

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

ЯРЕМЧЕНКО СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ  
ЦИЛІНДРІВ ТА КУЛЬ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ НА ОСНОВІ  
РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

С.М. Яремченко

Науковий консультант:

Григоренко Ярослав Михайлович,  
академік НАН України,  
доктор технічних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціалізованої

вченої ради

О.П. Жук

Київ – 2021

## АНОТАЦІЯ

*Яремченко С.М.* Чисельний аналіз стаціонарного деформування циліндрів та куль неоднорідної структури на основі різних моделей. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 “Механіка деформівного твердого тіла”. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2021.

Дисертація присвячена розвитку і вдосконаленню підходу до дослідження стаціонарного деформування широкого класу товстостінних циліндричних і сферичних оболонок з різним характером неоднорідності. Цей підхід включає побудову механіко-математичних моделей НДС і коливань за уточненою теорією оболонок і тривимірною просторовою теорією пружності; розробку відповідної розрахункової схеми і застосування дискретно-континуального підходу на основі методів сплайн-колокації, дискретної ортогоналізації й покрокового пошуку та дискретного підходу на основі методу скінченних елементів. Побудовано алгоритми цих підходів, які реалізовано в проблемно орієнтованих обчислювальних комплексах на сучасних персональних комп'ютерах.

Запропонований підхід застосовувався для виконання таких завдань: розв'язання задач про напружено-деформований стан некругових товстостінних циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом і зі скісними зрізами на торцях в рамках уточненої теорії оболонок; дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних циліндричних тіл скінченних розмірів, а також порожнистих куль при різних видах навантаження і граничних умов; визначення резонансних частот п'єзокерамічного циліндра на основі співвідношень електропружності. Особливістю вказаних досліджень є проведення аналізу впливу неоднорідності (оболонки зі скісними зрізами, змінна товщина, неперервно неоднорідна структура матеріалу) на характер розподілу полів переміщень і напружень механічних об'єктів,

що вивчаються.

Порівняння результатів розв'язання деяких з представлених задач на основі дискретно-континуального і дискретного підходів дає можливість провести оцінку достовірності даних розрахунків.

Отримані закономірності і виявлені ефекти при стаціонарному деформуванні неоднорідних тіл циліндричної і сферичної форми на основі різних моделей можуть служити основою подальших досліджень в даній області механіки твердого тіла, що деформується, і бути використаними для оцінки міцності та надійності елементів конструкцій і деталей машин циліндричної і сферичної форми.

**Ключові слова:** циліндричні тіла та оболонки, некруговий поперечний переріз, скісні зрізи, порожниста куля, неперервно неоднорідний матеріал, тривимірна теорія пружності, уточнена теорія оболонок, дискретно-континуальний підхід, дискретний підхід, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації, метод скінченних елементів.

## ABSTRACT

*Yaremchenko S.M.* – Numerical analysis of unhomogeneous structure cylinders and spheres stationary deformation on the basis various models. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.04 “Mechanics of deformable solid”. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the development and improvement of an approach to the study of stationary deformation of a wide class of thick-walled cylindrical and spherical shells with different types of inhomogeneity. This approach includes mechanical-mathematical models of stress-strain state and vibrations based on the refined theory of shells and three-dimensional spatial theory of elasticity; development of an appropriate computational scheme and applicati-

on of a numerical discrete-continuous approach based on spline collocation, discrete orthogonalization, step-by-step search and a discrete approach based on the finite element method. Algorithms implemented in problem-oriented computing programs realized on modern personal computers have been made.

The proposed approach was used to solve the following classes of problems. The problems on the stress-strain state of noncircular thick-walled cylindrical shells with different cross sections and with oblique cuts are solved within the framework of the refined theory of shells. The study of stress-strain state of inhomogeneous cylindrical bodies of finite dimensions is carried out under various types of loading and boundary conditions. resonant frequencies of piezoceramic cylinder was defined on the base of electroelasticity equations. The analysis of the influence of the type of inhomogeneity (shells with oblique cuts, variable thickness, continuously inhomogeneous structure of the material) on the distribution of displacement fields and stresses of the studied mechanical objects is a feature of these studies.

The results compatison in solving some of the problems presented on the basis of the discrete-continual and discrete approaches makes it possible to assess the reliability of these calculations.

The obtained standards and the revealed effects of stationary deformation of cylindrical and spherical inhomogeneous bodies on the basis of different models can serve as the basis for further research in this field of solid mechanics and can be used to assess the strength and reliability of structural elements, and machine parts of cylindrical and spherical shapes.

**Key words:** cylindrical solids and shells, noncircular cross section, oblique cuts, hollow sphere, continuous inhomogeneous matherial, three dimensional elasticity, refined shell theory, discrete continual approach, discrete approach, spline-collocation method, discrete orthogonalization method, finite element method.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

### Статті у фахових виданнях України

1. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43**(6), 82–92 (2007)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section. Int. Appl. Mech. **43**(6), 654–661 (2007)
2. Яремченко С.М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій. Доп. НАН України. № 11, 75–80 (2007)
3. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических цилиндрических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров Прикл. механика. **44**(9), 53–62 (2008)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined Analysis of the Stress State of Orthotropic Elliptic Cylindrical Shells with Variable Geometrical Parameters. Int. Appl. Mech. **44**(9), 998–1005 (2008)
4. Яремченко С.М. Напружено-деформований стан гофрованих циліндричних оболонок в уточненій постановці. Доп. НАН України. № 4, 66–69 (2009)
5. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій змінної товщини в уточненій постановці. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Вип. 10, 63–69 (2009)

6. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці. Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 3, 61–64 (2011)
7. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem on the stress-strain state in hollow cylinders by means of spline-approximations. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* **53**(3), 127–134 (2010)  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations. *J. Math. Sci.* **180**(2), 135–145 (2012)
8. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке. *Доп. НАН України.* №2, 76–82 (2012)
9. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением в уточненной постановке. *Прикл. механика.* **48**(2), 106–113 (2012)  
Те саме: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* **48**(2), 205–212 (2012)
10. Григоренко А.Я., Бергулев А.С., Яремченко С.Н. Численное решение задач об изгибе прямоугольных пластин. *Прикл. механика.* **49**(1), 101–112 (2013)  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical solution of bending problems for rectangular plates. *Int. Appl. Mech.* **49**(1), 81–94 (2013)

11. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно деформированного состояния неоднородных полых цилиндров. Прикл. механика. **52**(4), 16–24 (2016)  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders. Int. Appl. Mech. **52**(4), 342–349 (2016)
12. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях. Доп. НАН України. № 6, 31–37 (2016)
13. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет осесимметричного напряженно-деформированного состояния непрерывно неоднородного полого шара. Прикл. механика. **54**(5), 96–102 (2018)  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere. Int. Appl. Mech. **54**(5), 577–583 (2018)
14. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. Об определении напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы. Прикл. механика. **54**(6), 94–101 (2018) 94-101.  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of complex-shaped plates. Int. Appl. Mech. **54**(6), 695–701 (2018)
15. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. О влиянии ортотропии на напряженно-деформируемое состояние четырехугольных пластин различной формы. Прикл. механика. **55**(2), 101–112 (2019)  
Те саме: Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. On effect of orthotropy on stress-strain state of quadrangular plates of different shape.

Int. Appl. Mech. **55**(2), 199–210 (2019)

16. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. Прикл. механика. **55**(5), 39–46 (2019)

Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches. Int. Appl. Mech. **55**(5), 487–494 (2019)

17. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. О напряженно-деформированном состоянии эллиптических цилиндров в пространственной постановке. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **62**(2), 120–126 (2019)

18. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Крюков Н.Н., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с косыми срезами в уточненной постановке на основе сплайн-аппроксимации. Прикл. механика. **56**(3), 76–83 (2020)

Te same: Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Kryukov N.N. Yaremchenko S.N. Design of cylindrical shells with oblique cuts in refined statement using spline-approximation. Int. Appl. Mech. **56**(3), 326–333 (2020)

19. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. Доп. НАН України. № 6, 21–29 (2020)

### Статті у закордонних виданнях

20. Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of static and dynamic behavior of anisotropic inhomogeneous shallow shells by spline approximation method. Journal of Civil Engineering and Management, **15**(1), 87–93 (2009).



21. Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N. Numerical analysis of free vibrations of piezoelectric cylinders. In: Abali B., Altenbach H., dell'Isola F., Eremeyev V., Öchsner A. (eds) *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Advanced Structured Materials*, vol 108. Springer, Cham. 187–196 (2019)

### **Праці апробаційного характеру**

22. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. On some approaches to solving the problems of the theory of orthotropic shells with complex shape on the basis of classic and refined models. In: *35th Solid Mechanics Conference. Kraków, Poland, September 4-8, 2006, Book of Abstracts*, 427–428 (2006)
23. Григоренко Я.М., Яремченко С.М. Про вплив зміни параметрів ортотропії на напружений стан нетонких некругових циліндричних оболонок. В: *Збірник праць VII Міжнар. конф. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*, Львів, 20-23 вересня 2006 р.: в 2-х т. Том 1, 71–73 (2006)
24. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells with complex shape on basis of spline-approximation. In: *Abstracts. International Workshop “Research in Mechanics of Composites”*. November 26-29, 2006. Bad Herrenalb, Germany, 22 (2006)
25. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Numerical analysis of mechanical behavior of anisotropic inhomogeneous shell structures basing on spline-approximation. In: *Abstract Book. 6th International Conference on Composite Science and Technology*. 22-24 January, 2007. Durban, South Africa, 44 (2007)

26. Яремченко С.М. Про розв'язання задач теорії оболонок з використанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. В: Матеріали Всеукраїнської наукової конференції “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем”, Черкаси, 19-20 червня 2007 р., 48 (2007)
27. Яремченко С.М. Розв'язання крайових задач про згин прямокутних пластин з вільними контурами з використанням сплайн-функцій. В: Тези доповідей XI Міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців”, Миколаїв, 20-22 вересня 2007 р., 29–30 (2007)
28. Grigorenko A., Yaremchenko S. Spline approximation method for investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells. In: The 9th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques”. 16-18 May, 2007, Vilnius, Lithuania. Selected papers. Vol. 3, 918–924 (2007)
29. Grigorenko Ya., Yaremchenko S. Stress state of nonthin noncircular orthotropic cylindrical shells with variable thickness under different types of boundary conditions. In: Proceedings of the 36th Solid Mechanics Conference, Gdansk, Poland, September 9-12, 2008, 312–313 (2008)
30. Yaremchenko S.M. Solving static problem for elliptic cylindrical shells with free end in a refined formulation. In: Solid mechanics 2008. Young scientists' conference on the occasion of the 90th anniversary of the National academy of sciences of Ukraine and the S.P. Timoshenko institute of mechanics. Abstracts of papers. *Int. appl. mech.* **49**(3), 335–336 (2009)
31. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.M. Static problems for noncircular cylindrical shells: Classical and refined theories. In: Proceedings of the 9th

- Conference “Shell Structures and Applications”, Vol.2, Gdansk-Jurata, 2009, Taylor and Francis Group, London, UK, 241–244 (2009)
32. Grigorenko Ya.M. and Yaremchenko S.M. Solution of stress-strain problems for noncircular cylindrical shells based upon different models. In: The 10th International Conference “Modern Building Materials Structures and Techniques”. Selected papers, Vol.II. Lithuania, VGTV leidyklos, Technika, 885–889 (2010)
33. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние полых цилиндров из функционально градиентных материалов. В: Матеріали міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки – 2014”, Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 45 (2014)
34. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние неоднородного полого шара. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції “Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовин” , 17-19 вересня 2015 р., Миколаїв, 49 (2015)
35. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния полых цилиндров из функционально-градиентных материалов. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки - 2017” , 17-20 квітня 2017 р., Дніпродзержинськ, 11 (2017)
36. Григоренко О., Яремченко С. Напружений стан неоднорідних порожнистих циліндрів в тривимірній постановці. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. , Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 3, 19–20 (2018)

## Зміст

<b>ВСТУП</b>	<b>15</b>
<b>1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ</b>	<b>24</b>
<b>2 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ І УТОЧНЕНОЇ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ</b>	<b>49</b>
2.1 Співвідношення просторової теорії пружності в ортогональних системах координат . . . . .	50
2.2 Співвідношення уточненої теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії . . . . .	55
2.2.1 Співвідношення теорії пружності для оболонок . . . . .	55
2.2.2 Суть гіпотези прямолінійного елемента та перехід від тривимірної постановки задачі до двовимірної . . . . .	59
2.3 Методи розв'язання задач . . . . .	63
2.3.1 Деякі відомості про сплайн-функції і метод сплайн-колокації . . . . .	64
2.3.2 Основні положення методу дискретної ортогоналізації	72
2.4 Застосування методів сплайн-колокацій та дискретної ортогоналізації до розв'язання окремих двовимірних і тривимірних задач . . . . .	75

2.4.1	НДС шаруватих прямокутних в плані пологих орто- тропних оболонок . . . . .	75
2.4.2	Згин опуклої чотирикутної пластини складної форми	84
2.4.3	НДС товстостінної прямокутної пластини в тривимір- ній постановці . . . . .	92
2.5	Результати та висновки . . . . .	106
<b>3</b>	<b>НДС ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ</b>	<b>109</b>
3.1	Розв'язувальна система рівнянь для циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу . . . . .	110
3.2	Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної з за- стосуванням методу сплайн-колокації вздовж твірної . . . . .	114
3.3	Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної з за- стосуванням методу сплайн-колокації вздовж напрямної . . . . .	125
3.4	Напружений стан оболонок з еліптичним поперечним перерізом	130
3.5	Напружено деформований стан гофрованих пластин та ци- ліндричних оболонок . . . . .	140
3.6	Результати та висновки . . . . .	146
<b>4</b>	<b>НДС ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІСНИМИ ЗРІЗАМИ</b>	<b>148</b>
4.1	Кругові циліндри зі скісними зрізами . . . . .	149
4.2	Циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами . . . . .	162
4.3	Результати та висновки . . . . .	172
<b>5</b>	<b>ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРІВ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ТА ПОРОЖНИСТИХ КУЛЬ</b>	

<b>В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ</b>	<b>174</b>
5.1 НДС неоднорідного циліндра . . . . .	176
5.2 НДС неоднорідної порожнистої кулі . . . . .	189
5.3 Осесиметричні коливання п'єзоелектричного циліндра . . . . .	197
5.4 Результати та висновки . . . . .	202
<b>6 НДС КРУГОВОГО І ЕЛІПТИЧНОГО ЦИЛІНДРА В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ</b>	<b>204</b>
6.1 НДС неоднорідного кругового циліндра . . . . .	205
6.2 НДС еліптичного циліндра . . . . .	213
6.3 Результати та висновки . . . . .	218
<b>ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ</b>	<b>219</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>222</b>
<b>ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА</b>	<b>252</b>
<b>ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ</b>	<b>260</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Широке застосування товстостінних оболонкових конструкцій циліндричної і сферичної форми в різних галузях сучасної техніки визначається вимогами міцності та надійності, технологічними особливостями, економічною ефективністю та іншими обставинами, які приводять до ускладнення геометричної та фізичної структур оболонок.

В багатьох випадках циліндричні оболонкові конструкції залежно від їх функціонального призначення і умов експлуатації мають складний контур поперечного перерізу, змінну товщину та інші особливості. Прикладами таких конструкцій є захисні покриття атомних реакторів, сховища різного призначення, корпуси надводних і підводних кораблів, літальних і космічних апаратів, об'єкти інженерної і хімічної промисловості.

Аналіз стаціонарного деформування неоднорідних товстостінних циліндричних і сферичних оболонок з геометричними та фізико-механічними особливостями вимагає застосування адекватних моделей оболонок, а в ряді випадків – просторової теорії пружності.

В останні роки дослідження механічної поведінки товстостінних оболонкових систем, яким притаманна структурна неоднорідність різної природи, привертає все більшу увагу дослідників в галузі механіки деформівного твердого тіла.

Аналіз наукової літератури з цього питання дає можливість зробити висновок, що найбільш повно задачі стаціонарного деформування розглянуто для оболонок з кусково-неоднорідного матеріалу. Ця властивість характерна багатьом композиційним матеріалам. Але у випадку більш ускладнених задач, коли матеріал тіла є анізотропним, неперервно-неоднорідним, а форма тіла відрізняється від канонічної, процес дослідження знаходиться в початковій стадії. Це пов'язано з необхідністю застосування уточнених оболонкових моделей і просторової теорії пружності, а також з розробкою

методик розв'язання вихідних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описують відповідні механічні процеси.

Для розв'язання проблем обчислювального характеру суттєвим є використання сучасних чисельно-аналітичних підходів. У зв'язку з наявністю потужних засобів обчислювальної техніки – персональних комп'ютерів з великою пам'яттю і швидкодією – для розрахунку різних аспектів механічної поведінки сучасних конструкцій в даний час широко застосовуються різні чисельні підходи. Розроблено універсальні чисельні методи, за допомогою яких проводиться розв'язання широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла. Вони носять назву дискретних і побудовані на зведенні вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних до систем алгебраїчних рівнянь високого порядку. Найбільш універсальними і широко застосовуваними є численні модифікації методу скінченних елементів. Однак поряд з універсальними підходами до вирішення завдань теорій пружності та оболонок використовуються також так звані дискретно-континуальні підходи, що дозволяють звести задачу до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою аналітичних засобів на основі апроксимації розв'язку по окремим змінним. Дискретно-континуальні підходи можна розглядати як альтернативу універсальним чисельним методам в тому сенсі, що для певних класів задач вони більш ефективні і можуть давати точніші результати, так що їх можна використовувати як еталонні для тестування нових модифікацій дискретних підходів.

Тому можна зробити висновок, що дослідження стаціонарного деформування товстостінних неоднорідних циліндричних оболонок і куль на основі дискретно-континуальних і дискретних підходів є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Ди-



сертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дослідження проведено і включено у наукові звіти таких науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.349 “Розробка методів розв’язання задач та дослідження статичного і динамічного деформування пружних тіл складної геометрії та структури на основі моделей різного рівня”, номер державної реєстрації 0105U001991, 2005 – 2009 рр.; НДР № 1.3.1.358 “Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей до дослідження деформування і руйнування композитних матеріалів для розв’язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій” , номер державної реєстрації 0107U000345, 2007 – 2011 рр.; НДР № 1.3.1.370 “Розробка нових підходів до дослідження деформування складних оболонкових систем з неоднорідних анізотропних матеріалів при різних видах навантаження на основі методів чисельного аналізу” , номер державної реєстрації 0109U004184, 2009 – 2013 рр.; НДР № 1.3.1.382 “Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей”, номер державної реєстрації 0112U000249, 2012 – 2016 рр.; НДР № 1.3.1.401 “Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування”, номер державної реєстрації 0115U005709, 2016 – 2020 рр.; НДР № 1.3.1.410 “Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем”, номер державної реєстрації 0117U000700, 2017 – 2021 рр.

**Мета дослідження** полягає в розробці підходу до чисельного дослідження напружено-деформованого стану (НДС) та коливань пружних циліндричних та сферичних тіл неоднорідної структури; цей підхід вклю-

чає: побудову механіко-математичної моделі вказаних задач за уточненою теорією оболонок і просторовою теорією пружності; розробку відповідної розрахункової схеми з застосуванням чисельних методів сплайн-колокації, дискретної ортогоналізації, скінченних елементів і методу покрокового пошуку; створення програмних комплексів для розв'язання відповідних крайових задач; проведення аналізу розподілу полів напружень та переміщень, динамічних характеристик на основі розв'язання широкого класу задач про НДС і коливання анізотропних неоднорідних тіл та дослідження впливу на розподіл цих полів конструктивної та структурної неоднорідності.

Досягнення цієї мети передбачає такі **завдання**:

- розробку підходів до розв'язання задач статички і коливань теорії пружності та теорії оболонок типу Тимошенка на основі методів сплайн колокації, дискретної ортогоналізації (дискретно-континуальний підхід) та методу скінченних елементів (дискретний підхід);
- побудову розв'язків задач про напружено-деформований стан циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом з застосуванням уточненої теорії оболонок;
- розв'язування задач про напружений стан кругових та еліптичних циліндричних оболонок зі скісними зрізами за уточненою теорією оболонок;
- знаходження розв'язків задач про осесиметричний напружено-деформований стан неоднорідних циліндрів та куль за просторовою теорією пружності;
- дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічного циліндра за теорією електропружності;
- знаходження розв'язків задач про напружено-деформований стан кругового та еліптичного циліндрів в тривимірній постановці;
- проведення досліджень достовірності, точності і збіжності результатів

за підходами, що застосовуються;

- виявлення характерних закономірностей в розподілах полів переміщень та напружень в оболонках та просторових тілах, аналіз впливу на напружено-деформований стан неоднорідності, геометричних та механічних параметрів в широкому діапазоні їх зміни.

**Об'єктом дослідження** є напружено-деформований стан і коливання неоднорідних циліндричних тіл та куль зі складною геометричною структурою при різному характері навантаження та граничних умов.

**Предметом досліджень** є вплив неоднорідної структури та форми циліндричних та сферичних тіл на об'єкт дослідження.

**Методи дослідження.** Метод сплайн-колокації було застосовано для пониження розмірності двовимірних та тривимірних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами до одновимірних задач.

Отримані лінійні крайові задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

У задачах про напружено-деформований стан оболонок зі скісними зрізами для зведення заданої складної геометричної області до прямокутної застосовується метод заміни змінних.

Задачі у варіаційній постановці розв'язано методом скінченних елементів. Використовуються прямокутні чотири- та восьмивузлові елементи у випадку двовимірних задач і восьми- і двадцятивузлові елементи у вигляді паралелепіпедів у випадку тривимірних задач.

Для визначення резонансних частот коливань електропружного циліндра використовується метод покрокового пошуку (метод послідовного перебору).

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

- виконано постановку та побудовані розрахункові схеми ряду нових задач про стаціонарне деформування циліндричних тіл з різним поперечним перерізом та тіл сферичної форми з врахуванням їх конструктивної та структурної неоднорідності в рамках просторової та оболонкових моделей;
- розроблено нові дискретно-континуальні підходи на основі методу сплайн-колокації та розвинено варіант дискретного підходу (метод скінченних елементів) для дослідження задач про НДС і коливання неоднорідних циліндричних та сферичних тіл в рамках різних моделей;
- досліджено напружено-деформований стан неоднорідних циліндричних тіл з різним поперечним перерізом та куль в рамках просторової та оболонкових моделей за допомогою розроблених методик;
- побудовано розподіли полів напружень та переміщень в залежності від характеру неоднорідності, навантаження, типу граничних умов та геометрії пружного тіла;
- на основі отриманих розв'язків проведено аналіз особливостей НДС і коливання широкого класу неоднорідних циліндричних та сферичних тіл, виявлено основні механічні закономірності щодо впливу характеру неоднорідної структури, геометричних, механічних параметрів, видів навантаження та граничних умов об'єктів, що розглядаються, на розподіл полів напружень та переміщень.

**Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації**, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках просторової теорії пружності та теорії оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю; застосуванням обґрунтованих чисельних дискретно-континуальних і дискретних методів, фізично правдоподібною інтерпретацією отриманих результатів; порівняльним аналізом точності

розв'язання поставлених задач на основі зазначених методів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Результати роботи та підходи до їх отримання можуть бути використані при розв'язанні широкого класу практичних задач стаціонарного деформування неоднорідних конструктивних елементів сучасної техніки; розроблені програмні комплекси дають можливість отримати достовірну інформацію про розподіл полів напружень та переміщень в елементах конструкцій при різних режимах експлуатації і проведення оцінок їх міцності і надійності; багатоваріантні розрахунки за розробленими програмами на етапі проектування конструкцій можуть бути альтернативою до проведення коштовних натурних експериментів.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавторстві, здобувач приймав участь у постановці задач, розробці підходів до їх розв'язання та реалізації. Здобувачеві повністю належить розробка підходу до розв'язання задач для нетонких оболонок зі скісними зрізами з використанням методів сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації; адаптація методу сплайн-колокації з використанням двовимірних сплайнів до задач про НДС неоднорідних циліндрів в просторовій постановці; розробка підходу з використанням сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації до задач про осесиметричний НДС неоднорідних циліндрів та куль; застосування методу скінченних елементів для дослідження НДС еліптичного циліндра в тривимірній постановці з використанням еліптичної системи координат. Співавтори академік НАН України Я.М. Григоренко, чл.-кор. НАН України О.Я. Григоренко, професор W.H. Müller, професор М.М. Крюков, професор І.А. Лоза брали участь у постановках задач та аналізі отриманих результатів; доктор R. Wille, к.ф.-м.н. А.С. Бергульов, к.ф.-м.н. С.А. Панкратьев, к.ф.-м.н. Н.П. Яремченко брали участь в деяких розрахунках задач та аналізі

результатів.

**Апробація матеріалів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських конференціях, зокрема: 35th and 36th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006, Гданськ, Польща 2008), “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2006), International Workshop “Research in Mechanics of Composites” (Бад-Герренальб, Німеччина 2006), 6th International Conference on Composite Science and Technology (Дурбан, ПАР, 2007), 9th and 10th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” (Вільнюс, Литва, 2007, 2010), “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем” (Черкаси, 2007), XI Міжнародна науково-методична конференція “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців” (Миколаїв, 2007), 9th Conference “Shell Structures and Applications” (Гданськ, Польща, 2009), “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпро – Кам’янське, 2014, 2017), Міжнародна науково-практична конференція “Проблеми механіки та фізико-хімічного конденсованого стану речовин” (Миколаїв, 2015), “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2018).

В завершеному вигляді робота доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2020 р.), на науковому семінарі за напрямом “Механіка оболонкових систем” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2020 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н, професор І.А. Лоза, 2021 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (ке-

рівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2021 р.), на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2020 р.).

**Публікації.** Результати дисертації висвітлено в 36 наукових працях, з них 21 [1–21] стаття у наукових фахових виданнях України і у наукових періодичних виданнях інших держав, 15 публікацій [22–36] в матеріалах міжнародних і національних конференцій. Чотирнадцять статей [1, 3, 7, 9–11, 13–18, 20, 21] опубліковані у виданнях, включених до категорії “А” Переліку наукових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank [20] входить до квартилю Q2, [1, 3, 7, 9–11, 13–16, 18, 21] – до Q3. Праці [2, 5, 24, 25, 28] опубліковані автором одноосібно.

**Структура та обсяг дисертаційної роботи.** Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел з 297 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 261 сторінку, разом із 70 рисунками і 20 таблицями.

*Автор висловлює щирі вдячність своєму науковому консультантові – академіку НАН України, доктору технічних наук, професору Ярославу Михайловичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та виражає подяку члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору О.Я. Григоренку за цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.*

## Розділ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Становлення теорії пружності почалося майже півтисячоліття тому. І вже наприкінці XIX століття виходять книги, де описується історія теорії пружності від Галілея до Сен-Венана [282] і від Сен-Венана до лорда Кельвіна [283]. Цікаво, що ця книга перевидана кілька разів і не так давно. Також досить розлогий екскурс в історію теорії пружності до XX століття можна знайти в книзі Лява [94]. Він разом з Кірхгофом є фундаторами теорії оболонок, яка зараз вважається класичною.

Оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій сучасної техніки. Багато елементів машин і споруд – це оболонки різноманітної форми зі змінними геометричними параметрами, що знаходяться під впливом навантажень різних типів. Оболонки можна зустріти в авіабудуванні, машинобудуванні, суднобудуванні, будівельній механіці тощо, чим і пояснюється великий інтерес до дослідження їх механічних поведінки. Для оцінки міцності і несучої здатності оболонкових конструкцій потрібно, перш за все, знати їх напружено-деформований стан, що призводить до необхідності розробки ефективних, достатньо точних методів розв'язування крайових задач теорії оболонок.

Значний прогрес в розвитку класичної теорії оболонок, що зараз має закінчену форму, пов'язаний з розробками Кірхгофа, де для пластин приймалося припущення про недеформування нормального елемента. Варіант теорії оболонок Кірхгофа-Лява [94] став основою для подальшого розвитку



досліджень по загальній теорії оболонок. Важливе місце в розробці загальної теорії оболонок займають праці С.П. Тимошенка [140], В.Флюге [182], М.О. Кільчевського [75], В.З. Власова [20], В. В. Новожилова [113], А.Л. Гольденвейзера [27], А.І. Лурье [93], Х.М. Муштарі [104], С.О. Амбарцумяна [2, 3], К. Ф. Черних [152] та ін.

Досягнення в розробці загальних питань теорії оболонок стали теоретичною основою для побудови методів розв'язання задач, що мають важливе значення для прикладного застосування. В загальному випадку розробка методів визначення напружено-деформованого стану оболонок і побудова розв'язків різних класів задач, які виникають задяки розвитку сучасної техніки і створенню нових матеріалів, пов'язана зі значними складнощами [99]. Це можна пояснити значними труднощами при постановці крайових задач, високим порядком рівнянь і великим числом параметрів, що характеризують оболонку, різноманітністю навантажень та ін.

Прийняття класичної моделі теорії пластин та оболонок, в основі якої лежать гіпотези Кірхгофа-Лява з простим математичним формулювання, дало змогу одержати адекватні розв'язки багатьох практичних задач. Проте, в значній кількості випадків, особливо для оболонок з композитних матеріалів, припущення класичної теорії можуть привести до результатів, що недостатньо точно відображають суть механічних явищ, що вивчаються. Зокрема, для оболонок, що мають значну анізотропію механічних і фізичних властивостей, оболонок, на які діють локальні навантаження, не тонких, суттєво неоднорідних оболонок тощо, припущення класичної теорії вимагають уточнення, оскільки фактори, якими нехтують, можуть значно впливати на їх напружено-деформований стан. Отримати розв'язок для вказаних оболонок в тривимірній постановці надзвичайно складно, особливо при змінних їх геометричних і механічних параметрах. Для розв'язання таких задач запропоновано різні варіанти уточнених моделей оболонок, що

отримані на основі менш жорстких припущень, ніж припущення про збереження нормального елемента.

Різні способи врахування тих чи інших факторів привели до появи великої кількості підходів до побудови уточнених моделей. Їх загальною рисою є врахування деформацій поперечного зсуву у всіх чи окремих шарах багат шарових структур. Більшість ранніх досліджень з розвитку уточнених теорій присвячено одношаровим пластинам. На необхідність врахування деформацій поперечного зсуву вказував С. П. Тимошенко на прикладі задачі про поперечні коливання балки [139]. Модель прямолінійного елемента є однією з найпоширеніших при дослідженні пластин і оболонок в уточненій постановці. Згідно з нею початковий нормальний прямолінійний елемент після деформації залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до викривленої серединної поверхні.

Розвиток теорії анізотропних однорідних оболонок проходив як узагальнення результатів для анізотропних та ізотропних пластин, що викладені у працях Рейснера [269], Нагді [253], Болле [169], Гольденвейзера [27], Амбарцумяна [4] та ін. Основоположні результати в цій області одержані С.О. Амбарцумяном [3].

І.Ю. Хома узагальнив метод Векуа для анізотропних оболонок і пластин [148]. Рівняння рівноваги для нетонких оболонок та пластини і способи їх інтегрування досліджувались в роботах [146, 147].

Ортотропні і шаруваті пологі оболонки на основі зсувової теорії другого порядку досліджувались в статтях [121, 122]. Зсувні ефекти в трансверсально-ізотропних пластинах розглянуто в роботі [120].

Теорія одношарових оболонок, що має в основі гіпотезу прямолінійного елемента, розвивалась в роботах [88, 116]. Загальним досягненням є те, що вдалося сформулювати уточнену теорію трансверсально-ізотропних оболонок сталої товщини, що є завершеною, як і класична теорія. Прикладна

теорія оболонок з урахуванням поперечних зсувів, що може бути застосована при технічних розрахунках конструкцій, викладена в роботах [16, 68]. Дослідження оболонок з використанням уточнених теорій проводяться в книгах [101, 138].

У книзі [99] розглянуто деякі задачі на основі теорії типу Тимошенко. Монографія [47] цілком присвячена уточненим теоріям оболонок.

В роботі [62] представлено результати розрахунків напружено-деформованого стану сферичної оболонки з круговим отвором, навантаженої внутрішнім тиском, порівняно результати розв'язання задач в лінійній і нелінійній постановках як з урахуванням так і без урахування зсувних деформацій оболонок.

Теорія оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії, використовується в [96] для пошуку оптимального розподілу матеріалу в нетонкій оболонці обертання змінної товщини.

В роботі [31] автори пропонують встановити коефіцієнт зсуву в теорії оболонок типу Тимошенко рівним одиниці, що, на їх думку, дозволяє побудувати теорію, що не містить протиріч.

Стаття [46] присвячена підходам до побудови моделей, що описують деформування одношарових та багатошарових оболонок з шарами змінної товщини з анізотропних матеріалів. Крім того, наводиться приклад розрахунку циліндричної оболонки з урахуванням поперечного обтиску.

Зупинимося на короткій характеристиці методів розв'язування задач в теорії оболонок в часи, коли не використовувались ЕОМ.

В області лінійних задач теорії оболонок серед основних можна виділити монографії В.В. Новожилова [113], В.З. Власова [20], А.І. Лур'є [93], О.Л. Гольденвейзера [28]. Один з основних підходів до розв'язування задач теорії оболонок, викладених у вказаних монографіях, базується на методі комплексного перетворення рівнянь теорії оболонок, що дозволяє понизити

порядок цих рівнянь і отримати розв'язувальне диференціальне рівняння у формі, що допускає знаходження його розв'язку в елементарних функціях.

При побудові розв'язків диференціальних рівнянь задач теорії оболонок за рахунок їх специфіки широко застосовуються різні варіанти методу асимптотичного інтегрування. Також були одержані деякі наближені розв'язки задач теорії оболонок в аналітичному вигляді за рахунок нехтування малими членами в основних рівняннях. Проте, за допомогою аналітичних методів вдалося побудувати розв'язок лише для простих задач: пластин і оболонок нескладної форми при визначених видах навантаження.

Створення ЕОМ і широке впровадження їх для обчислень дозволило застосувати для розв'язування задач теорії оболонок методи чисельного аналізу і істотно розширити клас задач теорії оболонок, які можна розв'язати.

При розв'язуванні задач із застосуванням ЕОМ потрібно розглядати весь ланцюжок, що складається з таких ланок: математична модель, метод, алгоритм, програма, розрахунок, аналіз результатів, і враховувати зв'язки між всіма ланками. Всі ці вимоги повинні виконуватись у повному обсязі і при розв'язуванні задач теорії оболонок [38, 130].

Розрахунок напружено-деформованого стану оболонок зі змінними геометричними параметрами приводить до розв'язання двовимірних крайових задач загального вигляду при різних граничних умовах, що пов'язано зі значними математичними і обчислювальними труднощами [9, 20, 37, 39, 59].

Круг задач теорії оболонок, що можуть бути розв'язаними аналітичними методами значно обмежений через складність рівнянь, що описують їх напружено-деформований стан. У деяких випадках при отриманні остаточного числового результату, навіть коли відомий точний розв'язок, виникали значні труднощі, пов'язані з сумуванням рядів, що повільно збігаються [99]. Труднощі, що виникають при знаходженні розв'язків задач теорії оболонок і доведенні їх до конкретних результатів в практично важли-

вих випадках, викликали необхідність розробки різноманітних спрощених прийомів. Більшість досліджень в даному напрямку охоплюють оболонки обертання сталої і змінної товщини стінки. Результати досліджень по наближених методах розрахунку напруженого стану оболонок цього класу відображені у монографіях [19, 25, 82, 93, 151, 162, 182].

Кругові циліндричні оболонки змінної товщини розглядались в статтях [12, 91, 176, 278, 288]. Наближене інтегрування рівнянь осесиметричної деформації оболонок обертання зі змінною товщиною проводилось в роботах [178, 284].

В роботі [78] напружено-деформований стан пологих оболонок обертання різної форми і змінної товщини рекомендується проводити, апроксимували їх набором кінцевих оболонок лінійно-змінної товщини.

Розв'язанню задач для кінцевих оболонок змінної товщини присвячені монографії [79–81]. В цих роботах одержані аналітичні розв'язки, які вдалося довести до числового результату за допомогою ЕОМ.

