичної форми в різних галузях сучасної техніки визначається вимогами міцності та надійності, технологічними особливостями, економічною ефективністю та іншими обставинами, які приводять до ускладнення геометричної та фізичної структур оболонок.

В багатьох випадках циліндричні оболонкові конструкції залежно від їх функціонального призначення і умов експлуатації мають складний контур поперечного перерізу, змінну товщину та інші особливості. Прикладами таких конструкцій є захисні покриття атомних реакторів, сховища різного призначення, корпуси надводних і підводних кораблів, літальних і космічних апаратів, об'єкти інженерної і хімічної промисловості.

Аналіз стаціонарного деформування неоднорідних товстостінних циліндричних і сферичних оболонок з геометричними та фізико-механічними особливостями вимагає застосування адекватних моделей оболонок, а в ряді випадків – просторової теорії пружності.

В останні роки дослідження механічної поведінки товстостінних оболонкових систем, яким притаманна структурна неоднорідність різної природи, привертає все більшу увагу дослідників в галузі механіки деформівного твердого тіла.

Аналіз наукової літератури з цього питання дає можливість зробити висновок, що найбільш повно задачі стаціонарного деформування розглянуто для оболонок з кусково-неоднорідного матеріалу. Ця властивість характерна багатьом композиційним матеріалам. Але у випадку більш ускладнених задач, коли матеріал тіла є анізотропним, неперервно-неоднорідним, а форма тіла є складною, процес дослідження знаходиться в початковій стадії. Це пов'язано з необхідністю застосування уточнених оболонкових моделей і просторової теорії пружності, а також з розробкою методик розв'язання вихідних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описують відповідні механічні процеси.

Для розв'язання проблем обчислювального характеру суттєвим є використання сучасних чисельно-аналітичних підходів. У зв'язку з наявністю потужних засобів обчислювальної техніки – персональних комп'ютерів з великою пам'яттю і швидкодією – для розрахунку різних аспектів механічної поведінки сучасних конструкцій в даний час широко застосовуються різні чисельні підходи. Розроблено універсальні чисельні методи, за допомогою яких проводиться розв'язання широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла. Вони носять назву дискретних і побудовані на зведенні вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних до систем алгебраїчних рівнянь високого порядку. Найбільш універсальними і широко застосовуваними є численні модифікації методу скінченних елементів. Однак поряд з універсальними підходами до вирішення завдань теорій пружності та оболонок використовуються також так звані дискретно-континуальні підходи, що дозволяють звести задачу до звичайних диференціаль-

них рівнянь за допомогою аналітичних засобів на основі апроксимації розв'язку по окремим змінним. Дискретно-континуальні підходи можна розглядати як альтернативу універсальним чисельним методам в тому сенсі, що для певних класів задач вони більш ефективні і можуть давати точніші результати, так що їх можна використовувати як еталонні для тестування нових модифікацій дискретних підходів.

Тому можна зробити висновок, що дослідження стаціонарного деформування товстостінних неоднорідних циліндричних оболонки і куль на основі дискретно-континуальних і дискретних підходів є актуальною проблемою механіки деформованого твердого тіла.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дослідження проведено і включено у наукові звіти таких науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.349 “Розробка методів розв'язання задач та дослідження статичного і динамічного деформування пружних тіл складної геометрії та структури на основі моделей різного рівня”, номер державної реєстрації 0105U001991, 2005 – 2009 рр.; НДР № 1.3.1.358 “Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей до дослідження деформування і руйнування композитних матеріалів для розв'язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій”, номер державної реєстрації 0107U000345, 2007 – 2011 рр.; НДР № 1.3.1.370 “Розробка нових підходів до дослідження деформування складних оболонкових систем з неоднорідних анізотропних матеріалів при різних видах навантаження на основі методів чисельного аналізу”, номер державної реєстрації 0109U004184, 2009 – 2013 рр.; НДР № 1.3.1.382 “Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей”, номер державної реєстрації 0112U000249, 2012 – 2016 рр.; НДР № 1.3.1.401 “Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування”, номер державної реєстрації 0115U005709, 2016 – 2020 рр.; НДР № 1.3.1.410 “Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем”, номер державної реєстрації 0117U000700, 2017 – 2021 рр.

**Мета дослідження** полягає в розробці підходу до чисельного дослідження напружено-деформованого стану (НДС) та коливань пружних циліндричних та сферичних тіл неоднорідної структури; цей підхід включає: побудову механіко-математичної моделі вказаних задач за уточненою теорією оболонки і просторовою теорією пружності; розробку відповідної розрахункової схеми з застосуванням чисельних методів сплайн-колокації, дискретної ортогоналізації, скінченних елементів і методу покрокового пошуку; створення програмних комплексів для розв'язання відповідних крайових задач; проведення аналізу розподілу полів напружень та переміщень, динамічних характеристик на основі розв'язання

широкого класу задач про НДС і коливання анізотропних неоднорідних тіл та дослідження впливу на розподіл цих полів конструктивної та структурної неоднорідності.

Досягнення цієї мети передбачає такі **завдання**:

- розробку підходів до розв'язання задач статички і коливань теорії пружності та теорії оболонок типу Тимошенка на основі методів сплайн колокації, дискретної ортогоналізації (дискретно-континуальний підхід) та методу скінченних елементів (дискретний підхід);
- побудову розв'язків задач про напружено-деформований стан циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом з застосуванням уточненої теорії оболонок;
- розв'язування задач про напружений стан кругових та еліптичних циліндричних оболонок зі скісними зрізами за уточненою теорією оболонок;
- знаходження розв'язків задач про осесиметричний напружено-деформований стан неоднорідних циліндрів та порожнистих куль за просторовою теорією пружності;
- дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічного циліндра за теорією електропружності;
- знаходження розв'язків задач про напружено-деформований стан кругового та еліптичного циліндрів в тривимірній постановці;
- проведення досліджень достовірності, точності і збіжності результатів за підходами, що застосовуються;
- виявлення характерних закономірностей в розподілах полів переміщень та напружень в оболонках та просторових тілах, аналіз впливу на напружено-деформований стан неоднорідності структури, геометричних та механічних параметрів в широкому діапазоні їх зміни.

**Об'єктом дослідження** є напружено-деформований стан і коливання неоднорідних циліндричних тіл та порожнистих куль зі складною геометричною структурою при різному характері навантаження та граничних умов.

**Предметом дослідження** є вплив неоднорідної структури та форми циліндричних та сферичних тіл на об'єкт дослідження.

**Методи дослідження.** Метод сплайн-колокації було застосовано для пониження розмірності двовимірних та тривимірних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами до одновимірних задач.

Отримані лінійні крайові задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

У задачах про напружено-деформований стан оболонок зі скісними зрізами для зведення заданої складної геометричної області до прямокутної застосовується метод заміни змінних.

Задачі у варіаційній постановці розв'язано методом скінченних елементів. Використовуються прямокутні чотири- та восьмивузлові елементи у випадку дво-

вимірних задач і восьми- і двадцятивузлові елементи у вигляді паралелепіпедів у випадку тривимірних задач.

Для знаходження резонансних частот осесиметричних коливань електропружного циліндра використовується метод покрокового пошуку (метод послідовного перебору).

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

- виконано постановку та побудовано розрахункові схеми ряду нових задач про стаціонарне деформування циліндричних тіл з різним поперечним перерізом та тіл сферичної форми з врахуванням їх конструктивної та структурної неоднорідності в рамках просторової та оболонкових моделей;
- розроблено нові дискретно-континуальні підходи на основі методу сплайн-колокації та розвинено варіант дискретного підходу (метод скінченних елементів) для дослідження задач про НДС і коливання неоднорідних циліндричних та сферичних тіл в рамках різних моделей;
- досліджено напружено-деформований стан неоднорідних циліндричних тіл з різним поперечним перерізом та порожнистих куль в рамках просторової та оболонкових моделей за допомогою розроблених методик;
- побудовано розподіли полів напружень та переміщень в залежності від характеру структурної неоднорідності, навантаження, типу граничних умов та геометрії пружного тіла;
- на основі отриманих розв'язків проведено аналіз особливостей НДС і коливань широкого класу неоднорідних циліндричних та сферичних тіл, виявлено основні механічні закономірності щодо впливу характеру неоднорідної структури, геометричних, механічних параметрів, видів навантаження та граничних умов об'єктів, що розглядаються, на розподіл полів напружень та переміщень.

**Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації**, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках просторової теорії пружності та теорії оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю; застосуванням обґрунтованих чисельних дискретно-континуальних і дискретних методів, фізично правдоподібною інтерпретацією отриманих результатів; порівняльним аналізом точності розв'язання поставлених задач на основі зазначених методів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати роботи та підходи до їх отримання можуть бути використані при розв'язанні широкого класу практичних задач стаціонарного деформування неоднорідних конструктивних елементів сучасної техніки; розроблені програмні комплекси дають можливість отримати достовірну інформацію про розподіл полів напружень та переміщень в елементах конструкцій при різних режимах експлуатації і проведення оцінок їх міцності і надійності; багатоваріантні розрахунки за розробленими програмами на етапі проектування конструкцій можуть бути альтернативою до проведення коштовних натурних експериментів.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати отримані здобувачем

самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавторстві, здобувач приймав участь у постановці задач, розробці підходів до їх розв'язання та реалізації, обговоренні результатів дослідження. Здобувачеві повністю належить розробка підходу до розв'язання задач для нетонких оболонок зі скісними зрізами з використанням методів сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації; адаптація методу сплайн-колокації з використанням двовимірних сплайнів до задач про НДС неоднорідних циліндрів в просторовій постановці; розробка підходу з використанням сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації до задач про осесиметричний НДС неоднорідних циліндрів та куль; застосування методу скінченних елементів для дослідження НДС еліптичного циліндра в тривимірній постановці з використанням еліптичної системи координат. Співавтори академік НАН України Я.М. Григоренко, чл.-кор. НАН України О.Я. Григоренко, професор W.H. Müller, професор М.М. Крюков, професор І.А. Лоза брали участь у постановках задач та аналізі отриманих результатів; доктор R. Wille, к.ф.-м.н. А.С. Бергульов, к.ф.-м.н. С.А. Панкрат'єв, к.ф.-м.н. Н.П. Яремченко брали участь в деяких розрахунках задач та аналізі результатів.

**Апробація матеріалів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських конференціях, зокрема: 35th and 36th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006, Гданськ, Польща 2008), “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2006), International Workshop “Research in Mechanics of Composites” (Бад-Герренальб, Німеччина 2006), 6th International Conference on Composite Science and Technology (Дурбан, ПАР, 2007), 9th and 10th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” (Вільнюс, Литва, 2007, 2010), “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем” (Черкаси, 2007), XI Міжнародна науково-методична конференція “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців” (Миколаїв, 2007), 9th Conference “Shell Structures and Applications” (Гданськ, Польща, 2009), “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпро – Кам'янське, 2014, 2017), Міжнародна науково-практична конференція “Проблеми механіки та фізико-хімічного конденсованого стану речовин” (Миколаїв, 2015), “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2018).

В завершеному вигляді робота доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2020 р.), на науковому семінарі за напрямом “Механіка оболоноквих систем” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2020 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н, професор І.А. Лоза, 2021 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2021 р.), на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П.

Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2020 р.).

**Публікації.** Результати дисертації висвітлено в 36 наукових працях, з них 21 [1–21] стаття у наукових фахових виданнях України і у наукових періодичних виданнях інших держав, 15 публікацій [22–36] в матеріалах міжнародних і національних конференцій. Чотирнадцять статей [1, 3, 7, 9–11, 13–18, 20, 21] опубліковані у виданнях, включених до категорії “А” Переліку наукових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank [20] входить до квартилю Q2, [1, 3, 7, 9–11, 13–16, 18, 21] – до Q3. Праці [2, 5, 24, 25, 28] опубліковані автором одноосібно.

**Структура та обсяг дисертаційної роботи.** Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел з 297 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 261 сторінку, разом із 70 рисунками і 20 таблицями.

*Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультантові – академіку НАН України, доктору технічних наук, професору Ярославу Михайловичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та виражає подяку члену-кореспонденту НАН України, доктору фізикоматематичних наук, професору О.Я. Григоренку за цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.*

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету й задачі досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; наведено дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок здобувача в них, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У **першому розділі** наводиться огляд літератури за темою дисертації. На основі аналізу джерел висвітлено сучасний стан розвитку теорії пружності неоднорідних тіл та оболонок складної форми.

Значний внесок у розвиток теорії пружності та оболонок зробили праці С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотіна, І.Н. Векуа, В.З. Власова, І.І. Воровича, О.М. Гузя, Б.Г. Гальоркіна, Н.К. Галімова, О.В. Гольденвейзера, Е.І. Григолока, Я.М. Григоренка, М.О. Кільчевського, Г. Кірхгофа, С.В. Корольова, С.Г. Лехніцького, А.І. Лур'є, О.Е.Х. Лява, Х.М. Муштарі, П. Нагді, В.В. Новожилова, Ю.М. Работнова, Е. Рейсснера, С.П. Тимошенка, І.Я. Штаєрмана та ін.

Дослідженню НДС та коливань неоднорідних пружних тіл, та оболонок на основі уточнених моделей присвячені роботи В.А. Баженова, О.І. Беспалової, В.Л. Богданова, В.Д. Будака, А.Т. Василенка, Я.О. Жука, Е.І. Григолока, Я.М.



Григоренка, О.Я. Григоренка, Н.А. Гук, В.І. Гуляєва, В.Г. Карнаухова, В.І. Козлова, М.М. Крюкова, В.Д. Кубенка, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, І.А. Лози, П.З. Лугового, В.Ф. Мейша, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Л.В. Мольченка, В.М. Назаренка, Ю.М. Подільчука, О.О. Рассказова, Л.С. Рожок, Я.Я. Руцицького, І.К. Сенченкова, Н.В. Сметанкіної, В.І. Сторожева, І.Ю. Хоми, Л.П. Хорошуна, І.С. Чернишенка, О.Ю. Чиркова, Ю.М. Шевченка, М.О. Шульги, О.М. Шупікова та ін.

Основи класичної та уточнених теорій анізотропних оболонок закладено в роботах С.А. Амбарцумяна, Я.М. Григоренка, О.М. Гузя, С.В. Корольова, С.Г. Лехніцького, Е.І. Григолюка, І.Ю. Бабича, Б.Л. Пелеха, Л. Доннелла, П. Нагді, Р.Д. Міндліна та ін.

Розвитку теорії сплайнів присвячені монографії Дж. Алберга, Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошніченка, М.П. Корнійчука та ін.

Геометричні перетворення областей для задач механіки запропоновано в роботах М.С. Паймушина, В.М. Корнішина, В.Ф. Снігірьова, М.М. Крюкова та ін.

Монографії, присвячені основам методу скінченних елементів, написано О. Зенкевичем, Дж. Коннором та К. Бреббіа, Г. Стренгом та Дж. Фіксом, Ж. Деклу та ін.

Зроблений аналіз наукової літератури показав доцільність та актуальність проведення досліджень в обраному напрямку.

У **другому розділі** представлено основні співвідношення просторової теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла та уточненої зсувної теорії оболонок першого порядку Тимошенка в ортогональних криволінійних системах координат.

Наведено загальні відомості про клас сплайн-функцій, представлених алгебраїчними поліномами на скінченному носіїві. Представлено В-сплайни першого і третього порядків, відзначено їх характерні властивості та можливість використання як базисних функцій для апроксимації шуканого розв'язку крайових задач. На прикладі одновимірної лінійної крайової задачі загального виду викладено суть методу сплайн-колокації та основні положення методу дискретної ортогоналізації.

Описані методи є основою розробки дискретно-континуальних (чисельно-аналітичних) методик для дослідження НДС пружних тіл та товстостінних оболонок, що розглядаються в дисертації.

Застосування методу сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації при розв'язанні задач теорії оболонок показано на прикладі визначення НДС багатошарової пологої панелі.

Використання методів заміни змінних, сплайн-колокації, дискретної ортогоналізації та методу скінченних елементів показано для задачі про згин чотирикутних пластин складної форми.

Як приклад використання двовимірних сплайнів до розв'язання задач про НДС просторових тіл, наведено задачу про згин прямокутної плити.

Особливості застосування відмічених дискретно-континуальних та дискретних методик до дослідження стаціонарного деформування циліндрів та куль з неоднорідною структурою описано в наступних розділах дисертації.

**Третій розділ** присвячено дослідженню напружено-деформованого стану циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу.

Розглянуто такі задачі про НДС: для ізотропної циліндричної оболонки в двох варіантах реалізації дискретно-континуального підходу з апроксимацією за напрямною і за твірною; для трансверсально ізотропної оболонки змінної товщини та для гофрованих пластини і циліндричних оболонок еліптичного перерізу.

Якщо вибрати за систему координат  $\alpha_1$  - довжину вздовж твірної,  $\alpha_2$  - деякий параметр вздовж напрямної,  $\gamma$  - координату, перпендикулярну до серединної поверхні, позначити  $A_2$  - параметр Ламе вздовж напрямної ( $A_1 = 1$ ),  $k = k_2$  - кривина напрямної ( $k_1 = 0$ ),  $u_1, u_2, w$  - переміщення оболонки,  $\psi_1, \psi_2$  - повні кути повороту, то розв'язувальні рівняння для некругових циліндричних оболонок змінної товщини будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C_{11}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{A_2} \frac{C_{66}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66} + C_{12}}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1} k w + C_{12} k \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + q_1 = 0; \\
& \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1} - k^2 \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66} + C_{12} - k^2 D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\
& - k^2 K_2 u_2 + \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \\
& + \frac{C_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} k + C_{22} k' \right) w + \frac{k (K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \\
& + \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + k K_2 \psi_2 + k \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + k D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + q_2 = 0; \\
& - k C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \left( k' K_2 + k \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} \right) u_2 - \frac{k (K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - k^2 C_{22} w + \\
& + \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} - \frac{K_2 A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \\
& + \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \psi_1 + K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} \psi_2 + \frac{K_2}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + q_\gamma = 0; \tag{1} \\
& \left( \frac{k D_{66} A_2' - k' D_{66} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{k D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} - \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \\
& - \frac{k D_{12}}{A_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - k^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} w - (k^2 D_{12} + K_1) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - K_1 \psi_1 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0; \\
& - \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \alpha_2} + k K_2 u_2 + \left( \frac{k D_{22} A_2' - k' D_{22} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - \\
& - \frac{k D_{22}}{A_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{k}{A_2} \left( 2k' D_{22} + k \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} \right) w - \frac{k^2 D_{22} + K_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \\
& + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - K_2 \psi_2 + \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

В (1)  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $K_i$  – коефіцієнти, що визначаються товщиною оболонки та пружними характеристиками матеріалу,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_\gamma$  – компоненти вектора навантаження.

Додавши до отриманої системи лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних граничні умови, отримаємо двовимірну крайову задачу, яку зведено до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації.

При застосуванні методу сплайн-колокації в напрямку твірної розв'язки системи рівнянь (1) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}
u(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2) \varphi_{1i}(\alpha_1), \quad u_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\alpha_1), \\
w(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi_{3i}(\alpha_1),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\psi_1(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\alpha_1), \quad \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5i}(\alpha_1),$$

де  $u_{1i}(\alpha_2)$ ,  $u_{2i}(\alpha_2)$ ,  $w_i(\alpha_2)$ ,  $\psi_{1i}(\alpha_2)$ ,  $\psi_{2i}(\alpha_2)$  – шукані функції змінної  $\alpha_2$ ,  $\varphi_{ji}(\alpha_1)$  ( $j=\overline{1,5}$ ) – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня на рівномірній сітці  $\Delta$ :  $0 = \alpha_{1_0} < \alpha_{1_1} < \dots < \alpha_{1_N} = L$ , які задовольняють граничні умови на криволінійних контурах  $\alpha_1 = 0$  та  $\alpha_1 = L$ .

Підставивши вирази (2) у (1) і граничні умови і вимагаючи виконання останніх в точках колокації  $\xi_k = \alpha_{1k}$  ( $k = \overline{0, N}$ ), отримаємо одновимірну крайову задачу, яку розв'яжемо методом дискретної ортогоналізації.

Аналогічно можна застосувати метод сплайн-колокації і вздовж напрямної.

На основі цього підходу проведено розв'язання задач статички некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом ( $x_1 = b \cos \alpha_2$ ,  $x_2 = a \sin \alpha_2$ ,  $Ox_1x_2$  – декартова система координат). Досліджено напружено-деформований стан замкненої ізотропної оболонки сталого товщини, півосі поперечного перерізу якої  $a = 12,5$ ;  $b = 8$ , модуль Юнга  $E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; довжина оболонки  $L = 30$ , товщина  $h = 1$ , а торці жорстко закріплені ( $u_1 = u_2 = w = 0, \psi_1 = \psi_2 = 0, \alpha_1 = const$ ).

Табл. 1 – Значення прогину  $wE_0/q_0$  в перерізах  $\alpha_1 = L/2$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$  в залежності від кількості точок колокації при виборі двох різних напрямків апроксимації.

| Напрямок апроксимації | $\alpha_2$ | $wE_0/q_0$ |        |        |        |        |        |
|-----------------------|------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                       |            | $N$        |        |        |        |        |        |
|                       |            | 9          | 11     | 13     | 15     | 17     | 19     |
| вздовж твірної        | 0          | 1226       | 1225   | 1224   | 1225   | 1225   | 1226   |
|                       | $\pi/2$    | -559,8     | -560,6 | -561,4 | -562,1 | -562,6 | -563,0 |
| вздовж напрямної      | 0          | 1203       | 1213   | 1218   | 1221   | 1223   | 1224   |
|                       | $\pi/2$    | -546,8     | -554,7 | -558,5 | -560,5 | -561,6 | -562,3 |

Оскільки в даному випадку товщина вздовж напрямної не змінюється, то при  $\alpha_2 = 0$  і  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  будуть мати місце умови симетрії  $\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = 0$ ,  $\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} = 0$ ,  $\psi_2 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , при  $\alpha_2 = const$ . На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження  $q_\gamma = q_0$ .

Задачу розв'язано при апроксимації сплайнами вздовж як твірної, так і напрямної. В табл. 1 показано, як змінюються значення одержаних прогинів  $w$  в серединному перерізі  $\alpha_1 = L/2$  в залежності від напрямку сплайн-апроксимації і кількості точок колокації ( $N + 1$ ). Як видно з таблиці, при апроксимації вздовж твірної одержане значення максимального прогину, що спостерігаються при  $\alpha_2 = 0$ , вже при 10 точках колокації ( $N = 9$ ) в трьох значущих цифрах збігається зі значенням прогину, отриманого при 20 точках колокації. Уточнення розв'язку зі збільшенням точок колокації можна спостерігати в перерізі  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , де мають місце прогини, протилежні напрямку дії сили. Проте різниця між прогинами, отриманими при  $N = 9$  і  $N = 19$ , становить менше 1%.

Різниця у значеннях, отриманих для різної кількості точок колокації, при апроксимації вздовж напрямної більш помітна. Але для максимальних прогинів результати, отримані при 20 і 10 точках колокації, відрізняються менш ніж на 2%. Також варто відзначити, що вже при  $N = 19$  наведені значення прогинів практично співпадають для обох напрямків апроксимації.

Як видно з табл. 1, для оболонки сталої товщини апроксимація сплайнами вздовж твірної дає більш точні результати при меншій кількості точок колокації. Це можна пояснити, тим, що в даному випадку коефіцієнти розв'язувальної системи рівнянь (3) залежать тільки від змінної  $\alpha_2$ .

Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної оболонки змінної вздовж твірної товщини, виготовленої зі склопластику, що має такі пружні характеристики:  $E_1 = E$ ,  $E_2 = 4,07E$ ,  $\nu_2 = 0,277$ ,  $G_{12} = G_{23} = 0,407E$ ,  $G_{13} = 0,357E$ . У цьому випадку волокна композиту направлені вздовж напрямної циліндра. Товщина оболонки змінюється за законом  $h = 1 + \alpha[3(\alpha_1/L - 1)^2 - 1]$ , і вага оболонки не залежить від параметра  $\alpha$ . Всі інші характеристики такі ж, як і в попередній задачі.

На рис. 1, 2 показано розподіл прогину  $w$  вздовж твірної при  $\alpha_2 = 0$ , та напружень  $\sigma_2$  в серединній площині оболонки вздовж напрямної при  $\alpha_1 = L/2$  в залежності від параметра  $\alpha$ . Для контролю точності наведено результати розв'язання задач, коли апроксимація сплайнами проводилась вздовж напрямної циліндра при  $N = 19$  (суцільна лінія) та коли апроксимація проводилась вздовж твірної при  $N = 19$  (трикутники),  $N = 39$  (точки). Для  $\alpha = 0$  та  $\alpha = 0,3$ , як видно з рис.1, значення як прогинів так і напружень збігаються при  $N = 19$  для різних напрямків апроксимації (тому результати для  $N = 39$  не наведено), а коли  $\alpha = -0,3$  відмінності між значеннями прогинів, отриманими при різних напрямках апроксимації, при  $N = 19$  більш помітні. Зі збільшенням точок колокації вздовж твірної до 40 точність результатів зростає. Схожу залежність розв'язку від кількості точок колокації та від напрямку апроксимації можна спостерігати і для напружень (рис.2). Але різниця у значеннях напружень, отриманих при апроксимації вздовж напрямної при  $N = 19$  і  $N = 39$  для  $\alpha = -0,3$ , не така значна, як для прогинів.

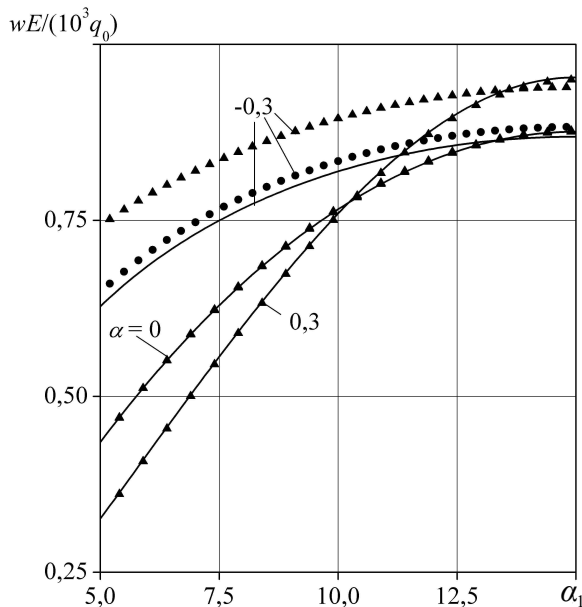


Рис. 1 – Розподіл переміщень за твірною в залежності від напрямку сплайн-колокації

Також за допомогою цього підходу розв'язано задачі про напружено-деформований стан гофрованих пластин та циліндрів з гофрованим еліптичним перерізом.

У випадку гофрованої пластини зі сторонами  $l_1, l_2$  рівняння її поперечного перерізу задамо у вигляді:  $x_1 = \alpha_2, x_2 = \alpha \sin\left(\frac{\pi n \alpha_2}{l_2}\right)$ ,  $\alpha$  – амплітуда,  $n$  – крок гофрування. Нехай матеріал пластини ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , товщина пластини  $h = 0,5$ ,  $l_1 = l_2 = 10$ , сторони пластини жорстко закріплені, на неї діє по нормалі рівномірно розподілене навантаження  $q_\gamma = q_0$ .