Розрахунок напруженого стану оболонок змінної товщини приведений в роботах [5, 150]. Для оболонок і пластин зі слабкою змінністю товщини пропонується підхід, що базується на застосуванні методу малого параметра і зведенні вихідної задачі до послідовності задач для оболонок і пластин сталої товщини [150].

Поряд із замкнутими оболонками обертання змінної жорсткості в різних галузях техніки використовуються елементи конструкцій у вигляді незамкнутих оболонок обертання. Для незамкнутих оболонок змінної товщини аналітичні наближення розв'язку побудовані лише для окремих частинних випадків.

В статті [136] вихідна задача про згин прямокутних в плані пологих оболонок змінної жорсткості в двох напрямках методом малого параметра зводиться до систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі

сталими коефіцієнтами. В роботі [243] автор виходить з рівнянь технічної теорії оболонок. Розв'язок задачі після ряду спрощень в рівняннях статички пологої вільно опертої оболонки лінійно-змінної товщини будується в потрібних тригонометричних рядах. Пологі оболонки змінної товщини розглядалися в статті [234].

В роботі [279] запропоновано і реалізовано аналітичний підхід до точного розв'язання задач про напружений стан параболічних оболонок обертання лінійно-змінної товщини.

Стаття [77] присвячена розв'язанню задачі про локальне навантаження сферичної оболонки.

В роботі [158] розглянута замкнута циліндрична оболонка під дією локального навантаження, розподіленого по поверхні оболонки, а в [159] така ж оболонка зі ступінчасто змінної товщини.

В статті [161] розглядається безмоментна циліндрична оболонка змінної товщини з довільним контуром поперечного перетину.

Питання щодо згину циліндричних оболонок з композитних матеріалів досліджувались у статтях [145, 177, 247, 258].

У випадку теорії оболонок в уточненій постановці аналітичні методи дають змогу розв'язати лише найпростіші задачі, або знайти наближені розв'язки для круглих і прямокутних пластин. НДС циліндричних оболонок на основі гіпотези прямолінійного елемента розглядається в роботах [47, 62].

Зокрема, в роботі [62] для кругових циліндричних оболонок сталої товщини при несиметричному навантаженні виведено систему диференціальних рівнянь десятого порядку, розв'язок якої пропонується шукати у вигляді подвійних або одинарних тригонометричних рядів у залежності від типу граничних умов.

Розв'язанню окремих простих задач для одношарових пластин і обо-

лонок присвячені роботи [53, 127, 242] та ін. В роботах [2–4] в аналітичній формі дано розв’язки задач для осесиметрично навантажених ортотропних одношарових циліндричних оболонок і круглих пластин.

Монографії [63, 64, 117] присвячені визначенню напружень в оболонках, що слабо опираються поперечному зсуву.

Деякі результати розв’язання задач для одношарових оболонок сталої товщини на основі рівнянь теорії Векуа наведені в роботах [72, 89, 229].

В статті [132] в основу розрахунку напружено-деформованого стану пологої сферичної оболонки покладена теорія Рейснера, що враховує вплив зсуву на згин. Розв’язання задачі ведеться за допомогою комплексних змінних.

В [160] наведено основні співвідношення теорії тонких пружних оболонок, необхідні для розв’язання граничних задач статички ортотропних оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю. Методом двовимірного перетворення Фур’є побудовані фундаментальні розв’язки наведених співвідношень.

Як впливає з викладеного вище огляду, аналітичні підходи до розв’язування задач теорії оболонок дозволяють отримати розв’язок обмеженого кола задач. Чисельні методи розв’язування крайових задач для диференціальних рівнянь мають більші можливості при знаходженні розв’язків задач теорії оболонок, оскільки завдяки своїй універсальності дозволяють розглядати різні класи оболонок з урахуванням змінності їх геометричних, механічних і теплофізичних параметрів.

Широке застосування чисельних методів, які дозволяють отримати розв’язок багатьох складних задач теорії оболонок з достатньою точністю, стало можливим лише з застосуванням ЕОМ. Впровадження ЕОМ і чисельних методів в практику розрахунку оболонок різних класів дозволяє значно розширити область задач, які розв’язуються.

В роботах [10, 11] методом скінченних різниць (МСР) розв'язувались задачі для оболонок обертання з товщиною змінною по твірній. Пологі оболонки двоякої кривини за допомогою МСР досліджувались в [106].

Крайові задачі для ізотропних оболонок обертання змінної жорсткості при симетричних навантаження з використанням МСР розв'язуються в [30].

Огляд робіт присвячених розв'язанню задач про деформування оболонок з використанням варіаційних скінченно-різницевих методів зроблено в [244].

Найбільш поширеним для дослідження НДС та коливань пружних тіл є метод скінченних елементів (МСЕ). Основи МСЕ викладено в монографіях [66, 70, 84, 135].

В роботах [125, 126, 156] на основі МСЕ розроблені обчислювальні комплекси для розрахунку оболонок обертання.

Циліндричні оболонки МСЕ досліджуються в статтях [73, 142].

В статті [187] МСЕ застосовано для розрахунку напружено-деформованого стану композитних шаруватих анізотропних пластин і оболонок, використовується варіант уточненої теорії згину, що враховує поперечні зсувні деформації.

В роботі [238] з урахуванням поперечних зсувних і нормальних деформацій розвинуті ефективні змішані моделі для розрахунку шаруватих анізотропних оболонок Тимошенко-Міндліна, відмічається ефективність криволінійних оболонкових елементів і підвищена точність в порівнянні з скінченно-елементними результатами.

Змішані варіаційні формулювання методу скінченних елементів застосовуються для розв'язання просторових задач теорії пружності та задач про власні коливання пружних тіл в [153, 154].

В [131] запропоновано методикку побудови граничних елементів для роз-



рахунку напруженого стану тонких, пологих оболонок складної геометрії для теорії типу Тимошенка.

В роботі [6] викладено результати по розвитку методу граничних елементів в лінійних і нелінійних задачах теорії пластин та оболонок.

Циліндричні оболонки змінної товщини методом сіток вивчались у статтях [29, 95].

В роботах [8, 71] задачі про напружено-деформований стан оболонок обертання під дією осесиметричних і антисиметричних навантажень описуються за допомогою модифікованих крайових і нормальних інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтера, які розв'язуються за допомогою ітераційних чисельних методів.

В статті [62] викладено методуку і алгоритм чисельного розв'язання нелінійних і лінійних задач для оболонок, в яких прийняті гіпотези Тимошенка або Кірхгофа-Лява, на основі методу послідовних наближень, варіаційно-різницевого методу і залучення методу невизначених множників Лагранжа.

Оболонки обертання змінної товщини у випадку, коли координатна поверхня не співпадає з серединною, методом ортогональної прогонки розглянуті у статті [24]. В роботі [118] для розрахунку оболонок змінної жорсткості застосовувався диференціально-різницевий метод.

Різними аспектами проблеми побудови і реалізації на ЕОМ алгоритмів чисельного розв'язання крайових задач теорії пластин і оболонок присвячені роботи [59, 100, 114, 124, 134, 155].

В [43, 44, 47, 99, 102, 103, 155, 207, 208, 210, 222] були розвинуті методи, що дозволяють звести двовимірні задачі теорії оболонок в класичній і уточненій постановках до одновимірних, а одновимірні розв'язувати стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації Годунова [26]. В огляді [45] описано класи задач для оболонок у класичній постановці, що розв'язані за

допомогою такого підходу, а також відмічено недосліджені області, де він може бути застосований. Деякі дослідження оболонок за допомогою різних варіантів такого підходу викладені в статтях [14, 15, 51, 57].

Для розв'язання задач обчислювальної математики, математичної фізики і механіки часто застосовуються сплайн-функції. Це пояснюється перевагами апарату сплайн-наближень в порівнянні з іншими [55].

Широкою областю використання сплайн-апроксимацій є задачі теорії деформування пружних тіл. Тут сплайн-функції можуть бути ефективно застосовані для розв'язання одновимірних і двовимірних задач теорії оболонок і пластин, двовимірних і тривимірних задач теорії пружності.

Для розв'язування одновимірних задач, що описують згин, стійкість і коливання пластин і оболонок, в деяких роботах [41, 42, 274] розв'язок апроксимується сплайнами третього і п'ятого степеня і задача зводиться до системи алгебраїчних рівнянь.

В ряді двовимірних задач про напружено-деформований стан і коливання пластин і оболонок при визначених граничних умовах задача зводиться до одновимірної за допомогою того чи іншого варіаційного або проєкційного методу, а розв'язок останньої знаходиться за допомогою сплайн-функцій [292].

Крім вказаних підходів для розв'язання двовимірних крайових задач теорії пластин і оболонок також застосовуються підходи, що базуються на апроксимації шуканого розв'язку у вигляді відрізка ряду по двовимірних сплайнах [285] або добутках одновимірних сплайнів [240] і розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

В роботі [251] дано огляд використання сплайн-функцій в різних напіваналітичних, дискретних, варіаційних і змішаних методах розв'язування задач статички, коливань і стійкості пластин і оболонок.

В [133] обговорюються результати досліджень по проблемі сплайн-

функцій для обчислення геометричних параметрів поверхні в задачах теорії оболонок неканонічної форми. Запропоновані ефективні прийоми пониження осциляцій інтерполюючого і згладжуючого сплайну.

Робота [97] присвячена розробці методу апроксимації серединних поверхонь оболонок довільної форми із застосуванням вектор-сплайнів, для побудови яких застосована інтегральна тотожність.

Сплайни застосовують для побудови сплайнових варіантів МСЕ в [87]. В роботах [273, 290] вони використовуються для побудови змішаних методів скінченних елементів.

При використанні методу скінченних смуг також застосовуються сплайни. Так, в статті [173] для розрахунку коробчатих балок мостів застосовується метод смуг, в якому функції переміщень представлені у вигляді добутку В-сплайнів третього і п'ятого степеня в повздовжньому напрямку.

В роботі [183] задача про динамічний згин ізотропних пластин довільної форми розв'язується методом смуг і вздовж смуги розв'язок апроксимується В-сплайнами третього степеня, а в іншому напрямку балочними функціями.

В статті [252] проведено короткий огляд розрахункових моделей за методом скінченних смуг в механіці будівельних конструкцій. Особлива увага приділяється застосуванню сплайн-функцій в методі скінченних смуг для розрахунку пластин і оболонок. Обговорюється динамічна розрахункова модель для аналізу коливань косих пластин з використанням сплайн-функцій.

В [250] сплайн-функції використовуються для дослідження власних частот відкритих циліндричних оболонок. Оболонка ідеалізується дискретними скінченними смугами вздовж твірної. Розв'язок вздовж твірної апроксимується базисними функціями, що задовольняють граничні умови на криволінійних контурах, а в коловому напрямку – В-сплайнами.

В роботі [239] застосовані нееквідистантні бікубічні В-сплайнові функції для представлення компонентів переміщень в комбінованих складених оболонках обертання.

В [115] вивчаються дискретні періодичні сплайни на рівномірній сітці і їх В-сплайнове представлення. Розв'язується задача інтерполяції. Запропонований підхід, в основі якого лежить дискретне перетворення Фур'є, дозволяє уникнути розв'язування систем рівнянь і приводить до явних виразів для коефіцієнтів сплайнів. Метод застосовується для розв'язування задачі про нескінченну циліндричну оболонку.

В роботі [180] розглянута задача аналізу напружено-деформованого стану і розрахунку на міцність при поперечному згині пологих оболонок із вільно опертими краями по В-сплайновому методу зважених залишків.

Поряд з відміченими підходами до розв'язання задач теорії пластин і оболонок широко застосовуються підходи, що базуються на використанні методу сплайн-колокації. Часто метод сплайн-колокації застосовується для зведення двовимірної задачі до одновимірної, яка розв'язується аналітично або чисельно [40, 54, 56].

В роботі [55] метод сплайн-колокації застосовується для розв'язання двовимірних крайових задач теорії пружності і задач геометрично нелінійної теорії пластин і оболонок. При розв'язуванні двовимірних задач в класичній постановці для апроксимації переміщень використовуються В-сплайни третього степеня, а прогинів – В-сплайни п'ятого степеня. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується методом дискретної ортогоналізації. Для дослідження напружено-деформованого стану шаруватих некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці використовуються співвідношення теорії оболонок, що базуються на гіпотезі прямої лінії для всього пакету шарів. Це дозволяє використати для апроксимації тільки В-сплайни третього степеня.

Огляд робіт з використанням такого підходу проведено в [191].

В роботі [149] дається розв'язок задачі про напружений стан термочутливих оболонок обертання за допомогою методу сплайн-колокації, де за базисні вибираються В-сплайни третього степеня.

В роботі [254] досліджується стійкість тонких прямокутних пластин змінної товщини, на які діють стискуючі сили на двох протилежних контурах, коли інші краї вільно оперті. За рахунок відокремлення змінних двовимірної задачі по одній з координат зводиться до нелінійної одновимірної, для розв'язання якої застосовується метод сплайн-колокації. Прогин апроксимується сплайнами п'ятого степеня.

В роботі [108] пропонується методика визначення напружено-деформованого стану некругової циліндричної оболонки з в'язко-пружного матеріалу, в основі якої лежить пониження розмірності вихідних рівнянь за допомогою методу сплайн-колокації і подальше розв'язування одновимірної крайової задачі методом дискретної ортогоналізації.

Розрахунку напруженого стану кругових циліндричних оболонок як сталої так і змінної товщини присвячено значну кількість робіт.

Широке застосування методу асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь теорії оболонок [28] стало основою для побудови наближеного розв'язання задач і проведення якісного аналізу напружено-деформованого стану циліндричних оболонок при різних навантаженнях.

В роботах [38, 93] докладно розглянуті задачі про деформацію циліндричних оболонок сталої і змінної товщини, під впливом осесиметричних і антисиметричних навантаження.

Циліндричні оболонки змінної товщини розглядались у статтях [12, 91, 176, 278, 288].

В роботі [297] обговорюються аналітичні розв'язки для осесиметричних переміщень при довільних граничних умовах і розподілених навантажен-

нях, що діють на циліндричні резервуари з вертикальною віссю і змінною товщиною стінки.

В роботі [18] пропонується використати аналітичний розв'язок для застосування в задачах деформування циліндричних оболонок.

В статті [296] отримано аналітичний розв'язок для задачі визначення показників напружено-деформованого стану в циліндричній оболонці під дією симетричного, частково розподіленого і самоврівноваженого навантаження на зовнішній поверхні.

В монографії [156] розглядаються циліндричні оболонки обертання змінної жорсткості при симетричних навантаженнях. Розв'язувальна система двох диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевого співвідношень заміняється алгебраїчною системою, розв'язання якої знаходиться методом прогонки.

Метод різницевої прогонки використовувався в роботі [128] для дослідження циклічно симетричної деформації циліндричної оболонки обертання.

Метод інтегральних матриць використовується в роботі [112] для чисельного розв'язання системи сумісних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують рівновагу кругової циліндричної оболонки в загальному випадку деформації.

В роботі [155] параметри напружено-деформованого стану кругової циліндричної оболонки змінної товщини при певних умовах на торцях представляються у вигляді рядів Фур'є, що дає змогу звести двовимірну крайову задачу до одновимірної.

Подвійні ряди Фур'є використовуються в статті [268] для знаходження напружено-деформованого стану тонкостінної циліндричної оболонки під дією радіального зусилля, прикладеного посередині.

В статті [230] рівняння технічної теорії циліндричних оболонок, що за-

писане в комплексній формі, приводиться до звичайного диференціального рівняння методом Фур'є, яке розв'язується аналітично для оболонки, навантаженої зосередженою радіальною силою.

Розклад в степеневі ряди пропонується в роботі [227] для розв'язування задач про НДС циліндричних оболонок.

В статті [109] для дослідження пружної рівноваги ізотропної циліндричної оболонки змінної товщини скінченної довжини використовується метод розкладу шуканих переміщень і напружень в ряди за поліномами Лежандра по товщинній координаті.

Матричний алгоритм розрахунку циліндричних оболонок запропонований в роботах [13, 105].

Метод скінченних елементів і його варіанти використовувався для розв'язання задач теорії циліндричних оболонок в роботах [185, 289].

Для розв'язання диференціальних рівнянь, що описують напружено-деформований стан замкнених циліндричних оболонок при різних видах навантаження, в монографії [157] перетворення Лапласа.

В статті [171] для рівнянь технічної теорії циліндричних оболонок використовується лінійне асимптотичне наближення по параметру ексцентриситету, який внутрішня циліндрична поверхня має по відношенню до зовнішньої.

Напружений стан циліндричної оболонки під дією нерівномірного зовнішнього тиску знаходиться методом асимптотичного синтезу в роботі [111].

В роботі [107] розроблена двовимірною дискретною моделлю циліндричної ізотропної оболонки. Використаний метод мінімізації нев'язок загальних рівнянь механіки, що дозволяє задовольнити основні рівняння фізики і варіаційні принципи механіки.

В [141] на основі одночасного застосування варіаційного і структурного методів розроблена методика розрахунків характеристик осесиметричного

напружено-деформованого стану циліндричних оболонок.

Метод граничних елементів використовується для розв'язання задачі про напружено-деформований стан кругових циліндричних оболонок в статті [270].

В [83] для розв'язання задачі про згин циліндричної оболонки під дією нерівномірного зовнішнього тиску використаний метод Бубнова у вищих наближеннях.

В [99] на прикладі кругової циліндричної оболонки проведено порівняння розв'язків, отриманих в класичній, уточненій та тривимірній постановках.

В статті [291] розглядається розподіл напружень в циліндричній оболонці з вільними торцями під дією нормального навантаження, що не змінюється по довжині оболонки. Задачу розглянуто з метою підтвердження припущення Тимошенко-Крігера про те, що у вказаному випадку переважають згинні деформації.

Для знаходження внутрішніх зусиль в короткій циліндричній оболонці в [156] пропонується методика з використанням функцій степеневого полінома із застосуванням системи відносних координат.

В роботі [159] розглядається замкнена циліндрична оболонка з ступінчасто-змінною товщиною стінки під дією розподіленого навантаження.

Для некругових циліндричних оболонок аналітичні розв'язки отримано, в основному, для простих форм перерізу і сталої товщини.

В монографії Новожилова [113] дано аналітичний розв'язок для замкнутої овальної оболонки, складеної з чотирьох плавно стикованих циліндричних панелей.

Методи розв'язування задач статички некругових циліндричних оболонок, що базуються на представленні розв'язку в одинарних і подвійних



тригонометричних рядах, розвинено в роботах [21, 67, 249, 271].

Оболонки з некруговим поперечним перерізом при шарнірному опиранні торців розглядались у [155] в класичній постановці. Цей же клас задач, але у уточненій постановці розглядався в монографії [47]. У цьому випадку для оболонки сталої товщини використовувалось представлення всіх факторів її НДС у вигляді рядів Фур'є. Такий підхід застосовано також у роботі [14].

Розв'язуванню задач про напружено-деформований стан некругових циліндричних оболонок присвячена монографія [48].

Рівняння технічної теорії пологих оболонок для розв'язання задач статички некругових циліндричних оболонок застосовувалось в статтях [241, 265].

Рівняння Муштарі-Доннелла-Власова використовуються для дослідження напружено-деформованого стану еліптичних і гофрованих оболонок змінної товщини в [51, 52]. В цих роботах застосовується метод сплайн-колокації в одному з напрямків, в результаті отримується одновимірна крайова задача, що розв'язується стійким чисельним методом.

Відкриті і замкнені ортотропні циліндричні оболонки сталої товщини з еліптичним поперечним перерізом на основі гіпотези прямої лінії досліджувались в [58]. В цій статті розв'язки апроксимувались вздовж твірної В-сплайнами третього степеня.

Деформація некругової циліндричної оболонки близької до кругової вивчалась методом малого параметра в [7]. Гофровані оболонки за допомогою методу малого параметру вивчались в [110].

Роботи [17, 74, 286] також присвячені дослідженню напружено-деформованого стану гофрованих циліндричних оболонок.

В роботі [181] для розв'язання задач статички некругових циліндричних оболонок використовувався метод асимптотичного інтегрування.

Розв'язування задач статички некругових циліндричних оболонок проводилось також в роботах [22, 129, 186].

Для ізотропної некругової циліндричної оболонки сталого товщини система звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методу прямих отримана в статті [119].

В роботі [137] розв'язок диференціального рівняння згину некругової замкнутої циліндричної оболонки в рядах зведено методом ортогоналізації до системи алгебраїчних рівнянь.

Метод скінченних елементів застосовувався для розв'язання задач про НДС некругових циліндричних оболонок в роботах [65, 294].

Огляд робіт, присвячених дослідженню напружено-деформованого стану некругових циліндричних оболонок, викладено в [277].

У наведених вище роботах НДС оболонок описується, в основному, в ортогональних системах координат, коли обмежувальні лінії співпадають з координатними. Проте на практиці часто виникають задачі, коли контур пластини чи циліндра зрізаний, або закріплений по косому контуру [98, 163].

У випадку таких контурів, очевидно, найпростішим виходом є застосування методу скінченних елементів. Проте, в роботах [23, 85–87] запропоновано підхід, що дає змогу за допомогою заміни змінних перейти від деякої складної області до прямокутної.

В [211, 236] за допомогою даного підходу розв'язано задачі про згин трапецеїдальних пластин.

Стаття [197] присвячена дослідженню НДС опуклої чотирикутної пластини загального вигляду з використанням теорії пластин типу Тимошенка. При цьому чотирикутна область за допомогою спеціальної заміни змінних зводиться до квадратної.

В роботі [174] досліджуються коливання трапецеїдальних пластини в класичній постановці і мембран із застосуванням такої ж заміни змінних.

Такий підхід може бути застосований і для циліндричних оболонок. Зокрема, в статті [209] досліджується НДС кругових циліндричних оболонок зі скісними зрізами в класичній постановці, а в [90] описано методику, що дає можливість за допомогою заміни змінних область розв'язання задачі для некругового циліндра зі скісними зрізами звести до прямокутної.

Широке використання циліндричних оболонок, як функціональних елементів сучасної акустoeлектроніки, обумовили значний інтерес до розрахунку їх динамічних характеристик. Для низькочастотної області, де відповідна довжина хвилі значно більша за характерний розмір конструктивного елемента – його товщину або радіус, досить точно дослідити динамічні характеристики об'єкта можна з використанням прикладних теорій оболонок [76, 165, 179, 226, 264, 272, 287]. Однак в разі досить товстих елементів, або коли передбачається його робота в високочастотній області немає досить обґрунтованих підстав використовувати прикладні теорії, тому задачу необхідно розглядати в тривимірній постановці.

У літературі відомі тільки окремі роботи, присвячені дослідженню коливань циліндрів, в постановці тривимірної теорії електропружності.

Істотна анізотропія п'єзокерамічного матеріалу в поєднанні з необхідністю враховувати зв'язане електричне поле приводить до досить складної в математичному сенсі задачі. Відзначимо, що аналітичний розв'язок даної задачі можливий лише за наявності певної симетрії в фізико-механічних властивостях матеріалу, способу навантаження, типу граничних умов і т.д. Це випадок осьової поляризації п'єзокераміки, коли функція навантаження на бічних поверхнях може бути розкладена в ряди по циліндричних функціях, а на торцях виконуються умови шарнірного опираювання. Або випадок крутильних коливань циліндра з коловою поляризацією п'єзокераміки. Розв'язання таких задач може бути виконано з використанням апарату спеціальних функцій [245, 246, 259–263].

Для більш загальної задачі відомі методи однорідних розв'язків і власних векторних функцій [60, 61, 143]. Однак реалізація цих методів припускає наявність повної інформації про всі корені (дійсні і комплексні) дисперсійного рівняння задачі про поширення електропружних хвиль в нескінченному циліндрі. Знаходження цих коренів само по собі є непростю задачею. Крім того, для отримання розв'язку їх потрібно певним чином комбінувати один з одним. Процес цей не простий і, що більш важливо, може бути важко реалізованим у вигляді готового алгоритму для написання комп'ютерної програми.

Тому основними методами для розв'язання подібних задач є чисельні. Це добре відомі метод скінченних елементів, скінченно різницевий, варіаційно-різницевий, метод сплайн-колокації тощо [166, 192, 194, 195, 228, 231, 232, 266, 267, 275, 276, 281]. До переваг останнього методу слід віднести можливість досліджувати динамічні процеси в конструкційних елементах, виготовлених з функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ).

З появою нових ФГМ і їх широкого застосування в конструкціях зростає зацікавленість дослідників до їх напружено-деформованого стану та динамічних характеристик.

Основні особливості фізико-механічної будови функціонально градієнтних матеріалів на основі різноманітних композицій наведено в [168, 235, 248, 271, 280].

В [184] запропоновано розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для аналізу функціонально градієнтних циліндрів із профілем змінної товщини. Осесиметрична структура розділена на кілька частин у радіальному напрямку. Механічні властивості та профіль товщини передбачаються сталими в кожній частині. Розв'язок дано для чотирьох різних профілів товщини, а саме сталої, лінійно змінної, увігнутої та опуклої.

В статті [233] дано розв'язок тривимірної задачі теорії пружності для

функціонально градієнтної шарнірно опертої пластини під дією поперечного навантаження. Передбачається, що модуль Юнга пластини змінюється в геометричній прогресії по товщині, а коефіцієнт Пуассона вважається сталим. Цей підхід використовує загальний розв'язок рівнянь рівноваги В.П. Плевако для неоднорідних ізотропних середовищ.

Робота [295] присвячена аналогічній задачі для трансверсально ізотропної функціонально градуйованої пластини, з модулями Юнга та зсуву, що експоненціально змінюються по товщині, а коефіцієнти Пуассона є сталими. В цій статі використано розроблені функції переміщення для неоднорідних трансверсально ізотропних середовищ.

В [167] розроблено і реалізовано градієнтний метод скінченних елементів, що базується на енергетичному підході Релея-Рітца, для вивчення пружної поведінки шаруватої пластини, навантаженої ізотропним циліндром та функціонально градієнтним прошарком. Неосесиметричне навантаження, що діє всередині циліндра, викликає концентрацію напружень у гнучкій частині з'єднання. Досліджено вплив різної товщини та степеневих показників функціонально градієнтного прошарку на розподіл переміщень та напружень для перевірки здатності функціонально градієнтного матеріалу керувати хвилями напружень та переміщень. Часовий відгук структури отримано на основі методу Ньюмарка.

В [189] запропоновано підхід до дослідження вільних коливань порожнистого циліндра з різними граничними умовами на основі тривимірної теорії пружності. Метод сплайн-колокації використовуються для зведення диференціальних рівнянь теорії пружності до систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку вздовж радіальної координати. Ці рівняння розв'язуються стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації з покроковим пошуком.

Неосесиметричну задачу про вільні коливання порожнистої кулі з фун-

кціонально градієнтного п'єзоелектричного матеріалу розв'язано на основі тривимірних рівнянь електропружності в [194]. Властивості матеріалу в цьому випадку неперервно змінюються вздовж радіальної координати відповідно до експоненціального закону. Зовнішня поверхня кулі вільна від напружень і ізольована або короткозамкнена електродами. Після відокремлення змінних та представлення компонент переміщень і тензора напружень через сферичні функції, тривимірна задача зводиться до крайової задачі на власні значення, що представлена звичайними диференціальними рівняннями. Одновимірна крайова задача розв'язується так само як і в попередній роботі.

В статті [172] проведено тривимірний аналіз вільних коливань багатошарової сферично ізотропної порожнистої кулі за допомогою методу простору станів. Завдяки введенню трьох функцій переміщень та двох функцій напружень виведено два незалежних рівняння стану зі змінними коефіцієнтами. Застосовано теорему про розвинення в ряд Тейлора для отримання розв'язків двох рівнянь стану та встановлення взаємозв'язків між змінними стану на верхній і нижній поверхнях. Для спрощення вказаної процедури використано метод заміни змінних.

Робота [256] присвячена теоретичному аналізу функціонально градієнтної магніто- електро- термопружної порожнистої кулі при рівномірному нагріванні поверхні. Проаналізована перехідна термопружна задача для функціонально градієнтної порожнистої кулі, виготовленої з ізотропних магніто- електро- термопружних матеріалів з використанням моделі шаруватого композиту як одного з теоретичних наближень у сферично-симетричному стані. Для ілюстрації проведено чисельні розрахунки для функціонально градієнтної порожнистої кулі, виготовленої з п'єзоелектричних та магнітострикційних матеріалів, та досліджено її поведінку в перехідному стані.

В літературі найчастіше зустрічаються розв'язки тривимірних задач теорії пружності для найуживаніших систем координат: декартової, циліндричної і сферичної [49], і, очевидно, серед досліджень присвячених просторовим циліндричним тілам першість мають кругові циліндри. Однак, і некругові циліндри також привертали увагу дослідників.

Так, зокрема, аналітичні підходи до розв'язання тривимірних задач про НДС циліндричних оболонок з параболічним поперечним перерізом наведено в [123, 143, 144].

Розрахунку НДС гофрованих циліндрів в тривимірній постановці методом малого параметра присвячені роботи [110, 255].

В [293] потенціальні рівняння руху пружного тіла використовуються для вивчення поширення гармонічних згинальних хвиль у нескінченному стержні еліптичного перерізу з поверхнею без напружень. При цьому, використовуючи відокремлені розв'язки цих рівнянь, отримано рівняння частоти у вигляді нескінченного визначника, що дорівнює нулю. Елементи визначника містять функції Мат'є та їх похідні.

Метод відокремлення змінних в еліптичних координатах у поєднанні з теоремами про поступальне додавання функцій Мат'є використовується в [223] для дослідження вільних згинальних коливань повністю зацемленої тонкої пружної еліптичної панелі, що містить еліптичний виріз довільного розміру, розташування та орієнтації.

В [224] тривимірні рівняння руху Нав'є в переміщеннях використовуються для опису вільних коливань шарнірно опертого пружного ізотропного еліптичного циліндра скінченної довжини. Застосовується теорема про розклад Гельмгольца і класична техніка відокремлення змінних в еліптичних координатах для розв'язання подальших незв'язаних розв'язувальних диференціальних рівнянь як добутоків звичайних і модифікованих функцій Мат'є.

Такий же підхід використано для розв'язання задачі про вільні коливання пружного ізотропного еліптичного циліндра з довільно розміщеною еліптичною порожниною в [225].

Стаття [170] присвячена дослідженню вільних коливань еліптичної мембрани за допомогою МСЕ. Причому 9 вузлові елементи будуються в еліптичній системі координат.

В статтях [218, 219] розглянуто підхід до визначення напруженого стану товстостінних циліндричних оболонки некругового перерізу. Запропонований підхід базується на зведенні тривимірної задачі теорії пружності до послідовності одновимірних задач шляхом відокремлення змінних вздовж твірної та різницевого наближення по товщині оболонки. Одновимірні крайові задачі вздовж напрямної розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації.

В роботі [200] цей підхід в поєднанні з методом покрокового пошуку поширено на задачу про власні коливання некругових циліндрів у тривимірній постановці, а в [190] – на задачу про поширення хвиль.

В [216] запропоновано підхід до розв'язання тривимірної крайової задачі для пружних порожнистих неоднорідних циліндрів гофрованого поперечного перерізу. Граничні умови на торцях дозволяють відокремити змінні по довжині. Пропонується включити додаткові функції до отриманої системи диференціальних рівнянь. За допомогою обчислення їх коефіцієнтів за допомогою рядів Фур'є від дискретно заданих функцій отримано одновимірну крайову задачу за радіальною координатою, яку розв'язано методом дискретної ортогоналізації.

Цей же підхід використано для розв'язання задач про НДС циліндрів з іншими поперечними перерізами в [212–215, 217].

Даний огляд наукової літератури показує доцільність та актуальність проведення досліджень в обраному напрямку.



## Розділ 2

# ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ І УТОЧНЕНОЇ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

В даному розділі представлені основні співвідношення просторової теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла та уточненої зсувної теорії оболонок першого порядку типу Тимошенка (підрозділ 2.1, 2.2). Ці співвідношення в наступних розділах використовуються для побудови механіко-математичної моделі напружено-деформованого стану (НДС) циліндричних та сферичних товстостінних оболонок, що розглядаються в дисертації.

Наводяться основні відомості про сплайн-функції, методи сплайн-колокції та дискретної ортогоналізації стосовно розв'язання крайових задач для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами (підрозділ 2.3).

Застосування описаних методів ілюструється на розв'язанні задач статки для окремих класів оболонок і пластин (підрозділ 2.4). Розглянуто зокрема: шаруваті ортотропні пологі панелі (підрозділ 2.4.1), опуклі чотирикутні пластини складної форми (підрозділ 2.4.2) та товстостінні прямокутні пластини-плити в тривимірній постановці теорії пружності (підрозділ 2.4.3). Для пластин складної форми попередньо проводиться перетворення координат декартової системи для приведення заданої форми області до

одиничного квадрата.

При розв'язанні тривимірної задачі статки для товстої прямокутної плити використовується апроксимація шуканого розв'язку сплайн-функціями в двох координатних напрямках. Для оцінки достовірності розв'язків, одержаних за методами сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації, додатково залучаються метод скінченних елементів (підрозділ 2.4.2) та метод розвинення в ряди Фур'є при спеціальних умовах на обмежуючих площинах товстостінної пластини (підрозділ 2.4.3).

## 2.1 Співвідношення просторової теорії пружності в ортогональних системах координат

Наряду з декартовою системою координат в теорії пружності використовуються криволінійні системи координат. Застосування криволінійних координат обумовлено як формою поверхонь, що обмежують тіла, так і зручністю розв'язування відповідних задач математичної фізики [49].

В криволінійній системі координат положення будь-якої точки  $M$  просторового тіла однозначно визначається трьома числами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Величини  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , що називаються криволінійними координатами, зв'язані з декартовими координатами  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  функціональними співвідношеннями:

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3), \quad \beta = \beta(x_1, x_2, x_3), \quad \gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3). \quad (2.1)$$

Так як положення точки  $M$  в просторі є цілком визначеним, коли задано величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , то також мають місце обернені залежності:

$$x_1 = x_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad x_2 = x_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad x_3 = x_3(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.2)$$

де  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  – однозначні функції параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Співвідношення лінійної теорії пружності мають найпростіший вигляд

в криволінійних ортогональних системах координат, тобто в таких, коли в кожній точці  $M$  координатні лінії  $\alpha, \beta, \gamma$  взаємно ортогональні. В таких системах вираз для квадрата довжини лінійного елемента має вигляд:

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2 + H_3^2 d\gamma^2. \quad (2.3)$$

Величини  $H_1, H_2, H_3$  – в загальному випадку є функціями координат  $\alpha, \beta, \gamma$ , називаються коефіцієнтами Ламе і визначаються так:

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\right)^2; \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)^2; \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \gamma}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Розглянемо деякі системи координат, що часто застосовуються при розв'язанні задач теорії пружності.

Циліндричні тіла доцільно досліджувати в циліндричній системі координат  $\alpha = z, \beta = \theta, \gamma = r$ . Координатні поверхні – кругові циліндри  $r = const$ , площини  $\theta = const$ , що проходять через вісь  $z$ , і площини  $z = const$ , перпендикулярні до осі  $z$ . У цьому випадку співвідношення (2.2) будуть мати вигляд:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (2.5)$$

Коефіцієнти Ламе мають значення:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1. \quad (2.6)$$

Сферичні тіла зручно розглядати в сферичній системі координат  $\alpha = \theta$ ,  $\beta = \varphi$ ,  $\gamma = r$ . Координатними поверхнями є сфери  $r = \text{const}$ , конуси  $\varphi = \text{const}$  з вершиною в початку координат, площини  $\theta = \text{const}$ , що проходять через вісь  $z$ .

Співвідношення (2.2) запишуться у вигляді:

$$x_1 = r \sin \varphi \cos \theta, x_2 = r \sin \varphi \sin \theta, x_3 = r \cos \varphi, \quad (2.7)$$

а коефіцієнти Ламе відповідно рівні

$$H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \varphi. \quad (2.8)$$

В декартовій системі координат коефіцієнти Ламе мають значення:

$$H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 1. \quad (2.9)$$

При деформації тіла при дії прикладених навантажень переміщення його точок характеризуються величинами  $u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $u_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ , які є проекціями вектора повного переміщення  $\bar{U}$  на напрямки, що дотичні до координатних ліній  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  відповідно.