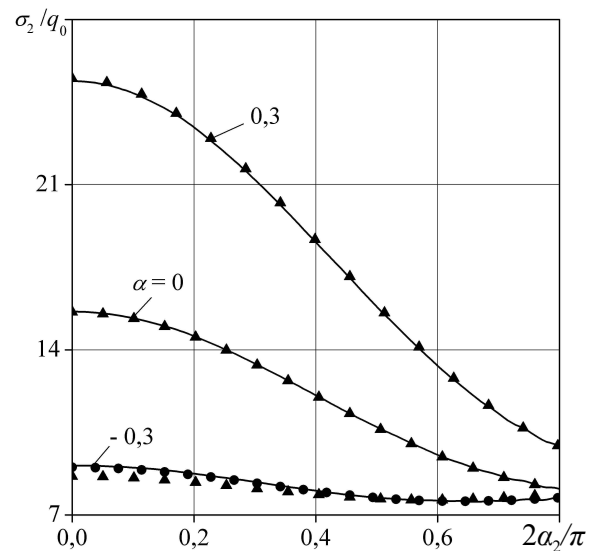


Рис. 2 – Розподіл напружень за напрямною в залежності від напрямку сплайн-колокації

На рис. 3, 4 показано розподіл переміщень  $\hat{w} = \frac{wE}{q_0 10^3}$  ( $E$  – модуль пружності пластини) в залежності від кроку і амплітуди гофрування відповідно.

Також в цьому розділі розв'язано задачі про напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим перерізом.

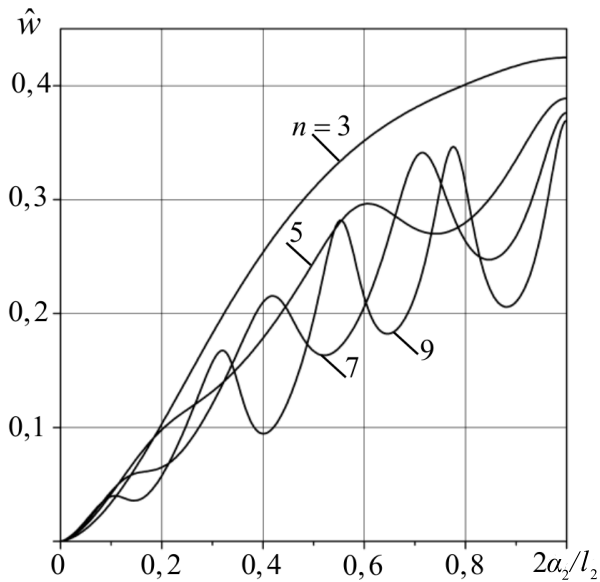


Рис. 3 – Розподіл переміщень пластини в залежності від кроку гофрування,  $\alpha = 1$

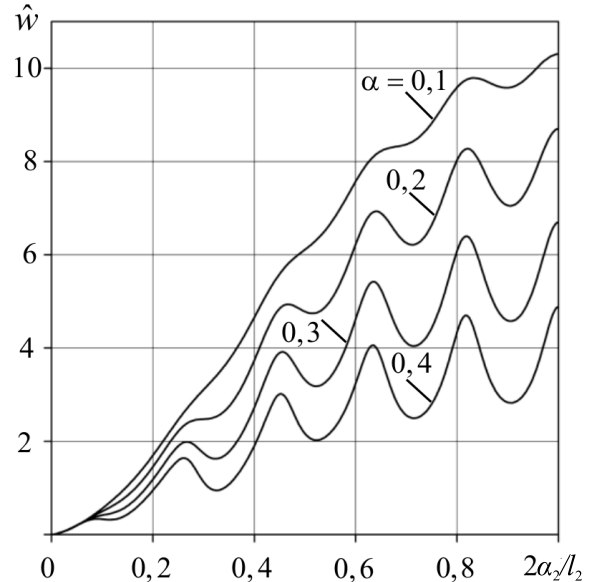


Рис. 4 – Розподіл переміщень в залежності від амплітуди гофрування,  $n = 11$

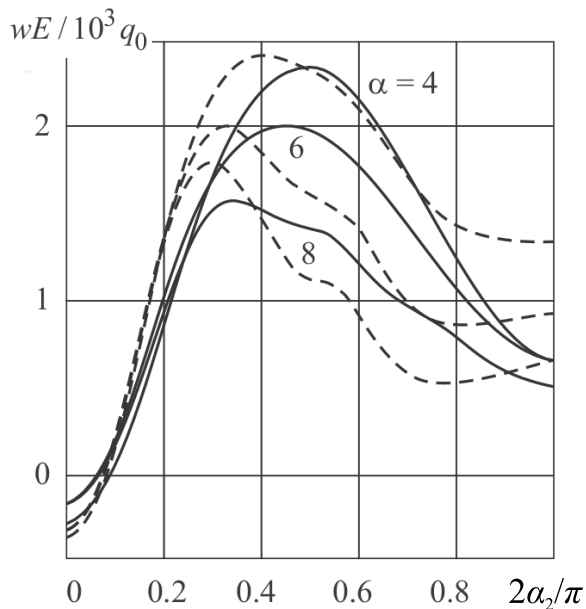


Рис. 5 – Розподіл переміщень для амплітуд гофрування  $\alpha$  при  $\Delta = 0, 2$  (суцільна лінія),  $\Delta = 0, 4$  (пунктирна лінія),  $m = 4$

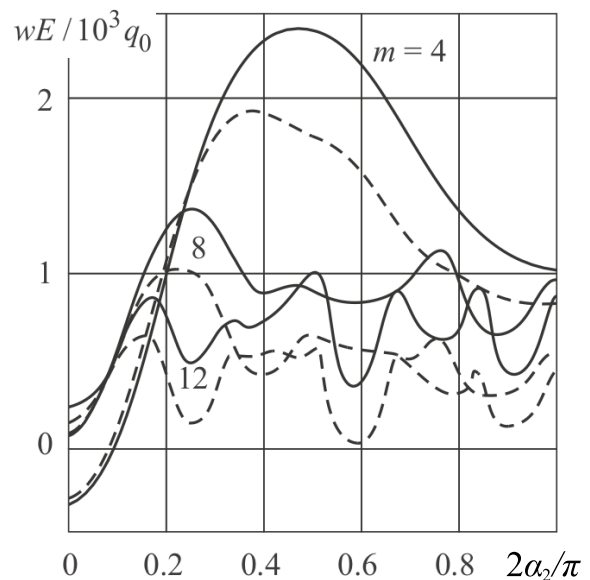


Рис. 6 – Розподіл переміщень для кроків гофрування  $m$  при  $\alpha = 4$  (суцільна лінія),  $\alpha = 6$  (пунктирна лінія),  $\Delta = 0, 3$

В цьому випадку поперечний переріз оболонки задамо в полярних координатах  $(r, \alpha_2)$ :  $r(\alpha_2) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha_2}} + \alpha \cos m \alpha_2$ ,  $a$  – менша піввісь еліпса,  $e$  – ексцентриситет,  $\alpha$  і  $m$  – амплітуда і крок гофрування відповідно.

Довжина кривої негофрованого еліпса при цьому вибрана рівною довжині кола радіуса  $r_0 = 40$ , довжина циліндра  $l = 60$ , товщина –  $h = 4$ , матеріал оболонки ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , торці оболонки жорстко закріплені, на оболонку діє по нормалі навантаження виду  $q_\gamma = q_0 \sin(\alpha_1 \pi / l)$ , для варіювання ексцентриситетом еліпса використано параметр еліптичності  $\Delta = (b - a) / (a + b)$ .

Результати розрахунків переміщень  $\frac{wE}{q_0 10^3}$  в залежності від амплітуди і кроку гофрування наведено на рис. 5 і 6 відповідно.

Таким чином, в цьому розділі відмічено високу точність результатів дискретно-континуального підходу за різними варіантами його реалізації: при виборі напрямків апроксимації за координатою, що змінюється по напрямній, і за координатою, що змінюється по твірній. Для ізотропної однорідної оболонки і трансверсально ізотропної оболонки змінної товщини досліджена збіжність розв'язку в залежності від кількості членів апроксимуючого ряду. Показано складний характер НДС в гофрованих циліндричних оболонках і пластинах в залежності від параметрів гофрування – амплітуди та кроку гофрів.

**Четвертий розділ** присвячений розв'язанню задач про напружено-деформований стану циліндричних оболонок зі скісними зрізами. На рис. 7 показано проекції циліндричної оболонки зі зрізами.

Рівняння для некругових циліндричних оболонок сталої товщини під дією внутрішнього тиску  $q$  з використанням (1) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{14} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{15} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = 0, \\
& a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{22} u_2 + a_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{24} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{25} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + a_{26} w + \\
& \quad + a_{27} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{28} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{29} \psi_2 + a_{2,10} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} = 0, \\
& a_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{32} u_2 + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{34} w + a_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + a_{36} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \\
& \quad + a_{38} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{39} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{3,10} q = 0, \\
& a_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{42} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{43} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{44} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + a_{45} \psi_1 + \\
& \quad + a_{46} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{47} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + a_{48} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{49} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& a_{51} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{52} u_2 + a_{53} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{54} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{55} w + a_{56} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\
& + a_{57} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{58} \psi_2 + a_{59} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{5,10} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{5,11} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0,
\end{aligned}$$

де коефіцієнти  $a_{ij}$  залежать від геометричних параметрів та пружних властивостей матеріалу оболонки.

Серединна поверхня оболонки зі зрізами в декартових координатах  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_2), \\ x_2 = f_2(\xi_2), \\ x_3 = \frac{\xi_1}{L} (L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))\operatorname{tg}\beta_1, \end{cases} \quad (4)$$

$0 \leq \xi_1 \leq L$ ,  $0 \leq \xi_2 \leq 2\pi$ ,  $\beta_1, \beta_2$  – кути зрізів.

Далі замінимо змінні у рівняннях (3). Зв'язок між координатами  $\xi_1, \xi_2$  і  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\xi_1}{L} (L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))\operatorname{tg}\beta_1, \\
\alpha_2 &= \xi_2.
\end{aligned} \quad (5)$$

Для довільної функції  $f$  її похідні обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} &= \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + 2\lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= \lambda_4 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2},
\end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{L}{\Delta_1}; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} [f_1'' \Delta_1 - 2(f_1')^2 (\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)]; \\
\lambda_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} f_1'; \quad \lambda_4 = -\frac{L}{\Delta_1^2} f_1' (\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2);
\end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta_1 = (f_1 - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2) + L; \quad \Delta_2 = L \operatorname{tg}\beta_1 - \xi_1 (\operatorname{tg}\beta_1 + \xi_1 \operatorname{tg}\beta_2).$$

Розв'язувальні рівняння в новій неортогональній системі координат  $O\xi_1\xi_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= -\frac{a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{11} \lambda_1^2 + a_{13} \lambda_2^2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{12}}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \\
& - \frac{a_{14} \lambda_4}{a_{13}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{14} \lambda_1 \lambda_2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{14} \lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{15} \lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}; \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} &= -\frac{a_{21} \lambda_4}{a_{25}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{21} \lambda_1 \lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{21} \lambda_1}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \\
& - \frac{a_{22} u_2}{a_{25}} - \frac{a_{24} \lambda_2 + a_{25} \lambda_3}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{23} \lambda_1^2 + a_{25} \lambda_2^2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{24}}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2 \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{26} w}{a_{25}} - \frac{a_{27} \lambda_2 \partial w}{a_{25} \partial \xi_1} - \frac{a_{27} \partial w}{a_{25} \partial \xi_2} - \frac{a_{28} \lambda_4 \partial \psi_1}{a_{25} \partial \xi_1} \\
& - \frac{a_{28} \lambda_1 \lambda_2 \partial^2 \psi_1}{a_{25} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{28} \lambda_1 \partial^2 \psi_1}{a_{25} \partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{29} \psi_2}{a_{25}} - \frac{a_{2,10} \lambda_1^2 \partial^2 \psi_2}{a_{25} \partial \xi_1^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} = & - \frac{a_{31} \lambda_1 \partial u_1}{a_{37} \partial \xi_1} - \frac{a_{32} u_2}{a_{37}} - \frac{a_{33} \lambda_2 \partial u_2}{a_{37} \partial \xi_1} - \frac{a_{33} \partial u_2}{a_{37} \partial \xi_2} - \frac{a_{34} w}{a_{37}} \\
& - \frac{a_{36} \lambda_2 + a_{37} \lambda_3 \partial w}{a_{37} \partial \xi_1} - \frac{a_{35} \lambda_1^2 + a_{37} \lambda_2^2 \partial^2 w}{a_{37} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{36} \partial w}{a_{37} \partial \xi_2} \\
& - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{38} \lambda_1 \partial \psi_1}{a_{37} \partial \xi_1} - \frac{a_{39} \lambda_2 \partial \psi_2}{a_{37} \partial \xi_1} - \frac{a_{39} \partial \psi_2}{a_{37} \partial \xi_2} - \frac{a_{3,10} q}{a_{37}}, \\
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} = & - \frac{a_{42} \lambda_2 \partial u_1}{a_{48} \partial \xi_1} - \frac{a_{41} \lambda_1^2 \partial^2 u_1}{a_{48} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{42} \partial u_1}{a_{48} \partial \xi_2} \\
& - \frac{a_{43} \lambda_4 \partial u_2}{a_{48} \partial \xi_1} - \frac{a_{43} \lambda_1 \lambda_2 \partial^2 u_2}{a_{48} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{43} \lambda_1 \partial^2 u_2}{a_{48} \partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{44} \lambda_1 \partial w}{a_{48} \partial \xi_1} - \frac{a_{45} \psi_1}{a_{48}} \\
& - \frac{a_{47} \lambda_2 + a_{48} \lambda_3 \partial \psi_1}{a_{48} \partial \xi_1} - \frac{a_{46} \lambda_1^2 + a_{48} \lambda_2^2 \partial^2 \psi_1}{a_{48} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{47} \partial \psi_1}{a_{48} \partial \xi_2} \\
& - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{a_{49} \lambda_4 \partial \psi_2}{a_{48} \partial \xi_1} - \frac{a_{49} \lambda_1 \lambda_2 \partial^2 \psi_2}{a_{48} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{49} \lambda_1 \partial^2 \psi_2}{a_{48} \partial \xi_1 \partial \xi_2} \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} = & - \frac{a_{51} \lambda_4 \partial u_1}{a_{5,11} \partial \xi_1} - \frac{a_{51} \lambda_1 \lambda_2 \partial^2 u_1}{a_{5,11} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{51} \lambda_1 \partial^2 u_1}{a_{5,11} \partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{52} u_2}{a_{5,11}} \\
& - \frac{a_{54} \lambda_2 \partial u_2}{a_{5,11} \partial \xi_1} - \frac{a_{53} \lambda_1^2 \partial^2 u_2}{a_{5,11} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{54} \partial u_2}{a_{5,11} \partial \xi_2} - \frac{a_{55} w}{a_{5,11}} - \frac{a_{56} \lambda_2 \partial w}{a_{5,11} \partial \xi_1} - \frac{a_{56} \partial w}{a_{5,11} \partial \xi_2} \\
& - \frac{a_{57} \lambda_4 \partial \psi_1}{a_{5,11} \partial \xi_1} - \frac{a_{57} \lambda_1 \lambda_2 \partial^2 \psi_1}{a_{5,11} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{57} \lambda_1 \partial^2 \psi_1}{a_{5,11} \partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{58} \psi_2}{a_{5,11}} \\
& - \frac{a_{5,10} \lambda_2 + a_{5,11} \lambda_3 \partial \psi_2}{a_{5,11} \partial \xi_1} - \frac{a_{5,11} \lambda_2^2 + a_{59} \lambda_1^2 \partial^2 \psi_2}{a_{5,11} \partial \xi_1^2} - \frac{a_{5,10} \partial \psi_2}{a_{5,11} \partial \xi_2} - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

До (8) додамо умови жорсткого закріплення на контурах  $\xi_1 = const$ :

$$u_1 = u_2 = w = 0, \psi_1 = \psi_2 = 0 \tag{9}$$

та умови симетрії в точках  $\xi_2 = 0$  та  $\xi_2 = \pi$ :

$$\psi_2 = 0, u_2 = 0, \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial w}{\partial \xi_2} = 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = 0. \tag{10}$$

Отриману двовимірну крайову задачу зведено до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації. Останню розв'язано методом дискретної ортогоналізації.