Деформація кожної точки  $M$  просторового тіла описується величинами  $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_{\alpha\beta}, e_{\beta\gamma}, e_{\alpha\gamma}$ . Перші з трьох вказаних величин – це відносні лінійні деформації у напрямках координатних ліній, решта – відносні зсуви, що відбуваються в площинах, дотичних до координатних поверхонь в точці, що розглядається. Зв'язок між переміщеннями та деформаціями в довільній точці тіла задаються геометричними співвідношеннями Коші і мають такий вигляд:

$$e_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} u_\gamma$$

$$\begin{aligned}
e_\beta &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} u_\gamma, \\
e_\gamma &= \frac{1}{H_\gamma} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_\alpha H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_\beta H_\gamma} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} u_\beta, \\
e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\beta}{H_\beta} \right) \right), \\
e_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{H_\alpha}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\alpha}{H_\alpha} \right) + \frac{H_\gamma}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_\gamma}{H_\gamma} \right) \right), \\
e_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{H_\beta}{H_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\beta}{H_\beta} \right) + \frac{H_\gamma}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\gamma}{H_\gamma} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Напружений стан в прийнятій системі координат характеризується величинами  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\alpha}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\gamma\alpha}, \sigma_{\gamma\beta}, \sigma_{\beta\gamma}$ . Перші три величини  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$  – нормальні напруження, що діють на площадках, перпендикулярних координатним лініям  $\alpha, \beta, \gamma$  відповідно, решта – дотичні напруження, що діють по вказаних площадках. З закону парності дотичних напружень слідує, що  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}, \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\gamma\alpha}, \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\beta}$ .

При наявності масових сил  $\bar{F}\{F_\alpha, F_\beta, F_\gamma\}$  рівняння рівноваги запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\gamma}) - \sigma_\beta H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - \\
&\quad - \sigma_\gamma H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \sigma_{\alpha\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} + F_\alpha H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_{\beta\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) - \sigma_\gamma H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} - \\
&\quad - \sigma_\alpha H_\gamma \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + \sigma_{\beta\gamma} H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \sigma_{\alpha\beta} H_\gamma \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + F_\beta H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial \gamma}(H_\alpha H_\beta \sigma_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_\beta H_\gamma \sigma_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_\alpha H_\gamma \sigma_{\beta\gamma}) - \sigma_\alpha H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial \gamma} - \\
&\quad - \sigma_\beta H_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial \gamma} + \sigma_{\alpha\gamma} H_\beta \frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \sigma_{\beta\gamma} H_\alpha \frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} + F_\gamma H_\alpha H_\beta H_\gamma = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

В (2.11)  $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$  – проекції вектора масових сил на напрямки, що дотичні до координатних ліній  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Будемо розглядати тіла, матеріал яких є пружним і для анізотропного неоднорідного тіла відповідає узагальненому закону Гука, що зв'язує між собою компоненти деформації  $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_{\alpha\beta}, e_{\beta\gamma}, e_{\alpha\gamma}$  та напруження  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\alpha}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\gamma\alpha}, \sigma_{\gamma\beta}, \sigma_{\beta\gamma}$  [92].

Для ортотропного тіла узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= c_{11}e_\alpha + c_{12}e_\beta + c_{13}e_\gamma, \quad \sigma_\beta = c_{12}e_\alpha + c_{22}e_\beta + c_{23}e_\gamma, \\ \sigma_\gamma &= c_{13}e_\alpha + c_{23}e_\beta + c_{33}e_\gamma, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2c_{44}e_{\alpha\beta}, \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= 2c_{55}e_{\alpha\gamma}, \quad \sigma_{\beta\gamma} = 2c_{66}e_{\beta\gamma},\end{aligned}\tag{2.12}$$

де  $c_{ij}$  – елементи матриці жорсткості.

Для ізотропного тіла:

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda, \\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu},\end{aligned}\tag{2.13}$$

$E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\lambda$  і  $\mu$  – параметри Ламе, що визначають матеріальні константи пружності.

Для однозначного визначення всіх факторів НДС тіла – переміщень, деформацій та напружень – на його обмежуючих координатних поверхнях  $\alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_0, \gamma = \gamma_1$  задаються певні граничні умови. Вони можуть бути сформульовані в переміщеннях, напруженнях або змішаному вигляді.

Так, наприклад,

$$\begin{aligned}\text{при } \alpha = \alpha_i : u_\alpha &= u_{\alpha i}, u_\beta = u_{\beta i}, u_\gamma = u_{\gamma i}, \\ \sigma_\alpha &= q_{\alpha i}, \sigma_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta i}, \sigma_{\alpha\gamma} = q_{\alpha\gamma i}; \\ \text{при } \beta = \beta_i : u_\alpha &= u_{\alpha i}, u_\beta = u_{\beta i}, u_\gamma = u_{\gamma i}, \\ \sigma_\beta &= q_{\beta i}, \sigma_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta i}, \sigma_{\beta\gamma} = q_{\beta\gamma i};\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \gamma = \gamma_i : u_\alpha &= u_{\alpha i}, u_\beta = u_{\beta i}, u_\gamma = u_{\gamma i}, \\ \sigma_\gamma &= q_{\gamma i}, \sigma_{\beta\gamma} = q_{\beta\gamma i}, \sigma_{\alpha\gamma} = q_{\alpha\gamma i} \quad (i = 0, 1). \end{aligned}$$

Для повноти постановки задач наведемо вираз потенціальної енергії деформації, коли на поверхні  $\alpha = \alpha_0$  задано напруження

$$\sigma_\alpha |_{\alpha=\alpha_0} = q(\beta, \gamma), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{\beta_0}^{\beta_1} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_\beta e_\beta + \sigma_\gamma e_\gamma) + \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\gamma} e_{\alpha\gamma} + \sigma_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma} \right\} \times \\ \times H_\alpha H_\beta H_\gamma d\alpha d\beta d\gamma - \int_{\beta_0}^{\beta_1} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} q(\beta, \gamma) u_\alpha H_\beta H_\gamma d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Геометричні співвідношення (2.10), рівняння рівноваги (2.11), фізичні співвідношення (2.12) та граничні умови (2.14) є основою для побудови механіко-математичної моделі в диференціальній постановці по визначенню НДС просторових ортотропних тіл в криволінійних ортогональних системах координат. Вираз для потенціальної енергії (2.16) є основою для визначення НДС в варіаційній постановці.

## 2.2 Співвідношення уточненої теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямої лінії

### 2.2.1 Співвідношення теорії пружності для оболонок

Будемо розглядати оболонки, що складаються з ортотропного матеріалу, для якого виконується узагальнений закон Гука. Деформація оболонки розглядається під дією розподілених поверхневих і контурних навантажень.

Наведемо основні рівняння теорії пружності, що описують напружено-деформований стан оболонки [47].

Віднесемо оболонку до спеціально вибраної системи координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . При чому за початкову вибираємо деяку координатну поверхню, віднесену до ортогональної спряженої системи координат  $\alpha_1, \alpha_2$ . Координата  $\alpha_3$  відраховується по нормалі до цієї координатної поверхні. Товщина оболонки  $h$  відраховується від координатної поверхні в напрямку координати  $\alpha_3$  і у загальному випадку є змінною, тобто  $h = h(\alpha_1, \alpha_2)$ .

У вибраній системі координат для квадрату довжини лінійного елемента справедливий вираз:

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + H_3^2 d\alpha_3^2, \quad (2.17)$$

Нехай  $k_1 = k_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $k_2 = k_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – головні кривини координатної поверхні, що визначаються як величини, обернені до головних радіусів  $R_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $R_2(\alpha_1, \alpha_2)$ . Коефіцієнти Ламе у цьому випадку визначаються формулами:

$$H_1 = A_1(1 + k_1\alpha_3), \quad H_2 = A_2(1 + k_2\alpha_3), \quad H_3 = 1 \quad (2.18)$$

і зв'язані між собою диференціальними залежностями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3}, \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Величини  $A_1$  і  $A_2$  – коефіцієнти першої квадратичної форми вибраної координатної поверхні оболонки, що визначаються через прямокутні де-



картові координати  $x_1, x_2, x_3$  за формулами:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right)^2}; \\ A_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right)^2}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

Якщо у співвідношення (2.19) підставити (2.18) і покласти  $\alpha_3 = 0$ , то одержимо рівняння Кодаці-Гаусса, що зв'язують в диференціальній формі головні кривини поверхні і коефіцієнти її першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) &= -k_1 k_2 A_1 A_2, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 k_2) &= k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 k_1) &= k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

При деформації переміщення точок оболонки визначаються трьома проекціями:  $\tilde{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\tilde{u}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\tilde{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  вектора переміщення  $\bar{U}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  на напрямки  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  відповідно.

Деформований стан в околі заданої точки оболонки описується відносними деформаціями розтягу (стиску)  $e_1, e_2, e_3$  і відносними деформаціями зсуву  $e_{12}, e_{13}, e_{23}$ . Складові деформації, що утворюють симетричний тензор другого рангу, задовольняють залежності, які справедливі при будь-яких значеннях переміщень  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ .

З переміщеннями  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$  компоненти деформації зв'язані такими виразами:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \tilde{u}_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \tilde{u}_3, \\ e_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \tilde{u}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \tilde{u}_3, \end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \alpha_3}, e_{12} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\tilde{u}_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\tilde{u}_2}{H_2} \right), \quad (2.22)$$

$$e_{23} = H_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{\tilde{u}_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \alpha_2}, e_{13} = H_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{\tilde{u}_1}{H_1} \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \alpha_1}.$$

Напружений стан в системі координат, що розглядається, визначається трьома нормальними напруженнями:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  і шістьма дотичними напруженнями  $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{32}$ , для яких справедливий закон парності дотичних напружень  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ .

Компоненти напружень в оболонці, що знаходиться у рівновазі під дією поверхневих і об'ємних сил, задовольняють три диференціальні рівняння рівноваги, що мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_1) - \sigma_2 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1^2 \sigma_{12}) + \\ & + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1^2 H_2 \sigma_{13}) + H_1 H_2 p_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_2) - \sigma_1 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2^2 \sigma_{12}) + \\ & + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2^2 \sigma_{23}) + H_1 H_2 p_2 = 0, \quad (2.23) \\ & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_3) - \sigma_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} - \sigma_2 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{23}) + H_1 H_2 p_3 = 0, \end{aligned}$$

де  $p_1, p_2, p_3$  – проєкції вектора об'ємних сил на напрямки  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  відповідно.

Так як розглядаються анізотропні матеріали, у яких в кожній точці існують три ортогональні площини пружної симетрії, закон Гука для цього виду пружної симетрії (ортотропії) має вигляд:

$$e_1 = a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + a_{13}\sigma_3,$$

$$e_2 = a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + a_{23}\sigma_3,$$

$$e_3 = a_{13}\sigma_1 + a_{23}\sigma_2 + a_{33}\sigma_3, \quad (2.24)$$

$$e_{23} = a_{44}\sigma_{23}, e_{31} = a_{55}\sigma_{31}, e_{12} = a_{66}\sigma_{12}.$$

Пружні константи, що входять у ці вирази, визначаються через технічні сталі матеріалу:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}, a_{22} = \frac{1}{E_2}, a_{33} = \frac{1}{E_3}, a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \\ a_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_3} = -\frac{\nu_{31}}{E_1}, a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_2} = -\frac{\nu_{23}}{E_3}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, a_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

У виразах (2.25)  $E_1, E_2, E_3$  – модулі пружності по напрямках  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  відповідно,  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  – модулі зсуву для площин, паралельних координатним поверхням  $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const, \alpha_3 = const$ ;  $\nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  – коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечний стиск при розтягу в напрямку осей координат.

При розв'язуванні задач для оболонок необхідно задовольняти умови на поверхнях  $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const, \alpha_3 = const$ . Ці умови в кожному конкретному випадку в залежності від способу прикладання навантаження або закріплення обмежуючих поверхонь записуються у напруженнях, переміщеннях або у змішаному вигляді.

### 2.2.2 Суть гіпотези прямолінійного елемента та перехід від тривимірної постановки задачі до двовимірної

За вихідні будемо приймати співвідношення уточненої теорії оболонок, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента, яка полягає в тому, що

- 1) прямолінійний нормальний до координатної поверхні елемент оболонки залишається прямолінійним, але не перпендикулярним до деформова-

ної координатної поверхні, при цьому не змінюючи свою довжину;

- 2) нормальними напруженнями на площадках, паралельних до координатної поверхні, можна знехтувати порівняно з аналогічними напруженнями на площадках, перпендикулярних їй.

У відповідності до прийнятої гіпотези [47] отримуємо лінійний закон розподілу переміщень по товщині:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\psi_1; \\ \tilde{u}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\psi_2; \\ \tilde{u}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= w(\alpha_1, \alpha_2)\end{aligned}\tag{2.26}$$

У цих виразах  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  – переміщення точок координатної поверхні в напрямках  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  відповідно;  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  – повні кути повороту прямолінійного елемента.

Підставляючи прийнятий закон розподілу переміщень по товщині оболонки (2.26) в формули (2.22), враховуючи, що розглядаються відносно тонкі оболонки, і зберігаючи у виразах для деформацій тільки лінійні члени по  $\alpha_3$ , приходимо до таких виразів

$$\begin{aligned}e_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \varepsilon_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\kappa_1(\alpha_1, \alpha_2), \\ e_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \varepsilon_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\kappa_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ e_{12}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \varepsilon_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_32\kappa_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \\ e_{13}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2), e_{23}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2),\end{aligned}\tag{2.27}$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w;$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right); \\
\kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\psi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\alpha_2} - k_1 \varepsilon_1; \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\psi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\alpha_1} - k_2 \varepsilon_2; \\
2\kappa_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\psi_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\psi_2}{A_2} \right) - \\
&\quad - \frac{k_1}{A_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{k_2}{A_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right); \\
\gamma_1 &= \psi_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1; \quad \gamma_2 = \psi_2 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Величини, що входять в (2.28) мають такий геометричний зміст:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  характеризують розтяг (стиск) координатної поверхні по напрямках  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $\varepsilon_{12}$  – зсуви;  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$  – деформацію згину та скручування;  $\gamma_1, \gamma_2$  – кути повороту прямолінійного елемента, зумовлені поперечними зсувами.

У відповідності до основної ідеї зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної задачі про деформацію серединної поверхні замість напружень вводяться статично еквівалентні їм величини – зусилля і моменти:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1(1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3; \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2(1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3; \\
N_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}(1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3; \quad N_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{21}(1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3; \\
Q_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}(1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3; \quad Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23}(1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3; \\
M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1(1 + k_2 \alpha_3) \alpha_3 d\alpha_3; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2(1 + k_1 \alpha_3) \alpha_3 d\alpha_3;
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}(1 + k_2\alpha_3)\alpha_3 d\alpha_3; M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{21}(1 + k_1\alpha_3)d\alpha_3.$$

В цих виразах  $N_1, N_2$  – нормальні тангенціальні зусилля;  $N_{12}, N_{21}$  – зсуваючі тангенціальні зусилля;  $Q_1, Q_2$  – перерізуючі зусилля;  $M_1, M_2$  – згинаючі моменти;  $M_{12}, M_{21}$  – скручуючі моменти.

Рівняння рівноваги елемента координатної поверхні будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2N_1) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_2 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_{21}) + \\ & + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{12} + A_1A_2k_1Q_1 + A_1A_2q_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1N_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2N_{12}) + \\ & + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{21} + A_1A_2k_2Q_2 + A_1A_2q_2 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2Q_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1Q_2) - A_1A_2k_1N_1 - A_1A_2k_2N_2 + A_1A_2q_3 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_1) - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2 + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1M_{21}) + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{12} - A_1A_2Q_1 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(A_1M_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_1 + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(A_2M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{21} - A_1A_2Q_2 = 0, \\ & N_{12} - k_2M_{21} - N_{21} + k_1M_{12} = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Величини  $q_1, q_2, q_3$  визначаються через компоненти навантаження, що діють на лицевих поверхнях оболонки.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок, коли координа-

тна поверхня є серединною мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2, N_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2, \\
 N_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12} + 2k_2D_{66}\varkappa_{12}, N_{21} = C_{66}\varepsilon_{12} + 2k_1D_{66}\varkappa_{12}, \\
 M_1 &= D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2, M_2 = D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2, \\
 M_{21} &= M_{12} = 2D_{66}\varkappa_{12}, Q_1 = K_1\gamma_1, Q_2 = K_2\gamma_2,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

де

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_1h}{1 - \nu_1\nu_2}, C_{12} = \nu_2C_{11}, C_{22} = \frac{E_2h}{1 - \nu_1\nu_2}, \\
 C_{66} &= G_{12}h, D_{11} = \frac{E_1h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}, D_{12} = \nu_2D_{11}, \\
 D_{22} &= \frac{E_2h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}, D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}, K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}, K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}.
 \end{aligned}$$

Тут  $C_{ij}$ ,  $K_i$ ,  $D_{ij}$  — приведені до серединної поверхні жорсткісні характеристики оболонки, що визначаються її товщиною та пружними властивостями матеріалу.

Повна система співвідношень – геометричних (2.28), статичних (2.30) та фізичних (2.31) – з залученням умов на граничних контурах дозволяє сформулювати лінійну крайову задачу по визначенню НДС оболонок змінної товщини на основі зсувної теорії Тимошенка.

### 2.3 Методи розв'язання задач

Наведені в підрозділі 2.2 основні співвідношення просторової теорії пружності для неоднорідного ортотропного тіла та уточненої теорії Тимошенка для оболонок різної форми зі змінною товщиною дозволяють сформулювати тривимірні і двовимірні лінійні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описують НДС цих об'єктів. Для розв'язання вказаних задач розробляється

чисельно-аналітичний (дискретно-континуальний) підхід, що базується на використанні методу сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Деякі загальні відомості про ці методи наводяться далі.

### 2.3.1 Деякі відомості про сплайн-функції і метод сплайн-колокації

Сплайном називають функцію, що складається з частин узагальнених поліномів по заданому базису [1, 69]. Найбільш поширені поліноміальні сплайни, для яких за базисні функції вибрані функції  $1, x, x^2, \dots$ . Далі обмежимося розглядом поліноміальних сплайнів.

Нехай на відрізку  $[x_0, x_N]$  задана сітка  $\Delta : x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N$

Поліноміальним сплайном  $S_m(x)$   $m$ -го степеня, визначеним на сітці  $\Delta$ , будемо називати функцію, яка є многочленом степеня  $m$ , на кожному інтервалі  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, N-1}$  і  $m-1$  раз неперервно диференційовна на всьому відрізку  $[x_0, x_N]$ .

Найпростішим прикладом сплайну є одинична функція Хевісайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Іншим прикладом може бути зрізана степенева функція

$$x_+^m = x^m \theta(x) = \begin{cases} x^m, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Сплайн  $S_m(x)$  називається інтерполяційним поліноміальним сплайном, що інтерполює функцію  $f(x)$  на сітці  $\bar{\Delta}$ , якщо він є многочленом степеня  $m$  на кожному відрізку  $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, N-1}$  і задовольняє умови  $S_m(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i)$ ,  $i = \overline{0, N}$ . При цьому вузли сітки  $\Delta$  називають вузлами сплайна, а



вузли сітки  $\bar{\Delta}$  – вузлами інтерполяції.

Однак при побудові інтерполяційного сплайна виникають труднощі обчислювального характеру. Для того, щоб їх уникнути, найчастіше для розв'язування задач використовують апарат  $B$ -сплайнів.

Розширимо сітку  $\Delta : x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N$  допоміжними точками  $x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0, x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$  і будемо розглядати сітку

$$\Delta_1 : x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_{-1} < \dots < x_{N-1} < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m},$$

де  $x_{-1} = x_0 - i(x_1 - x_0), x_{N+i} = x_N + i(x_N - x_{N-1}), i = \overline{1, m}$ .

Введемо функцію  $\varphi_m(x, t) = (-1)^{m+1}(m+1)(x-t)_+^m$ . Побудуємо для неї розділені різниці  $m+1$ -го порядку по значеннях аргумента  $t = x_i, \dots, x_{i+m+1}$ . Тоді одержимо функції змінної  $x$  такого вигляду:

$$\tilde{B}_m^i = \varphi_m[x; x_i, \dots, x_{i+m+1}], i = -m, \dots, N-1. \quad (2.34)$$

Ці функції називаються базисними сплайнами або  $B$ -сплайнами степеня  $m$ .

Якщо використати тотожність

$$(x-t)_+^m = (x-t)^m + (-1)^{m+1}(t-x)_+^m, \quad (2.35)$$

то можна отримати інший вид запису (2.34):

$$\tilde{B}_m^i(x) = (m+1) \sum_{p=i}^{i+m+1} \frac{(x_p - x)_+^m}{\omega'_{m+1,i}(x_p)} (i = -m, \dots, N-1), \quad (2.36)$$

де  $\omega_{m+1,i}(t) = \prod_{j=1}^{i+m+1} (t - x_j)$ .

При практичних обчисленнях зручно використовувати не самі  $B$ -сплайни, а нормалізовані  $B$ -сплайни, які мають вигляд

$$B_m^i(x) = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1} \tilde{B}_m^i(x). \quad (2.37)$$

Для нормалізованих В-сплайнів має місце рекурентна формула

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x), \quad (2.38)$$

яка може використовуватись як означення В-сплайнів. При цьому:

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases} \quad (2.39)$$

Система функцій  $B_m^i(x)$  ( $i = -m, \dots, N-1$ ) є лінійно незалежною і утворює базис в просторі сплайнів  $S_m(\Delta)$ . Це означає, що кожен сплайн  $S_m(x) \in S_m(\Delta)$  може бути єдиним способом записаний у вигляді

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} b_i B_m^i(x), \quad (2.40)$$

де  $b_i$ — деякі сталі коефіцієнти.

Сплайни  $B_m^i(x)$  мають такі властивості:

$$\text{а) } B_m^i(x) = \begin{cases} > 0, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ \equiv 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}); \end{cases}$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} B_m^i(x) dx = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1}.$$

Розглянемо рівномірну розширену сітку

$$\Delta' : x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < \dots < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m} (x_{k+1} - x_k = h = \text{const}).$$

Якщо нумерувати сплайни по їх середньому вузлу і записати  $B_m^i(x)$  замість  $B_m^{i - (m+1)/2}(x)$ , тобто зсунути нумерацію на  $(m+1)/2$  одиниць вправо,

то перші два сплайни непарного степеня можна записати так:

$B$ -сплайни першого степеня

$$B_1^i(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-1}, \\ t, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 1 - t, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x < \infty; \end{cases} \quad (2.41)$$

$B$ -сплайни третього степеня

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-2}, \\ t^3, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 3t^3 - 6t^2 + 4, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ (1 - t)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0, & x_{i+2} \leq x < \infty; \end{cases} \quad (2.42)$$

де  $t = \frac{x - x_k}{h}$  на відрізку  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = i = -\frac{m+1}{2}$ ,  $i + \frac{m+1}{2} - 1$ .

Наведемо приклад побудови  $B$ -сплайнів до третього степеня включно, прийнявши сітку вузлів рівномірною в межах від 0 до 10 з кроком 1.

Використовуючи означення для  $B$ -сплайну нульового степеня  $B_0^i(x)$ , отримати відповідні значення легко: на рис. 2.1 зображені графіки 1-го, 3-го та 8-го  $B$ -сплайнів нульового степеня. Далі, використовуючи рекурентну формулу (2.38), отримаємо  $B$ -сплайни першого степеня з номерами 1, 3 та 8 (рис. 2.2). При цьому видно, якщо для  $B$ -сплайнів нульового степеня достатньо задати два вузли, у випадку  $B$ -сплайнів першого степеня

кількість потрібних вузлів зростає до трьох.

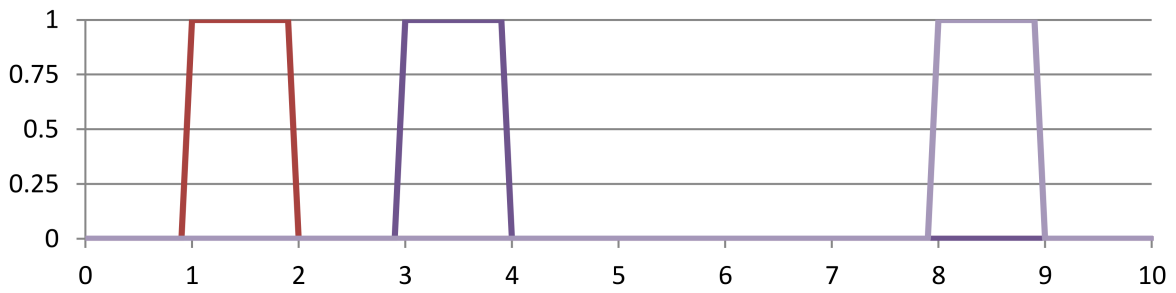


Рис. 2.1 –  $B$ -сплайни нульового степеня з номерами 1, 3 та 8, побудовані на рівномірній сітці вузлів

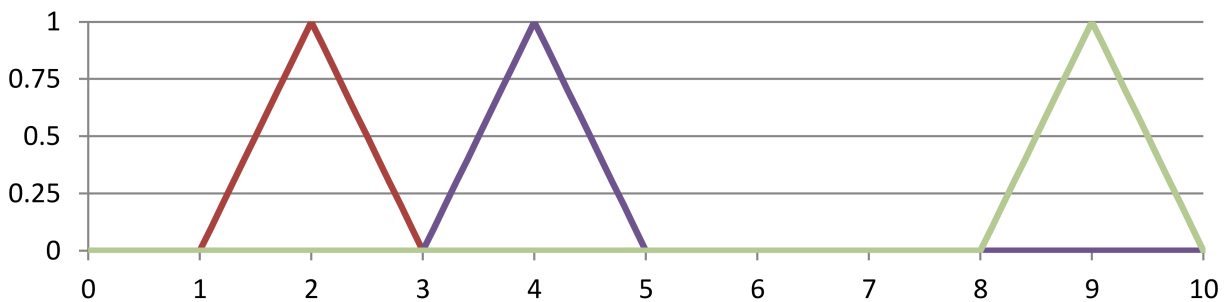


Рис. 2.2 –  $B$ -сплайни першого степеня з номерами 1, 3 та 8, побудовані на рівномірній сітці вузлів

Побудова  $B$ -сплайнів другого (рис. 2.3) та третього степеня (рис. 2.4) вимагає наявності ще більшої кількості вузлів: 4 для сплайнів другого степеня та 5 для третього. Це в першу чергу є тим фактором, що призводить до необхідності використання розширених сіток вузлів за потреби розрахунку значень декількох сплайн-функцій в кожній точці.

Щоб задовольнити граничні умови зручно використовувати не самі  $B$ -сплайни, а їх лінійні комбінації з підібраними певним способом коефіцієнтами.

Таким чином, лінійні комбінації  $B$ -сплайнів степеня  $n$  можуть використовуватись для апроксимації шуканого розв'язку крайових задач. Така апроксимація є основою методу сплайн-колокацій. Суть цього методу розглянемо на прикладі розв'язання одновимірних крайових задач [69].

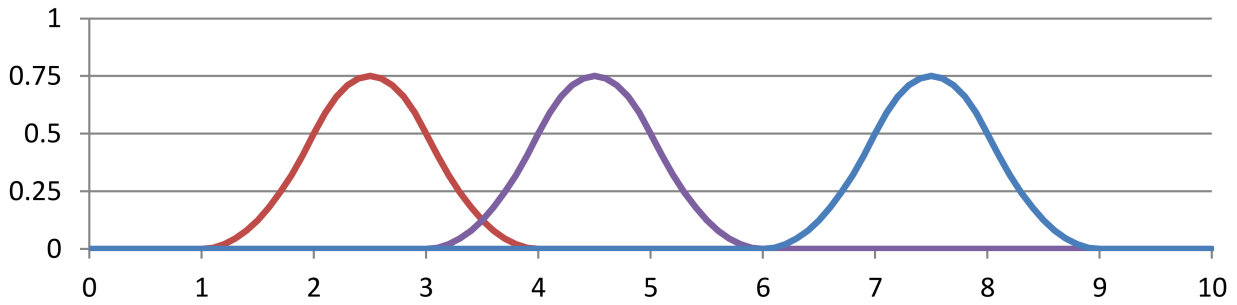


Рис. 2.3 –  $B$ -сплайни другого степеня з номерами 1, 3 та 6, побудовані на рівномірній сітці вузлів

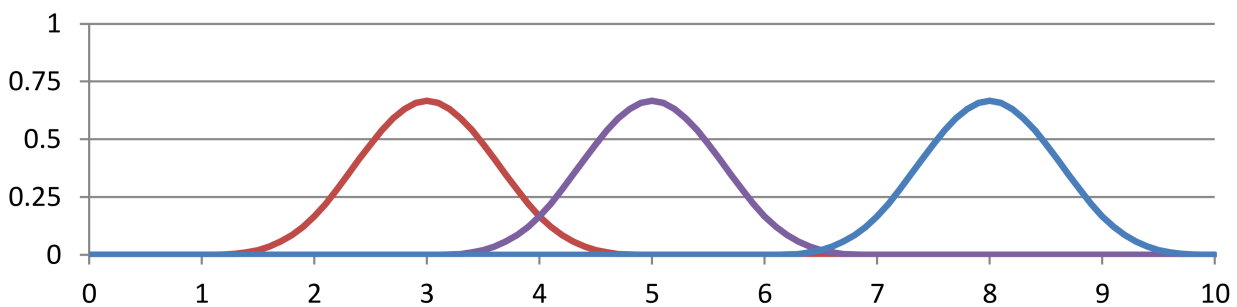


Рис. 2.4 –  $B$ -сплайни третього степеня з номерами 1, 3 та 6, побудовані на рівномірній сітці вузлів

Нехай необхідно знайти розв'язок рівняння:

$$Ly = \alpha_0(x)y^{(n)} + \alpha_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}(x)y' + \alpha_n(x)y = r(x), \quad (2.43)$$

( $y = y(x)$ ,  $x \in [a; b]$ ) що задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} A_1 \bar{y}(a) &= \bar{c}; \\ A_2 \bar{y}(b) &= \bar{d}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тут  $\bar{y} = [y, y', \dots, y^{(n-1)}]^T$ ;  $\bar{c} = [c_1, c_2, \dots, c_k]^T$  і  $\bar{d} = [d_1, d_2, \dots, d_{n-k}]^T$  – вектори-стовпчики.  $A_1$  і  $A_2$  – задані прямокутні матриці відповідно порядків  $k \times n$  і  $(n - k) \times n$  ( $k < n$ ).

Вважаємо, що задача (2.43), (2.44) має єдиний розв'язок  $y(x)$ , коефіцієнти  $\alpha_i$  рівняння (2.43) і права частина  $r(x)$  – достатньо гладкі функції.

Введемо на  $[a, b]$  сітку  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Будемо шукати наближений розв'язок задачі (2.43), (2.44) у вигляді сплайна  $S(x)$  степеня  $m$  ( $m \geq n + 1$ , тут для визначеності покладемо  $m = n + 1$ ) з вузлами на сітці  $\Delta$ .

Згідно методу сплайн-колокації будемо вимагати, щоб сплайн  $S(x)$ , задовольняв рівняння (2.48) в точках  $\xi_k \in [a, b]$ ,  $k = \overline{0, N}$  (умови колокації) і крайові умови (2.44):

$$\begin{aligned} L[S(\xi_k)] &= r(\xi_k); \\ A_1 \bar{S}(a) &= \bar{c}; \\ A_2 \bar{S}(b) &= \bar{d}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Співвідношення (2.45) є системою алгебраїчних рівнянь відносно параметрів сплайна. Точки  $\xi_k$  називаються вузлами колокації. Їх кількість визначається розмірністю простору сплайнів, яка, як відомо, дорівнює  $N + m$ . Так як  $S(x)$  задовольняє  $N$  граничних умов, то кількість вузлів колокації повинна дорівнювати  $N + 1$ . За вузли колокації не можна брати точки, в яких коефіцієнти рівняння (2.43) мають особливості.

Далі вважаємо, що вузли колокації впорядковані:  $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N$ .

Конкретний вигляд системи (2.45) залежить від вибраного способу представлення сплайна  $S(x)$  і від розташування вузлів колокації. Найпростіші схеми методу сплайн-колокації одержуються, коли сплайн побудований на рівномірній сітці і вузли колокації вибираються так, що співпадають з вузлами сплайна.

Точність методу залежить від величини похибки апроксимації рівняння в узлах колокації  $\xi_k$ :

$$\varepsilon_k = [LS(y, \xi_k)] - r(\xi_k), \quad k = \overline{0, N} \tag{2.46}$$

і похибки апроксимації граничних умов. Остання може дорівнювати нулю, якщо можливо побудувати сплайн  $S(x)$  так, щоб точно задовольнити граничні умови (2.44).

При застосуванні методу сплайн-колокації за рахунок спеціального вибору вузлів колокації можна досягти значного збільшення порядку точності методу [69].

Розглянемо детальніше один із спеціальних способів розташування точок колокації.

Нехай сітка  $\Delta$  утворена вузлами  $x_k = a + kh$ , ( $k = \overline{0, N}$ ;  $x_N = b$ ;  $h = \frac{b-a}{N}$ ), причому  $N = 2p + 1$  непарне число, а вузли колокації задовольняють умови

$$\begin{aligned} \xi_{2i} &\in [x_{2i}, x_{2i+1}]; \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]; \\ \xi_{2i} &= x_{2i} + t_1 h; \xi_{2i+1} = x_{2i} + t_2 h (i = \overline{0, p}), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\text{де } t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; t_2 = 1 - t_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Точки  $t_1$  і  $t_2$  є коренями полінома Лежандра другого степеня  $P_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$  на відрізку  $[0; 1]$ .

Таким чином, на кожному проміжку  $[x_{2i}, x_{2i+1}]$  є два вузли колокації, а на сусідніх інтервалах  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$  та  $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$  їх немає зовсім.

Такі вузли колокації називають оптимальними. Більший порядок точності можна одержати, використовуючи сплайни вищих степенів. Так, наприклад, за допомогою сплайнів п'ятого степеня, тобто функцій, що чотири рази неперервно диференційовні і на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  є поліномами п'ятого степеня, можна отримати четвертий порядок точності.

Таким чином, на основі методу сплайн-колокації одновимірна лінійна крайова задача (2.43), (2.44) зводиться до системи алгебраїчних рівнянь (2.45).

Далі викладений підхід буде використаний для розв'язання двовимір-

них крайових задач, де алгоритм базується на апроксимації розв'язку в одному координатному напрямку за допомогою методу сплайн-колокації і чисельного інтегрування в іншому за допомогою методу дискретної ортогоналізації.

### 2.3.2 Основні положення методу дискретної ортогоналізації

Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)y + \bar{f}(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.48)$$

з граничними умовами

$$B_1\bar{y}(a) = \bar{b}_1; \quad (2.49)$$

$$B_2\bar{y}(b) = \bar{b}_2, \quad (2.50)$$

де  $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  – вектор-стовпчик;  $\bar{f}$  – вектор-стовпчик правої частини;  $A(x)$  – квадратна матриця порядку  $n$ ;  $B_1, B_2$  – задані прямокутні матриці відповідно порядків  $k \times n$  і  $(n - k) \times n$ , ( $k < n$ );  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – задані вектори.

Розв'язок крайової задачі (2.48)-(2.50) шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^m c_j \bar{y}_j(x) + \bar{y}_{m+1}(x), \quad (2.51)$$

де  $m = \min\{k, n - k\}$  (для визначеності покладемо  $m = n - k$ );  $\bar{y}_j$  – розв'язки задач Коші для системи (2.48) і граничних умов (2.49) при  $\bar{f} = \bar{b}_1 = 0$ ;  $\bar{y}_{m+1}$  – розв'язок неоднорідної системи рівнянь (2.48) з неоднорідними граничними умовами (2.49) при  $x = a$ .

Якщо власні значення матриці системи (2.48) при фіксованих значеннях  $x$  значно відрізняються за величиною дійсної частини, то при інтегру-



ванні зі зростанням аргументу за рахунок втрати значущих цифр система векторів-розв'язків задач Коші стає майже лінійно залежною і тому обчислення втрачають стійкість. Щоб уникнути цієї проблеми, застосовуючи метод дискретної ортогоналізації, ортогоналізуємо розв'язки задач Коші в окремих точках [26, 37, 99, 206].