За допомогою викладеного підходу проведено дослідження прогинів в циліндричних оболонках кругового та еліптичного поперечного перерізів.

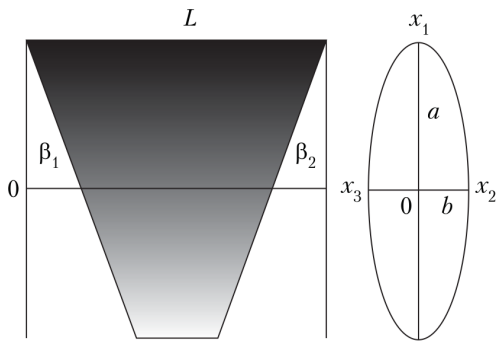


Рис. 7 – Проекції серединної поверхні циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами

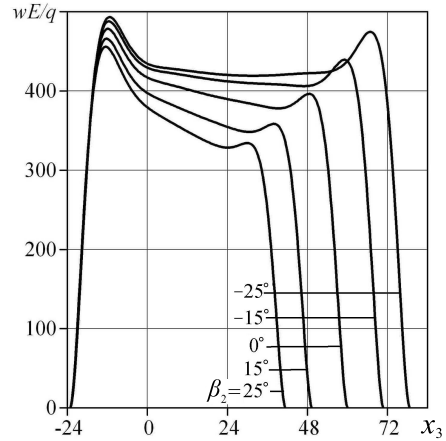


Рис. 8 – Розподіл переміщень в циліндричній оболонці для різних кутів зрізу  $\beta_2$ , при  $\beta_1 = -30^\circ$ ,  $\xi_2 = \pi$

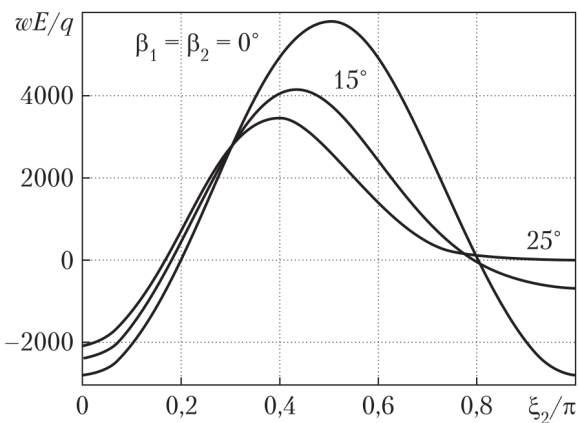


Рис. 9 – Розподіл переміщень в оболонці еліптичного поперечного перерізу з півосями  $a = 25$ ,  $b = 16$  для кутів зрізів  $\beta_1 = \beta_2$ ;  $\xi_1 = L/2$

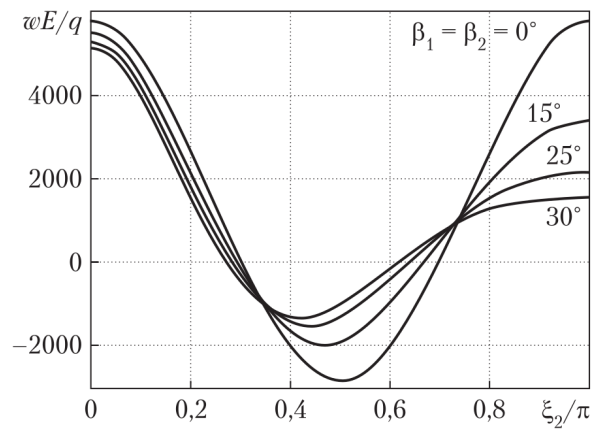


Рис. 10 – Розподіл переміщень в оболонці еліптичного поперечного перерізу з півосями  $a = 16$ ,  $b = 25$  для кутів зрізів  $\beta_1 = \beta_2$ ;  $\xi_1 = L/2$

У випадку кругового циліндра рівняння серединної поверхні має вигляд:  $x_1 = R \cos \xi_2$ ,  $x_2 = R \sin \xi_2$ ,  $x_3 = \xi_1 + R[\operatorname{tg} \beta_1 - \xi_1(\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)/L](1 - \cos \xi_2)$ , де  $R$  – радіус циліндра. Матеріал оболонки ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , довжина оболонки –  $L = 60$ , товщина –  $h = 1$ ,  $R = 20$ . На рис. 8 показано розподіл переміщень оболонки в залежності від кутів зрізу  $\beta_2$ .

Також було розв'язано задачу про напружений стан циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу  $x_1 = a \cos \xi_2$ ,  $x_2 = b \sin \xi_2$  з півосями  $a = 25$ ,  $b = 16$  та  $a = 16$ ,  $b = 25$   $L = 60$ ,  $h = 1$ ,  $\nu = 0,3$ . Кути зрізів  $\beta_1$  і  $\beta_2$  у цьому випадку вибрано рівними. Розподіли прогинів оболонок при зміні кутів зрізів  $\beta_1 = \beta_2$  показано на рис. 9 і 10.

Таким чином, в цьому розділі одержано рівняння НДС циліндричних обо-

лонок кругового і еліптичного перерізів зі скісними зрізами на торцях в новій неортогональній системі координат. Знайдено розв'язок задач на основі методу сплайн-колокації при апроксимації за твірною. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів скісного зрізу на розподіл полів переміщень. Показано, що наявність зрізів не змінює якісної картини розподілу цих полів, а кількісні зміни спостерігаються переважно в околі торців.

У **п'ятому розділі** розглянуто осесиметричні задачі про напружено-деформований стан неоднорідних циліндрів скінченної довжини і куль та коливання циліндра з п'єзокерамічного матеріалу.

У першому підрозділі проведено розрахунок напружено-деформованого стану неоднорідних порожнистих циліндрів скінченної довжини.

В циліндричній системі координат  $Or\theta z$  співвідношення Коші у випадку осьової симетрії мають вигляд:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_\theta = \frac{u_r}{r}; e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (11)$$

закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_z; \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_z; \\ \sigma_z &= c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_z; \sigma_{rz} = 2c_{55}e_{rz} \end{aligned} \quad (12)$$

(для ізотропного тіла  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ;  $c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda$ ;  $c_{55} = \mu$ ), рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \quad (13)$$

граничні умови на бічних поверхнях:  $\sigma_r(R - H, z) = q_1$ ;  $\sigma_r(R + H, z) = q_2$ ;  $\sigma_{rz}(R \pm H, z) = 0$ , на торцях  $z = 0$  і  $z = L$ :

$$1) \sigma_z = 0; u_r = 0, \text{ або } \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; u_r = 0 \text{ (шарнірне опирання);}$$

$$2) u_z = 0; \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0 \text{ (умови симетрії);}$$

$$3) u_r = 0; u_z = 0 \text{ (жорстке закріплення).}$$

Розв'язувальні рівняння, що описують НДС неоднорідного ортотропного циліндра, для зручності застосування методу сплайн-колокації подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \left( \frac{c_{22}}{c_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{55}}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \\ &- \left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{13}}{\partial r} - \frac{c_{23} - c_{13}}{c_{11}} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{23}}{\partial z} \frac{u_r}{r} - \left( \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} + \frac{c_{23}}{c_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\ &- \left( 1 + \frac{c_{13}}{c_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{13}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{33}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \end{aligned} \quad (14)$$

$$-\frac{c_{33}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}.$$

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів подамо потенціальну енергію деформації в переміщеннях:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^L \int_{R-H}^{R+H} \frac{\pi}{r} \left\{ r^2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2r\lambda u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2r^2\lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\ & + 2r\lambda u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} + r^2(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + (\lambda + 2\mu)u_r^2 + \mu r^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\ & \left. + 2\mu r^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu r^2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\} dz dr + \\ & + 2\pi(R-H) \int_0^L q_1 u_r dz - 2\pi(R+H) \int_0^L q_2 u_r dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Для розв'язання задачі використовувались підходи на основі методів сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, скінченних елементів та методу відокремлення змінних.

З використанням цих підходів визначено НДС порожнистих циліндрів з такими параметрами: довжина  $L = 5$ , внутрішній радіус  $R - H = 3$ , зовнішній радіус  $R + H = 5$ , коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0,4$ . Модуль пружності змінюється за законом  $E(r) = ar^2 + br + c$ . Розглянуто три випадки:

1) модуль Юнга зростає:

$$\begin{aligned} E(R-H) = 11E_0/15, E(R) = E_0, E(R+H) = 81E_0/50, \\ a = 0,1767, b = -0,97, c = 2,053; \end{aligned} \quad (16)$$

2) модуль Юнга спадає:

$$\begin{aligned} E(R-H) = 81E_0/50, E(R) = E_0, E(R+H) = 11E_0/15, \\ a = 0,1767, b = -1,857, c = 5,6; \end{aligned} \quad (17)$$

3) середній модуль Юнга:  $E = 1,0589E_0$ .

Нехай на внутрішню поверхню тіла діє рівномірно розподілений тиск  $q$ . Проведено порівняння результатів розв'язання задач з використанням методу Фур'є, МСЕ та методу сплайн-колокації, коли на торцях задані граничні умови шарнірного опираювання. Результати розрахунків для переміщень  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$  в перерізі  $z = L/2$  наведено в табл. 2,  $N$  – кількість точок колокації. При розв'язанні задачі методом скінченних елементів область розбивалась на квадрати  $0,1 \times 0,1$ .

Як видно з таблиць, результати, отримані різними методами, відрізняються несуттєво. При збільшенні точок колокації розбіжності між розв'язками зменшуються.

Також розв'язано задачі для даного циліндра при такому ж навантаженні у випадку жорсткого закріплення торців. На рис. 11 показано розподіли переміщень  $\hat{u}_z = u_z E_0/q$  в перерізі  $z = L/5$ , а на рис. 12 – розподіл переміщень  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$  в перерізі  $z = L/2$ , цифри на малюнках відповідають варіантам

Табл. 2 – Порівняння переміщень  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$ , отриманих різними методами

| $r$ | Сплайн-колокація |        |        | МСЕ   | Ряди Фур'є |
|-----|------------------|--------|--------|-------|------------|
|     | $N=40$           | $N=50$ | $N=60$ |       |            |
| 3   | 5,612            | 5,606  | 5,602  | 5,578 | 5,58       |
| 4   | 4,89             | 4,882  | 4,877  | 4,85  | 4,853      |
| 5   | 4,054            | 4,047  | 4,042  | 4,017 | 4,02       |

зміни модуля пружності.

Як видно з графіків, результати, отримані двома методами, практично співпадають, розбіжності більш помітні для  $\hat{u}_r$ .

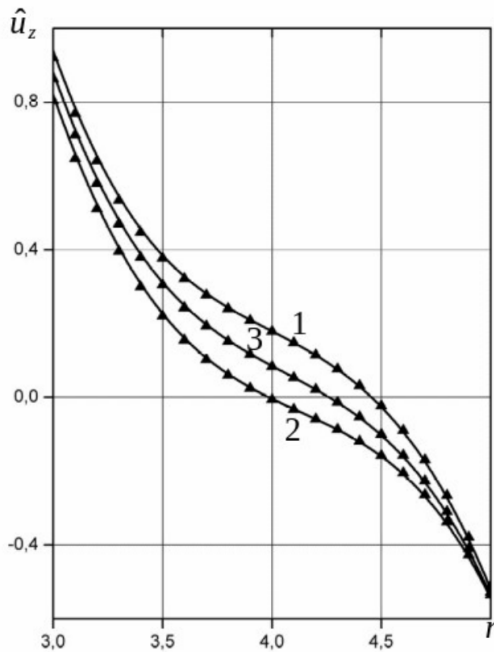


Рис. 11 – Залежність переміщень  $\hat{u}_z$  від характеру зміни модуля пружності при дії внутрішнього тиску ( $z = L/5$ )

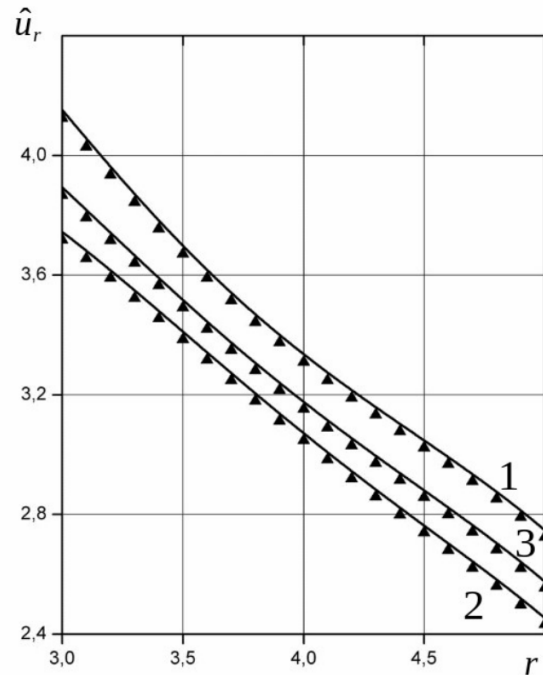


Рис. 12 – Залежність переміщень  $\hat{u}_r$  від характеру зміни модуля пружності при дії внутрішнього тиску ( $z = L/2$ )

В другому підрозділі проведено розрахунок напружено-деформованого стану неоднорідної порожнистої кулі.

Співвідношення Коші в сферичних координатах  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_\theta = \frac{1}{r}(u_r + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi); e_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right);$$

$$2e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); \quad (18)$$

закон Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_\varphi; \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_\varphi; \\ \sigma_z &= c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_\varphi; \sigma_{r\varphi} = 2c_{55}e_{r\varphi};\end{aligned}\quad (19)$$

рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \sigma_{r\varphi}\operatorname{ctg}\varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta)\operatorname{ctg}\varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0;\end{aligned}\quad (20)$$

граничні умови на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі:

$$\sigma_r(R - H, \varphi) = q_1; \sigma_r(R + H, \varphi) = q_2; \sigma_{r\varphi}(R \pm H, \varphi) = 0; \quad (21)$$

потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned}\Pi &= 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{r\varphi} e_{r\varphi} \right\} r^2 \sin\varphi d\varphi dr + \\ &+ 2\pi(R - H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_1 u_r \sin\varphi dz - 2\pi(R + H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_2 u_r \sin\varphi d\varphi.\end{aligned}\quad (22)$$

Розв'язувальні рівняння НДС неоднорідної порожнистої кулі для зручності застосування методу сплайн-колокації:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{c_{22} + c_{33} + 2c_{23} - c_{12} - c_{13} - c'_{12}r}{c_{11}r^2} u_r - \frac{c_{55}\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r^2} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \\ &- \frac{c_{55}}{c_{11}r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} - \frac{2c_{11} + c'_{11}r}{c_{11}r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{(c_{55} - c_{12} + c_{22} + c_{23} - c'_{12}r)\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r^2} u_\varphi + \\ &+ \frac{c_{33} - c_{13} + c_{23} + c_{55} - c'_{13}r}{c_{11}r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{(c_{12} + c_{55})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial\varphi}; \quad (23) \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} &= \frac{(c_{22} - c_{33})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r^2} u_r - \frac{c_{23} + c_{33} + 2c_{55} + c'_{55}r}{c_{55}r^2} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{(c_{12} - c_{13})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\ &- \frac{c_{55} + c_{13}}{c_{55}r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial\varphi} + \frac{2c_{55} + c_{22}\operatorname{ctg}^2\varphi + c_{23} + c'_{55}r}{c_{55}r^2} u_\varphi - \\ &- \frac{c_{33}\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{c_{33}}{c_{55}r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - \frac{2c_{55} + c'_{55}r}{c_{55}r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}.\end{aligned}$$

Граничні умови в переміщеннях на поверхні  $r = R - H$  циліндра:

$$\frac{c_{12} + c_{13}}{r} u_r + c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{12}\operatorname{ctg}\varphi}{r} u_\varphi + \frac{c_{13}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} = q_1; \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = 0.$$

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів запишемо потенціальну енергію деформації (22) в переміщеннях:

$$\begin{aligned}
\Pi = & 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R-H}^{R+H} \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin \varphi \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \operatorname{ctg}^2(\varphi)) u_\varphi^2 + \\
& + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
& + r \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu) u_r u_\varphi + r \sin \varphi \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + 2r \sin \varphi \lambda u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
& + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \sin \varphi \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - r \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \left. \right] d\varphi dr + \\
& + 2\pi (R - H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_1 u_r \sin \varphi dz - 2\pi (R + H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_2 u_r \sin \varphi d\varphi.
\end{aligned} \quad (24)$$

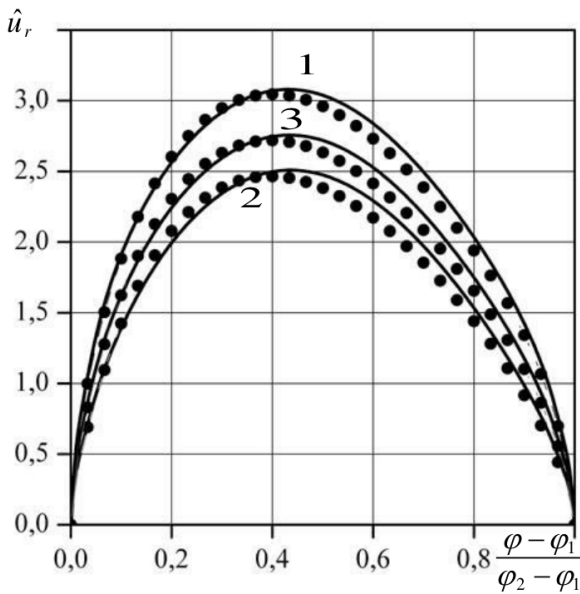


Рис. 13 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  на внутрішній поверхні кулі для різних варіантів модуля пружності ( $\pi/20 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

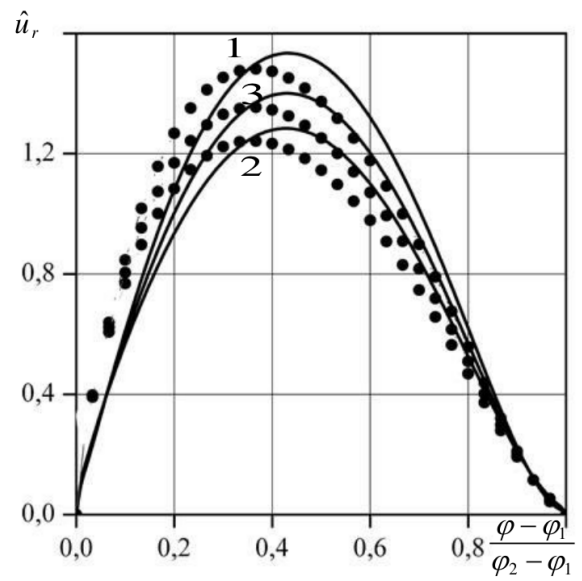


Рис. 14 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  на зовнішній поверхні кулі для різних варіантів модуля пружності ( $\pi/20 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

За допомогою методів сплайн-колокації і методу скінченних елементів розв'язано задачі статички для куль з такими параметрами: внутрішній радіус  $R - H = 3$ , зовнішній радіус  $R + H = 5$ ,  $\varphi_1 = \pi/20$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$ ; модуль пружності  $E(r) = ar^2 + br + c$ , 1) модуль Юнга зростає вздовж радіуса (16), 2) модуль Юнга спадає – (17), 3) середній модуль Юнга  $E = 1,0589E_0$ .

На внутрішню поверхню діє рівномірно розподілений тиск  $q$ ,  $q_1 = -q$ , а  $q_2 = 0$ . На контурах  $\varphi = const$  маємо жорстке закріплення. При розв'язуванні задачі методом зведення до одновимірної взято 50 точок колокації, у випадку розв'язання задачі МСЕ по  $r$  відрізок був розбитий на 20 частин, а по  $\varphi$  – на 60. На рис. 13 та 14 наведено графіки розподілів переміщень  $\hat{u}_r = \frac{u_r E_0}{q}$  вздовж меридіану на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра відповідно, цифри відповідають варіантам зміни модуля пружності. Суцільні лінії – розв'язки, отримані з використанням методу сплайн-апроксимації, точки – МСЕ.

В третьому підрозділі наведено два підходи до дослідження резонансних частот осесиметричних коливань п'єзоелектричного циліндра скінченної довжини.

В циліндричній системі координат  $(Or\theta z)$  осесиметричні коливання п'єзокерамічних циліндрів описують рівняння руху:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_r = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho\omega^2 u_z = 0; \quad (25)$$

співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (26)$$

електростатичні рівняння:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (27)$$

де  $D_r$ ,  $D_z$  – компоненти вектора електричної індукції,  $E_r$ ,  $E_z$  – компоненти вектора напруженості електричного поля,  $\varphi$  – електростатичний потенціал.

Фізичні співвідношення для п'єзокерамічного матеріалу, поляризованого в радіальному напрямку:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - e_{33}E_r, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z; \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{33}E_r, \quad D_z = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_z. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28)  $c_{ij}$  – компоненти тензора модулів пружності;  $e_{ij}$  – компоненти тензора п'єзомодулів;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензора діелектричної проникності матеріалу.

У варіаційній постановці задачу описує функціонал:

$$J = \pi \int_0^L \int_{r_0}^{r_1} (\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho\omega^2(u_r^2 + u_z^2)) r dz dr, \quad (29)$$

де  $L$  – довжина циліндра,  $r_0$  і  $r_1$  – внутрішній і зовнішній радіуси.

Торці циліндра  $z = 0$  и  $z = L$  жорстко защемлені:  $u_r = u_z = 0$ , і покриті



тонкими закороченими електродами,  $\varphi = 0$ . Бічні поверхні  $r = r_0$  и  $r = r_1$  вільні:  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ , на них задано різницю потенціалів  $\varphi = V_0 z$ .

Для зручності використання методу сплайн-колокації розв'язувальну систему подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{c_{33} \varepsilon_{11} + e_{15} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{e_{13} e_{33} - c_{33} \varepsilon_{33} - e_{33}^2}{r \Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\
& + \frac{(c_{11} e_{33} - \rho \omega^2 r^2 e_{33}) u_r}{r^2 \Delta} + \frac{c_{33} e_{15} - c_{55} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{c_{33} e_{13}}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
& + \frac{c_{12} e_{33} - c_{13} e_{33} + c_{33} e_{13}}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{33} e_{13} + c_{33} e_{15} - c_{13} e_{33} - c_{55} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \\
& \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = \frac{e_{33} \varepsilon_{11} - e_{15} \varepsilon_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{33} e_{13}}{r \Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \\
& - \frac{(\varepsilon_{33} \rho \omega^2 r^2 - \varepsilon_{33} c_{11}) u_r}{r^2 \Delta} - \frac{\varepsilon_{33} c_{55} + e_{15} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{c_{33} \varepsilon_{33} + e_{13} e_{33} + e_{33}^2}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
& + \frac{\varepsilon_{33} c_{12} - \varepsilon_{33} c_{13} - e_{13} e_{33}}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{33} c_{13} + \varepsilon_{33} c_{55} + e_{13} e_{33} + e_{15} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \\
& \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = -\frac{e_{15}}{c_{55} r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e_{15} + e_{13}}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial r} - \left( \frac{c_{12}}{c_{55}} + 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\
& - \left( 1 + \frac{c_{13}}{c_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} - \frac{\rho \omega^2 u_z}{c_{55}} - \frac{c_{11}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r},
\end{aligned} \tag{30}$$

де  $\Delta = c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2$ .

Розв'язок представимо у вигляді:

$$\varphi = \sum_{i=0}^N \varphi_i(r) \phi_{1i}(z); u_r = \sum_{i=0}^N u_{ri}(r) \phi_{2i}(z); u_z = \sum_{i=0}^N u_{zi}(r) \phi_{3i}(z), \tag{31}$$

$\varphi_i(r)$ ,  $u_{ri}(r)$ ,  $u_{zi}(r)$  – невідомі функції, а  $\phi_{ji}(z)$  – лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня. Підставивши (31) в (30) і граничні умови будемо вимагати їх виконання в точках колокації. Отже, для частот отримаємо одновимірну крайову задачу, яку можна розв'язати методом дискретної ортогоналізації. Далі методом покрокового пошуку, тобто зміною з деяким кроком значення частоти, знайдемо ті частоти, для яких спостерігається резонанс в переміщеннях.

Для застосування методу скінченних елементів запишемо функціонал варіаційної постановки задачі з невідомими переміщеннями  $u_r$ ,  $u_z$  та електростатичним потенціалом  $\varphi$ :

$$J = \pi \int_0^L \int_{r_0}^{r_1} \left\{ c_{33} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + c_{11} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + c_{55} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \right.$$

Табл. 3 – Резонансні частоти, отримані МСЕ і методом сплайн-колокації

| $\Omega$   | МСК      |          |          | МСЕ       |            |            |
|------------|----------|----------|----------|-----------|------------|------------|
|            | $N = 15$ | $N = 19$ | $N = 23$ | $K = 500$ | $K = 2000$ | $K = 8000$ |
| $\Omega_1$ | 0.8      | 0.802    | 0.803    | 0.807     | 0.806      | 0.806      |
| $\Omega_2$ | 0.875    | 0.879    | 0.881    | 0.891     | 0.889      | 0.888      |
| $\Omega_3$ | 1.062    | 1.065    | 1.066    | 1.076     | 1.074      | 1.073      |
| $\Omega_4$ | 1.431    | 1.428    | 1.428    | 1.441     | 1.436      | 1.434      |
| $\Omega_5$ | 1.841    | 1.846    | 1.849    | 1.866     | 1.862      | 1.861      |
| $\Omega_6$ | 1.999    | 1.99     | 1.988    | 2.002     | 1.992      | 1.989      |

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_{33} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{11} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + c_{11} \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2c_{13} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2c_{12} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\
& + 2e_{13} \frac{u_r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\
& + 2e_{15} \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2c_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) \Big\} r dr dz. \tag{32}
\end{aligned}$$

При розв'язанні МСЕ використані чотиривузлові прямокутні елементи з інтегруванням методом квадратур Гаусса у 9 точках.