Розділимо відрізок  $a \leq x \leq b$  на частини точками інтегрування  $x_s$  ( $s = \overline{0, N}$ ), між якими виберемо точки ортогоналізації  $x_i$  ( $i = \overline{0, M}$ ). Вибір цих точок обумовлений потрібною точністю розв'язання задачі.

Метод дискретної ортогоналізації складається з прямого і зворотного ходів. Нехай у точці  $x_i$  при прямому ході за допомогою, наприклад, методу Рунге – Кутта з лінійно незалежними векторами початкових умов, що задовольняють граничні умови (2.49), знайдено розв'язки  $m+1$  задач Коші, які позначимо через  $\bar{u}_r(x_i)$  ( $r = \overline{1, m+1}$ ). Проортоформуємо вектори  $\bar{u}_1(x_i), \bar{u}_2(x_i), \dots, \bar{u}_m(x_i)$  згідно процедури Грама-Шмідта і позначимо їх через  $\bar{z}_1(x_i), \bar{z}_2(x_i), \dots, \bar{z}_m(x_i)$ . Вектори  $\bar{z}_r$  виражаються через вектори  $\bar{u}_r$  так:

$$\bar{z}_r = \frac{1}{\omega_{rr}} \left( \bar{u}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj} \bar{z}_j \right) (r = \overline{1, m}), \quad (2.52)$$

вектор  $\bar{z}_{m+1}$  не нормується й обчислюється за формулою

$$\bar{z}_{m+1} = \bar{u}_{m+1} - \sum_{j=1}^m \omega_{m+1,j} \bar{z}_j, \quad (2.53)$$

де

$$\omega_{rr} = \sqrt{(\bar{u}_r, \bar{u}_r) - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj}^2}; \quad \omega_{rj} = (\bar{u}_r, \bar{z}_j) (j < r) (r = \overline{1, m+1}). \quad (2.54)$$

З формул (2.52), (2.53) можна одержати

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_i) \\ \bar{u}_2(x_i) \\ \dots \\ \bar{u}_m(x_i) \\ \bar{u}_{m+1}(x_i) \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}_i \begin{bmatrix} \bar{z}_1(x_i) \\ \bar{z}_2(x_i) \\ \dots \\ \bar{z}_m(x_i) \\ \bar{z}_{m+1}(x_i) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

де

$$\mathbf{\Omega}(x_i) = \mathbf{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_i) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_{21}(x_i) & \omega_{22}(x_i) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1}(x_i) & \omega_{m2}(x_i) & \dots & \omega_{mm}(x_i) & 0 \\ \omega_{m+1,1}(x_i) & \omega_{m+1,2}(x_i) & \dots & \omega_{m+1,m}(x_i) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Компоненти векторів  $\bar{z}_r(x_i)$  – це початкові значення для одержання розв’язків задач Коші на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$ .

У кожній точці ортогоналізації  $x_i$  розв’язок системи рівнянь (2.48), який задовольняє граничні умови (2.49), можна подати у вигляді:

$$\bar{y}(x_i) = \sum_{j=1}^m c_j^{(i)} \bar{z}_j(x_i) + \bar{z}_{m+1}(x_i). \quad (2.57)$$

У точці  $x = x_N = x_M = b$  невідомі компоненти  $c_1^{(M)}$ ,  $c_2^{(M)}$ ,  $\dots$ ,  $c_m^{(M)}$  вектора  $\bar{c}^{(M)}$  визначаються з умови виконання вектора  $\bar{y}(x_M)$  граничних умов (2.50). Цим самим закінчується прямий хід розв’язання задачі.

Розв'язок системи рівнянь (2.48) в інтервалі  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  визначається за формулою

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^m c_j^{(i)} \bar{z}_j(x) + \bar{z}_{m+1}(x). \quad (2.58)$$

При зворотньому ході по значеннях  $c_j^{(i)}$  ( $j = \overline{1, m}$ ) визначаються сталі  $c_j^{(i-1)}$ , починаючи з  $i=M$ , які знаходяться з рекурентного співвідношення

$$\bar{c}^{(i-1)} = [\Omega'_i]^{-1} \bar{c}^{(i)} \quad (i = M, M-1, \dots, 2), \quad (2.59)$$

де  $\Omega'_j$  – транспонована матриця (2.56), а  $\bar{c}^{(i)}$  – вектор-стовпчик з компонентами  $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_m^{(i)}, 1$ .

Із співвідношення (2.59) одержимо

$$c^{(i-1)} = \left[ \left( \prod_{j=1}^p \Omega_{i+j} \right)' \right]^{-1} c^{(i+p)}, \quad (2.60)$$

де  $p = \overline{1, M-j}$ . Отже, можна зберігати інформацію не у всіх точках ортогоналізації, а тільки в тих, в яких передбачається виведення результатів, яких значно менше.

## 2.4 Застосування методів сплайн-колокацій та дискретної ортогоналізації до розв'язання окремих двовимірних і тривимірних задач

### 2.4.1 НДС шаруватих прямокутних в плані пологих ортотропних оболонок

Розглянемо багат шарові пологі прямокутні в плані оболонки [32, 33, 35, 203], зібрані з непарного числа ортотропних шарів змінної товщини, що

розташовані симетрично відносно серединної поверхні структури. При цьому передбачається, що шари працюють спільно без відриву і ковзання. За вихідну приймаємо модель уточненої постановки, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента.

Будемо використовувати прямокутну декартову систему координат  $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \alpha_3 = z$ . Тоді відповідно до прийнятої гіпотези переміщення оболонки представимо у вигляді

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= u_x(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ \tilde{u}_y(x, y, z) &= u_y(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ \tilde{u}_z(x, y, z) &= w(x, y).\end{aligned}\tag{2.61}$$

де  $u_x, u_y, w$  - переміщення точок серединної поверхні в напрямках  $x, y, z$ ;  $\psi_x, \psi_y$  - повні кути повороту прямолінійного елемента.

Відповідно до (2.61) вирази для деформацій записуємо у вигляді

$$\begin{aligned}e_x(x, y, z) &= \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y); \\ e_y(x, y, z) &= \varepsilon_y(x, y) + z\kappa_y(x, y); \\ e_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}(x, y) + z2\kappa_{xy}(x, y); \\ e_{xz}(x, y, z) &= \gamma_x(x, y); e_{yz}(x, y, z) = \gamma_y(x, y),\end{aligned}\tag{2.62}$$

де

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + k_1 w; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + k_2 w; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - k_1^2 w; \\ \kappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - k_2^2 w; 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}; \\ \gamma_x &= \psi_x - \vartheta_x; \gamma_y = \psi_y - \vartheta_y;\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + k_1 u_x; \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + k_2 u_y,$$

де  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  – тангенціальні деформації, а  $\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_{xy}$  – деформації згину серединної поверхні;  $k_1, k_2$  – кривини в напрямках координатних ліній  $x$  і  $y$ ;  $\vartheta_x, \vartheta_y$  – кути повороту нормалі без урахування поперечних зсувів;  $\gamma_x, \gamma_y$  – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння рівноваги для пологих оболонок мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + q &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0; \\ N_{xy} - k_2 M_{yx} - N_{yx} - k_1 M_{xy} &= 0, \end{aligned} \tag{2.64}$$

де  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  – тангенціальні нормальні і дотичні зусилля;  $Q_x, Q_y$  – перерізуючі зусилля;  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  – згинаючі і скручуючі моменти;  $q$  – діюче навантаження.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині для серединної поверхні запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} N_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y; \quad N_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y; \\ N_{xy} &= C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_2 D_{66}\varkappa_{xy}; \quad N_{yx} = C_{66}\varepsilon_{xy} + 2k_1 D_{66}\varkappa_{xy}; \\ M_x &= D_{11}\varkappa_x + D_{12}\varkappa_y; \quad M_y = D_{12}\varkappa_x + D_{22}\varkappa_y; \\ M_{yx} &= M_{xy} = 2D_{66}\varkappa_{xy}; \quad Q_x = K_1\gamma_x; \quad Q_y = K_2\gamma_y. \end{aligned} \tag{2.65}$$

У співвідношеннях (2.65) коефіцієнти визначаються так:

$$\begin{aligned}
 C_{mp} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{mp}^{(i)} dz; \\
 K_m &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \hat{K}_m^{(i)} dz; \\
 D_{mp} &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} B_{mp}^{(i)} z^2 dz \quad (m, p = 1, 2, 6),
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

( $n$  - кількість шарів оболонки по товщині), де для кожного шару –

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad B_{12} = \nu_y B_{11}; \\
 B_{22} &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad B_{66} = G_{xy}; \\
 \hat{K}_1 &= \frac{5}{6} G_{xz}; \quad \hat{K}_2 = \frac{5}{6} G_{yz}.
 \end{aligned}
 \tag{2.67}$$

У формулах (2.67)  $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$  – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона в напрямках  $x$  і  $y$ ;  $G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}$  – модулі зсуву для кожного шару структури.

Якщо ввести позначення

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \hat{u}_x; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \hat{u}_y; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \hat{w}; \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \hat{\psi}_x; \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = \hat{\psi}_y,
 \tag{2.68}$$

то з використанням (2.63) - (2.65) розв'язувальні рівняння для функцій  $u_x, \hat{u}_x, u_y, \hat{u}_y, w, \hat{w}, \psi_x, \hat{\psi}_x, \psi_y, \hat{\psi}_y$  можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} &= a_{11} \hat{u}_x + a_{12} \frac{\partial u_x}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + a_{14} \hat{u}_y + a_{15} \frac{\partial u_y}{\partial y} + a_{16} \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} + \\
 &+ a_{17} w + a_{18} \hat{w} + a_{19} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + a_{1,10} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + a_{1,11} \hat{\psi}_y + a_{1,12} \frac{\partial \hat{\psi}_y}{\partial y};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} &= a_{21} \hat{u}_x + a_{22} \frac{\partial u_x}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial y} + a_{24} u_y + a_{25} \hat{u}_y + a_{26} \frac{\partial u_y}{\partial y} + a_{27} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \\
&+ a_{28} w + a_{29} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{2,10} \hat{\psi}_x + a_{2,11} \frac{\partial \hat{\psi}_x}{\partial y} + a_{2,12} \psi_y + a_{2,13} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{2,14} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}; \\
\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} &= a_{31} u_x + a_{32} \hat{u}_x + a_{33} u_y + a_{34} \frac{\partial u_y}{\partial y} + a_{35} w + a_{36} \hat{w} + a_{37} \frac{\partial w}{\partial y} + \quad (2.69) \\
&+ a_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{39} \psi_x + a_{3,10} \hat{\psi}_x + a_{3,11} \psi_y + a_{3,12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{3,13} q; \\
\frac{\partial \hat{\psi}_x}{\partial x} &= a_{41} u_x + a_{42} w + a_{43} \hat{w} + a_{44} \psi_x + a_{45} \hat{\psi}_x + a_{46} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \\
&+ a_{47} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + a_{48} \hat{\psi}_y + a_{49} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{4,10} \frac{\partial \hat{\psi}_y}{\partial y}; \\
\frac{\partial \hat{\psi}_y}{\partial y} &= a_{51} u_y + a_{52} w + a_{53} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{54} \hat{\psi}_x + a_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + a_{56} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \\
&+ a_{57} \psi_y + a_{58} \hat{\psi}_y + a_{59} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + a_{5,10} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Коефіцієнти  $a_{ij}$  в загальному випадку залежать від  $x$  і  $y$ .

Будемо розглядати на краях оболонки жорстке закріплення. В цьому випадку

$$u_x = u_y = w = 0; \psi_x = \psi_y = 0 \quad (2.70)$$

при  $x = 0, x = a$  і при  $y = 0, y = b$ .

Для розв'язання даного класу двовимірних крайових задач застосуємо підхід, що базується на апроксимації шуканого розв'язку в одному координатном напрямку за допомогою сплайн-функцій, методів колокації та дискретної ортогоналізації.

В систему (2.69) входять похідні від шуканих функцій по змінній  $y$  не вище другого порядку. На цій підставі при апроксимації розв'язків по координаті  $y$  можна обмежитися сплайн-функціями третього степеня. Тоді шуканий розв'язок крайової задачі для системи рівнянь (2.69) з відповід-

ними граничними умовами представимо в такому вигляді:

$$u_x(x, y) = \sum_{i=0}^N u_{xi}(x)\varphi_{1i}(y); \quad u_y(x, y) = \sum_{i=0}^N u_{yi}(x)\varphi_{2i}(y); \quad (2.71)$$

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x)\varphi_{3i}(y); \quad (2.72)$$

$$\psi_x(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(x)\varphi_{4i}(y); \quad \psi_y(x, y) = \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(x)\varphi_{5i}(y), \quad (2.73)$$

де  $u_{xi}(x), u_{yi}(x), w_i(x), \psi_{xi}(x), \psi_{yi}(x)$  – шукані функції змінної  $x$ ,  $\varphi_{ji}(y)$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів на рівномірній сітці  $\Delta : 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$ , що задовольняють граничні умовам на контурах  $y = 0$  і  $y = b$ .

Підставляючи розв'язки (2.72) в розв'язувальну систему рівнянь (2.69), в граничні умови (2.70) при  $y = const$  і відповідно до методу сплайн-колокації вимагаючи їх виконання в заданих точках колокації  $\xi_k = y_k \in [0, b]$ ,  $k = \overline{0, N}$ , отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку  $10(N + 1)$  відносно функцій  $u_{xi}, \hat{u}_{xi}, u_{yi}, \hat{u}_{yi}, w_i, \hat{w}_i, \psi_{xi}, \hat{\psi}_{xi}, \psi_{yi}, \hat{\psi}_{yi}$  ( $i = 0, \dots, N$ ), яку можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A\bar{Y} + \bar{f}, \quad (2.74)$$

де

$$\bar{Y} = \{u_{x0}, \dots, u_{xN}, \hat{u}_{x0}, \dots, \hat{u}_{xN}, u_{y0}, \dots, u_{yN}, \hat{u}_{y0}, \dots, \hat{u}_{yN}, w_0, \dots, w_N, \hat{w}_0, \dots, \hat{w}_N, \psi_{x0}, \dots, \psi_{xN}, \hat{\psi}_{x0}, \dots, \hat{\psi}_{xN}, \psi_{y0}, \dots, \psi_{yN}, \hat{\psi}_{y0}, \dots, \hat{\psi}_{yN}\}^T -$$

невідома вектор-функція від змінної  $x$ ;  $\bar{f}$  - вектор правих частин;  $A$  - квадратна матриця, елементи якої залежать від  $x$ .

Граничні умови при  $x = 0, x = a$  для отриманої системи звичайних



диференціальних рівнянь можна записати так:

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1; B_2 \bar{Y}(a) = \bar{b}_2. \quad (2.75)$$

Для розв'язання одновимірної крайової задачі (2.74), (2.75) застосуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

За допомогою методу сплайн-колокації було розв'язано задачі для тришарових пологих оболонок, розглянутих в статті [57] з використанням класичної теорії. При цьому верхній і нижній шари оболонок ізотропні, а внутрішній шар - ортотропний. Оболонки знаходяться під дією нормального навантаження  $q_\gamma = q_0 = \text{const}$ , а сторони оболонки жорстко закріплені.

Приймаємо, що модуль пружності  $E_x = E$ , модуль пружності  $E_y = \mu_0 E$ , модуль зсуву  $G_{xy} = \lambda_0 E$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ . Будемо розглядати 3 варіанти пружних сталей внутрішнього шару:

- I.  $\mu_0 = 2; \lambda_0 = 0,3; \nu = 0,075;$
- II.  $\mu_0 = 1; \lambda_0 = 0,385; \nu = 0,3;$
- III.  $\mu_0 = 0,5; \lambda_0 = 0,125; \nu = 0,15.$

Значення пружних сталей для варіанта II відповідають ізотропному матеріалу. Товщина середнього шару оболонки дорівнює  $0,4h$ , а внутрішнього і зовнішнього шарів дорівнює  $0,3h$ . Величина стріли підйому  $f = f_x + f_y$ , де  $f_x = R_x - \sqrt{R_x^2 - a^2/4}$ ,  $f_y = R_y - \sqrt{R_y^2 - b^2/4}$ .  $R_x = 1/k_1$ ,  $R_y = 1/k_2$  - радіуси кривини серединної поверхні.

Розміри панелі в плані і товщина оболонки рівні  $a = 12$ ,  $b = 10$ ,  $h = 0,4$ . При розрахунках вважаємо, що  $f_x = f_y$ , тому якщо  $f_x = 0,25$ , то  $R_x = 72,125$ ,  $R_y = 50,125$ ; якщо  $f_x = 0,5$ , то  $R_x = 36,25$ ,  $R_y = 25,25$ ; якщо  $f_x = 1$ , то  $R_x = 18,5$ ,  $R_y = 13$ .

У таблиці 1 проведено порівняння результатів для прогинів в перерізі  $x = 6$ , отриманих в роботі [57] з використанням класичної теорії оболонок (колонки а), і результатів, отриманих за запропонованою методикою

(колонки б). При цьому слід зауважити, що при розрахунку за класичною теорією не враховуються характеристики  $G_{xz}$  і  $G_{yz}$ , і в статті [57] вони не вказані, тому при розрахунку в уточненій постановці приймаємо  $G_{xz} = G_{yz} = G_{xy}$ .

Як видно з таблиці, суттєвої різниці між отриманими результатами немає, і вибрані параметри оболонки дозволяють проводити досить точні розрахунки як у класичній, так і в уточненій теоріях.

Табл. 2.1 – Величини прогинів, отримані при використанні різних теорій

$f_x$	$y$	$wE/q_0$					
		I		II		III	
		а	б	а	б	а	б
0	1	410,2	431,9	422,6	438,2	435,7	467,2
	2	1235	1272	1268	1293	1307	1364
	3	2066	2109	2118	2143	2183	2253
	4	2052	2698	2715	2740	2799	2876
	5	2861	2907	2928	2952	3018	3097
0,5	1	144,1	149,7	160,9	165,8	155,1	195,4
	2	427,3	434	474,5	479,6	546,2	559,00
	3	705,5	709,2	779,7	782,2	897,1	907,9
	4	896,9	898,2	988,4	988,7	1138	1 146
	5	964,2	964,5	1062	1061	1222	1229
1	1	51,7	54,09	60,2	62,27	73,0	77,03
	2	147,3	148,90	169,5	170,7	205,6	208,50
	3	234,0	233,2	267,1	266	324,1	323,4
	4	289,6	286,8	328,7	325,7	399,0	395,5
	5	308,3	304,7	349,2	345,6	424,1	419,5

Також розв'язано задачу про напружено-деформований стан тришарової пологої оболонки, у якої всі шари ортотропні. Причому матеріал, з

якого виготовлені шари, один і той же, але волокна у внутрішньому і в зовнішніх шарах розташовані перпендикулярно один до одного. В цьому випадку для внутрішнього шару  $\nu_x = 0,277$ ,  $E_x = 5,7E_0$ ,  $E_y = 1,4E_0$ ,  $G_{xy} = G_{xz} = 0,57E_0$ ,  $G_{yz} = 0,5E_0$ , а для верхнього і нижнього шарів –  $\nu_y = 0,277$ ,  $E_y = 5,7E_0$ ,  $E_x = 1,4E_0$ ,  $G_{xy} = G_{yz} = 0,57E_0$ ,  $G_{xz} = 0,5E_0$ .

Товщини шарів, розміри оболонки і інші дані вибрано такими ж як і в попередній задачі. На рис. 2.5 показано розподіли прогинів  $wE_0/q_0$  в перерізі  $y = 5$  в залежності від стріли підйому  $f$ . Як видно з графіків, зі збільшенням стріли підйому прогини зменшуються. При цьому прогини для оболонки зі стрілою підйому  $f = 2$  приблизно в 9 разів менше ніж прогини для пластини з відповідними розмірами в плані. На рис. 2.6 показано розподіли напружень  $\sigma_x/q_0$  в перерізі  $y = 5$  на внутрішній поверхні оболонки в залежності від стріли підйому  $f$ . Максимальні напруження при цьому досягаються у краю оболонки і для пластинки вони перевищують максимальні значення напружень для оболонки зі стрілою підйому  $f = 2$  більш ніж в 3 рази.

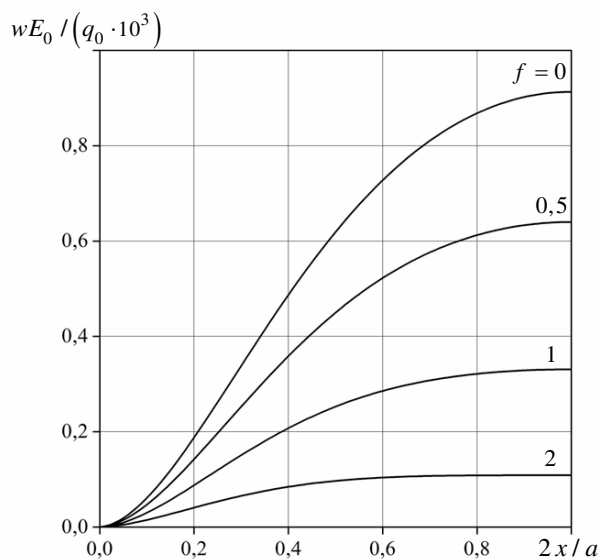


Рис. 2.5 – Розподіл прогинів при різних значеннях стріли підйому

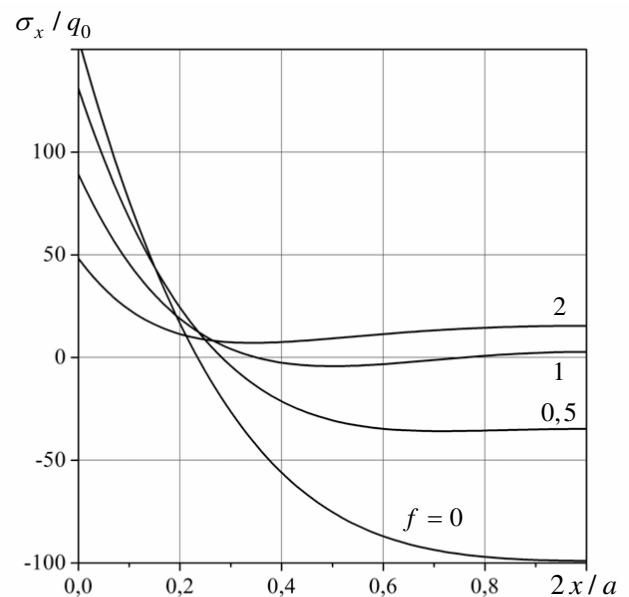


Рис. 2.6 – Розподіл напружень при різних значеннях стріли підйому

### 2.4.2 Згин опуклої чотирикутної пластини складної форми

Розглядається задача згину для опуклої чотирикутної ізотропної пластини складної форми (різнобічна трапеція, трикутник, ромб, паралелограм тощо, див., наприклад, рис. 2.7 – 2.14) в уточненій постановці теорії типу Тимошенка [198, 199]. Основні співвідношення цієї теорії подамо в декартовій системі координат  $\alpha_1 = x$ ,  $\alpha_2 = y$ .

Виразимо деформації згину і кручення  $\varkappa_x$ ,  $\varkappa_y$ ,  $\varkappa_{xy}$  та кути повороту прямолінійного елемента  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  через повні кути повороту  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  і прогин  $w$ :

$$\begin{aligned} \varkappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; & \varkappa_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; & 2\varkappa_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}; \\ \gamma_x &= \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}; & \gamma_y &= \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Співвідношення пружності для моментів  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  і перерізуючих зусиль  $Q_x$ ,  $Q_y$  у випадку ізотропної пластини записуються так:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\varkappa_x + \nu \varkappa_y); & M_y &= D(\varkappa_y + \nu \varkappa_x); \\ M_{xy} &= \frac{Gh^3}{6} \varkappa_{xy}; & Q_x &= \frac{5}{6} Gh \gamma_x; & Q_y &= \frac{5}{6} Gh \gamma_y, \end{aligned} \quad (2.77)$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль пружності,  $h$  – товщина пластини.

Рівняння рівноваги пластини, навантаженої рівномірно розподіленим по поверхні поперечним навантаженням  $q$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0; & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x &= 0, ; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Підставляючи (2.76) в (2.77) і (2.77) в (2.78) отримуємо розв'язувальні рівняння для кутів повороту і прогину:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{6q}{5Gh}; \\ D \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh}{6} \left( \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x \partial y} \right] - 5 \left[ \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right) &= 0; \\ D \left( \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Gh}{6} \left( \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x \partial y} \right] - 5 \left[ \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Потенціальну енергію деформації пластини для розв'язання задачі методом скінченних елементів запишемо у вигляді:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S (M_x \varkappa_x + M_y \varkappa_y + 2M_{xy} \varkappa_{xy} + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y - 2qw) dx dy, \quad (2.80)$$

де  $S$  - площа пластини.

Використовуючи (2.76) і (2.77) можна отримати

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{Gh^3}{12} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{5Gh}{6} \left[ \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 2qw \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Перетворення координат. Метод сплайн-колокації в використанні спільно з методом дискретної ортогоналізації обмежений тим, що його зручно застосовувати, для прямокутних областей. Тому для перетворення довільної чотирикутної області в прямокутну використаємо нові координати  $\xi, \eta$ ,

які пов'язані з  $x, y$  виразами:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta; y = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta. \quad (2.82)$$

Коефіцієнти  $a_i, b_i$  отримують з системи 8 лінійних рівнянь підстановкою в (2.81) 4 точок  $(x_i, y_i)$  в старій системі і 4 точок  $(\xi_i, \eta_i)$  в новій.

Наприклад, якщо  $(\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, \pm 1)$ , то перетворення (2.81) записують у вигляді

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i N_i, y = \sum_{i=1}^4 y_i N_i \quad (2.83)$$

де  $N_i$  ні що інше, як функції форми чотирикутного скінченного елемента першого порядку  $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$ .

Далі, так як нам зручно працювати з прямокутною областю, виразимо всі похідні по  $x, y$  через похідні по  $\xi, \eta$ . Для перших похідних довільної функції  $f$  формули переходу матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) / J; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) / J, \end{aligned} \quad (2.84)$$

де  $J$  - якобіан перетворення (2.82). Використовуючи (2.84) можна отримати явні вирази і для других похідних.

Метод сплайн колокації. Будемо відображати даний чотирикутник на квадрат  $[0; 1] \times [0; 1]$  і підставимо в (2.79) вирази для похідних по  $x, y$  через похідні по  $\xi, \eta$ . Отримаємо рівняння виду:

$$L\bar{u} = 0, \quad (2.85)$$

де  $L$  - лінійний диференціальних оператор другого порядку в області  $\xi, \eta$ ,

а  $\bar{u} = \{w, \psi_x, \psi_y\}$  – шуканий вектор-функція. Граничні умови жорсткого закріплення можна записати у вигляді  $\bar{u} = \bar{0}$ . Якщо контур вільний і розташований паралельно осі  $Oy$ , то граничні умови на ньому –  $M_x = 0$ ,  $Q_x = 0$ ,  $M_{xy} = 0$ .

Відповідно до ідеї методу сплайн-колокації представимо розв’язок крайової задачі (2.85) у вигляді:

$$w = \sum_{i=0}^N w_i(\xi)\varphi_{1i}(\eta), \psi_x = \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(\xi)\varphi_{2i}(\eta), \psi_y = \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(\xi)\varphi_{3i}(\eta), \quad (2.86)$$

де  $w_i$ ,  $\psi_{xi}$  і  $\psi_{yi}$  – невідомі функції координати  $\xi$ ,  $\varphi_{ij}$  – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня, що задовольняють граничні умови на краях  $\eta = const$ . Підставивши вирази (2.86) в (2.85) і граничні умови, і вимагаючи їх виконання в  $N + 1$  точці колокації, отримаємо одновимірну крайову задачу, яку розв’яжемо методом дискретної ортогоналізації.

Метод скінченних елементів. Для апроксимації розв’язку виберемо ті ж функції, що і для апроксимації координат (2.82) і для простоти будемо використовувати чотиривузлові скінченні елементи:

$$w = \sum_{i=1}^4 w_i N_i; \psi_x = \sum_{i=1}^4 \psi_{xi} N_i; \psi_y = \sum_{i=1}^4 \psi_{yi} N_i. \quad (2.87)$$

$w_i$ ,  $\psi_{xi}$  і  $\psi_{yi}$  – прогин і повні кути повороту в вузлових точках.

Підставивши (2.87) в (2.80) і застосувавши метод Рітца, тобто проваріювавши по  $w_j$ ,  $\psi_{xj}$  і  $\psi_{yj}$ , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення значень прогину і кутів повороту в вузлах для елемента з площею  $S_k$ :

$$\iint_{S_k} \left( \frac{5}{3} Gh(\psi_{xi} N_i + w_i N_{xi}) N_{xj} + \frac{5}{3} Gh(\psi_{yi} N_i + w_i N_{yi}) N_{yj} - 2q N_j \right) dx dy = 0;$$

$$\iint_{S_k} \left\{ D(\psi_{xi} N_{xi}) N_{xj} + D\nu(\psi_{yi} N_{yi}) N_{xj} + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{xi} N_{yi} + \psi_{yi} N_{xi}) N_{yj} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{6} Gh(\psi_{xi}N_i + w_iN_{xi})N_j\}dxdy = 0; \tag{2.88} \\
& \iint_{S_k} \{D(\psi_{yi}N_{yi})N_{yj} + D\nu(\psi_{xi}N_{xi})N_{yj} + \frac{Gh^3}{12}(\psi_{xi}N_{yi} + \psi_{yi}N_{xi})N_{xj} + \\
& + \frac{5}{6} Gh(\psi_{yi}N_i + w_iN_{yi})N_j\}dxdy = 0.
\end{aligned}$$

В (2.88) вирази з парними індексами сумуються (знаки сумовування по  $i$  пропущено).  $N_{xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}$ ,  $N_{yi} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$  визначаються за допомогою (2.84). Для обчислення інтегралів методом Гаусса в (2.88) необхідно також перетворення (2.83), так як  $\iint_{S_k} f(x, y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta)Jd\xi d\eta$ . Обчисливши коефіцієнти систем для всіх  $k$  елементів і склавши з них ансамбль, отримаємо розв'язувальну систему для всієї області.

З використанням описаних підходів проведено розрахунок напружено-деформованого стану пластин, загальні обриси яких і розподіли прогинів  $wE/q$  показані на рис. 2.7 - 2.10. Перша пластина – квадрат зі стороною 2, наступні дві пластини – рівнобедрені трапеції, чиї вершини задані так, що площа чотирикутника залишається сталою. Для трапеції, показаної на рис. 2.8, основи рівні 1 і 3, а на рис. 2.9 – 0,2 і 3,8. Для розрахунків обрано такі параметри:  $h = 0,1$ ,  $\nu = 0,3$ , основи трапецій вільні, а бічні сторони жорстко закріплені. На рисунках показано результати, отримані методом сплайн-колокації. При розрахунках було використано 60 точок колокації і 1500 точок інтегрування.

При використанні МСЕ квадрат  $[0; 1] \times [0; 1]$  розділено на елементи розміру  $[0; 1/200] \times [0; 1/200]$  і за допомогою (2.82) були отримані координати вузлів скінченних елементів в координатах  $x, y$ . В цьому випадку розмірність матриці жорсткості  $3 \times 201 \times 201$ , а ширина стрічки  $3 \times 203$ . Таким способом вдалося отримати хорошу збіжність (табл. 2.2) з методом сплайн-колокації, використовуючи для розв'язання отриманих систем лінійних алгебраїчних рівнянь звичайний метод Гаусса. Порівняння макси-



Табл. 2.2 – Порівняння максимальних прогинів для пластин, одержаних різними методами

	Рис. 2.7	Рис. 2.8	Рис. 2.9	Рис. 2.10
МСК	529,34	1235,6	1576,7	1628,5
МСЕ	527,75	1231,6	1570,8	1622,2

Табл. 2.3 – Координати вершин пластин

об'єкт	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	$x_4$	$y_4$
рис. 2.11	0	1	4	0	4	4	0	4
рис. 2.12	0	1	4	0	4	4	0	5
рис. 2.13	0	1	4	0	4	4	0	3,5
рис. 2.14	0	1	4	0	4	4	0	4,25

мумів  $wE/q$ , які в цьому випадку, очевидно, спостерігаються в точці  $x = 1$ ,  $y = 0$ , отриманих зазначеними двома методами, наведено в таблиці 2.2.

Спроба розрахувати прогини в трапеції дуже близької до трикутника, а саме з основами 0,02 і 3,98, за допомогою першого підходу була невдалою, а МСЕ розв'язати цю задачу вдалося, при цьому максимум  $wE/q = 1617,7$  відрізняється від трапеції на рис. 2.9 несуттєво.

Цікаво відзначити, що обидва підходи впоралися з розрахунком напружено-деформованого стану трикутника (рис. 2.10). Для цього три точки з чотирьох було розміщено на одній прямій, тоді чотирикутник вироджується в трикутник. У нашому випадку, якщо перша вершина має координати  $(-1; 0)$ , то наступні вершини «чотирикутника» проти годинникової стрілки  $(1; -2)$ ,  $(1; 2)$  і, наприклад,  $(0; 1)$ . Про точність і коректність цього розрахунку можна судити, порівнюючи значення максимумів, отриманих для трапеції на рис. 2.9 і трапеції з основами 0,02 і 3,98.

Також були знайдені прогини пластин, зображених на рис. 2.11 - 2.14, координати вершин яких вказані в табл. 2.3. Перші три точки загальні

Табл. 2.4 – Максимальні прогини і їх росташування для трапецієвидних пластин

об'єкт	метод розрахунку	$w_{max}E/q$	$x_{max}$	$y_{max}$
рис. 2.11	МСК	3161,5	1,5226	2,3299
	МСЕ	3144,1	1,52	2,3269
рис. 2.12	МСК	7790,9	0	2,8746
	МСЕ	7736,4	0	2,88
рис. 2.13	МСК	2315,6	1,9413	2,1480
	МСЕ	2303,3	1,94	2,1449
рис. 2.14	МСК	4016,4	0	2,5578
	МСЕ	3990,9	0	2,56

для всіх пластин, а четверта зміщується вздовж прямої  $x = 0$ . При цьому сторона  $x = 0$  вільна, а решта жорстко закріплені. Максимуми прогину і точки, де вони досягаються, отримані різними методами представлені в табл. 2.4.

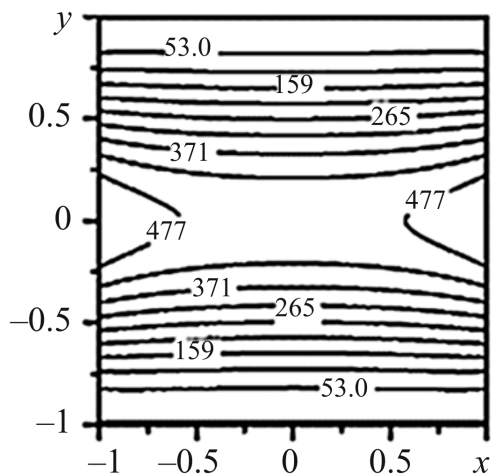


Рис. 2.7 – Квадратна пластина (варіант 1)

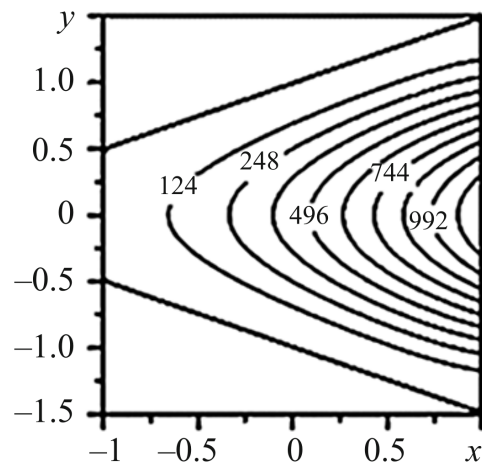


Рис. 2.8 – Трапецієвидна пластина (варіант 2)

З рис 2.11 - 2.14 видно, що форма поверхні прогину значно залежить від форми і площі пластини при даних умовах закріплення країв. Максимальний прогин для пластини з найбільшою площею (рис. 2.12) перевищує прогин в пластині з найменшою площею (рис. 2.13) більш ніж в три рази. З

таблиці 2.4 можна зробити висновок, що відносне розходження результатів, отриманих двома методами, не перевищує 1%.