Розрахунки було проведено при таких параметрах циліндра з п'єзокераміки PZT-4:  $r_0 = 3\text{см}$ ,  $r_1 = 5\text{см}$ ,  $L = 10\text{см}$ ,  $\rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$ ,  $c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $e_{13} = -5,2 \text{Кл/м}^2$ ,  $e_{15} = 12,7 \text{Кл/м}^2$ ,  $e_{33} = 15,1 \text{Кл/м}^2$ ,  $\varepsilon_{11} = 730\varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_{33} = 635\varepsilon_0$ ,  $V_0 = 1 \text{В}$ .  $\varepsilon_0$  – діелектрична проникність вакууму.

Було введено такі безрозмірні величини:  $\tilde{r} = r/h$ ,  $\tilde{z} = z/h$ ,  $\tilde{u}_r = u_r/h$ ,  $\tilde{u}_z = u_z/h$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi \sqrt{\varepsilon_0}/(h\sqrt{\lambda})$ ,  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/\lambda}$ ,  $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}/\lambda$ ,  $\tilde{e}_{ij} = e_{ij}/\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0$ , де  $\lambda = 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $h = (r_1 - r_0)/2$ .

Нижчі резонансні частоти циліндра, які одержані методом сплайн-колокації і МСЕ, наведено в табл. 3 при різній дискретизації області ( $K$  – кількість скінченних елементів).

Таким чином, в п'ятому розділі даються постановки і нові розв'язки задач статички для двох класів неоднорідних тіл: циліндрів скінченної довжини і порожнистих куль зі змінними за радіальною координатою фізико-механічними характеристиками матеріалу.

Проведено порівняльний аналіз результатів, одержаних на основі різних методів: методу розвинення в ряди Фур'є, МСЕ та запропонованою чисельно-аналітичною методикою на основі методу сплайн-колокації з використанням двовимірних сплайнів у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

Показана незначна відмінність результатів, одержаних за методами, що порівнюються (у межах 0,5%). Досліджено вплив неоднорідності матеріалу на розподіл полів переміщень в цих тілах.

Наведено основні співвідношення задачі про коливання порожнистого цилін-

дра скінченної довжини з п'єзокерамічного матеріалу. Даються розв'язки задачі по визначенню резонансних частот, що одержані на основі застосування методу сплайн-колокацій і методу скінченних елементів.

Для наведених шести перших резонансних частот відмічено високий ступінь їх співпадіння (у межах 0,1%), що свідчить про достовірність одержаних результатів.

В **шостому розділі** розв'язано просторові задачі про напружено-деформований стан кругового і еліптичного циліндрів скінченної довжини.

В першому підрозділі проведено дослідження напружено-деформованого стану недонорідного кругового циліндра. В циліндричній системі координат  $Or\theta z$  рівняння тривимірної теорії пружності мають вигляд:

співвідношення Коші:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_\theta = \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\ 2e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right); 2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (33)$$

закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_z; \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_z; \sigma_z = c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_z; \\ \sigma_{r\theta} &= 2c_{44}e_{r\theta}; \sigma_{rz} = 2c_{55}e_{rz}; \sigma_{\theta z} = 2c_{66}e_{\theta z}; \end{aligned} \quad (34)$$

(для ізотропного тіла  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ;  $c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda$ ;  $c_{44} = \mu$ ;  $c_{55} = \mu$ ;  $c_{66} = \mu$ );

рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0; \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (35)$$

потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \int_0^{\theta_e} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_z e_z + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{r\theta} e_{r\theta} + \sigma_{rz} e_{rz} + \sigma_{\theta z} e_{\theta z} \right\} r dz d\theta dr + \\ &+ (R-H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_1 u_r dz d\theta - (R+H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_2 u_r dz d\theta; \end{aligned} \quad (36)$$

граничні умови на бічних поверхнях:  $\sigma_r|_{r=R-H} = q_1$ ;  $\sigma_r|_{r=R+H} = q_2$ ;  $\sigma_{rz}|_{r=R\pm H} = 0$ ;  $\sigma_{\theta z}|_{r=R\pm H} = 0$ ; жорстке закріплення торців:  $z = const$ :  $u_r = 0$ ;  $u_\theta = 0$ ;  $u_z = 0$ ;

умови симетрії для контура  $z = const$ :  $\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$ ;  $\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$ ,  $u_z = 0$ .

Розв'язувальні рівняння для застосування методу сплайн-колокації:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11}u_r + a_{12}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + a_{13}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14}\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{16}\frac{\partial u_\theta}{\partial r\partial \theta} + a_{17}\frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{18}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}, \\
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{21}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + a_{22}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial \theta} + a_{23}u_\theta + a_{24}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \\
&\quad + a_{25}\frac{\partial u_\theta}{\partial z^2} + a_{26}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + a_{27}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta\partial z} \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= a_{31}\frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{32}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r} + a_{33}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta\partial z} + a_{34}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + a_{35}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{36}\frac{\partial u_z}{\partial r},
\end{aligned} \tag{37}$$

де  $a_{ij}$  – змінні коефіцієнти, що визначаються геометричними параметрами та пружними властивостями матеріалу тіла.

Граничні умови в переміщеннях на бічній поверхні  $r = R - H$ :

$$\begin{aligned}
c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{12}}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z} &= q_1, \\
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Розв'язок подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_r &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{rij}(r)\phi_i^{(r)}(\theta)\psi_j^{(r)}(z), \quad u_\theta = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{\theta ij}(r)\phi_i^{(\theta)}(\theta)\psi_j^{(\theta)}(z), \\
u_z &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{zij}(r)\phi_i^{(z)}(\theta)\psi_j^{(z)}(z),
\end{aligned} \tag{39}$$

де  $u_{rij}(r), u_{\theta ij}(r), u_{zij}(r)$  – шукані функції, а функції  $\phi_i^{(\alpha)}(\theta), \psi_j^{(\alpha)}(z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) визначаються через лінійні комбінації  $B$ -сплайнів на рівномірних сітках  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = \theta_e$  і  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_M = L$  відповідно з урахуванням граничних умов при  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ .

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)} &= \phi_m^{(\alpha)}(\xi_i)\psi_n^{(\alpha)}(\zeta_j), \\
\Phi_\theta^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)\theta} &= \left(\phi_m^{(\alpha)}\right)'(\xi_i)\psi_j^{(\alpha)}(\zeta_j), \\
\Phi_z^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)z} &= \phi_m^{(\alpha)}(\xi_i)\left(\psi_n^{(\alpha)}\right)'(\zeta_j), \\
\Phi_{\theta\theta}^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)\theta\theta} &= \left(\phi_m^{(\alpha)}\right)''(\xi_i)\psi_n(\zeta_j) \text{ і т. д. } (i, m = 0, \dots, M; j, n = 0, \dots, N) \\
\bar{u}_r &= \{u_{r0}, u_{r1}, \dots, u_{r, (M+1)(N+1)}\}^T, \quad \bar{u}_\theta = \{u_{\theta 0}, u_{\theta 1}, \dots, u_{\theta, (M+1)(N+1)}\}^T,
\end{aligned}$$

$\bar{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \dots, u_{z,(M+1)(N+1)}\}^T$ .

Тоді розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}_r}{dr} &= \bar{u}'_r, \quad \frac{d\bar{u}_\theta}{dr} = \bar{u}'_\theta, \quad \frac{d\bar{u}_z}{dr} = \bar{u}'_z, \\
\frac{d\bar{u}'_r}{dr} &= \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} (a_{11}\Phi^{(r)} + a_{12}\Phi_{\theta\theta}^{(r)} + a_{13}\Phi_{zz}^{(r)})\bar{u}_r + a_{14}\bar{u}'_r + a_{15} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_\theta \bar{u}_\theta + \\
&\quad + a_{16} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_\theta \bar{u}'_\theta + a_{17} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_z \bar{u}_z + a_{18} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_z \bar{u}'_z, \\
\frac{d\bar{u}'_\theta}{dr} &= a_{21} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_\theta^{(r)} \bar{u}_r + a_{22} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_\theta^{(r)} \bar{u}'_r + \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} (a_{23}\Phi^{(\theta)} + \\
&\quad + a_{24}\Phi_{\theta\theta}^{(\theta)} + a_{25}\Phi_{zz}^{(\theta)})\bar{u}_\theta + a_{26}\bar{u}'_\theta + \bar{a}_{27} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_{\theta z}^{(z)} \bar{u}_z, \\
\frac{d\bar{u}'_z}{dr} &= a_{31} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_z^{(r)} \bar{u}_r + a_{32} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_z^{(r)} \bar{u}'_r + a_{33} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_{\theta z}^{(\theta)} \bar{u}_\theta \\
&\quad + \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} (a_{34}\Phi_{\theta\theta}^{(z)} + a_{35}\Phi_{zz}^{(z)})\bar{u}_z + a_{36}\bar{u}'_z,
\end{aligned} \tag{40}$$

а граничні умови на бічній поверхні  $r = R - H$  для одновимірної задачі:

$$\begin{aligned}
c_{11}\Phi^{(r)}\bar{u}'_r + \frac{c_{12}}{r} \left(\Phi^{(r)}\bar{u}_r + \Phi_\theta^{(\theta)}\bar{u}_\theta\right) + c_{13}\Phi_z^{(z)}u_z &= \bar{q}_1, \\
\frac{1}{r} \left(\Phi_\theta^{(r)}\bar{u}_r - \Phi^{(\theta)}\bar{u}_\theta\right) + \Phi^{(\theta)}\bar{u}'_\theta &= 0, \quad \Phi_z^{(r)}\bar{u}_r + \Phi^{(z)}\bar{u}'_z = 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів запишемо потенціальну енергію деформації (36) у переміщеннях:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_0^L \int_0^{\theta_e} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{c_{11}r}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_{22}}{2r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_{33}r}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \right. \\
&\quad + \frac{c_{44}}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_{44}r}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_{55}r}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 + \frac{c_{55}r}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 + \\
&\quad + \frac{c_{66}r}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{c_{66}}{2r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)^2 + c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + c_{12}u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{22}u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&\quad + c_{23} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{23}u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{44}u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + c_{44} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - c_{44}u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \\
&\quad \left. + c_{13}r \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}u_r^2}{2r} + \frac{c_{44}u_\theta^2}{2r} + c_{55}r \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + c_{66} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right\} dz d\theta dr + \\
&\quad + (R - H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_1 u_r dz d\theta - (R + H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_2 u_r dz d\theta.
\end{aligned} \tag{42}$$

При розв'язанні задачі використано скінченні елементи у вигляді паралелепіпедів з 8-ма і 20-ма вузлами.

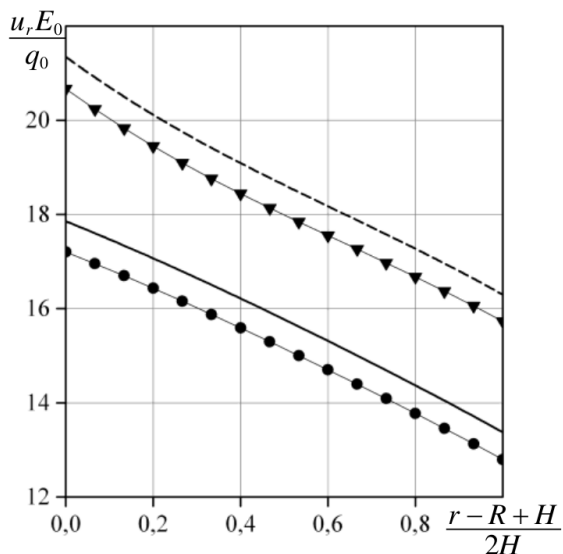


Рис. 15 – Розподіл переміщень  $u_r E_0 / q_0$  вздовж радіуса для різних варіантів модуля Юнга, одержані різними методами,  $\theta = \pi/2, z = L/2$ .

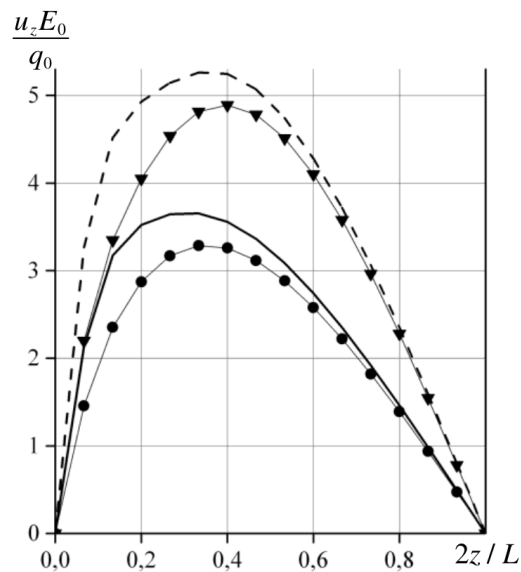


Рис. 16 – Розподіл переміщень  $u_z E_0 / q_0$  вздовж твірної для різних варіантів модуля Юнга, одержані різними методами,  $\theta = \pi/2, r = R - H$ .

З використанням викладених підходів було досліджено НДС незамкнених циліндрів таких розмірів:  $L = 20, R = 10, H = 2, 5, 0 \leq \theta \leq \pi$  з усіма жорстко закріпленими краями, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$ , модуль Юнга змінюється вздовж радіуса за законом  $E(r) = ar^2 + br + c$ :

1) модуль Юнга спадає:  $E(R - H) = 2E_0, E(R) = E_0, E(R + H) = 0,5E_0, a = 0,04, b = -1,1, c = 8$ ;

2) модуль Юнга зростає:  $E(R - H) = 0,5E_0, E(R) = E_0, E(R + H) = 2E_0, a = 0,04, b = -0,5, c = 2$ .

З міркувань симетрії задачу розв'язано на області  $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq L/2$ .

На рис. 15 і 16 показано розподіл переміщень  $u_r$  при  $\theta = \pi/2, z = L/2$  і  $u_z$  при  $\theta = \pi/2, r = R - H$ , лінії без маркерів – результати, отримані з використанням методу сплайн-колокації (суцільна – модуль Юнга спадає, пунктирна – зростає), лінії без маркерів – результати МСЕ (точки – модуль Юнга спадає, трикутники – зростає). При розрахунках методом сплайн-колокації  $M = N = 11$  і 100 точок інтегрування, при розрахунках МСЕ область розбита на  $15^3$  елементів.