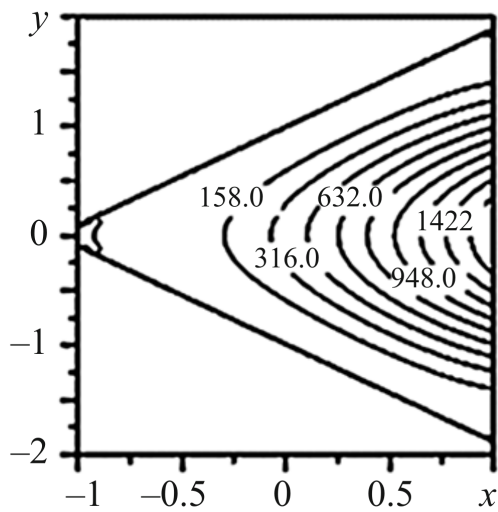


Рис. 2.9 – Трапецієвидна пластина (варіант 3)

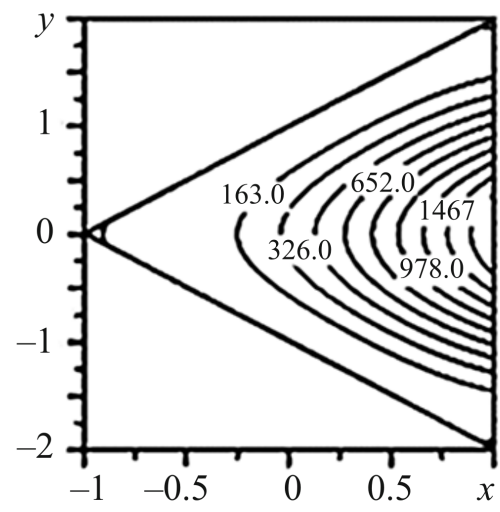


Рис. 2.10 – Трикутна пластина (варіант 4)

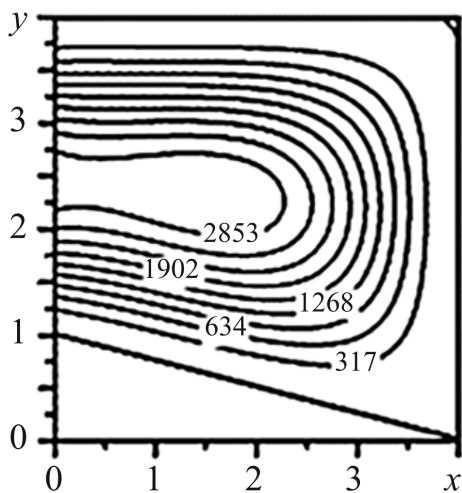


Рис. 2.11 – Трапецієвидна пластина (варіант 5)

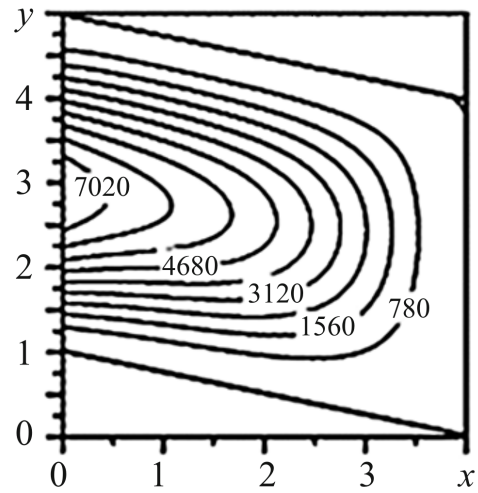


Рис. 2.12 – Трапецієвидна пластина (варіант 6)

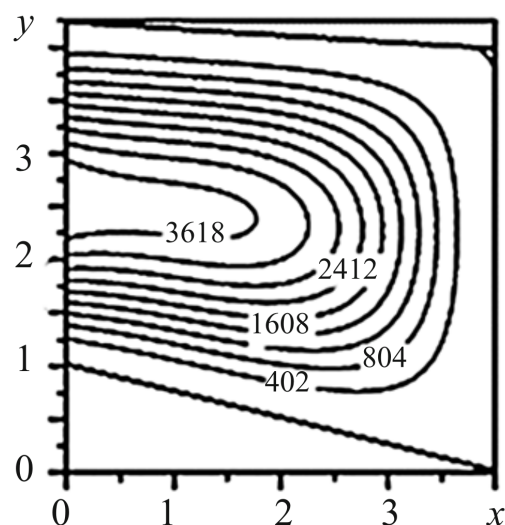
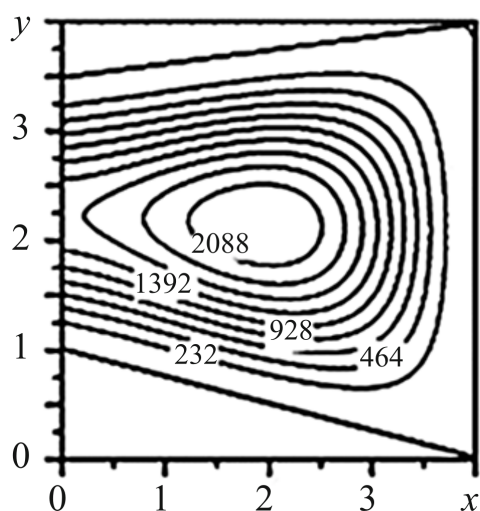


Рис. 2.13 – Трапецієвидна пластина (варіант 7)      Рис. 2.14 – Трапецієвидна пластина (варіант 8)

Таким чином, результати розв'язання задачі про згин опуклої чотирикутної пластини складної форми, що одержані з застосуванням двох різних методів – методу сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації та методу скінчених елементів – підтвердило високу їх точність і правомірність використання в задачах даного класу.

### 2.4.3 НДС товстостінної прямокутної пластини в тривимірній постановці

Будемо розглядати задачу про напружено-деформований стан прямокутної пластини-плити сталої товщини в ортогональній системі координат  $Oxyz$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq h$ ) [188].

Відповідно вихідні рівняння лінійної теорії пружності при відсутності об'ємних сил матимуть такий вигляд:

рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0;$$

співвідношення Коші:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ e_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

(тут  $u, v, w$  – компоненти вектора переміщення); співвідношення закону Гука:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), \\ e_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z), \\ e_z &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z), \\ e_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}, e_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2\mu}, e_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{2\mu} \end{aligned} \quad (2.91)$$

або:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu e_x + \lambda \theta, \sigma_y = 2\mu e_y + \lambda \theta, \sigma_z = 2\mu e_z + \lambda \theta, \\ \sigma_{yz} &= 2\mu e_{yz}, \sigma_{xz} = 2\mu e_{xz}, \sigma_{xy} = 2\mu e_{xy}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

де  $\theta = e_x + e_y + e_z$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\mu$  і  $\lambda$  – параметри Ламе.

Тоді, використовуючи співвідношення (2.89) – (2.92), можна записати рівняння Ламе у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= a_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= a_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + a_{32} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{34} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\end{aligned}\quad (2.93)$$

де

$$\begin{aligned}a_{11} = a_{21} &= -\frac{2\mu + \lambda}{\mu}, \quad a_{12} = a_{22} = -1, \\ a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} &= -\frac{\mu + \lambda}{\mu}, \\ a_{31} = a_{32} &= -\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda}, \quad a_{33} = a_{34} = -\frac{\mu}{2\mu + \lambda}.\end{aligned}$$

Граничні умови на площині  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}\beta_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{13} \frac{\partial w}{\partial z} &= \sigma_{z_0}, \\ \beta_{21} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \sigma_{zx_0}, \\ \beta_{31} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \sigma_{zy_0};\end{aligned}\quad (2.94)$$

а на площині  $z = h$ :

$$\begin{aligned}\beta_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{13} \frac{\partial w}{\partial z} &= \sigma_{z_h}, \\ \beta_{21} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \sigma_{zx_h}, \\ \beta_{31} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \sigma_{zy_h}.\end{aligned}\quad (2.95)$$

У цих системах  $\beta_{ij}$  – коефіцієнти, які визначаються з рівнянь (2.90), (2.92), а  $\sigma_{z_0}, \sigma_{zx_0}, \sigma_{zy_0}$  – напруження, задані на нижній лицевій площині плити,  $\sigma_{z_h}, \sigma_{zx_h}, \sigma_{zy_h}$  – напруження, задані на її верхній площині.

На гранях плити  $x = const$  і  $y = const$  будемо задавати умови жорсткого закріплення, або шарнірного опирання.

Розв'язок системи (2.93) будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \phi_i^{(u)}(x) \psi_j^{(u)}(y), \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \phi_i^{(v)}(x) \psi_j^{(v)}(y), \\ w(x, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(z) \phi_i^{(w)}(x) \psi_j^{(w)}(y), \end{aligned} \quad (2.96)$$

де  $u_{ij}(z), v_{ij}(z), w_{ij}(z)$  – шукані функції, а функції  $\phi_i^{(\alpha)}, \psi_j^{(\alpha)}$  ( $\alpha = u, v, w$ ) визначаються через лінійні комбінації  $B$ -сплайнів на рівномірних сітках  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a$  і  $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = b$  відповідно з урахуванням граничних умов при  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ .

Застосуємо метод колокації за координатами  $x$  і  $y$  і зведемо початкову задачу до системи  $6(N+1)(M+1)$  звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Підставимо (2.96) в розв'язувальні рівняння і, згідно методу сплайн колокації, будемо вимагати їх виконання в  $(N+1)(M+1)$  точках колокації  $(\xi_i, \zeta_j)$ . При виборі точок колокації для забезпечення найкращої апроксимації слід розглядати сітку з парною кількістю вузлів по кожному з напрямків:  $N = 2n + 1, M = 2m + 1$ . На відрізках  $[x_{2i}, x_{2i+1}], [y_{2j}, y_{2j+1}]$  візьмемо по 2 точки колокації, а на відрізках  $[x_{2i+1}, x_{2i+2}], [y_{2j+1}, y_{2j+2}]$  – жодної:

$$\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \zeta_{2j} \in [y_{2j}, y_{2j+1}], \zeta_{2j+1} \in [y_{2j}, y_{2j+1}].$$

Точки колокації задаються за правилом:  $\xi_{2i} = x_{2i} + s_1 h_x$ ,

$$\xi_{2i+1} = x_{2i} + s_2 h_x, \zeta_{2j} = y_{2j} + s_1 h_y, \zeta_{2j+1} = y_{2j} + s_2 h_y, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m,$$

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, s_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Введемо позначення:

$$\Phi^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)} = \phi_m^{(\alpha)}(\xi_i) \psi_n^{(\alpha)}(\zeta_j),$$

$$\begin{aligned}
\Phi_x^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}^{(\alpha)x} &= \left( \phi_m^{(\alpha)} \right)' (\xi_i) \psi_j^{(\alpha)} (\zeta_j), \\
\Phi_y^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}^{(\alpha)y} &= \phi_m^{(\alpha)} (\xi_i) \left( \psi_n^{(\alpha)} \right)' (\zeta_j), \\
\Phi_{xx}^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}^{(\alpha)xx} &= \left( \phi_m^{(\alpha)} \right)'' (\xi_i) \psi_n (\zeta_j) \\
\Phi_y^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}^{(\alpha)y} &= \phi_m^{(\alpha)} (\xi_i) \left( \psi_n^{(\alpha)} \right)'' (\zeta_j), \\
\Phi_{xy}^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}^{(\alpha)xy} &= \left( \phi_m^{(\alpha)} \right)' (\xi_i) \left( \psi_j^{(\alpha)} \right)' (\zeta_j), \\
(i, m = 0, \dots, M; j, n = 0, \dots, N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \{u_{00}, u_{01}, \dots, u_{NM}\}^T, \quad \bar{v} = \{v_{00}, v_{01}, \dots, v_{NM}\}^T, \\
\bar{w} &= \{w_{00}, w_{01}, \dots, w_{NM}\}^T.
\end{aligned}$$

Тоді розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dz} &= \bar{u}', \quad \frac{d\bar{v}}{dz} = \bar{v}', \quad \frac{d\bar{w}}{dz} = \bar{w}', \\
\frac{d\bar{u}'}{dz} &= \left( \Phi^{(u)} \right)^{-1} (a_{11} \Phi_{xx}^{(u)} + a_{12} \Phi_y^{(u)}) \bar{u} + g \\
&+ a_{13} \left( \Phi^{(u)} \right)^{-1} \Phi_{xy}^{(v)} \bar{v} + a_{14} \left( \Phi^{(u)} \right)^{-1} \Phi_x^{(w)} \bar{w}', \\
\frac{d\bar{v}'}{dz} &= \left( \Phi^{(v)} \right)^{-1} (a_{21} \Phi_{yy}^{(v)} + a_{22} \Phi_x^{(v)}) \bar{v} + \\
&+ a_{23} \left( \Phi^{(v)} \right)^{-1} \Phi_{xy}^{(u)} \bar{u} + a_{24} \left( \Phi^{(v)} \right)^{-1} \Phi_y^{(w)} \bar{w}', \\
\frac{d\bar{w}'}{dz} &= a_{31} \left( \Phi^{(w)} \right)^{-1} \Phi_x^{(u)} \bar{u}' + a_{32} \left( \Phi^{(w)} \right)^{-1} \Phi_y^{(v)} \bar{v}' + \\
&+ \left( \Phi^{(z)} \right)^{-1} (a_{34} \Phi_{xx}^{(z)} + a_{35} \Phi_z^{(z)}) \bar{u}_z + a_{36} \bar{u}'_z,
\end{aligned} \tag{2.97}$$

а граничні умови для одновимірної задачі при  $z = 0$  :

$$\begin{aligned}
\beta_{11} \Phi_x^{(u)} \bar{u} + \beta_{12} \Phi_y^{(v)} \bar{u} + \beta_{13} \Phi^{(w)} \bar{w}' &= \bar{\sigma}_{z_0}, \\
\beta_{21} (\Phi_x^{(w)} \bar{w} + \Phi^{(u)} \bar{u}') &= \bar{\sigma}_{zx_0}, \\
\beta_{31} (\Phi_y^{(w)} \bar{w} + \Phi^{(v)} \bar{v}') &= \bar{\sigma}_{zy_0};
\end{aligned} \tag{2.98}$$



при  $z = h$ :

$$\begin{aligned}\beta_{11}\Phi_x^{(u)}\bar{u} + \beta_{12}\Phi_y^{(v)}\bar{u} + \beta_{13}\Phi^{(w)}\bar{w}' &= \bar{\sigma}_{z_h}, \\ \beta_{21}(\Phi_x^{(w)}\bar{w} + \Phi^{(u)}\bar{u}') &= \bar{\sigma}_{zx_h}, \\ \beta_{31}(\Phi_y^{(w)}\bar{w} + \Phi^{(v)}\bar{v}') &= \bar{\sigma}_{zy_h},\end{aligned}\tag{2.99}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{z_0} &= \{\sigma_{z_0}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{z_0}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{z_0}(\xi_N, \zeta_M)\}^T, \\ \bar{\sigma}_{zx_0} &= \{\sigma_{zx_0}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{zx_0}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{zx_0}(\xi_N, \zeta_M)\}^T, \\ \bar{\sigma}_{zy_0} &= \{\sigma_{zy_0}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{zy_0}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{zy_0}(\xi_N, \zeta_M)\}^T, \\ \bar{\sigma}_{z_h} &= \{\sigma_{z_h}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{z_h}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{z_h}(\xi_N, \zeta_M)\}^T, \\ \bar{\sigma}_{zx_h} &= \{\sigma_{zx_h}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{zx_h}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{zx_h}(\xi_N, \zeta_M)\}^T, \\ \bar{\sigma}_{zy_h} &= \{\sigma_{zy_h}(\xi_0, \zeta_0), \sigma_{zy_h}(\xi_0, \zeta_1), \dots, \sigma_{zy_h}(\xi_N, \zeta_M)\}^T.\end{aligned}$$

Отриману одновимірну крайову задачу (2.97) – (2.99) розв'яжемо методом дискретної ортогоналізації.

Порівняємо розв'язки, отримані зазначеним вище способом, з результатами розв'язання задачі з використанням методу відокремлення змінних за допомогою рядів Фур'є.

Розглянемо плиту з коефіцієнтом Пуассона:  $\nu = 0.3$ , сторонами  $a = b = 1$  і товщиною  $h = 0.1$ .

На поверхнях  $z = 0, z = h$  граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{z_0} = q_0, \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{z_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0.\tag{2.100}$$

На поверхнях  $x = 0, y = 0, x = a, y = b$  задаються умови шарнірного опирання.

Невідомі переміщення слід шукати у вигляді:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{mn}(z) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$v(x, y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{mn}(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.101)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Табл. 2.5 – Порівняння розв'язків задачі отриманих різними методами

Точки	$\hat{w}$				
	Метод Фур'є		Метод сплайн-колокації		
	$N = M = 10$	$N = M = 12$	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	45,02033	45,49807	42,00064	44,41573	45,12831
$x_2$	45,14742	45,57635	42,14217	44,45266	45,17275
$x_3$	45,02972	45,50392	41,98917	44,40461	45,11987
$x_4$	5,25082	5,41286	5,03238	5,15272	5,34711
$x_5$	5,27793	5,44781	5,07416	5,17598	5,36545
$x_6$	5,25334	5,42617	4,99898	5,05549	5,31823
$x_7$	31,55733	32,38087	30,54771	31,29320	31,81012
$x_8$	31,62964	32,56701	30,63852	31,59177	32,03407
$x_9$	31,55919	32,40994	30,51882	31,27238	31,89702
$x_{10}$	31,56892	32,37715	30,62082	31,43316	31,93448
$x_{11}$	31,63213	32,52827	30,71866	31,72163	32,23512
$x_{12}$	31,56372	32,38863	30,60007	31,40203	31,88572
$x_{13}$	5,26328	5,42006	4,94055	5,20162	5,36991
$x_{14}$	5,28056	5,44973	4,98872	5,22103	5,38872
$x_{15}$	5,26890	5,42562	4,91002	5,06948	5,28967

Для кожної пари гармонік отримаємо крайову задачу виду:

$$u''_{mn}(z) = -a_{11} \cdot \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cdot u_{mn}(z) - a_{12} \cdot \frac{n^2\pi^2}{b^2} \cdot u_{mn}(z) -$$

$$-a_{13} \cdot \frac{mn\pi^2}{ab} \cdot v_{mn}(z) + a_{14} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot w'_{mn}(z),$$

$$v''_{mn}(z) = -a_{21} \cdot \frac{n^2\pi^2}{b^2} \cdot v_{mn}(z) - a_{22} \cdot \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cdot v_{mn}(z) -$$

$$\begin{aligned}
& -a_{23} \cdot \frac{mn\pi^2}{ab} \cdot u_{mn}(z) + a_{24} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot w'_{mn}(z), \\
w''_{mn}(z) = & -a_{31} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot u'_{mn}(z) - a_{32} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot v'_{mn}(z) - \\
& -a_{33} \cdot \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cdot w_{mn}(z) - a_{34} \cdot \frac{n^2\pi^2}{b^2} \cdot w_{mn}(z),
\end{aligned}$$

Табл. 2.6 – Переміщення  $\hat{w}$  квадратної плити у випадку жорстко закріплених бічних поверхонь

Точки	$\hat{w}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	21,33551	22,08311	22,36958
$x_2$	21,35532	22,11377	22,41866
$x_3$	21,33482	22,07566	22,35352
$x_4$	0,44823	0,52634	0,61329
$x_5$	0,36532	0,40295	0,48821
$x_6$	0,43987	0,47860	0,59832
$x_7$	10,98637	11,67733	12,23932
$x_8$	11,07328	11,79538	12,86523
$x_9$	11,02764	11,64275	12,21996
$x_{10}$	11,08794	11,90720	12,48476
$x_{11}$	11,12658	11,98463	12,95763
$x_{12}$	11,06545	11,88370	12,45970
$x_{13}$	0,42711	0,54609	0,62452
$x_{14}$	0,35753	0,393471	0,49573
$x_{15}$	0,41008	0,47025	0,61673

з граничними умовами при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 -\beta_{11} \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) - \beta_{12} \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_{13} \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} &= \frac{16}{\pi^2 mn}, \\
 \beta_{21} \left( \frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0, \\
 \beta_{31} \left( \frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.102}$$

Табл. 2.7 – Переміщення  $\hat{w}$  квадратної плити, коли на гранях  $x = 0$ ,  $x = a$  умови шарнірного обпирання, а грані  $y = 0$ ,  $y = b$  – жорстко закріплені

Точки	$\hat{w}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	30,81812	32,56712	33,05388
$x_2$	31,18303	32,73903	33,21935
$x_3$	30,84975	32,59847	33,08623
$x_4$	1,52978	1,57244	1,59723
$x_5$	1,38204	1,43732	1,47329
$x_6$	1,48573	1,50363	1,52738
$x_7$	18,52583	18,68036	18,72643
$x_8$	18,79567	18,88385	18,94547
$x_9$	18,51361	18,65181	18,70457
$x_{10}$	18,53947	18,73114	18,75239
$x_{11}$	18,82884	18,93272	18,98463
$x_{12}$	18,51794	18,69512	18,73483
$x_{13}$	1,54708	1,69272	1,74893
$x_{14}$	1,39171	1,56991	1,61650
$x_{15}$	1,52833	1,65460	1,71772

і при  $z = h$ :

$$\begin{aligned}
 -\beta_{11} \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) - \beta_{12} \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_{13} \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} &= 0, \\
 \beta_{21} \left( \frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0, \\
 \beta_{31} \left( \frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.103}$$

Табл. 2.8 – Переміщення  $\hat{w}$  в плиті з співвідношенням довжин сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  і жорстко закріпленими бічними гранями.

Точки	$\hat{w}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	27,42064	27,83095	28,14572
$x_2$	27,66072	27,99072	28,27768
$x_3$	27,45630	27,85478	28,16037
$x_4$	1,32783	1,38292	1,40045
$x_5$	1,22547	1,27741	1,29647
$x_6$	1,29742	1,33413	1,35748
$x_7$	19,22540	19,29739	19,32478
$x_8$	19,34438	19,41389	19,43783
$x_9$	19,19833	19,26367	19,28648
$x_{10}$	19,22749	19,29683	19,32961
$x_{11}$	19,34185	19,41402	19,13408
$x_{12}$	19,19583	19,26462	19,28767
$x_{13}$	1,33704	1,38199	1,40115
$x_{14}$	1,22872	1,27658	1,29853
$x_{15}$	1,29377	1,33418	1,35996

Після розв'язання цих задач методом дискретної ортогоналізації й підстановки отриманих результатів в формули (2.101), знайдемо значення шу-

каних функцій переміщень.

Табл. 2.9 – Переміщення  $\hat{w}$  плити з співвідношенням довжин сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ , коли грані  $x = 0$ ,  $y = 0$  – жорстко закріплені, а на гранях  $x = a$ ,  $y = b$  – умови шарнірного опирання

Точки	$\hat{w}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	48,44676	49,55713	49,88637
$x_2$	48,78501	49,74842	49,92747
$x_3$	48,48334	49,58348	49,89904
$x_4$	1,32839	1,39518	1,42743
$x_5$	1,21390	1,26724	1,29746
$x_6$	1,29838	1,34601	1,39827
$x_7$	25,29932	26,34750	26,97834
$x_8$	25,31839	26,45861	27,08783
$x_9$	25,25348	26,31325	26,96439
$x_{10}$	44,08239	44,84530	45,12832
$x_{11}$	44,75498	45,17424	45,25834
$x_{12}$	44,02472	44,81697	45,09237
$x_{13}$	8,77382	9,35827	9,75382
$x_{14}$	8,85483	9,43951	9,87433
$x_{15}$	8,75931	9,30239	9,71382

З використанням методу сплайн-колокації були отримані результати при різній кількості точок колокації, а саме для  $M = N = 8$ ,  $M = N = 10$ ,  $M = N = 12$  і при різній кількості точок дискретної ортогоналізації ( $N_1 = 50$ ,  $N_2 = 100$ ,  $N_3 = 200$ ). Отримані результати близькі між собою при різній кількості точок дискретної ортогоналізації, що підтверджує збіжність методу. Дані розрахунків надалі будемо представляти для  $N_2 = 100$ .

У табл. 2.5 надано значення функції переміщення  $\hat{w} = \frac{wE}{q_0}$ , обчислені методом відокремлення змінних при  $N = M = 10$ ,  $N = M = 12$  і методом

сплайн-колокації при кількості точок колокації  $N = M = 8$ ,  $N = M = 10$ ,  $N = M = 12$ .

Табл. 2.10 – Переміщення  $\hat{w}$  прямокутної плити з співвідношенням сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$  і жорстко закріпленими бічними поверхнями.

Точки	$\hat{w}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	33,38798	34,28437	34,80289
$x_2$	33,75456	34,97832	35,03556
$x_3$	33,37907	34,26932	34,76594
$x_4$	3,12689	3,45783	3,56424
$x_5$	3,08716	3,38736	3,44174
$x_6$	3,11965	3,44191	3,52603
$x_7$	23,58767	24,68412	25,03432
$x_8$	23,64385	24,72981	25,14793
$x_9$	23,57044	24,66721	24,99727
$x_{10}$	23,58935	24,69056	25,07974
$x_{11}$	23,64288	24,71843	25,19041
$x_{12}$	23,57996	24,67977	25,04298
$x_{13}$	3,13005	3,44985	3,56418
$x_{14}$	3,09121	3,37908	3,44152
$x_{15}$	3,12746	3,45006	3,52607

Розрахунки в цьому і в усіх наступних випадках були проведені для точок:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (0, 5, 0, 5, 0, 001), & x_2 &= (0, 5, 0, 5, 0, 05), & x_3 &= (0, 5, 0, 5, 0, 099), \\
 x_4 &= (0, 1, 0, 1, 0, 001), & x_5 &= (0, 1, 0, 1, 0, 05), & x_6 &= (0, 1, 0, 1, 0, 099), \\
 x_7 &= (0, 3, 0, 3, 0, 001), & x_8 &= (0, 3, 0, 3, 0, 05), & x_9 &= (0, 3, 0, 3, 0, 099), \\
 x_{10} &= (0, 7, 0, 7, 0, 001), & x_{11} &= (0, 7, 0, 7, 0, 05), & x_{12} &= (0, 7, 0, 7, 0, 099),
 \end{aligned}$$

$$x_{13} = (0, 9, 0, 9, 0, 001), \quad x_{14} = (0, 9, 0, 9, 0, 05), \quad x_{15} = (0, 9, 0, 9, 0, 099).$$

Табл. 2.11 – Переміщення  $\hat{u}$  прямокутної плити з співвідношенням сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$  і жорстко закріпленими бічними поверхнями.

Точки	$\hat{u}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	0	0	0
$x_2$	0	0	0
$x_3$	0	0	0
$x_4$	-2,30439	-2,32091	-2,34817
$x_5$	-0,06348	-0,04596	-0,03118
$x_6$	2,28704	2,29279	2,32684
$x_7$	-4,13823	-4,17278	-4,23372
$x_8$	-0,00583	-0,00359	-0,00172
$x_9$	4,12965	4,16508	4,21728
$x_{10}$	4,13823	4,17278	4, 23372
$x_{11}$	0,00583	0,00359	0,00172
$x_{12}$	-4,12965	-4,16508	-4,21728
$x_{13}$	2,30439	2,32091	2,34817
$x_{14}$	0,06348	0,04596	0,03118
$x_{15}$	-2,28704	-2,29279	-2,32684

Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан цієї ж плити при жорстко закріпленні бічних поверхонь. Для цього випадку отримані результати показано в табл. 2.6.

Нехай у всіх наступних випадках виконуються умови (2.100), товщина пластини  $h = 0, 1$ , коефіцієнт Пуассона дорівнює  $\nu = 0,3$ , сторона  $a = 1$ .

Розглянемо квадратну плиту зі сторонами  $a = b = 1$  і такими граничними умовами: на гранях  $x = 0$ ,  $x = a$  - умови шарнірного обпирання, а



на гранях  $y = 0$ ,  $y = b$  - жорстке закріплення. Результати розв'язання цієї задачі наведено в табл. 2.7.

Табл. 2.12 – Переміщення  $\hat{v}$  прямокутної пластини з співвідношенням сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$  і жорстко закріпленими бічними поверхнями.

Точки	$\hat{v}$		
	$N = M = 8$	$N = M = 10$	$N = M = 12$
$x_1$	0	0	0
$x_2$	0	0	0
$x_3$	0	0	0
$x_4$	-4,24632	-4,56057	-4,61567
$x_5$	-0,05829	-0,08637	-0,11688
$x_6$	4,23019	4,49625	4,58576
$x_7$	-7,72947	-7,84764	-7,89329
$x_8$	-0,00412	-0,00937	-0,01532
$x_9$	7,71902	7,76342	7,85038
$x_{10}$	7,72947	7,84764	7,89329
$x_{11}$	0,00412	0,00937	0,01532
$x_{12}$	-7,71902	-7,76342	-7,85038
$x_{13}$	4,24632	4,56057	4,61567
$x_{14}$	0,05829	0,08637	0,11688
$x_{15}$	-4,23019	-4,49625	-4,58576

Далі була розглянута прямокутна плита з співвідношенням довжин сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  і жорстко закріпленими бічними гранями. Для цих умов розподіли переміщень  $\hat{w}$  показані в табл. 2.8.

Також проведені розрахунки для прямокутної плити з співвідношенням довжин сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  і граничними умовами, які визначені в такий спосіб: грані  $x = 0$ ,  $y = 0$  - жорстко закріплені, а на гранях  $x = a$ ,  $y = b$  - умови шарнірного обпирання. При таких умовах отримано значення функції

переміщення  $\hat{w}$ , що представлено в табл. 2.9.

В останньому з прикладів була взята прямокутна пластина з співвідношенням довжин сторін  $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$  і жорстко закріпленими бічними поверхнями. Значення переміщень  $\hat{w}$  для цього випадку представлені в табл. 2.10.

Також для цього випадку знайдено значення переміщень  $\hat{u} = \frac{uE}{q_0}$ ,  $\hat{v} = \frac{vE}{q_0}$ . Вони представлені в табл. 2.11 і 2.12. Значення цих функцій на центральній осі (точки  $x_1, x_2, x_3$ ) очевидно дорівнюють нулю, що відображено у відповідних комірках таблиць.

Як видно із результатів, представлених в таблицях 2.6 – 2.10, значення функції переміщення  $\hat{w}$  істотно залежать від геометрії плити і типів граничних умов. При збільшенні довжини однієї із сторін прогин збільшується. Прогин плити з умовами шарнірного обпирання на бічних поверхнях більше прогину такої ж плити з їх жорстким закріпленням.

## 2.5 Результати та висновки

1. Представлено основні співвідношення просторової теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла та уточненої зсувної теорії оболонок першого порядку Тимошенка в ортогональних криволінійних системах координат. Ці співвідношення є основою для формулювання механіко-математичних моделей напружено-деформованого стану неоднорідних циліндрів та куль, а також товстостінних циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу та змінної товщини у вигляді тривимірних і двовимірних крайових задач для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.
2. Наведено загальні відомості про клас сплайн-функцій, представлених алгебраїчними поліномами на скінченному носіїві. Представлені В -

сплайни першого і третього порядків, відзначено їх характерні властивості та можливість використання як базисних функцій для апроксимації шуканого розв'язку крайових задач.

3. На прикладі одновимірної лінійної крайової задачі загального виду викладено суть методу сплайн-колокації, що полягає у виконанні таких операцій:
  - а) апроксимація шуканого розв'язку лінійними комбінаціями В-сплайнів степеня  $n$  та;
  - б) зведення вихідної крайової задачі до задачі лінійної алгебри шляхом тотожного виконання системи диференціальних рівнянь та граничних умов в фіксованих точках заданого відрізка.
4. Наведено основні положення методу дискретної ортогоналізації розв'язання лінійних одновимірних крайових задач, що полягають у виконанні таких дій:
  - а) представлення шуканої вектор-функції як лінійної комбінації розв'язків задач Коші,
  - б) розв'язання задач Коші з початковими умовами у вигляді лінійно незалежних вектор – функцій, що задовольняють частині граничних умов; використання однокрокових явних схем типу Рунге-Кутта, Кутта-Мерсона тощо;
  - в) застосування процедури ортогоналізації одержаних розв'язків в ряді точок відрізка інтегрування за способом Грама-Шмідта для запобігання їх «сплюсненню» і одержання стійкого обчислювального процесу.
5. Описані методи є основою розробки дискретно-континуальних (чисельно-аналітичних) підходів для дослідження НДС пружних тіл та товстостінних оболонок, що розглядаються в дисертації.

6. На окремих класах задач статички для тонкостінних і товстостінних оболонок (пологі ортотропні шаруваті панелі, опуклі чотирикутні пластини довільної форми, товстостінні прямокутні пластини-плити в тривимірній постановці теорії пружності) проілюстровано застосування описаних методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації до розв'язання відповідних двовимірних та тривимірних крайових задач. Відмічена правомірність застосування і висока точність одержаних результатів за методами сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації в розглянутому класі задач.

## Розділ 3

### НДС ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

В цьому розділі наведено механіко-математичну модель напружено-деформованого стану циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу зі змінною товщиною на основі положень уточненої теорії типу Тимошенка.

Слід відзначити, що циліндричні оболонки складного поперечного перерізу, напрямна яких є плоскою гладкою кривою змінної та знаковмінної кривини, є розрахунковими схемами елементів багатьох конструкцій сучасної техніки і будівництва. Досить назвати, наприклад, автоцистерни некругового перерізу для транспортування нафтопродуктів, силосні споруди та захисні поверхні апаратів підводного занурення, гофровані тунельні конструкції, каналізаційні і дренажні системи тощо. Крім широкого практичного застосування, цей клас оболонок привертають увагу науковців в плані дослідження особливостей їх деформування в залежності від форми поперечного перерізу, умов закріплення граничного контуру і різних видів навантаження.

Нижче наводиться система диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує НДС цього класу оболонок, та розглянуто такі задачі статички: для ізотропного тонкостінного циліндра в двох варіантах реалізації дискретно-континуального підходу (з апроксимацією за напрямною і з апроксимацією за твірною); для ортотропної оболонки зі склопластику,

що має змінну товщину за твірною або за напрямною, та для гофрованих пластини і циліндричних оболонок еліптичного перерізу з гофруванням за напрямною.

### 3.1 Розв'язувальна система рівнянь для циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу

Для некругових циліндрів довільного поперечного перерізу рівняння, викладені в підрозділі 2.2, значно спрощуються, оскільки у цьому випадку  $A_1 = 1$ ,  $k_1 = 0$ , а  $A_2 = A_2(\alpha_2)$  і  $k_2 = k_2(\alpha_2)$ . Позначимо  $k = k_2$ , тоді співвідношення (2.28) для випадку некругових циліндрів будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + kw; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial}{\partial u_2 \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}; \\ \varkappa_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}; \quad \varkappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} - k \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + kw \right); \\ 2\varkappa_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{k}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}; \\ \gamma_1 &= \psi_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}; \quad \gamma_2 = \psi_2 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - ku_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а рівняння рівноваги (2.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} + q_1 &= 0, \quad \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} + kQ_2 + q_2 = 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - kN_2 + q_3 &= 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} - Q_1 = 0, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} - Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Виберемо за шукані функції переміщення  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  і повні кути повороту  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Підставимо (3.1) в співвідношення пружності (2.31), а отримані

вирази в (3.2). Одержимо таку систему рівнянь [164]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C_{11}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{A_2} \frac{C_{66}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& \quad + \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66} + C_{12}}{A_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1} k w + C_{12} k \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + q_1 = 0; \\
& \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1} - k^2 \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{C_{66} + C_{12} - k^2 D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\
& \quad - k^2 K_2 u_2 + \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \\
& \quad + \frac{C_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} k + C_{22} k' \right) w + \frac{k (K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \\
& \quad + \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + k K_2 \psi_2 + k \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + k D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + q_2 = 0; \\
& -k C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \left( k' K_2 + k \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} \right) u_2 - \frac{k (K_2 + C_{22})}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - k^2 C_{22} w + \\
& \quad + \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} - \frac{K_2 A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \\
& \quad + \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1} \psi_1 + K_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} \psi_2 + \frac{K_2}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + q_\gamma = 0; \tag{3.3} \\
& \left( \frac{k D_{66} A_2' - k' D_{66} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{k D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} - \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - \\
& - \frac{k D_{12}}{A_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - k^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} w - (k^2 D_{12} + K_1) \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - K_1 \psi_1 + \frac{\partial D_{11}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \\
& \quad + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{66} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{66}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + \\
& \quad + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0; \\
& \quad - \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{k D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \alpha_2} + k K_2 u_2 + \\
& \quad + \left( \frac{k D_{22} A_2' - k' D_{22} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} \right) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - \\
& \quad - \frac{k D_{22}}{A_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{k}{A_2} \left( 2k' D_{22} + k \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} \right) w - \\
& \quad - \frac{k^2 D_{22} + K_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - K_2 \psi_2 + \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + \left( \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{22} A_2'}{A_2^3} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{D_{22}}{A_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

Запишемо (3.3) у вигляді:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{13} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{14} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{15} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + a_{16} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{17} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{18} w + a_{19} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + q_1 = 0; \\
& a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{22} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{23} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{24} u_2 + a_{25} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + a_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{27} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{28} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + a_{29} w + a_{2,10} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{2,11} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \\
& + a_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{2,13} \psi_2 + a_{2,14} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + a_{2,15} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + q_2 = 0; \\
& a_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{32} u_2 + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{34} w + a_{35} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + a_{36} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \\
& + a_{37} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + a_{39} \psi_1 + a_{3,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{3,11} \psi_2 + a_{3,12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + q_3 = 0; \quad (3.4) \\
& a_{41} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{42} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{43} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{45} w + a_{46} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + a_{47} \psi_1 + \\
& + a_{48} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{49} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{4,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + a_{4,11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + \\
& + a_{4,12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + a_{4,13} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0; \\
& a_{51} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{52} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \alpha_2} + a_{53} u_2 + a_{54} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{55} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + a_{56} w + a_{57} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\
& + a_{58} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{59} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + a_{5,10} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{5,11} \psi_2 + a_{5,12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + a_{5,13} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{5,14} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{5,15} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0,
\end{aligned}$$



де

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial C_{11}}{\partial \alpha_1}, a_{12} = C_{11}, a_{13} = \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{66} A_2'}{A_2^3}, a_{14} = \frac{C_{66}}{A_2^2}, a_{15} = \frac{1}{A_2} \frac{C_{66}}{\partial \alpha_2}, \\
a_{16} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1}, a_{17} = \frac{C_{66} + C_{12}}{A_2}, a_{18} = \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_1} k, a_{19} = C_{12} k; \\
a_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial C_{12}}{\partial \alpha_2}, a_{22} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1} - k^2 \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1} \right), a_{23} = \frac{C_{66} + C_{12} - k^2 D_{66}}{A_2}, \\
a_{24} &= -k^2 K_2, a_{25} = \frac{\partial C_{66}}{\partial \alpha_1}, a_{26} = C_{66}, a_{27} = \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{C_{22} A_2'}{A_2^3}, \\
a_{28} &= \frac{C_{22}}{A_2^2}, a_{29} = \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial C_{22}}{\partial \alpha_2} k + C_{22} k' \right), a_{2,10} = \frac{k(K_2 + C_{22})}{A_2}, \\
a_{2,11} &= \frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1}, a_{2,12} = \frac{k D_{66}}{A_2}, a_{2,13} = k K_2, a_{2,14} = k \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1}, a_{2,15} = k D_{66}; \\
a_{31} &= -k C_{12}, a_{32} = -\frac{1}{A_2} \left( k' K_2 + k \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} \right), a_{33} = -\frac{k(K_2 + C_{22})}{A_2}, \\
a_{34} &= -k^2 C_{22}, a_{35} = \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1}, a_{36} = K_1, a_{37} = \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2} - \frac{K_2 A_2'}{A_2^3}, \\
a_{38} &= \frac{K_2}{A_2^2}, a_{39} = \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_1}, a_{3,10} = K_1, a_{3,11} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial K_2}{\partial \alpha_2}, a_{3,12} = \frac{K_2 \partial \psi_2}{A_2 \partial \alpha_2}; \\
a_{41} &= \frac{k D_{66} A_2' - k' D_{66} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2}, a_{42} = -\frac{k D_{66}}{A_2^2}, a_{43} = -\frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1}, \\
a_{44} &= -\frac{k D_{12}}{A_2}, a_{45} = -k^2 \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1}, a_{46} = -(k^2 D_{12} + K_1), a_{47} = -K_1, \\
a_{48} &= \frac{\partial D_{11}}{\partial \alpha_1}, a_{49} = D_{11}, a_{4,10} = \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{66} A_2'}{A_2^3}, a_{4,11} = \frac{D_{66}}{A_2^2}, \\
a_{4,12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_2}, a_{4,13} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_1}, a_{4,14} = \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2}; a_{51} = -\frac{k}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1}, \\
a_{52} &= -\frac{k D_{66}}{A_2}, a_{53} = k K_2, a_{54} = \frac{k D_{22} A_2' - k' D_{22} A_2}{A_2^3} - \frac{k}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2}, \\
a_{55} &= -\frac{k D_{22}}{A_2}, a_{56} = -\frac{k}{A_2} \left( 2k' D_{22} + k \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} \right), a_{57} = -\frac{k^2 D_{22} + K_2}{A_2}, \\
a_{58} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{12}}{\partial \alpha_2}, a_{59} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1}, a_{5,10} = \frac{D_{12} + D_{66}}{A_2}, a_{5,11} = -K_2, \\
a_{5,12} &= \frac{\partial D_{66}}{\partial \alpha_1}, a_{5,13} = D_{66}, a_{5,14} = \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{D_{22} A_2'}{A_2^3}, a_{5,15} = \frac{D_{22}}{A_2^2}.
\end{aligned}$$

Додавши до (3.4) граничні умови на контурах оболонки, отримаємо дво-

вимірну крайову задачу.

### 3.2 Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної з застосуванням методу сплайн-колокації вздовж твірної

Подамо (3.4) у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} = d_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + d_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + d_{13} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + d_{14} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + d_{15} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + d_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{17} w + d_{18} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + d_{19} q_1; \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} = d_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + d_{22} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + d_{23} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{24} u_2 + d_{25} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + d_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + d_{27} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{28} w + a_{29} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + d_{2,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \\
& + d_{2,11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{2,12} \psi_2 + d_{2,13} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + d_{2,14} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + d_{2,15} q_2 = 0; \\
& \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} = d_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + d_{32} u_2 + d_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + d_{34} w + d_{35} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + d_{36} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \\
& + d_{37} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + d_{38} \psi_1 + d_{39} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + d_{3,10} \psi_2 + d_{3,11} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + d_{3,12} q_3; \\
& \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} = d_{41} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + d_{42} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + d_{43} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + d_{44} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + d_{45} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \\
& + d_{46} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{47} w + d_{48} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + d_{49} \psi_1 + d_{4,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + d_{4,11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + \\
& + d_{4,12} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + d_{4,13} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + d_{4,14} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + d_{4,15} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{4,16} q_1; \\
& \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = d_{51} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + d_{52} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + d_{53} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \alpha_2} + d_{54} u_2 + d_{55} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + d_{56} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + \\
& + d_{57} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + d_{58} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \alpha_2} + d_{59} w + d_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\
& + d_{5,11} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + d_{5,12} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + d_{5,13} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + d_{5,14} \psi_2 + d_{5,15} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \\
& + d_{5,16} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + d_{5,17} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + d_{5,18} q_2,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -\frac{a_{11}}{a_{14}}, d_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{14}}, d_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{14}}, d_{14} = -\frac{a_{15}}{a_{14}}, d_{15} = -\frac{a_{16}}{a_{14}}, \\
d_{16} &= -\frac{a_{17}}{a_{14}}, d_{17} = -\frac{a_{18}}{a_{14}}, d_{18} = -\frac{a_{19}}{a_{14}}, d_{19} = -\frac{1}{a_{14}}, \\
d_{21} &= -\frac{a_{21}}{a_{28}}, d_{22} = -\frac{a_{22}}{a_{28}}, d_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{28}}, d_{24} = -\frac{a_{24}}{a_{28}}, d_{25} = -\frac{a_{25}}{a_{28}}, \\
d_{26} &= -\frac{a_{26}}{a_{28}}, d_{27} = -\frac{a_{27}}{a_{28}}, d_{28} = -\frac{a_{29}}{a_{28}}, d_{29} = -\frac{a_{2,10}}{a_{28}}, d_{2,10} = -\frac{a_{2,11}}{a_{28}}, \\
d_{2,11} &= -\frac{a_{2,12}}{a_{28}}, d_{2,12} = -\frac{a_{2,13}}{a_{28}}, d_{2,13} = -\frac{a_{2,14}}{a_{28}}, d_{2,14} = -\frac{a_{2,15}}{a_{28}}, d_{2,15} = -\frac{1}{a_{28}}, \\
d_{31} &= -\frac{a_{31}}{a_{38}}, d_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{38}}, d_{33} = -\frac{a_{33}}{a_{38}}, d_{34} = -\frac{a_{34}}{a_{38}}, d_{35} = -\frac{a_{35}}{a_{38}}, \\
d_{36} &= -\frac{a_{36}}{a_{38}}, d_{37} = -\frac{a_{37}}{a_{38}}, d_{38} = -\frac{a_{39}}{a_{38}}, d_{39} = -\frac{a_{3,10}}{a_{38}}, d_{3,10} = -\frac{a_{3,11}}{a_{38}}, \\
d_{3,11} &= -\frac{a_{3,12}}{a_{38}}, d_{3,12} = -\frac{1}{a_{38}}, \\
d_{41} &= -\frac{a_{42}d_{11}}{a_{4,11}}, d_{42} = -\frac{a_{42}d_{12}}{a_{4,11}}, d_{43} = -\frac{a_{41} + a_{42}d_{13}}{a_{4,11}}, d_{44} = -\frac{a_{42}d_{14}}{a_{4,11}}, \\
d_{45} &= -\frac{a_{43} + a_{42}d_{15}}{a_{4,11}}, d_{46} = -\frac{a_{44} + a_{42}d_{16}}{a_{4,11}}, \\
d_{47} &= -\frac{a_{45} + a_{42}d_{17}}{a_{4,11}}, d_{48} = -\frac{a_{46} + a_{42}d_{18}}{a_{4,11}}, d_{49} = -\frac{a_{47}}{a_{4,11}}, d_{4,10} = -\frac{a_{48}}{a_{4,11}}, \\
d_{4,11} &= -\frac{a_{49}}{a_{4,11}}, d_{4,12} = -\frac{a_{4,10}}{a_{4,11}}, d_{4,13} = -\frac{a_{4,12}}{a_{4,11}}, d_{4,14} = -\frac{a_{4,13}}{a_{4,11}}, \\
d_{4,15} &= -\frac{a_{4,14}}{a_{4,11}}, d_{4,16} = -\frac{a_{42}d_{19}}{a_{4,11}}; \tag{3.6} \\
d_{51} &= -\frac{a_{55}d_{21}}{a_{5,15}}, d_{52} = -\frac{a_{51} + a_{55}d_{22}}{a_{5,15}}, d_{53} = -\frac{a_{52} + a_{55}d_{23}}{a_{5,15}}, \\
d_{54} &= -\frac{a_{53} + a_{55}d_{24}}{a_{5,15}}, d_{55} = -\frac{a_{55}d_{25}}{a_{5,15}}, d_{56} = -\frac{a_{55}d_{26}}{a_{5,15}}, d_{57} = -\frac{a_{54}}{a_{5,15}}, \\
d_{58} &= -\frac{a_{55}d_{27}}{a_{5,15}}, d_{59} = -\frac{a_{56} + a_{55}d_{28}}{a_{5,15}}, d_{5,10} = -\frac{a_{57} + a_{55}d_{29}}{a_{5,15}}, \\
d_{5,11} &= -\frac{a_{58}}{a_{5,15}}, d_{5,12} = -\frac{a_{59} + a_{55}d_{2,10}}{a_{5,15}}, d_{5,13} = -\frac{a_{5,10} + a_{55}d_{2,11}}{a_{5,15}}, \\
d_{5,14} &= -\frac{a_{5,11} + a_{55}d_{2,12}}{a_{5,15}}, d_{5,15} = -\frac{a_{5,12} + a_{55}d_{2,13}}{a_{5,15}},
\end{aligned}$$

$$d_{5,16} = -\frac{a_{5,13} + a_{55}d_{2,14}}{a_{5,15}}, d_{5,17} = -\frac{a_{5,14}}{a_{5,15}}d_{5,18} = -\frac{a_{55}d_{2,15}}{a_{5,15}},$$

Розв'язки системи рівнянь (3.5) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} u(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2)\varphi_{1i}(\alpha_1), u_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2)\varphi_{2i}(\alpha_1), \\ w(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2)\varphi_{3i}(\alpha_1), \\ \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2)\varphi_{4i}(\alpha_1), \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2)\varphi_{5i}(\alpha_1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де  $u_{1i}(\alpha_2)$ ,  $u_{2i}(\alpha_2)$ ,  $w_i(\alpha_2)$ ,  $\psi_{1i}(\alpha_2)$ ,  $\psi_{2i}(\alpha_2)$  – шукані функції змінної  $\alpha_2$ ,  $\varphi_{ji}(\alpha_1)$  ( $j=\overline{1,5}$ ) – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня на рівномірній сітці  $\Delta$ :  $0 = \alpha_{1_0} < \alpha_{1_1} < \dots < \alpha_{1_N} = L$ , які задовольняють граничні умови на криволінійних контурах  $\alpha_1 = 0$  та  $\alpha_1 = L$ .

Ці функції на контурах  $\alpha_1 = 0$  та  $\alpha_1 = L$  можна представити через  $B$ -сплайни так:

а) якщо шуканий розв'язок дорівнює нулю на обох торцях, то

$$\begin{aligned} \varphi_{j0}(\alpha_1) &= -4B_3^{-1}(\alpha_1) + B_3^0(\alpha_1), \\ \varphi_{j1}(\alpha_1) &= B_3^{-1}(\alpha_1) - \frac{1}{2}B_3^0(\alpha_1) + B_3^1(\alpha_1), \\ \varphi_{ji}(\alpha_1) &= B_3^i(\alpha_1) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2), \\ \varphi_{j,N-1}(\alpha_1) &= B_3^{N+1}(\alpha_1) - \frac{1}{2}B_3^N(\alpha_1) + B_3^{N-1}(\alpha_1), \\ \varphi_{jN}(\alpha_1) &= -4B_3^{N+1}(\alpha_1) + B_3^N(\alpha_1); \end{aligned} \quad (3.8)$$

б) якщо похідна по  $\alpha_1$  від розв'язувальної функції дорівнює нулю на

обох торцях, то

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j0}(\alpha_1) &= B_3^0(\alpha_1), \\
 \varphi_{j1}(\alpha_1) &= B_3^{-1}(\alpha_1) - \frac{1}{2}B_3^0(\alpha_1) + B_3^1(\alpha_1), \\
 \varphi_{ji}(\alpha_1) &= B_3^i(\alpha_1) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2), \\
 \varphi_{j,N-1}(\alpha_1) &= B_3^{N+1}(\alpha_1) - \frac{1}{2}B_3^N(\alpha_1) + B_3^{N-1}(\alpha_1), \\
 \varphi_{jN}(\alpha_1) &= B_3^N(\alpha_1);
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

в) якщо на одному з торців шукана функція, а на іншому похідна по  $\alpha_1$  дорівнює нулю, то комбінуючи функціями  $\varphi_{j,N-1}$ ,  $\varphi_{j,N}$  з (3.8) та  $\varphi_{j1}$ ,  $\varphi_{j0}$  з (3.9) або навпаки можемо задовольнити граничні умови на обох торцях.

Підставивши вирази (3.7) у (3.5) і вимагаючи виконання останніх в точках колокації  $\xi_k = \alpha_{1k}$  ( $k = \overline{0, N}$ ), можна отримати такі рівняння:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^N u''_{1i}(\alpha_2)\varphi_{1i}(\xi_k) &= d_{11}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2)\varphi'_{1i}(\xi_k) + \\
 &+ d_{12}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2)\varphi''_{1i}(\xi_k) + d_{13}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2)\varphi_{1i}(\xi_k) + \\
 &+ d_{14}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2)\varphi'_{2i}(\xi_k) + d_{15}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2)\varphi_{2i}(\xi_k) + \\
 &+ d_{16}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2)\varphi'_{2i}(\xi_k) + d_{17}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2)\varphi_{3i}(\xi_k) + \\
 &+ d_{18}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2)\varphi'_{3i}(\xi_k) + d_{19}(\xi_k, \alpha_2)q_1(\xi_k, \alpha_2), \\
 \sum_{i=0}^N u''_{2i}(\alpha_2)\varphi_{2i}(\xi_k) &= d_{21}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_i(\alpha_2)\varphi'_{1i}(\xi_k) + \\
 d_{22}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2)\varphi_{1i}(\xi_k) &+ d_{23}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2)\varphi'_{1i}(\xi_k) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{24}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\xi_k) + d_{25}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{2i}(\xi_k) + \\
& +d_{26}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi''_{2i}(\xi_k) + d_{27}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{2i}(\xi_k) + \\
& +d_{28}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi_{3i}(\xi_k) + d_{29}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w'_i(\alpha_2) \varphi_{3i}(\xi_k) + \\
& +d_{2,10}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\xi_k) + d_{2,11}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{4i}(\xi_k) + \\
& +d_{2,12}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5i}(\xi_k) + d_{2,13}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) + \\
& +d_{2,14}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi''_{5i}(\xi_k) + d_{2,15}(\xi_k, \alpha_2) q_2(\xi_k, \alpha_2), \\
& \sum_{i=0}^N w''_i(\alpha_2) \varphi_{3,i} = d_{31}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{1,i}(\xi_k) + \\
& +d_{32}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2,i}(\xi_k) + d_{33}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2,i}(\xi_k) + \\
& +d_{34}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi_{3,i}(\xi_k) + d_{35}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi'_{3,i}(\xi_k) + \\
& +d_{36}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi''_{3,i}(\xi_k) + d_{37}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w'_i(\alpha_2) \varphi_{3,i}(\xi_k) + \\
& +d_{38}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4,i}(\xi_k) + d_{39}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{4,i}(\xi_k) + \\
& +d_{3,10}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5,i}(\xi_k) + d_{3,11}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5,i}(\xi_k) + \quad (3.10) \\
& +d_{3,12}(\xi_k, \alpha_2) q_\gamma(\xi_k, \alpha_2), \\
& \sum_{i=0}^N \psi''_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\xi_k) = d_{41}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{1i}(\xi_k) + \\
& +d_{42}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2) \varphi''_{1i}(\xi_k) + d_{43}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{1i}(\xi_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{44}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{2i}(\xi_k) + d_{45}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\xi_k) + \\
& +d_{46}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{2i}(\xi_k) + d_{47}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi_{3i}(\xi_k) + \\
& +d_{48}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi'_{3i}(\xi_k) + d_{49}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\xi_k) + \\
& +d_{4,10}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{4i}(\xi_k) + d_{4,11}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_2) \varphi''_{4i}(\xi_k) + \\
& +d_{4,12}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\xi_k) + d_{4,13}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) + \\
& +d_{4,14}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5i}(\xi_k) + d_{4,15}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) + \\
& \quad +d_{4,16}(\xi_k, \alpha_2) q_s(\xi_k, \alpha_2), \\
& \sum_{i=0}^N \psi''_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5,i}(\xi_k) = d_{51}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{1i}(\xi_k) + \\
& +d_{52}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_2) \varphi_{1i}(\xi_k) + d_{53}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{1i}(\xi_k) + \\
& +d_{54}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi''_{2i}(\xi_k) + d_{55}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\xi_k) + \\
& +d_{56}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\xi_k) + d_{57}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{2i}(\xi_k) + \\
& +d_{58}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_2) \varphi_{2i}(\xi_k) + d_{59}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi''_{3i}(\xi_k) + \\
& +d_{5,10}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_2) \varphi_{3i}(\xi_k) + d_{5,11}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{4i}(\xi_k) + \\
& +d_{5,12}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi_{4i}(\xi_k) + d_{5,13}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{1i}(\alpha_2) \varphi'_{4i}(\xi_k) + \\
& +d_{5,14}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi'_{2i}(\alpha_2) \varphi_{5i}(\xi_k) + d_{5,15}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{4,16}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) + d_{4,17}(\xi_k, \alpha_2) \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_2) \varphi'_{5i}(\xi_k) + \\
& +d_{5,18}(\xi_k, \alpha_2) q_2(\xi_k, \alpha_2),
\end{aligned}$$

тут і надалі штрихи над функціями означають похідні по відповідній змінній.

Співвідношення (3.10) – це  $5(N + 1)$  лінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно  $5(N + 1)$  невідомих функцій  $u_{1i}, u_{2i}, w_i, \psi_{si}, \psi_{\theta i}$  ( $i = \overline{0, N}$ ).

Введемо матриці  $\Phi_{u_1}, \Phi_{u_1}^{(1)}, \Phi_{u_1}^{(2)}, \Phi_{u_2}, \Phi_{u_2}^{(1)}, \Phi_{u_2}^{(2)}, \Phi_w, \Phi_w^{(1)}, \Phi_w^{(2)}, \Phi_{\psi_1}, \Phi_{\psi_1}^{(1)}, \Phi_{\psi_1}^{(2)}, \Phi_{\psi_2}, \Phi_{\psi_2}^{(1)}, \Phi_{\psi_2}^{(2)}$ , з такими компонентами :

$$\begin{aligned}
(\Phi_{u_1})_{ij} &= \varphi_{1j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{u_1}^{(1)}\right)_{ij} = \varphi'_{1j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{u_1}^{(2)}\right)_{ij} = \varphi''_{1j}(\xi_i) \\
(\Phi_{u_2})_{ij} &= \varphi_{2j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{u_2}^{(1)}\right)_{ij} = \varphi'_{2j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{u_2}^{(2)}\right)_{ij} = \varphi''_{2j}(\xi_i) \\
(\Phi_w)_{ij} &= \varphi_{3j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_w^{(1)}\right)_{ij} = \varphi'_{3j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_w^{(2)}\right)_{ij} = \varphi''_{3j}(\xi_i) \\
(\Phi_{\psi_1})_{ij} &= \varphi_{4j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{\psi_1}^{(1)}\right)_{ij} = \varphi'_{4j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{\psi_1}^{(2)}\right)_{ij} = \varphi''_{4j}(\xi_i) \\
(\Phi_{\psi_2})_{ij} &= \varphi_{5j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{\psi_2}^{(1)}\right)_{ij} = \varphi'_{5j}(\xi_i), \quad \left(\Phi_{\psi_2}^{(2)}\right)_{ij} = \varphi''_{5j}(\xi_i) \quad (i, j = \overline{0, N})
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= [u_{10}, u_{11}, \dots, u_{1N}]^T, \quad \bar{u}_2 = [u_{20}, u_{21}, \dots, u_{2N}]^T, \\
\bar{w} &= [w_0, w_1, \dots, w_N]^T, \quad \bar{\psi}_1 = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1N}]^T, \\
\bar{\psi}_2 &= [\psi_{20}, \psi_{21}, \dots, \psi_{2N}]^T
\end{aligned} \tag{3.11}$$

i

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= [q_1(\xi_0, \alpha_2), q_1(\xi_1, \alpha_2), \dots, q_1(\xi_N, \alpha_2)]^T, \\
\bar{q}_2 &= [q_2(\xi_0, \alpha_2), q_2(\xi_1, \alpha_2), \dots, q_2(\xi_N, \alpha_2)]^T, \\
\bar{q}_3 &= [q_3(\xi_0, \alpha_2), q_3(\xi_1, \alpha_2), \dots, q_3(\xi_N, \alpha_2)]^T. \\
\bar{d}_{ij} &= [d_{ij}(\xi_0, \alpha_2), d_{ij}(\xi_1, \alpha_2), \dots, d_{ij}(\xi_N, \alpha_2)]^T.
\end{aligned} \tag{3.12}$$



Якщо  $A = [a_{ij}]$ ,  $(i, j = \overline{0, N})$  і  $\bar{c} = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$ , то через  $\bar{c} * A$  будемо позначати матрицю  $[c_i a_{ij}]$ , тобто  $\bar{c} * A = [c_i a_{ij}]$ , а якщо  $\bar{d} = [d_0, d_1, \dots, d_N]^T$ , то  $\bar{c} * \bar{d} = [c_0 d_0, c_1 d_1, \dots, c_N d_N]^T$ .

Точки колокації вибираються так, щоб матриці  $\Phi$  були невинроджені, тобто існують обернені матриці  $\Phi^{-1}$ , тоді рівняння (3.10) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1'' &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{11} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{d}_{12} * \Phi_{u_1}^{(2)})\bar{u}_1 + \bar{d}_{13} * \bar{u}'_1 + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{14} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2 + \\
&+ \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{15} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{16} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}'_2 + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{17} * \Phi_w + \bar{d}_{18} * \Phi_w^{(1)})\bar{w} + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{19} * \bar{q}_1); \\
\bar{u}_2'' &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{21} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1 + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{22} * \Phi_{u_1} + \bar{d}_{23} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}'_1 + \\
&+ \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{24} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{25} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{d}_{26} * \Phi_{u_2}^{(2)})\bar{u}_2 + \\
&+ \bar{d}_{27} * \bar{u}'_2 + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{28} * \Phi_w)\bar{w} + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{29} * \Phi_w)\bar{w}' + \\
&\quad \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{2,10} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{2,11} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}'_1 + \\
\Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{2,12} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{2,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{d}_{2,14} * \Phi_{\psi_2}^{(2)})\bar{\psi}_2 + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{2,15} * \bar{q}_2); \\
\bar{w}'' &= \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{31} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1 + \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{32} * \Phi_{u_2})\bar{u}_2 + \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{33} * \Phi_{u_2})\bar{u}'_2 + \\
&+ \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{34} * \Phi_w + \bar{d}_{35} * \Phi_w^{(1)} + \bar{d}_{36} * \Phi_w^{(2)})\bar{w} + \bar{d}_{37} * \bar{w}' + \\
&+ \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{38} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{39} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}_1 + \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{3,10} * \Phi_{\psi_2})\bar{\psi}_2 + \\
&\quad + \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{3,11} * \Phi_{\psi_2})\bar{\psi}'_2 + \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{2,12} * \bar{q}_3); \\
\bar{\psi}_1'' &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{41} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{d}_{42} * \Phi_{u_1}^{(2)})\bar{u}_1 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{43} * \Phi_{u_1})\bar{u}'_1 + \\
&+ \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{44} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{45} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{46} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}'_2 + \\
&\quad + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{47} * \Phi_w + \bar{d}_{48} * \Phi_w^{(1)})\bar{w} + \\
&\quad + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{49} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{4,10} * \Phi_{\psi_1}^{(1)} + \bar{d}_{4,11} * \Phi_{\psi_1}^{(2)})\bar{\psi}_1 + \bar{d}_{4,12} * \bar{\psi}'_1 \\
&+ \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)})\bar{\psi}_2 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{4,15} * \Phi_{\psi_2}^{(1)})\bar{\psi}'_2 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,16} * \bar{q}_2); \\
\bar{\psi}_2'' &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{51} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1 + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{52} * \Phi_{u_1} + \bar{d}_{53} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}'_1 + \\
&+ \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{54} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{55} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{d}_{56} * \Phi_{u_2}^{(2)})\bar{u}_2 + \\
&\quad + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{57} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{58} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}'_2 +
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{59} * \Phi_w)\bar{w} + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,10} * \Phi_w)\bar{w}' + \\
& +\Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,11} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}_1 + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,12} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{5,13} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}'_1 + \\
& +\Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{5,15} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{d}_{5,16} * \Phi_{\psi_2}^{(2)})\bar{\psi}_2 \\
& +\bar{d}_{4,17} * \bar{\psi}'_2 + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{4,18} * \bar{q}_2);
\end{aligned}$$

Систему (3.13) приведемо до нормального вигляду:

$$\frac{d\bar{R}}{d\alpha_2} = A(\alpha_2)\bar{R} + \bar{f}(\alpha_2), \quad (3.14)$$

де  $\bar{R} = [\bar{u}_1, \bar{u}'_1, \bar{u}_2, \bar{u}'_2, \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_1, \bar{\psi}'_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}'_2]^T$  – вектор-стовпчик розмірності  $10(N+1)$ ;  $A(\alpha_2)$  – квадратна матриця розмірності  $10(N+1)$ ,  $\bar{f}(\alpha_2)$  – вектор-стовпчик правої частини, що складається з  $10(N+1)$  компонентів.

Матриця  $A(\alpha_2)$  має такий вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,10} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{10,1} & T_{10,2} & \dots & T_{10,10} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

де  $T_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 10}$ ) – квадратні матриці розмірності  $N+1$ . Ненульові матриці  $T_{ij}$  визначаються з співвідношень (3.13):

$$\begin{aligned}
T_{12} &= I, T_{21} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{11} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{d}_{12} * \Phi_{u_1}^{(2)}), \\
T_{22} &= \bar{d}_{13} * I, T_{23} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{14} * \Phi_{u_2}^{(1)}), \\
T_{24} &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{15} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{16} * \Phi_{u_2}^{(1)}), T_{25} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{17} * \Phi_w + \bar{d}_{18} * \Phi_w^{(1)}); \\
T_{34} &= I, T_{41} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{21} * \Phi_{u_1}^{(1)}), T_{42} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{22} * \Phi_{u_1} + \bar{d}_{23} * \Phi_{u_1}^{(1)}), \\
T_{43} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{24} * \Phi_{u_2} + \bar{d}_{25} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{d}_{26} * \Phi_{u_2}^{(2)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{44} &= \bar{d}_{27} * I, T_{45} = \Phi_{u2}^{-1}(\bar{d}_{28} * \Phi_w), T_{46} = \Phi_{u2}^{-1}(\bar{d}_{29} * \Phi_w), \\
T_{48} &= \Phi_{u2}^{-1}(\bar{d}_{2,10} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{2,11} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), \\
T_{49} &= \Phi_{u2}^{-1}(\bar{d}_{2,12} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{2,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{d}_{2,14} * \Phi_{\psi_2}^{(2)}), T_{56} = I, \\
T_{61} &= \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{31} * \Phi_{u1}^{(1)}), T_{63} = \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{32} * \Phi_{u2}), T_{64} = \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{33} * \Phi_{u2}), \\
T_{65} &= \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{34} * \Phi_w + \bar{d}_{35} * \Phi_w^{(1)} + \bar{d}_{36} * \Phi_w^{(2)}), T_{66} = \bar{d}_{37} * I, \\
T_{67} &= Phi_w^{-1}(\bar{d}_{38} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{39} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), T_{69} = \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{3,10} * \Phi_{\psi_2}), \\
T_{6,10} &= \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{3,11} * \Phi_{\psi_2}), T_{78} = I, \\
T_{81} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{41} * \Phi_{u1}^{(1)} + \bar{d}_{42} * \Phi_{u1}^{(2)}), T_{82} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{43} * \Phi_{u1}), \\
T_{83} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{44} * \Phi_{u2}^{(1)}), T_{84} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{45} * \Phi_{u2} + \bar{d}_{46} * \Phi_{u2}^{(1)}), \\
T_{85} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{47} * \Phi_w + \bar{d}_{48} * \Phi_w^{(1)}), \\
T_{87} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{49} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{4,10} * \Phi_{\psi_1}^{(1)} + \bar{d}_{4,11} * \Phi_{\psi_1}^{(2)}), T_{88} = d_{4,12} * I \\
T_{89} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)}), T_{8,10} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{4,15} * \Phi_{\psi_2}^{(1)}), \\
T_{9,10} &= I, T_{10,1} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{51} * \Phi_{u1}^{(1)}), T_{10,2} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{52} * \Phi_{u1} + \bar{d}_{53} * \Phi_{u1}^{(1)}), \\
T_{10,3} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{54} * \Phi_{u2} + \bar{d}_{55} * \Phi_{u2}^{(1)} + \bar{d}_{56} * \Phi_{u2}^{(2)}), \\
T_{10,4} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{57} * \Phi_{u2} + \bar{d}_{58} * \Phi_{u2}^{(1)}), \\
T_{10,6} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{59} * \Phi_w) \bar{w} + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,10} * \Phi_w), \\
T_{10,7} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,11} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), T_{10,8} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,12} * \Phi_{\psi_1} + \bar{d}_{5,13} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), \\
T_{10,9} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{5,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{d}_{5,15} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{d}_{5,16} * \Phi_{\psi_2}^{(2)}), \\
T_{10,10} &= \bar{d}_{4,17} * I,
\end{aligned}$$

де  $I$  – одинична матриця розмірності  $N + 1$ .

Вектор-стовпчик правої частини  $\bar{f}$  також можна представити у вигляді:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \dots \\ \bar{f}_{10} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

де  $\bar{f}_i$  ( $i = \overline{1, 10}$ ) – вектори розмірності  $N + 1$ . Всі  $\bar{f}_i$  з непарними коефіцієнтами – нульові вектори, а інші визначаються з формул:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{d}_{19} * \bar{q}_1) \bar{f}_4 = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{d}_{2,15} * \bar{q}_2); \\ \bar{f}_6 &= \Phi_w^{-1}(\bar{d}_{2,12} * \bar{q}_3); \bar{f}_8 = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{d}_{4,16} * \bar{q}_2); \\ \bar{f}_{10} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{d}_{4,18} * \bar{q}_2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Граничні умови для системи рівнянь (3.14) сформулюємо, виходячи з заданих граничних умов на прямолінійних краях оболонки. Якщо оболонка замкнена, то можна скористатись умовами періодичності, або умовами симетрії.

Зокрема, для умов симетрії маємо:

$$u_2 = 0, \psi_2 = 0, M_{12} = 0, N_{12} = Q_2 = 0,$$

або

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} = \psi_2 = 0.$$

Задовольнити ці умови можна, поклавши на краях  $\alpha_2 = \alpha_{20}$  і  $\alpha_2 = \alpha_{21}$   $\bar{u}_1' = \bar{u}_2 = \bar{w}' = \bar{\psi}_1' = \bar{\psi}_2 = 0$ .

Запишемо граничні умови у загальному вигляді

$$\begin{aligned} B_1 \bar{R} &= \bar{b}_1 \quad (\alpha_2 = \alpha_{2_0}); \\ B_2 \bar{R} &= \bar{b}_2 \quad (\alpha_2 = \alpha_{2_1}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тут  $B_1$  і  $B_2$  – прямокутні матриці порядку  $5(N+1) \times 10(N+1)$ ;  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – задані вектори.

Таким чином, застосування методу сплайн-колокації зводить вихідну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами (3.5) до одновимірної, що формулюється для системи звичайних диференціальних рівнянь  $10(N+1)$  порядку і має загальний вигляд (3.14), (3.18). Для розв'язання цієї крайової задачі використовується метод дискретної ортогоналізації, описаний в 2.3.2.