Як видно з наведених графіків, обидві розрахункові методики для розглянутих варіантів зміни модуля Юнга показали однаково якісну картину розподілу переміщень за радіусом і за твірною циліндра. При цьому результати за МСЕ у порівнянні з результатами за методом сплайн-колокації дають менші значення переміщень (в межах 5% – 7%).

В другому підрозділі методом скінченних елементів розв'язано тривимірну задачу про НДС циліндрів скінченної довжини з поперечним перерізом, обмеженим конфокальними еліпсами.

Зв'язок між декартовою і еліптичною системами координат задається формулами:

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, y = c \sinh \xi \sin \eta, z = z. \quad (43)$$

Коефіцієнти Ламе системи координат  $O\xi\eta z$ :

$$H_\xi = H_\eta = H = c\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, H_z = 1. \quad (44)$$

Співвідношення Коші :

$$\begin{aligned} e_\xi &= \frac{1}{H} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \eta} u_\eta, e_\eta = \frac{1}{H} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \xi} u_\xi, e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\xi}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u_\eta}{H} \right) \right), e_{\xi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \right), \\ e_{\eta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= c_{11}e_\xi + c_{12}e_\eta + c_{13}e_z, \sigma_\eta = c_{12}e_\xi + c_{22}e_\eta + c_{23}e_z, \\ \sigma_z &= c_{13}e_\xi + c_{23}e_\eta + c_{33}e_z, \sigma_{\xi\eta} = 2c_{44}e_{\xi\eta}, \sigma_{\xi z} = 2c_{55}e_{\xi z}, \sigma_{\eta z} = 2c_{66}e_{\eta z}. \end{aligned} \quad (46)$$

Довжина циліндра  $L$ , циліндр обмежений поверхнями  $\xi = \xi_1$  и  $\xi = \xi_2$ ,  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ . На внутрішню поверхню  $\xi = \xi_1$  діє нормальний рівномірно розподілений тиск  $q$ .

Потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_\xi e_\xi + \sigma_\eta e_\eta + \sigma_z e_z) + \sigma_{\xi\eta} e_{\xi\eta} + \sigma_{\xi z} e_{\xi z} + \sigma_{\eta z} e_{\eta z} \right\} H^2 dz d\eta d\xi - \\ &\quad - q \int_0^L \int_0^{2\pi} u_\xi H dz d\eta, \end{aligned} \quad (47)$$

в переміщеннях:

$$\begin{aligned} &\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{c_{22}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ &\quad + \frac{c_{55}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{c_{66}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c^2 \Delta c_{33}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{c^2 \Delta c_{55}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \right)^2 + \\ &\quad \left. + \frac{c^2 \Delta c_{66}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\sinh 2\xi \sin 2\eta (c_{12} + c_{44})}{4\Delta^2} u_\xi u_\eta + \frac{c_{12} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \right. \end{aligned}$$

Табл. 4 – Значення переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра

| b     | $h_a$  | $h_b$  | $u_\xi E/q$ |         |         |                |        |        |
|-------|--------|--------|-------------|---------|---------|----------------|--------|--------|
|       |        |        | $\eta = 0$  |         |         | $\eta = \pi/2$ |        |        |
|       |        |        | (i)         | (ii)    | (iii)   | (i)            | (ii)   | (iii)  |
| 9,999 | 1,0003 | 1,0005 | 96,953      | 96,565  | 96,378  | 97,246         | 96,872 | 96,690 |
| 9     | 0,9003 | 1,1115 | -39,364     | -48,232 | -52,124 | 266,15         | 272,04 | 274,15 |
| 8     | 0,8003 | 1,2505 | -146,12     | -167,84 | -178,24 | 470,63         | 482,09 | 486,06 |
| 7     | 0,7002 | 1,4291 | -205,26     | -243,40 | -263,38 | 658,19         | 673,88 | 679,64 |
| 6,25  | 0,6252 | 1,6006 | -206,91     | -255,55 | -282,83 | 722,49         | 738,08 | 744,44 |

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{12} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{cc_{13} \sin 2\eta}{2\sqrt{\Delta}} u_\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{cc_{23} \sinh 2\xi}{2\sqrt{\Delta}} u_\xi \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\
& + \frac{c_{22} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} - \\
& - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{c_{22} \sinh^2 2\xi + c_{44} \sin^2 2\eta}{8\Delta^2} u_\xi^2 + \\
& + \frac{c_{44} \sinh^2 2\xi + c_{11} \sin^2 2\eta}{8\Delta^2} u_\eta^2 + \frac{c_{11} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + c_{12} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \\
& + cc_{13} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + cc_{23} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + c_{44} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \\
& + cc_{55} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial z} + cc_{66} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \} dz d\eta d\xi - q \int_0^L \int_0^{2\pi} u_\xi H dz d\eta,
\end{aligned} \tag{48}$$

де  $\Delta = \cosh^2 \xi - \cos^2 \eta$ .

Розглянуто замкнуті порожністі циліндри, умовна серединна поверхня яких – циліндрична поверхня з напрямною у вигляді еліпса з півосями  $a$  і  $b$ . Для того, щоб визначити рівняння цього еліпса в системі координат  $O\xi\eta$  необхідно розв’язати рівняння  $a \sinh \xi = b \cosh \xi$ , корінь якого  $\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}$ . Отже рівняння “серединного” еліпса має вигляд  $x = c_0 \cosh \xi_0 \cos \eta$ ,  $y = c_0 \sinh \xi_0 \cos \eta$ ,  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ ,  $c_0 = a / \cosh \xi_0$ .

Нехай довжина циліндра  $L = 20$ ,  $ab = 100$ ,  $\xi_0 - 0,05 \leq \xi \leq \xi_0 + 0,05$ , торці циліндра жорстко защемлено, матеріал – ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Досліджено розподіл переміщень на внутрішній поверхні циліндра в залежності від форми еліпса в поперечному перерізі. Проведено розрахунки для різних значень меншої півосі еліпса  $b = 9,999; 8; 7; 6,25$ . Поперечні перерізи тіла, що досліджується при  $b = 9,999; 8; 6,25$ , показано на рис. 17.

З міркувань симетрії задача розв’язана на області  $[0; L/2] \times [0; \pi/2] \times [\xi_0 - 0,05; \xi_0 + 0,05]$ . Так як в цьому випадку розміри тіла по координаті  $\xi$  незначні, для оцінки точності вибрано такі три варіанти розбиття області на елементи по



$\xi, \eta, z$ : (i) –  $6 \times 10 \times 15$ , (ii) –  $8 \times 15 \times 20$ , (iii) –  $10 \times 20 \times 25$ .

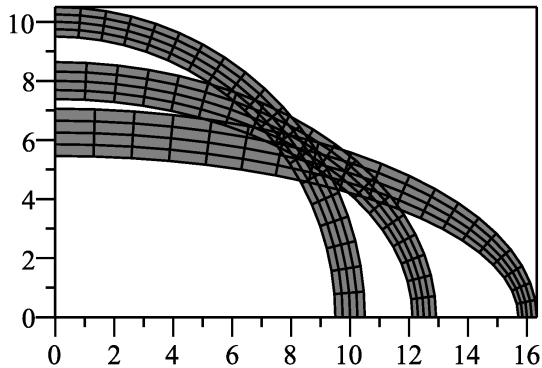


Рис. 17 – Форми поперечних перерізів циліндра.

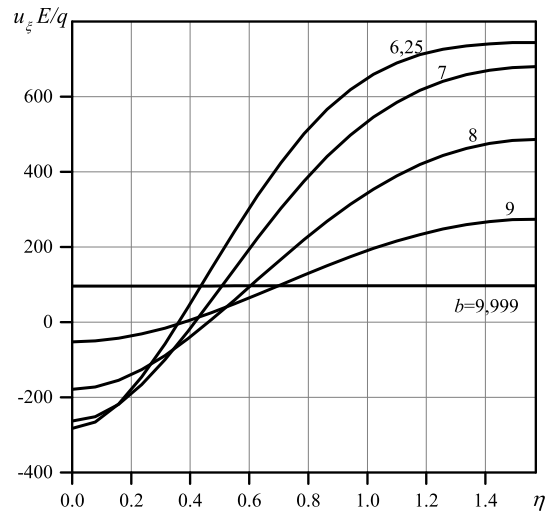


Рис. 18 – Розподіли переміщень в залежності від значень півосі  $b$  еліпса.

В табл. 4 наведено геометричні параметри циліндрів, що досліджуються, а також значення переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра при  $z = L/2$  ( $h_a, h_b$  – товщини циліндра при  $\eta = 0$  і  $\eta = \pi/2$ ).

Параметр  $b = 9,999$  вибрано для того, щоб порівняти отриманий розв'язок з розв'язком для кругового циліндра. В цьому випадку еліптичний циліндр буде дуже близьким до кругового з внутрішнім радіусом 9,51 і товщиною 1. Цю задачу розв'язано методом скінченних елементів на області  $[0; L/2] \times [9,51; 10,51]$ , яку було розбито на  $100 \times 100$  елементів. Значення  $u_r E/q$  на внутрішній поверхні циліндра при  $z = L/2$  в цьому випадку дорівнює 96,193. Розподіл переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра при  $z = L/2$  в залежності від значення півосі  $b$  еліпса показано на рис. 18.

Таким чином, в цьому розділі наведена постановка задачі про НДС порожнистого кругового незамкнутого циліндра скінченної довжини зі змінними за радіальною координатою пружними властивостями матеріалу, що знаходиться під дією нормального тиску на бічних поверхнях і має жорстке закріплення на торцевих площинах і на площинах в перерізах  $\theta = const$ . Дано новий розв'язок задачі на основі методу сплайн-колокації з застосуванням двовимірних сплайнів за коловою координатою і координатою, що змінюється вздовж осі циліндра. Проведене порівняння одержаних результатів та результатів МСЕ з використанням скінченних елементів у вигляді паралелепіпедів з 8-ма та 20-ма вузлами показало задовільне співпадіння переміщень для різних варіантів неоднорідності матеріалу.

Для однорідного замкнутого циліндра скінченної довжини, поперечний переріз якого обмежений конфокальними поверхнями, дана постановка задачі про

його НДС з використанням еліптичної системи координат. Одержано розв'язок задачі в варіанті МСЕ, коли скінчений елемент записаний в цій же координатній системі. Показано збіжність розв'язку при збільшенні дискретизації області та неперервну залежність переміщень циліндра від ексцентриситету еліпса з граничним переходом до випадку кругового циліндра.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Представлена дисертаційна робота присвячена дослідженню стаціонарного деформування товстостінних неоднорідних циліндричних оболонок та порожнистих куль методами чисельного аналізу, що є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

На основі просторової теорії пружності та уточненої теорії оболонок типу Тимошенка було розроблено дискретно-континуальний і розвинуто дискретний підходи до розв'язання відповідних двовимірних і тривимірних крайових задач, побудовано алгоритми їх реалізації і програмні комплекси, що забезпечують високий ступінь точності отриманих результатів.

Одержано нові розв'язки широкого класу задач стаціонарного деформування і проведено аналіз впливу неоднорідності структури, пружних властивостей матеріалу та геометричних параметрів механічних об'єктів, що розглядаються, на розподіл полів напружень та переміщень при різних видах навантаження та граничних умов.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче.

1. Виконано постановку та побудовано розрахункові схеми задач про напружено-деформований стан і коливання циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом та тіл сферичної форми з врахуванням їх конструктивної та структурної неоднорідності на основі просторової та оболонкової моделей.
2. Розроблено нові дискретно-континуальні підходи на основі методу сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації та розвинено варіант дискретного підходу (метод скінчених елементів) для дослідження зазначеного класу задач стаціонарного деформування.
3. Побудовано нові розв'язки задач статички та коливань, одержаних за різними методиками, для таких оболонок і просторових тіл:
  - циліндричні оболонки некругового перерізу та пластини, змінної та знакозмінної кривизни, при різних фізико-механічних властивостях матеріалу;
  - циліндричні оболонки кругового і еліптичного перерізів зі скісними зрізами;
  - неоднорідні за пружними характеристиками порожнисті циліндри скінченної довжини та порожнистої кулі в просторовій постановці (осесиметрична задача);
  - неоднорідний циліндр скінченної довжини з п'єзокерамічного матеріалу (осесиметричні коливання) ;

- циліндри скінченної довжини: круговий та обмежений конфокальними еліпсами, в циліндричній та еліптичній системах координат.
4. Проведено порівняльний аналіз ефективності різних чисельних підходів, що базуються на застосуванні таких методів:
    - методу сплайн-колокації з вибором різних напрямків апроксимації в двовимірних задачах статички циліндричних оболонок некругового перерізу;
    - методів сплайн-колокацій, скінченних елементів та методу Фур'є в двовимірних та тривимірних задачах НДС і коливань неоднорідних пружних та електропружних циліндрів скінченної довжини.
  5. Розроблені дискретно-континуальні та дискретні підходи реалізовано в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах з автоматизацією окремих етапів розрахунку та використано в науково-дослідних та договірних роботах відділу.
  6. Встановлено характерні закономірності впливу фактору неоднорідності структури циліндричних та сферичних тіл на розподіл переміщень та напружень і виявлено ряд нових механічних ефектів, пов'язаних з неоднорідною структурою, геометричними та механічними характеристиками об'єктів дослідження. Відмічено:
    - складний характер НДС в гофрованих циліндричних оболонках і пластинах, наявність зон стискуючих та розтягуючих напружень, що чергуються у відповідності зі зміною знаку кривини геометрії; можливість раціонального вибору параметрів гофрування для одержання розподілу напружень, що відповідають технічним вимогам;
    - наявність зрізів в циліндричних оболонках зі скісними зрізами не змінює якісної картини їх НДС, а кількісні зміни спостерігаються переважно в околі торців;
    - неперервність залежності переміщень еліптичного циліндра скінченної довжини від його ексцентриситету з граничним переходом до випадку кругового циліндра (тривимірна постановка задачі з залученням еліптичної системи координат);
    - дискретно-континуальний підхід, що базується на зведенні дво- і тривимірних задач до одновимірних за методом сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, в даному класі пружних тіл і оболонок не поступається за точністю розрахунків методу скінченних елементів.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