### 3.3 Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної з застосуванням методу сплайн-колокації вздовж напрямної

Запишемо (3.4) у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} &= g_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + g_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + g_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + g_{14} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\ &+ g_{15} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + g_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + g_{17} w + g_{18} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + g_{19} q_1; \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} &= g_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + g_{22} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + g_{23} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + g_{24} u_2 + g_{25} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \\ &+ g_{26} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + g_{27} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + g_{28} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + g_{29} w + g_{2,10} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\ &+ g_{2,11} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + g_{2,12} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + g_{2,13} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + g_{2,14} \psi_2 + \\ &+ g_{2,15} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + g_{2,16} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + g_{2,17} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} + g_{2,18} q_2; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} &= g_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + g_{32} u_2 + g_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + g_{34} w + g_{35} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + g_{36} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g_{37}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2} + g_{38}\psi_1 + g_{39}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} + g_{3,10}\psi_2 + g_{3,11}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2} + g_{3,12}g_3; \quad (3.19) \\
\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2} & = g_{41}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} + g_{42}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_2^2} + g_{43}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + g_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + g_{45}w + \\
& + g_{46}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} + g_{47}\psi_1 + g_{48}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} + g_{49}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2} + g_{4,10}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_2^2} + \\
& + g_{4,11}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1} + g_{4,12}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2} + g_{4,13}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}; \\
\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_1^2} & = g_{51}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} + g_{52}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1\alpha_2} + g_{53}u_2 + g_{54}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + g_{55}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha_2^2} + \\
& + g_{56}w + g_{57}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} + g_{58}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} + g_{59}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2} + g_{5,10}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \\
& + g_{5,11}\psi_2 + g_{5,12}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1} + g_{5,13}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2} + g_{5,14}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha_2^2},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
g_{11} & = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, g_{12} = -\frac{a_{13}}{a_{12}}, g_{13} = -\frac{a_{14}}{a_{12}}, g_{14} = -\frac{a_{15}}{a_{12}}, \\
g_{15} & = -\frac{a_{16}}{a_{12}}, g_{16} = -\frac{a_{17}}{a_{12}}, g_{17} = -\frac{a_{18}}{a_{12}}, g_{18} = -\frac{a_{19}}{a_{12}}, g_{19} = -\frac{1}{a_{12}}, \\
g_{31} & = -\frac{a_{31}}{a_{36}}, g_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{36}}, g_{33} = -\frac{a_{33}}{a_{36}}, g_{34} = -\frac{a_{34}}{a_{36}}, \\
g_{35} & = -\frac{a_{35}}{a_{36}}, g_{36} = -\frac{a_{37}}{a_{36}}, g_{37} = -\frac{a_{38}}{a_{36}}, g_{38} = -\frac{a_{39}}{a_{36}}, \\
g_{39} & = -\frac{a_{3,10}}{a_{36}}, g_{3,10} = -\frac{a_{3,11}}{a_{36}}, g_{3,11} = -\frac{a_{3,12}}{a_{36}}, g_{3,12} = -\frac{1}{a_{36}}; \\
g_{41} & = -\frac{a_{41}}{a_{49}}, g_{42} = -\frac{a_{42}}{a_{49}}, g_{43} = -\frac{a_{43}}{a_{49}}, g_{44} = -\frac{a_{44}}{a_{49}}, \\
g_{45} & = -\frac{a_{45}}{a_{49}}, g_{46} = -\frac{a_{46}}{a_{49}}, g_{47} = -\frac{a_{47}}{a_{49}}, \\
g_{48} & = -\frac{a_{48}}{a_{49}}, g_{49} = -\frac{a_{4,10}}{a_{49}}, g_{4,10} = -\frac{a_{4,11}}{a_{49}}, \\
g_{4,11} & = -\frac{a_{4,12}}{a_{49}}, g_{4,12} = -\frac{a_{4,13}}{a_{49}}, g_{4,13} = -\frac{a_{4,14}}{a_{49}}, \\
g_{51} & = -\frac{a_{51}}{a_{5,13}}, g_{52} = -\frac{a_{52}}{a_{5,13}}, g_{53} = -\frac{a_{53}}{a_{5,13}}, g_{54} = -\frac{a_{54}}{a_{5,13}}, g_{55} = -\frac{a_{55}}{a_{5,13}}, \\
g_{56} & = -\frac{a_{56}}{a_{5,13}}, g_{57} = -\frac{a_{57}}{a_{5,13}}, g_{58} = -\frac{a_{58}}{a_{5,13}}, g_{59} = -\frac{a_{59}}{a_{5,13}}, g_{5,10} = -\frac{a_{5,10}}{a_{5,13}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{5,11} &= -\frac{a_{5,11}}{a_{5,13}}, g_{5,12} = -\frac{a_{5,12}}{a_{5,13}}, g_{5,13} = -\frac{a_{5,14}}{a_{5,13}}, g_{5,14} = -\frac{a_{5,15}}{a_{5,13}}. \\
g_{21} &= -\frac{a_{21}}{a_{26}}, g_{22} = -\frac{a_{22} + a_{2,15}g_{51}}{a_{26}}, g_{23} = -\frac{a_{23} + a_{2,15}g_{52}}{a_{26}}, \\
g_{24} &= -\frac{a_{24} + a_{2,15}g_{53}}{a_{26}}, g_{25} = -\frac{a_{25}}{a_{26}}, g_{26} = -\frac{a_{2,15}g_{54}}{a_{26}}, \\
g_{27} &= -\frac{a_{27}}{a_{26}}, g_{28} = -\frac{a_{28} + a_{2,15}g_{55}}{a_{26}}, g_{29} = -\frac{a_{29} + a_{2,15}g_{56}}{a_{26}}, \\
g_{2,10} &= -\frac{a_{2,10} + a_{2,15}g_{57}}{a_{26}}, g_{2,11} = -\frac{a_{2,15}g_{58}}{a_{26}}, g_{2,12} = -\frac{a_{2,11} + a_{2,15}g_{59}}{a_{26}}, \\
g_{2,13} &= -\frac{a_{2,12} + a_{2,15}g_{5,10}}{a_{26}}, g_{2,14} = -\frac{a_{2,13} + a_{2,15}g_{5,11}}{a_{26}}, \\
g_{2,15} &= -\frac{a_{2,14} + a_{2,15}g_{5,12}}{a_{26}}, g_{2,16} = -\frac{a_{2,15}g_{5,13}}{a_{26}}, \\
g_{2,17} &= -\frac{a_{2,15}g_{5,14}}{a_{26}}, g_{2,18} = -\frac{1}{a_{26}},
\end{aligned}$$

Розв'язки системи рівнянь (3.19) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}
u_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N u_{1i}(\alpha_1)\varphi_{1i}(\alpha_2), u_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(\alpha_1)\varphi_{2i}(\alpha_2), \\
w(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N w_i(\alpha_1)\varphi_{3i}(\alpha_2), \\
\psi_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\alpha_1)\varphi_{4i}(\alpha_2), \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\alpha_1)\varphi_{5i}(\alpha_2),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

де  $u_{1i}(\alpha_1)$ ,  $u_{2i}(\alpha_1)$ ,  $w_i(\alpha_1)$ ,  $\psi_{1i}(\alpha_1)$ ,  $\psi_{2i}(\alpha_1)$  –шукані функції змінної  $\alpha_1$ ,  $\varphi_{ji}(\alpha_2)$  ( $j=\overline{1,5}$ ) – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня на рівномірній сітці  $\Delta$ :  $0 = \alpha_{2_0} < \alpha_{2_1} < \dots < \alpha_{2_N} = L$ , які задовольняють граничні умови на прямолінійних контурах  $\alpha_2 = \alpha_{2_0}$  та  $\alpha_2 = \alpha_{2_1}$ . Процедура побудова функцій  $\varphi_{ji}$  описана в попередньому параграфі.

Підставимо вирази (3.20) у (3.19) і вимагаємо їх виконання в точках колокації  $\xi_k = \alpha_{2k}$  ( $k = \overline{0, N}$ ). Тоді, ввівши для невідомих функцій позначення

(3.11), і задаючи

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= [q_1(\alpha_1, \xi_0), q_1(\alpha_1, \xi_1, ), \dots, q_1(\alpha_1, \xi_N, )]^T, \\
\bar{q}_2 &= [q_2(\alpha_1, \xi_0), q_2(\alpha_1, \xi_1, ), \dots, q_2(\alpha_1, \xi_N, )]^T, \\
\bar{q}_3 &= [q_3(\alpha_1, \xi_0), q_3(\alpha_1, \xi_1, ), \dots, q_3(\alpha_1, \xi_N, )]^T, \\
\bar{g}_{ij} &= [g_{ij}(\alpha_1, \xi_0), d_{ij}(\alpha_1, \xi_1, ), \dots, d_{ij}(\alpha_1, \xi_N, )]^T,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

можемо записати розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь, що одержана з вихідної системи (3.19), у вигляді:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1'' &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{12} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{g}_{13} * \Phi_{u_1}^{(2)})\bar{u}_1 + \bar{g}_{11} * \bar{u}_1' + \\
&+ \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{15} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2 + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{14} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{16} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2' + \\
&+ \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{17} * \Phi_w)\bar{w} + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{18} * \Phi_w)\bar{w}' + \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{19} * \bar{q}_1); \\
\bar{u}_2'' &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{22} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1 + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{21} * \Phi_{u_1} + \bar{g}_{23} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1' + \\
&+ \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{24} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{26} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{g}_{28} * \Phi_{u_2}^{(2)})\bar{u}_2 + \\
&+ \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{25} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{27} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2' + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{29} * \Phi_w + \bar{g}_{2,10} * \Phi_w^{(1)})\bar{w} + \\
&+ \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,12} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}_1 + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,11} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{2,13} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}_1' + \\
&\Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{2,16} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{g}_{2,17} * \Phi_{\psi_2}^{(2)})\bar{\psi}_2 + \\
&+ \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,15} * \Phi_{\psi_2})\bar{\psi}_2' + \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,18} * \bar{q}_2); \\
\bar{w}'' &= \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{31} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1' + \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{32} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{33} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2 + \\
&+ \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{34} * \Phi_w + \bar{g}_{36} * \Phi_w^{(1)} + \bar{g}_{37} * \Phi_w^{(2)})\bar{w} + \bar{g}_{35} * \bar{w}' + \\
&+ \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{38} * \Phi_{\psi_1})\bar{\psi}_1 + \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{39} * \Phi_{\psi_1})\bar{\psi}_1' + \\
&+ \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{3,10} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{3,11} * \Phi_{\psi_2}^{(1)})\bar{\psi}_2 + \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{2,12} * \bar{q}_3); \\
\bar{\psi}_1'' &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{41} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{g}_{42} * \Phi_{u_1}^{(2)})\bar{u}_1 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{43} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2 + \\
&+ \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{44} * \Phi_{u_2}^{(1)})\bar{u}_2' + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{45} * \Phi_w)\bar{w} + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{46} * \Phi_w)\bar{w}' + \\
&+ \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{47} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{49} * \Phi_{\psi_1}^{(1)} + \bar{g}_{4,10} * \Phi_{\psi_1}^{(2)})\bar{\psi}_1 + d_{48} * \bar{\psi}_1' +
\end{aligned} \tag{3.22}$$



$$\begin{aligned}
& + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{4,12} * \Phi_{\psi_2}^{(1)})\bar{\psi}_2 + \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{4,11} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{4,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)})\bar{\psi}'_2 \\
& \quad \bar{\psi}_2'' = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{51} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}_1 + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{52} * \Phi_{u_1}^{(1)})\bar{u}'_1 + \\
& \quad + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{53} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{54} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{g}_{55} * \Phi_{u_2}^{(2)})\bar{u}_2 + \\
& \quad + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{56} * \Phi_w + \bar{g}_{57} * \Phi_w^{(1)})\bar{w} + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{59} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}_1 + \\
& \quad + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{58} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{5,10} * \Phi_{\psi_1}^{(1)})\bar{\psi}'_1 + \\
& + \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{5,11} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{5,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{g}_{5,14} * \Phi_{\psi_2}^{(2)})\bar{\psi}_2 + \bar{g}_{4,12} * \bar{\psi}'_2.
\end{aligned}$$

Систему (3.22) приведемо до нормального вигляду Коші:

$$\frac{d\bar{R}}{d\alpha_1} = A(\alpha_1)\bar{R} + \bar{f}(\alpha_1). \quad (3.23)$$

Матриця  $A(\alpha_1)$  в цьому випадку теж має вигляд, як у (3.15), де ненульові матриці  $T_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
T_{12} &= I, T_{21} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{12} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{g}_{13} * \Phi_{u_1}^{(2)}), T_{22} = \bar{g}_{11} * I \\
T_{23} &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{15} * \Phi_{u_2}^{(1)}), T_{24} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{14} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{16} * \Phi_{u_2}^{(1)}), \\
T_{25} &= \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{17} * \Phi_w), T_{26} = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{18} * \Phi_w), \\
T_{34} &= I, T_{41} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{22} * \Phi_{u_1}^{(1)}), T_{42} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{21} * \Phi_{u_1} + \bar{g}_{23} * \Phi_{u_1}^{(1)}), \\
T_{43} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{24} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{26} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{g}_{28} * \Phi_{u_2}^{(2)}), \\
T_{44} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{25} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{27} * \Phi_{u_2}^{(1)}), T_{45} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{29} * \Phi_w + \bar{g}_{2,10} * \Phi_w^{(1)}), \\
T_{47} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,12} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), T_{48} = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,11} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{2,13} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), \\
T_{49} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,14} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{2,16} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{g}_{2,17} * \Phi_{\psi_2}^{(2)}), \\
T_{4,10} &= \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,15} * \Phi_{\psi_2}), \\
T_{56} &= I, T_{62} = \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{31} * \Phi_{u_1}^{(1)}), T_{63} = \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{32} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{33} * \Phi_{u_2}^{(1)}), \\
T_{65} &= \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{34} * \Phi_w + \bar{g}_{36} * \Phi_w^{(1)} + \bar{g}_{37} * \Phi_w^{(2)}), T_{66} = \bar{g}_{35} * I, \\
T_{67} &= \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{38} * \Phi_{\psi_1}), T_{68} = \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{39} * \Phi_{\psi_1}), \\
T_{69} &= \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{3,10} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{3,11} * \Phi_{\psi_2}^{(1)}), \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{78} &= I, T_{81} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{41} * \Phi_{u_1}^{(1)} + \bar{g}_{42} * \Phi_{u_1}^{(2)}), T_{83} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{43} * \Phi_{u_2}^{(1)}), \\
T_{84} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{44} * \Phi_{u_2}^{(1)}), T_{85} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{45} * \Phi_w), T_{86} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{46} * \Phi_w), \\
T_{87} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{47} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{49} * \Phi_{\psi_1}^{(1)} + \bar{g}_{4,10} * \Phi_{\psi_1}^{(2)}), T_{88} = d_{48} * I, \\
T_{89} &= \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{4,12} * \Phi_{\psi_2}^{(1)}), T_{8,10} = \Phi_{\psi_1}^{-1}(\bar{g}_{4,11} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{4,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)}), \\
T_{9,10} &= I, T_{10,1} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{51} * \Phi_{u_1}^{(1)}), T_{10,2} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{52} * \Phi_{u_1}^{(1)}), \\
T_{10,3} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{53} * \Phi_{u_2} + \bar{g}_{54} * \Phi_{u_2}^{(1)} + \bar{g}_{55} * \Phi_{u_2}^{(2)}), \\
T_{10,5} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{56} * \Phi_w + \bar{g}_{57} * \Phi_w^{(1)}), T_{10,7} = \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{59} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), \\
T_{10,8} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{58} * \Phi_{\psi_1} + \bar{g}_{5,10} * \Phi_{\psi_1}^{(1)}), \\
T_{10,9} &= \Phi_{\psi_2}^{-1}(\bar{g}_{5,11} * \Phi_{\psi_2} + \bar{g}_{5,13} * \Phi_{\psi_2}^{(1)} + \bar{g}_{5,14} * \Phi_{\psi_2}^{(2)}), T_{10,10} = \bar{g}_{4,12} * I.
\end{aligned}$$

Ненульові елементи вектора  $\bar{f}$  такі:

$$\bar{f}_2 = \Phi_{u_1}^{-1}(\bar{g}_{19} * \bar{q}_1); \bar{f}_4 = \Phi_{u_2}^{-1}(\bar{g}_{2,18} * \bar{q}_2); \bar{f}_6 = \Phi_w^{-1}(\bar{g}_{2,12} * \bar{q}_3). \quad (3.25)$$

Загальний вигляд граничних умов буде мати вигляд (3.18), відмінність полягає тільки у тому, що у цьому випадку граничні умови задаються на криволінійних краях  $\alpha_1 = 0$  і  $\alpha_1 = L$ .

Отримана одновимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь розв'язується методом дискретної ортогоналізації (2.3.2).

### 3.4 Напружений стан оболонок з еліптичним поперечним перерізом

На основі викладених вище підходів розв'язано задачі статички некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом (рис. 3.1)

$x_1 = b \cos \alpha_2$ ,  $x_2 = a \sin \alpha_2$ ,  $k$  - кривина напрямної циліндричної оболонки,  $Ox_1x_2$  - декартова система координат [164].

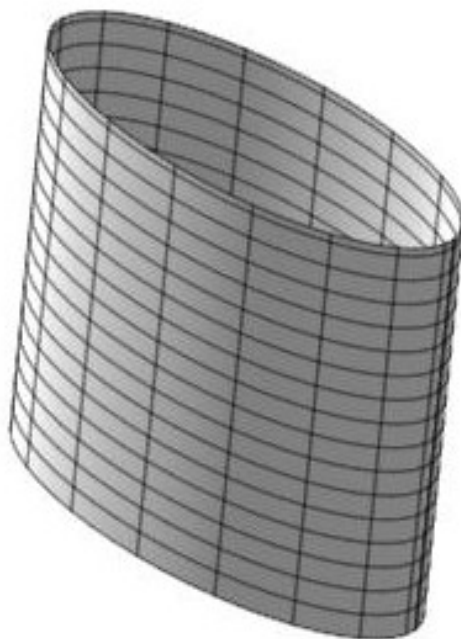


Рис. 3.1 – Циліндрична оболонка з еліптичним поперечним перерізом

Досліджено напружено-деформований стан замкненої ізотропної оболонки сталої товщини, півосі поперечного перерізу якої  $a = 12,5$ ;  $b = 8$ , модуль Юнга  $E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; довжина оболонки  $L = 30$ , товщина  $h = 1$ . Торці жорстко закріплені ( $u_1 = u_2 = w = 0, \psi_1 = \psi_2 = 0, \alpha_1 = const$ ).

Оскільки в даному випадку товщина вздовж напрямної не змінюється, то при  $\alpha_2 = 0$  і  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  будуть мати місце умови симетрії

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} = 0, \psi_2 = 0, u_2 = 0.$$

На оболонку діє нормальне рівномірно розподілене навантаження  $q_z = q_0$ .

Задачу розв'язано в двох варіантах: при апроксимації сплайнами вздовж твірної, і при апроксимації сплайнами вздовж напрямної.

В табл. 3.1 показано, як змінюються значення одержаних прогинів  $w$  в середньому перерізі  $\alpha_1 = L/2$  в залежності від напрямку сплайн-

Табл. 3.1 – Порівняння переміщень, отриманих при різній кількості точок колокації, в залежності від напрямку апроксимації

Напрямок апроксимації	$\alpha_2$	$wE_0/q_0$					
		$N$					
		9	11	13	15	17	19
вздовж твірної	0	1226	1225	1224	1225	1225	1226
	$\pi/2$	-559,8	-560,6	-561,4	-562,1	-562,6	-563,0
вздовж напрямної	0	1203	1213	1218	1221	1223	1224
	$\pi/2$	-546,8	-554,7	-558,5	-560,5	-561,6	-562,3

апроксимації і кількості точок колокації ( $N + 1$ ). Як видно з таблиці, при апроксимації вздовж твірної одержане значення максимального прогину, що спостерігаються при  $\alpha_2 = 0$ , вже при 10 точках колокації ( $N = 9$ ) в трьох значущих цифрах збігається зі значенням прогину, отриманого при 20 точках колокації. Уточнення розв'язку зі збільшенням точок колокації можна спостерігати в перерізі  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , де мають місце прогини, протилежні напрямку дії сили. Проте різниця між прогинами отриманими при  $N = 9$  і  $N = 19$ , становить менше 1%.

Різниця у значеннях, отриманих для різної кількості точок колокації при апроксимації вздовж напрямної більш помітна, ніж при апроксимації вздовж твірної. Але для максимальних прогинів результати, отримані при 20 і 10 точках колокації, відрізняються менш ніж на 2%. Також варто відзначити, що вже при  $N = 19$  наведені значення прогинів практично збігаються для обох напрямків апроксимації.

Як видно з табл. 3.1, для оболонки сталого товщини апроксимація сплайнами вздовж твірної дає більш точні результати при меншій кількості точок колокації. Це можна пояснити тим, що в даному випадку коефіцієнти розв'язувальної системи рівнянь (3.14) залежать тільки від змінної  $\alpha_2$ .

Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан

139 ортотропної оболонки змінної вздовж твірної товщини, виготовленої зі склопластику, що має такі пружні характеристики:  $E_1 = E$ ,  $E_2 = 4,07E$ ,  $\nu_2 = 0,277$ ,  $G_{12} = G_{23} = 0,407E$ ,  $G_{13} = 0,357E$ . У цьому випадку волокна композиту направлені вздовж напрямної циліндра. Товщина оболонки змінюється за законом  $h = 1 + \alpha[3(\alpha_1/L - 1)^2 - 1]$ , і вага оболонки не залежить від параметра  $\alpha$ . Всі інші характеристики такі ж, як і в попередній задачі.

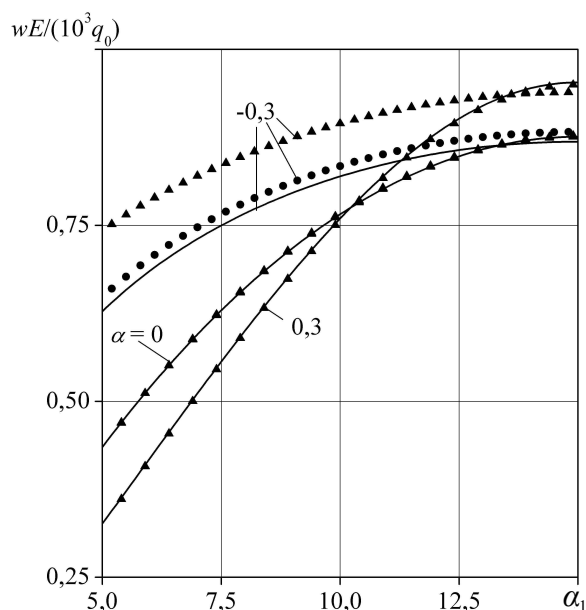


Рис. 3.2 – Розподіл переміщень за твірною в залежності від напрямку сплайн-колокації ( $\alpha_2 = 0$ )

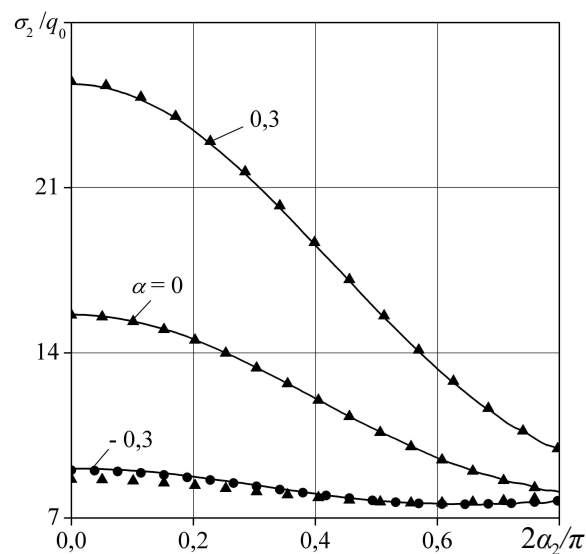


Рис. 3.3 – Розподіл напружень за напрямною в залежності від напрямку сплайн-колокації ( $\alpha_1 = L/2$ )

На рис. 3.2, 3.3 показано розподіл прогину  $w$  вздовж твірної при  $\alpha_2 = 0$ , та напружень  $\sigma_2$  вздовж напрямної при  $\alpha_1 = L/2$  в залежності від параметра  $\alpha$ . Для контролю точності наведено результати розв'язання задач, коли апроксимація сплайнами проводилась вздовж напрямної циліндра при  $N = 19$  (суцільна лінія) та коли апроксимація проводилась вздовж твірної при  $N = 19$  (трикутники),  $N = 39$  (точки). Для  $\alpha = 0$  та  $\alpha = 0,3$ , як видно з рис 3.1, значення як прогинів так і напружень збігаються при  $N = 19$  для різних напрямків апроксимації (тому результати для  $N = 39$  не наведено), а коли  $\alpha = -0,3$  відмінності між значеннями прогинів, отриманих

при різних напрямках апроксимації, при  $N = 19$  більш помітні. Зі збільшенням точок колокації вздовж твірної до 40 точність результатів зростає. Схожу залежність розв'язку від кількості точок колокації та від напрямку апроксимації можна спостерігати і для напружень (рис 3.2). Але різниця у значеннях напружень, отриманих при апроксимації вздовж напрямної при  $N = 19$  і  $N = 39$  для  $\alpha = -0,3$ , не така значна як для прогинів.

На основі сплайн-апроксимації в напрямку твірної також було розв'язано задачу [220] про напружено-деформований стан трансверсально-ізотропних відкритих оболонок з еліптичним поперечним перерізом з товщиною, що змінюється за законом:

$$h = h_0 + \alpha \cos 2\alpha_2, \quad (3.26)$$

при рівномірному розподілі навантаження  $q_3 = q_0 = const$ .

На контурі  $\alpha_2 = \pi/2$  оболонка жорстко закріплена, а при  $\alpha_2 = -\pi/2$  шарнірно оперта. Торці оболонки жорстко закріплені. Покладемо  $ab = R^2$ .

Задачу розв'язано при таких вихідних даних  $R = 10$ ,  $L = 30$ ,  $h_0 = 1$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $G_{13} = G_{23} = E/40$ .

Дослідимо вплив зміни товщини оболонки і параметрів еліпса на розподіл прогину  $w$  і напружень  $\sigma_2$  на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки при таких даних:  $a = 5; 7,5; 15; 20$  і  $\alpha = -0,5; 0; 0,5$ .

На рис. 3.4 – 3.12 наведено графіки розподілів прогинів  $w$  і напружень  $\sigma_2$  на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки в перерізі  $\alpha_1 = L/2$  в залежності від товщини та параметра еліптичності  $\alpha$ . З рис. 3.4 – 3.6 випливає, що максимальний прогин при  $a = 20$  зі зміною товщини для  $-0,5 \leq \alpha \leq 0$  зменшується майже в два рази, а для  $0 \leq \alpha \leq 0,5$  – в півтора рази, що викликано збільшенням товщини оболонки в околі  $\alpha_2 = 0$ . Для  $a = 5$  зі зміною тих же значень  $\alpha$  максимальний прогин збільшується майже в три рази. При цьому, якщо для  $\alpha = -0,5$  різні умови

на протилежних прямолінійних сторонах оболонки майже не впливають на симетрію розподілів прогинів вздовж напрямної відносно  $\alpha_2 = 0$ , то вже для  $\alpha = 0$  і  $\alpha = 0,5$  вплив різних граничних умов на протилежних сторонах оболонки приводить до несиметрії розподілів прогинів відносно  $\alpha = 0$ , особливо для  $a = 5$ .