### Статті у фахових виданнях України

1. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43**(6), 82–92 (2007)  
 The same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section. Int. Appl. Mech. **43**(6), 654–661 (2007)

2. Яремченко С.М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій. Доп. НАН України. № 11, 75–80 (2007)
3. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических цилиндрических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров Прикл.механика. **44**(9), 53–62 (2008)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined Analysis of the Stress State of Orthotropic Elliptic Cylindrical Shells with Variable Geometrical Parameters. Int. Appl. Mech. **44**(9), 998–1005 (2008)
4. Яремченко С.М. Напружено-деформований стан гофрованих циліндричних оболонок в уточненій постановці. Доп. НАН України. № 4, 66–69 (2009)
5. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій змінної товщини в уточненій постановці. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Вип. 10, 63– 69 (2009)
6. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці. Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 3, 61–64 (2011)
7. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem on the stress-strain state in hollow cylinders by means of spline-approximations. Mat. методи та фіз.-мех. поля. **53**(3), 127–134 (2010)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations. J. Math. Sci. **180**(2), 135–145 (2012)
8. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке. Доп. НАН України. №2, 76–82 (2012)
9. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением в уточненной постановке. Прикл. механика. **48**(2), 106–113 (2012)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells. Int. Appl. Mech. **48**(2), 205–212 (2012)
10. Григоренко А.Я., Бергулев А.С., Яремченко С.Н. Численное решение задач об изгибе прямоугольных пластин. Прикл. механика. **49**(1), 101–112 (2013)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical solution of bending problems for rectangular plates. Int. Appl. Mech. **49**(1), 81–94 (2013)

11. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно деформированного состояния неоднородных полых цилиндров. Прикл. механика. **52**(4), 16–24 (2016)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders. *Int. Appl. Mech.* **52**(4), 342–349 (2016)
12. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях. Доп. НАН України. № 6, 31–37 (2016)
13. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет осесимметричного напряженно-деформированного состояния непрерывно неоднородного полого шара. Прикл. механика. **54**(5), 96–102 (2018)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere. *Int. Appl. Mech.* **54**(5), 577–583 (2018)
14. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. Об определении напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы. Прикл. механика. **54**(6), 94–101 (2018) 94-101.  
Te same: Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of complex-shaped plates. *Int. Appl. Mech.* **54**(6), 695–701 (2018)
15. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. О влиянии ортотропии на напряженно-деформируемое состояние четырехугольных пластин различной формы. Прикл. механика. **55**(2), 101–112 (2019)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. On effect of orthotropy on stress-strain state of quadrangular plates of different shape. *Int. Appl. Mech.* **55**(2), 199–210 (2019)
16. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. Прикл. механика. **55**(5), 39–46 (2019)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches. *Int. Appl. Mech.* **55**(5), 487–494 (2019)
17. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. О напряженно-деформированном состоянии эллиптических цилиндров в пространственной постановке. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **62**(2), 120–126 (2019)
18. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Крюков Н.Н., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с косыми срезами в уточненной постановке на основе сплайн-аппроксимации. Прикл. механика. **56**(3), 76–83 (2020)

Te same: Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Kryukov N.N. Yaremchenko S.N. Design of cylindrical shells with oblique cuts in refined statement using spline-approximation. *Int. Appl. Mech.* **56**(3), 326–333 (2020)

19. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. *Доп. НАН України.* № 6, 21–29 (2020)

### Статті у закордонних виданнях

20. Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of static and dynamic behavior of anisotropic inhomogeneous shallow shells by spline approximation method. *Journal of Civil Engineering and Management*, **15**(1), 87–93 (2009).
21. Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N. Numerical analysis of free vibrations of piezoelectric cylinders. In: Abali B., Altenbach H., dell’Isola F., Eremeyev V., Öchsner A. (eds) *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Advanced Structured Materials*, vol 108. Springer, Cham. 187–196 (2019)

### Праці апробаційного характеру

22. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. On some approaches to solving the problems of the theory of orthotropic shells with complex shape on the basis of classic and refined models. In: *35th Solid Mechanics Conference. Kraków, Poland, September 4-8, 2006, Book of Abstracts*, 427–428 (2006)
23. Григоренко Я.М., Яремченко С.М. Про вплив зміни параметрів ортотропії на напружений стан нетонких некругових циліндричних оболонок. В: *Збірник праць VII Міжнар. конф. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*, Львів, 20-23 вересня 2006 р.: в 2-х т. Том 1 ,71–73 (2006)
24. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells with complex shape on basis of spline-approximation. In: *Abstracts. International Workshop “Research in Mechanics of Composites”*. November 26-29, 2006. Bad Herrenalb, Germany, 22 (2006)
25. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Numerical analysis of mechanical behavior of anisotropic inhomogeneous shell structures basing on spline-approximation. In: *Abstract Book. 6th International Conference on Composite Science and Technology. 22-24 January, 2007. Durban, South Africa*, 44 (2007)
26. Яремченко С.М. Про розв’язання задач теорії оболонок з використанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. В: *Матеріали Всеукраїнської наукової конференції “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем”*, Черкаси, 19-20 червня 2007 р., 48 (2007)

27. Яремченко С.М. Розв'язання крайових задач про згин прямокутних пластин з вільними контурами з використанням сплайн-функцій. В: Тези доповідей XI Міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців”, Миколаїв, 20-22 вересня 2007 р., 29–30 (2007)
28. Grigorenko A., Yaremchenko S. Spline approximation method for investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells. In: The 9th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques”. 16-18 May, 2007, Vilnius, Lithuania. Selected papers. Vol. 3, 918–924 (2007)
29. Grigorenko Ya., Yaremchenko S. Stress state of nonthin noncircular orthotropic cylindrical shells with variable thickness under different types of boundary conditions. In: Proceedings of the 36th Solid Mechanics Conference, Gdansk, Poland, September 9-12, 2008, 312–313 (2008)
30. Yaremchenko S.M. Solving static problem for elliptic cylindrical shells with free end in a refined formulation. In: Solid mechanics 2008. Young scientists' conference on the occasion of the 90th anniversary of the National academy of sciences of Ukraine and the S.P. Timoshenko institute of mechanics. Abstracts of papers. Int. appl. mech. **49**(3), 335–336 (2009)
31. Grigorenko A.Ya, Yaremchenko S.M. Static problems for noncircular cylindrical shells: Classical and refined theories. In: Proceedings of the 9th Conference “Shell Structures and Applications”, Vol.2, Gdansk-Jurata, 2009, Taylor and Francis Group, London, UK, 241–244 (2009)
32. Grigorenko Ya.M. and Yaremchenko S.M. Solution of stress-strain problems for noncircular cylindrical shells based upon different models. In: The 10th International Conference “Modern Building Materials Structures and Techniques”. Selected papers, Vol.II. Lithuania, VGTU leidykla, Technika, 885–889 (2010)
33. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние полых цилиндров из функционально градиентных материалов. В: Матеріали міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки – 2014”, Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 45 (2014)
34. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние неоднородного полого шара. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції “Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовин” , 17-19 вересня 2015 р., Миколаїв, 49 (2015)
35. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния полых цилиндров из функционально-градиентных материалов. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки - 2017” , 17-20 квітня 2017 р., Дніпродзержинськ, 11 (2017)

36. Григоренко О., Яремченко С. Напружений стан неоднорідних порожнистих циліндрів в тривимірній постановці. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. , Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 3, 19–20 (2018)

**Анотація. Яремченко С.М. Чисельний аналіз стаціонарного деформування циліндрів та куль неоднорідної структури на основі різних моделей. – Рукопис.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 “Механіка деформівного твердого тіла”. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2021.

Дисертація присвячена розвитку і вдосконаленню підходу до дослідження стаціонарного деформування широкого класу товстостінних циліндричних і сферичних оболонок з різним характером неоднорідності. Цей підхід включає побудову механіко-математичних моделей НДС і коливань за уточненою теорією оболонок і тривимірною просторовою теорією пружності; розробку відповідної розрахункової схеми і застосування дискретно-континуального підходу на основі методів сплайн-колокації, дискретної ортогоналізації й покрокового пошуку та дискретного підходу на основі методу скінченних елементів. Побудовано алгоритми цих підходів, які реалізовано в проблемно орієнтованих обчислювальних комплексах на сучасних персональних комп'ютерах.

Запропонований підхід застосовувався для виконання таких завдань: розв'язання задач про напружено-деформований стан некругових товстостінних циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом і зі скісними зрізами на торцях в рамках уточненої теорії оболонок; дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних циліндричних тіл скінченних розмірів, а також порожнистих куль при різних видах навантаження і граничних умов; визначення резонансних частот п'єзокерамічного циліндра на основі співвідношень електропружності. Особливістю вказаних досліджень є проведення аналізу впливу неоднорідності (оболонки зі скісними зрізами, змінна товщина, неперервно неоднорідна структура матеріалу) на характер розподілу полів переміщень і напружень механічних об'єктів, що вивчаються.

Порівняння результатів розв'язання деяких з представлених задач на основі дискретно-континуального і дискретного підходів дає можливість провести оцінку достовірності даних розрахунків.

Отримані закономірності і виявлені ефекти при стаціонарному деформуванні неоднорідних тіл циліндричної і сферичної форми на основі різних моделей можуть служити основою подальших досліджень в даній області механіки твердого тіла, що деформується, і бути використаними для оцінки міцності та надійності елементів конструкцій і деталей машин циліндричної і сферичної форми.

**Ключові слова:** циліндричні тіла та оболонки, некруговий поперечний переріз, скісні зрізи, порожниста куля, неперервно неоднорідний матеріал, тривимірна теорія пружності, уточнена теорія оболонок, дискретно-континуальний підхід,



дискретний підхід, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації, метод скінченних елементів.

**Аннотация. Яремченко С.Н. Численный анализ стационарного деформирования цилиндров и шаров неоднородной структуры на основе различных моделей. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 “Механика деформируемого твёрдого тела”. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2021.

Диссертация посвящена развитию и усовершенствованию подхода к исследованию стационарного деформирования широкого класса толстостенных цилиндрических и сферических оболочек с различным характером неоднородности. Этот подход включает механико-математические модели НДС и колебаний в уточненной теории оболочек и трехмерной пространственной теории упругости; разработку соответствующей расчетной схемы и применение численных дискретно-континуального подхода на основе методов сплайн-коллокации, дискретной ортогонализации, пошагового поиска и дискретного подхода на основе метода конечных элементов. Построены алгоритмы этих подходов, которые реализованы в проблемно ориентированных вычислительных комплексах на современных персональных компьютерах.

Предложенный подход применялся для выполнения таких заданий: решения задачи о напряженно-деформированном состоянии некруговых толстостенных цилиндрических оболочек с разным поперечным сечением и с косыми срезами на торцах в рамках уточненной теории оболочек; исследования напряженно-деформированного состояния неоднородных цилиндрических тел конечных размеров, а также полых шаров при различных видах нагружения и граничных условий; определения резонансных частот пьезокерамического цилиндра на основании соотношений электроупругости. Особенностью указанных исследований является проведение анализа влияния вида неоднородности (оболочки с косыми срезами, переменная толщина, нерывно неоднородная структура материала) на характер распределения полей перемещений и напряжений изучаемых механических объектов.

Сравнение результатов решения некоторых из представленных задач на основе дискретно-континуального и дискретного подхода дает возможность провести оценку достоверности данных расчетов.

Полученные закономерности и выявленные эффекты при стационарном деформировании неоднородных тел цилиндрической и сферической формы на основе разных моделей могут служить основой дальнейших исследований в данной области механики твердого деформируемого тела и быть использованы для оценки прочности и надежности элементов конструкций и деталей машин цилиндрической и сферической формы.

**Ключевые слова:** цилиндрические тела и оболочки, некруговое поперечное сечение, косые срезы, полый шар, непрерывно неоднородный материал, трехмер-

ная теория упругости, уточненная теория оболочек, дискретно-континуальный подход, дискретный подход, метод сплайн-коллокации, метод дискретной ортогонализации, метод конечных элементов.

**Abstract. Yaremchenko S.M. Numerical analysis of unhomogeneous structure cylinders and spheres stationary deformation on the basis various models. – Manuscript.**

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.04 “Mechanics of deformable solid”. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the development and improvement of an approach to the study of stationary deformation of a wide class of thick-walled cylindrical and spherical shells with different types of inhomogeneity. This approach includes mechanical-mathematical models of stress-strain state and vibrations based on the refined theory of shells and three-dimensional spatial theory of elasticity; development of an appropriate computational scheme and application of a numerical discrete-continuous approach based on spline collocation, discrete orthogonalization, step-by-step search and a discrete approach based on the finite element method. Algorithms implemented in problem-oriented computing programs realized on modern personal computers have been made.

The proposed approach was used to solve the following classes of problems. The problems on the stress-strain state of noncircular thick-walled cylindrical shells with different cross sections and with oblique cuts are solved within the framework of the refined theory of shells. The study of stress-strain state of inhomogeneous cylindrical bodies of finite dimensions is carried out under various types of loading and boundary conditions. resonant frequencies of piezoceramic cylinder was defined on the base of electroelasticity equations. The analysis of the influence of the type of inhomogeneity (shells with oblique cuts, variable thickness, continuously inhomogeneous structure of the material) on the distribution of displacement fields and stresses of the studied mechanical objects is a feature of these studies.

The results compatison in solving some of the problems presented on the basis of the discrete-continual and discrete approaches makes it possible to assess the reliability of these calculations.

The obtained standards and the revealed effects of stationary deformation of cylindrical and spherical inhomogeneous bodies on the basis of different models can serve as the basis for further research in this field of solid mechanics and can be used to assess the strength and reliability of structural elements, and machine parts of cylindrical and spherical shapes.

**Key words:** cylindrical solids and shells, noncircular cross section, oblique cuts, hollow sphere, continuous inhomogeneous matherial, three dimensional elasticity, refined shell theory, discrete continual approach, discrete approach, spline-collocation method, discrete orthogonalization method, finite element method.