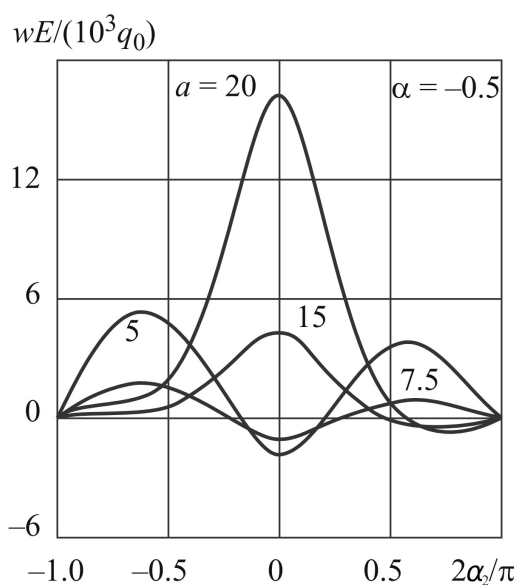


Рис. 3.4 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $\alpha = -0,5$

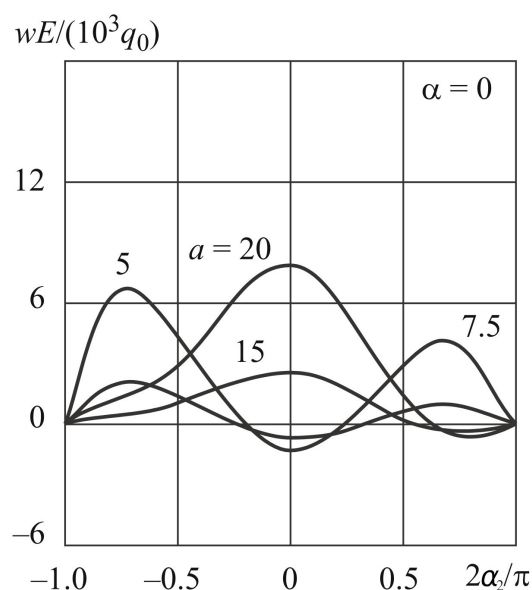


Рис. 3.5 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $\alpha = 0$

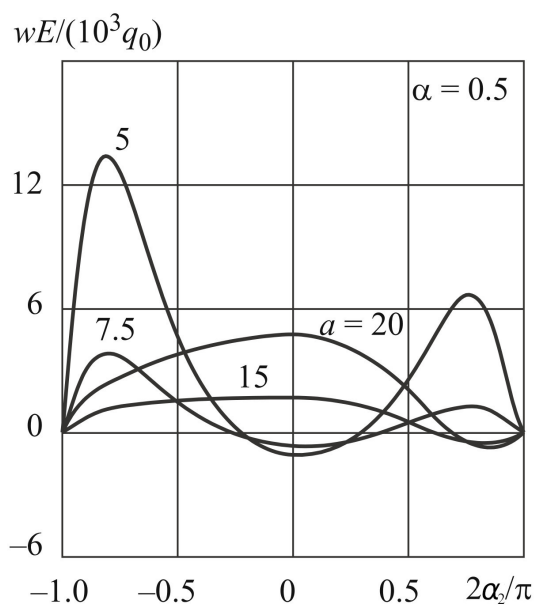


Рис. 3.6 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $\alpha = 0,5$

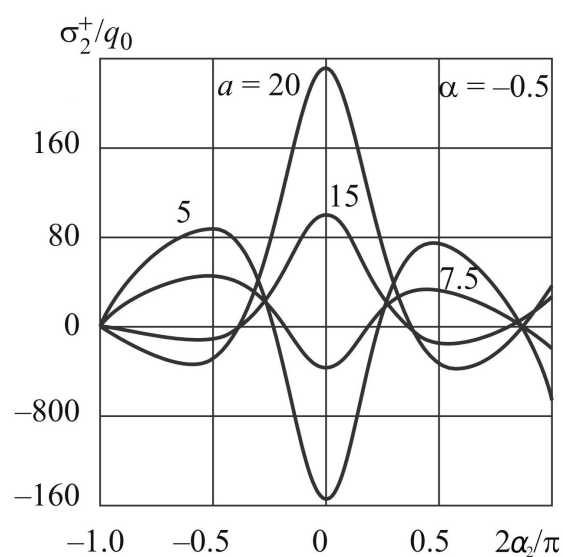


Рис. 3.7 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = -0,5$

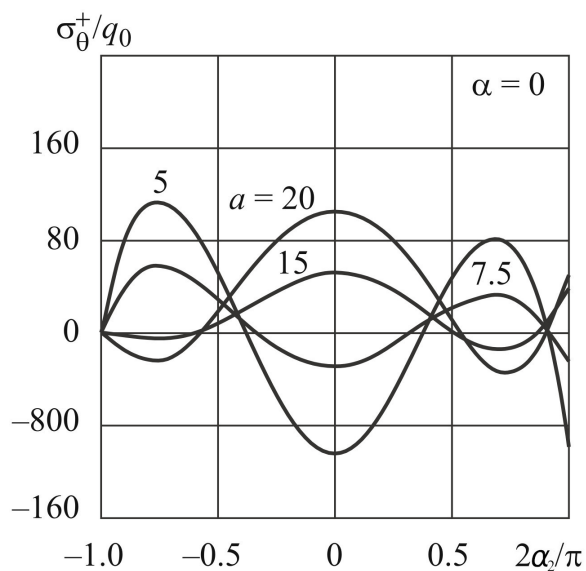


Рис. 3.8 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = 0$

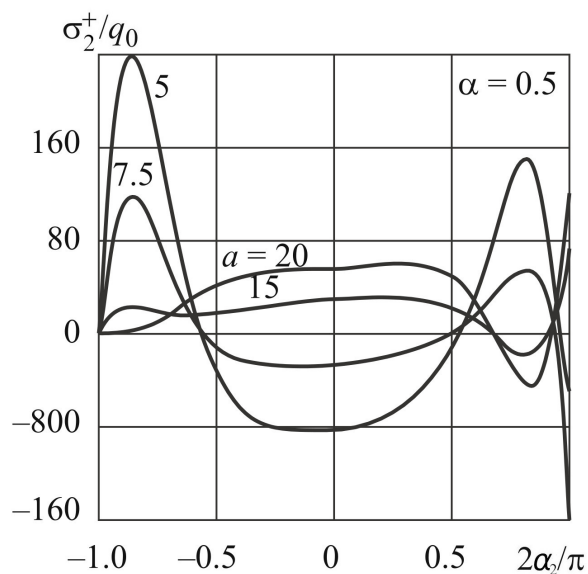


Рис. 3.9 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = 0,5$

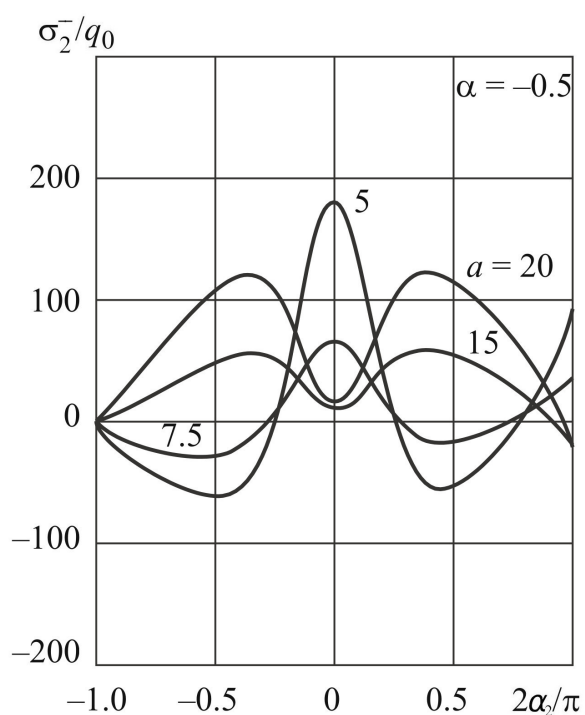


Рис. 3.10 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = -0,5$

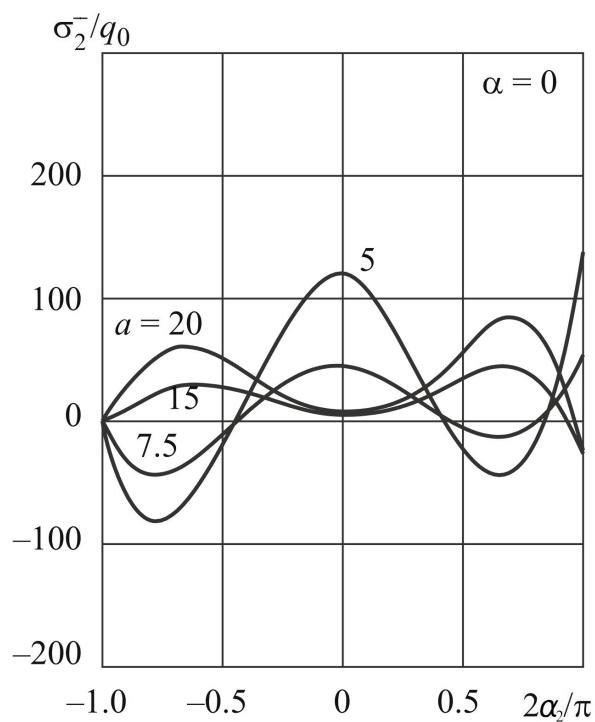


Рис. 3.11 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = 0$



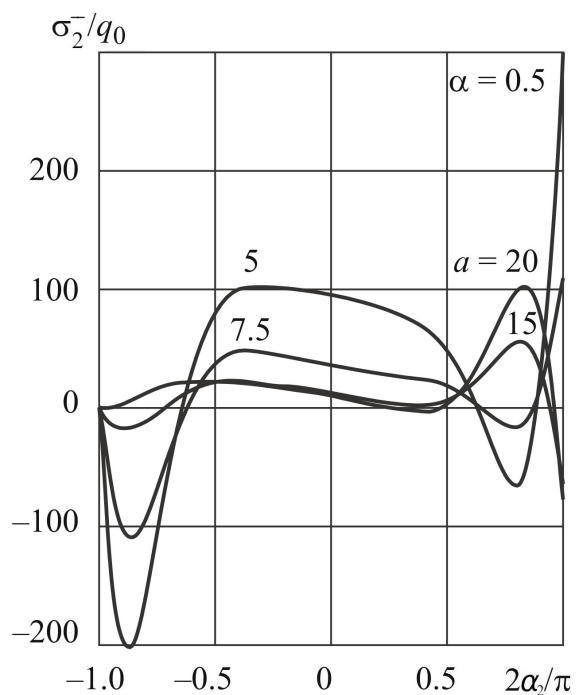


Рис. 3.12 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $\alpha = 0, 5$

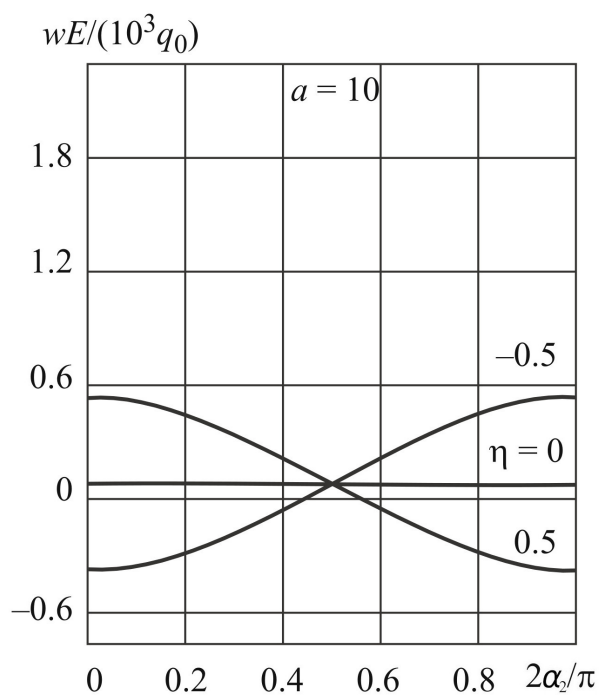


Рис. 3.13 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $a = 10$

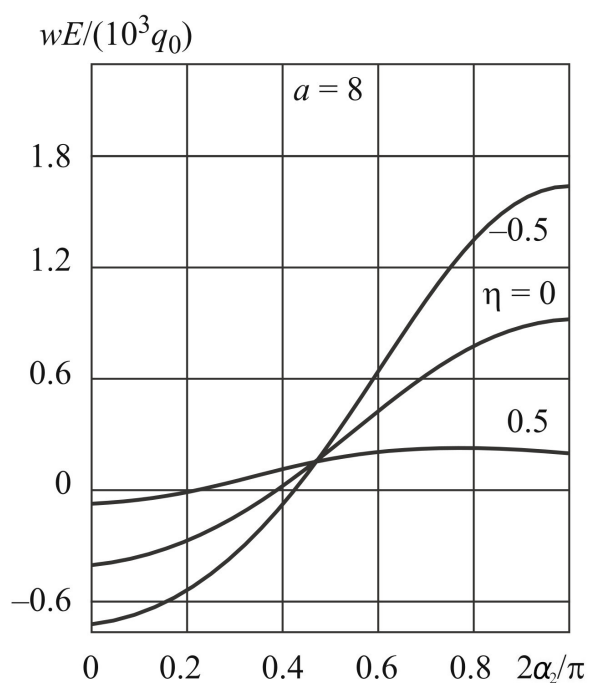


Рис. 3.14 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $a = 8$

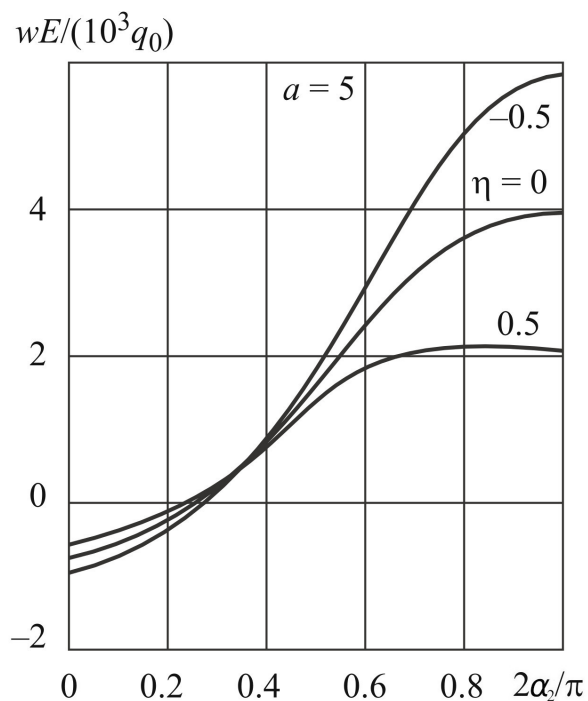


Рис. 3.15 – Розподіл переміщень вздовж напрямної при  $a = 5$

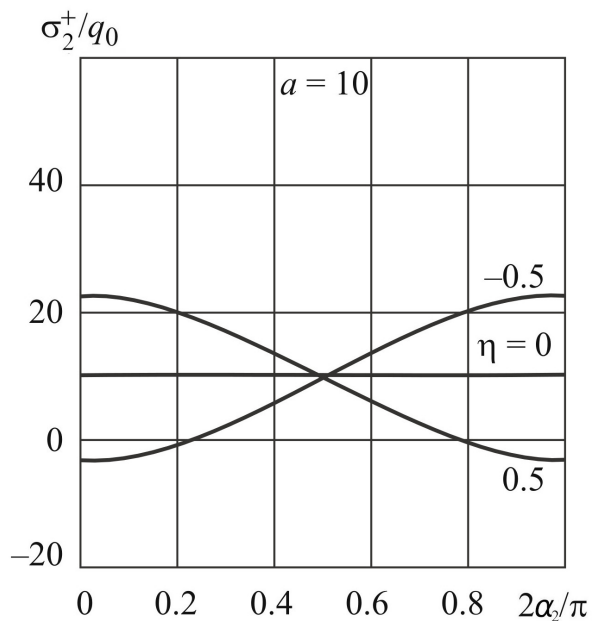


Рис. 3.16 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 10$

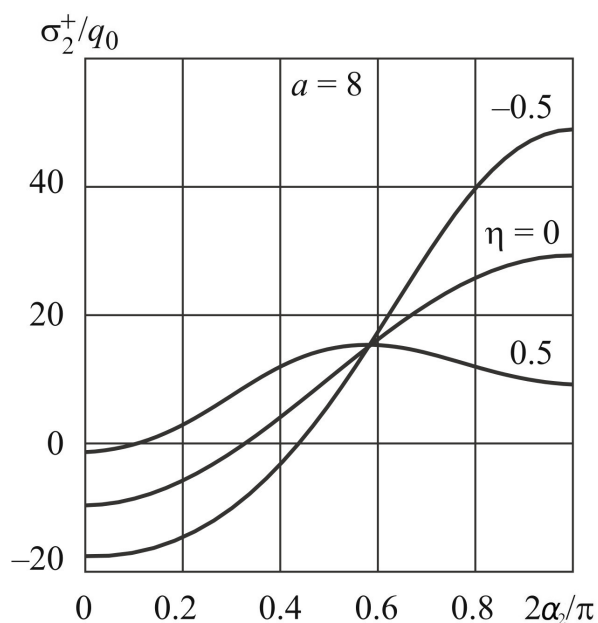


Рис. 3.17 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 8$

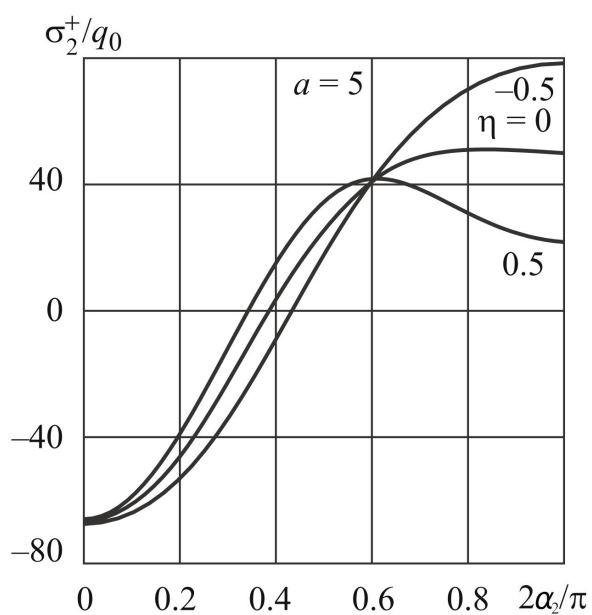


Рис. 3.18 – Розподіл напружень на зовнішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 5$

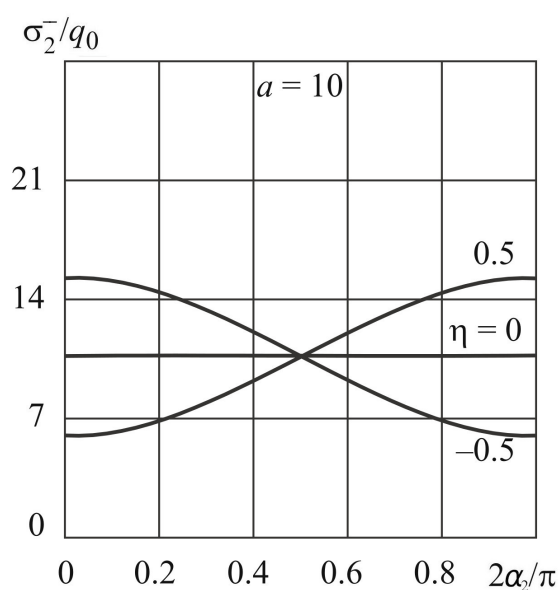


Рис. 3.19 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 10$

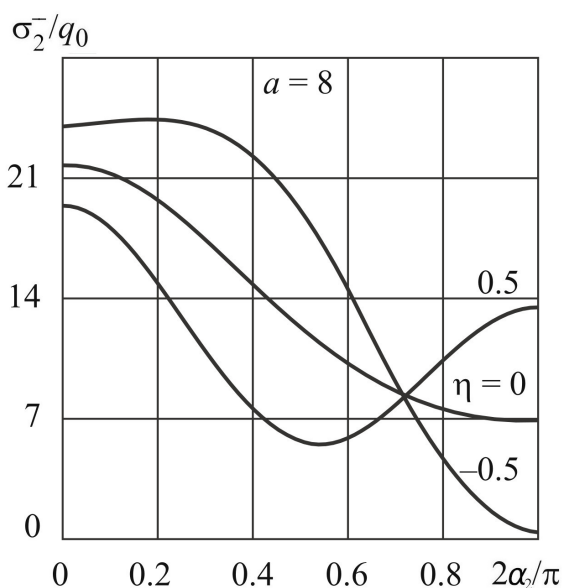


Рис. 3.20 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 8$

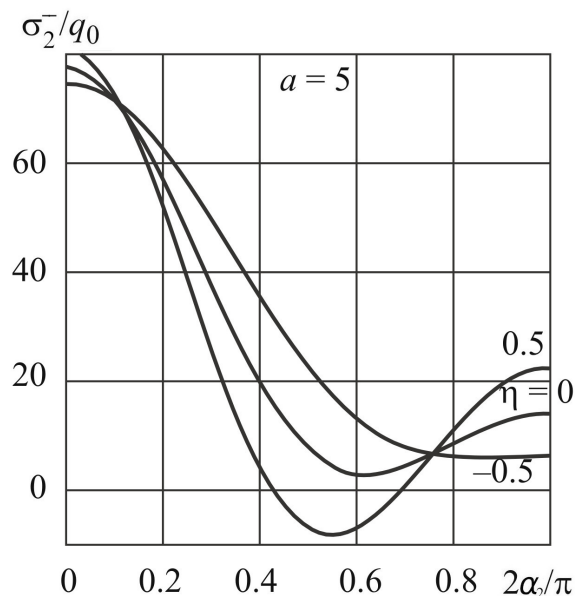


Рис. 3.21 – Розподіл напружень на внутрішній поверхні вздовж напрямної при  $a = 5$

Наведені на рис. 3.7 – 3.12 графіки розподілів напружень  $\sigma_2$  на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки показують, що зі зміною  $\alpha$  на інтервалі  $-0,5 \leq \alpha \leq 0,5$  максимальне напруження на зовнішній поверхні  $\sigma_2^+$  зменшується майже в чотири рази і переходить від оболонки з  $a = 20$  до оболонки з  $a = 5$  за рахунок різних граничних умов на протилежних сторонах. Для напружень на внутрішній поверхні  $\sigma_2^-$  маємо максимальні значення напруження при  $a = 5$  зі зміною  $\alpha$  зменшується і при цьому міняє знак, що обумовлено жорстким закріпленням сторони оболонки при  $\alpha_2 = \pi/2$ . Також варто відзначити, що при  $\alpha = -0,5$ , тобто коли товщина оболонки в околі  $\alpha_2 = 0$  стає досить тонкою, різні граничні умови майже не впливають на зміну симетрії у розподілах напружень  $\sigma_2$  вздовж напрямної.

Далі розглянемо задачу про напружено-деформований стан замкнутих оболонок сталої товщини, нормальне навантаження на які змінюється за таким законом:

$$q_3 = q_0(1 + \eta \cos 2\alpha_2). \quad (3.27)$$

При розв'язуванні задачі геометричні параметри такі ж, як і в попередній, а механічні характеристики такі:  $E_1 = 5E$ ,  $E_2 = 1,25E$ ,  $\nu_1 = 0,18$ ,  $\nu_2 = 0,045$ ,  $G_{12} = 0,4E$ ,  $G_{13} = G_{23} = 0,2E$ .

На рис. 3.13 – 3.21 показані графіки розподілів прогинів  $w$  і напружень  $\sigma_2$  на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки. На рис. 3.13 при  $a = 10$ , що відповідає круговій оболонці, маємо, що при  $\eta = 0$   $w = const$ , для  $\eta = -0,5$  при  $\alpha_2 = 0$  прогин направлений у протилежний бік до дії навантаження, а при  $\alpha_2 = \pi/2$  навпаки, в бік дії навантаження. При  $a = 8$  (рис. 3.14) розподіли змінюються за рахунок еліптичності і ще більше при  $a = 5$  (рис. 3.15). При цьому для  $\eta = -0,5$  максимальний прогин збільшується при  $a = 8$  в чотири, а при  $a = 5$  майже у дванадцять разів.

Аналогічну картину можна спостерігати і в розподілах напружень  $\sigma_2$  (рис. 3.16 – 3.21). Зі зміною еліптичності і величини навантаження напруження на зовнішній поверхні  $\sigma_2^+$  при  $\alpha_2 = 0$  зменшується, а при  $\alpha_2 = \pi/2$  досягає максимуму і зі збільшенням еліптичності криві зближаються. Подібна ситуація має місце і для напружень  $\sigma_2^-$ , але в протилежному напрямку.

### 3.5 Напружено деформований стан гофрованих пластин та циліндричних оболонок

За допомогою підходу, що базується на зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної на основі апроксимації сплайнами по напрямній, розв'язано задачі про напружено-деформований стан гофрованих пластин [36] та циліндрів з гофрованим еліптичним перерізом [221].

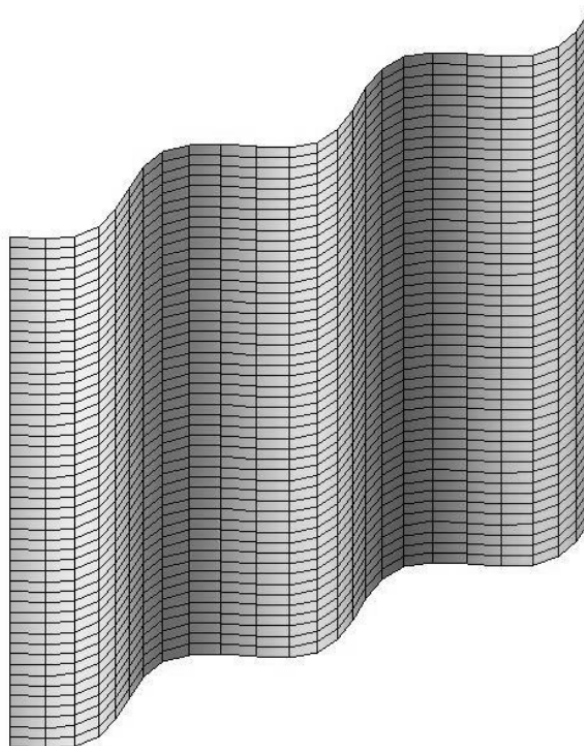


Рис. 3.22 – Гофрована пластина

У випадку гофрованої пластини (рис. 3.22) зі сторонами  $l_1, l_2$  рівняння її поперечного перерізу задамо у вигляді:

$$x_1 = \alpha_2, \quad x_2 = \alpha \sin \left( \frac{\pi n \alpha_2}{l_2} \right),$$

де  $\alpha$  – амплітуда,  $n$  – крок гофрування.

Нехай матеріал пластини ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , товщина пластини  $h = 0,5$ ;  $l_1 = l_2 = 10$ , сторони пластини жорстко закріплені, на неї діє нормальне рівномірно розподілене навантаження  $q_3 = q_0$ .

На рис. 3.23, 3.24 показано розподіл переміщень  $\hat{w} = \frac{wE}{q_0 10^3}$  ( $E$  – модуль пружності пластини) в залежності від кроку і амплітуди гофрування відповідно.

Як видно з рисунка 3.23, зростання кроку істотно впливає на характер розподілу прогинів. Але при  $n = 3$  вплив гофрування на прогин помітати

на графіку складно, але вже при  $n = 5$  монотонність пропадає, і маємо хвилястий характер поведінки прогинів. Максимальні прогини зменшуються зі збільшенням частоти гофрування. Піки на графіках для значень  $n = 5$ ,  $n = 7$  і  $n = 9$  співпадають з вершинами і впадинами гофра.

Як видно із графіків на рис. 3.24, при  $\alpha = 0,1$  вплив амплітуди гофрування на розподіли прогинів незначний, а крива прогину монотонна майже на всьому інтервалі. Але зі зростанням амплітуди до  $\alpha = 0,2$  картина істотно змінюється, і на цій кривій з'являються піки. Слід також відмітити, що зі збільшенням  $\alpha$  від 0,1 до 0,4 максимальні прогини зменшуються більш, ніж у 2 рази.

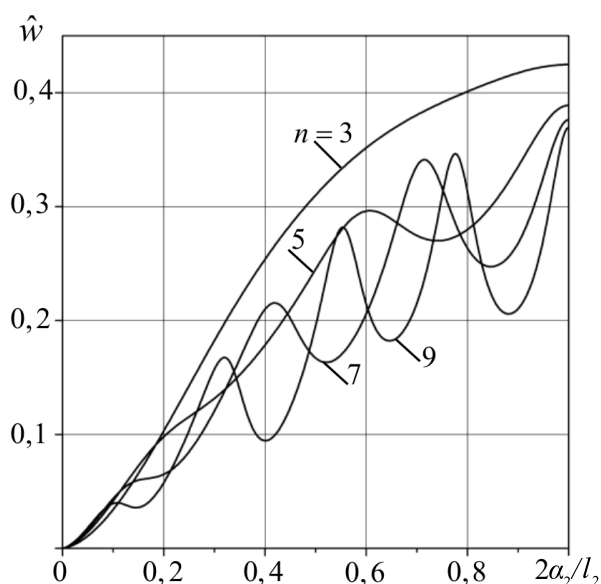


Рис. 3.23 – Розподіл переміщень пластини в залежності від кроку гофрування,  $\alpha = 1$

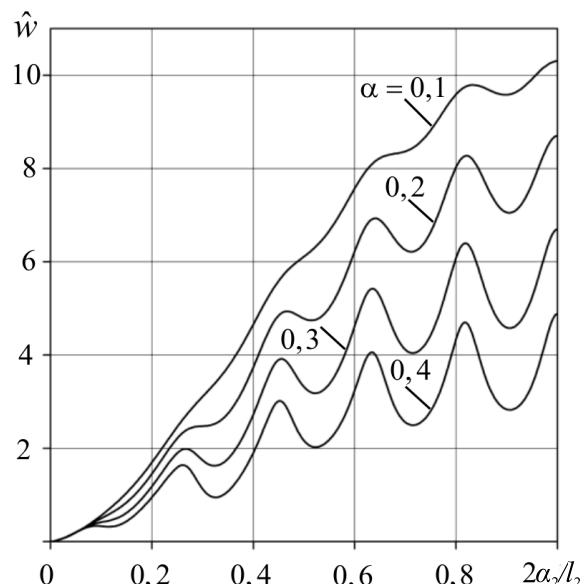


Рис. 3.24 – Розподіл переміщень в залежності від амплітуди гофрування,  $n = 11$

У випадку гофрованої еліптичної оболонки поперечний переріз (рис. 3.25) задамо в полярних координатах  $(r, \alpha_2)$ :

$$r(\alpha_2) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha_2}} + \alpha \cos m\alpha_2,$$

$a$  – менша піввісь еліпса,  $e$  – ексцентриситет,  $\alpha$  і  $m$  – амплітуда і крок

гофрування відповідно.

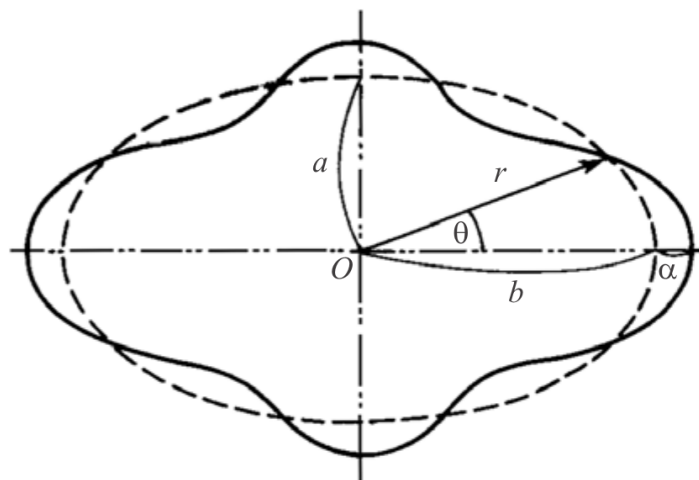


Рис. 3.25 – Поперечний переріз гофрованої еліптичної оболонки

Кривина в цьому випадку є знакозмінною на відміну від еліптичного циліндра.

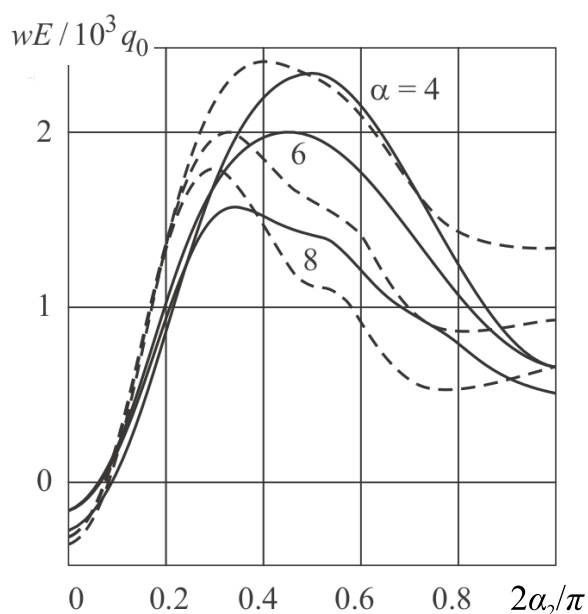


Рис. 3.26 – Розподіл переміщень для різних амплітуд гофрування  $\alpha$  при  $\Delta = 0, 2$  (суцільна лінія),  $\Delta = 0, 4$  (пунктирна лінія),  $m = 4$

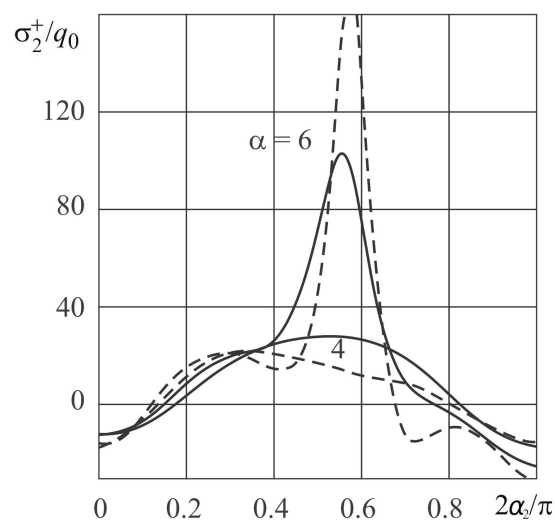


Рис. 3.27 – Розподіл напружень  $\sigma_2^+ / q_0$  для різних амплітуд гофрування  $\alpha$  при  $\Delta = 0, 2$  (суцільна лінія),  $\Delta = 0, 4$  (пунктирна лінія),  $m = 4$

$$k(\alpha_2) = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}},$$

$$r' = - \left[ \frac{ae^2 \sin 2\alpha_2}{2(1 - e^2 \cos^2 \alpha_2)^{3/2}} + \alpha m \sin m\alpha_2 \right],$$

$$r'' = - \left\{ \frac{ae^2}{2} \left[ \frac{2 \cos 2\alpha_2}{(1 - e^2 \cos^2 \alpha_2)^{3/2}} + \frac{3e^2 \sin^2 \alpha_2}{2(1 - e^2 \cos^2 \alpha_2)^{5/2}} \right] + \alpha m^2 \sin m\alpha_2 \right\},$$

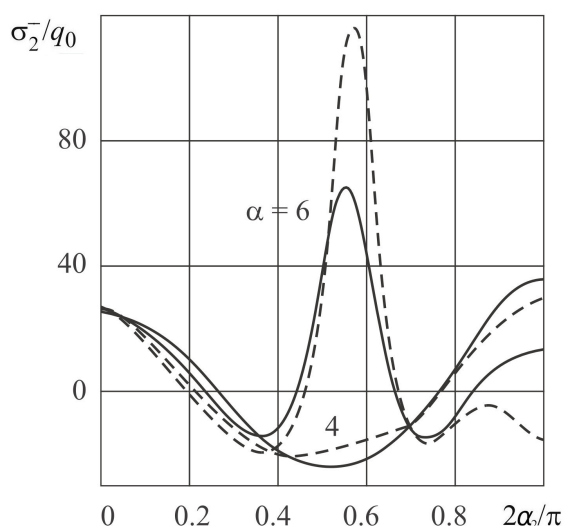


Рис. 3.28 – Розподіл напружень  $\sigma_2^-/q_0$  для різних амплітуд гофрування  $\alpha$  при  $\Delta = 0, 2$  (суцільна лінія),  $\Delta = 0, 4$  (пунктирна лінія),  $m = 4$

Довжина кривої негофрованого еліпса при цьому вибрана рівною довжині кола радіуса  $r_0 = 40$ , довжина циліндра  $l = 60$ , товщина –  $h = 4$ , матеріал оболонки ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0, 3$ ; торці оболонки жорстко закріплені, на оболонку діє нормальне навантаження, розподілене за законом:  $q_3 = q_0 \sin(\alpha_1 \pi / l)$ , для варіювання ексцентриситетом

еліпса використано параметр еліптичності  $\Delta = \frac{b - a}{a + b}$ .

Результати розрахунків переміщень  $\frac{wE}{q_0 10^3}$  в залежності від амплітуди і кроку гофрування наведено на рис. 3.26 і 3.29 відповідно.

На рис. 3.26 показані розподіли прогинів при зміні еліптичності  $\Delta$  і амплітуди гофрування  $\alpha$  в перерізі  $\alpha_1 = l/2$ :  $\Delta = 0, 2$  – суцільна лінія;

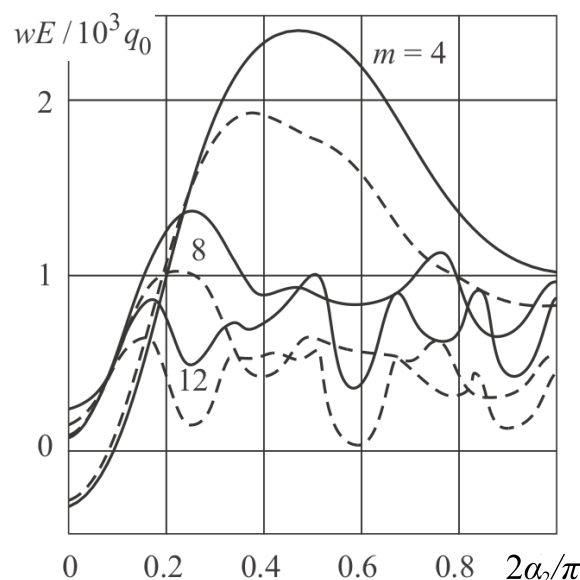


Рис. 3.29 – Розподіл переміщень для різних кроків гофрування  $m$  при  $\alpha = 4$  (суцільна лінія),  $\alpha = 6$  (пунктирна лінія),  $\Delta = 0, 3$



$\Delta = 0,4$  – пунктирна;  $\alpha = 4; 6; 8$ ; при  $m = 4$ . Відзначимо, що з ростом параметра  $\alpha$  максимальні прогини в оболонці зменшуються. Можна припустити, що це є наслідком збільшення кривини оболонки. Зі зміною еліптичності від 0,2 до 0,4 вплив гофрування на розподілу прогинів стає більш помітним, а відмінності в їх значеннях в околі  $\alpha_2 = 0$  зменшується, а при  $\alpha_2 = \pi/2$  навпаки – збільшується.

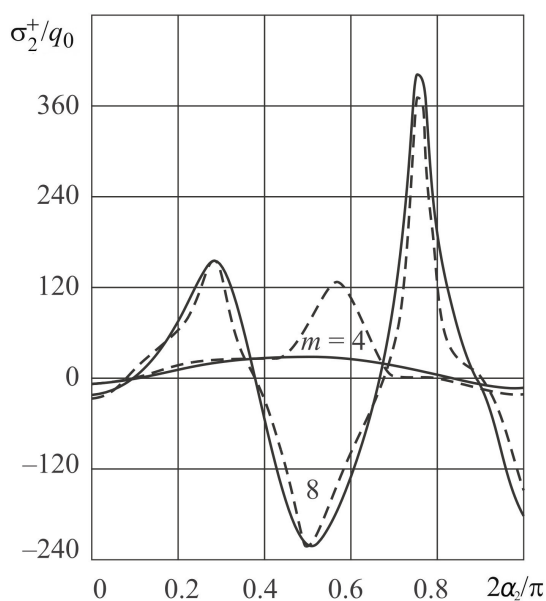


Рис. 3.30 – Розподіл напружень  $\sigma_2^+ / q_0$  для різних кроків гофрування  $m$  при  $\alpha = 4$  (суцільна лінія),  $\alpha = 6$  (пунктирна лінія),  $\Delta = 0,3$

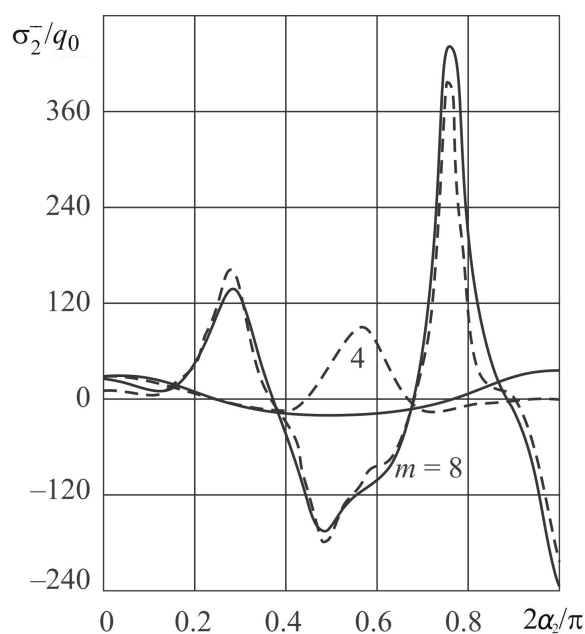


Рис. 3.31 – Розподіл напружень  $\sigma_2^- / q_0$  для різних кроків гофрування  $m$  при  $\alpha = 4$  (суцільна лінія),  $\alpha = 6$  (пунктирна лінія),  $\Delta = 0,3$

На рис. 3.27, 3.28 представлені розподіли напружень  $\sigma_2$  на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки відповідно. Як видно з рисунків, для амплітуди гофрування  $\alpha = 4$  зміна еліптичності впливає на напруження незначно. Однак уже при  $\alpha = 6$  зі зміною  $\Delta$  від 0,2 до 0,4 максимальні напруження як на зовнішній, так і на внутрішній поверхнях збільшуються приблизно в 1,5 рази.

На рис. 3.29 показано розподіли прогинів при зміні кроку  $m$  і амплітуди  $\alpha$  гофрування в перерізі  $\alpha_1 = l/2$ :  $m = 4; 8; 12$ ;  $\alpha = 4$  – суцільна лінія;  $\alpha = 6$  – пунктирна; при  $\Delta = 0,3$ . Як видно з графіків, наявність

більшої кількості гофрів призводить до складного деформованому стану. Як і спостерігалось раніше, у всіх трьох випадках збільшення амплітуди  $\alpha$  призводить до зменшення значень прогинів. Відзначимо, що зі зростанням кроку гофрування величини максимальних прогинів також зменшуються.

Крок гофрування значно впливає і на напруження  $\sigma_2$  в оболонці. На рис. 3.30, 3.31 показані розподіли напружень на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки. Відзначимо також, що вплив амплітуди гофрування на напруження у випадках, що розглядались (особливо для  $m = 8$ ), не такий істотний, як вплив частоти.

### 3.6 Результати та висновки

1. На основі уточненої теорії оболонок типу Тимошенка отримано двовимірну крайову задачу для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описує напружений стан циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу зі змінною в двох координатних напрямках товщиною.
2. Для зведення двовимірної крайової задачі про напружено-деформований стан некругових циліндричних оболонок до одновимірних крайових задач застосовано метод сплайн-колокації при апроксимації шуканого розв'язку вздовж координатних ліній як за твірною, так і за напрямною циліндра.
3. Для розв'язання отриманих систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку з відповідними граничними умовами застосовано стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.
4. Відмічено високу точність результатів дискретно-континуального підходу за різними варіантами його реалізації: при виборі напрямків апроксимації за координатою напрямної і за координатою, що змінюється

вздовж твірної.

5. Для ізотропної однорідної оболонки і ортотропної оболонки змінної товщини досліджена збіжність розв'язку в залежності від кількості членів апроксимуючого ряду.
6. Проведено широке коло досліджень щодо взаємовпливу різних геометричних параметрів та жорсткісних властивостей циліндра на особливості його НДС.
7. Показано складний характер НДС в гофрованих циліндричних оболонках і пластинах в залежності від параметрів гофрування – амплітуди та кроку гофрів.

## Розділ 4

### НДС ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІСНИМИ ЗРІЗАМИ

Об'єктом дослідження попереднього розділу були циліндричні оболонки довільного поперечного перерізу, обмежені дугами координатних ліній  $\alpha_1 = const$ ,  $\alpha_2 = const$ , так що область зміни параметрів, що задають серединну поверхню оболонки, була прямокутником. Як розширення цього класу задач, в данному розділі розглядаються ті ж самі оболонки в ускладненій постановці, що зв'язана з наявністю скісних зрізів на торцевих контурах. В цьому випадку їх геометрія в криволінійній ортогональній системі координат  $O\alpha_1\alpha_2$  представлена трапецією загального виду, що суттєво ускладнює постановку і розв'язання відповідних крайових задач.

Зауважимо, що циліндрична оболонка зі скісними зрізами на торцях використовується, зазвичай, як з'єднувальна ланка в системах циліндричних оболонок з різними геометричними параметрами, осі яких утворюють між собою деякий ненульовий кут. Такі системи є розповсюдженими конструкціями водопостачальних і водовідведних систем, систем з перекачки рідин, передачі сипучих речовин тощо. Для визначення НДС оболонок зі скісними зрізами на торцях в роботі пропонується підхід, що включає дві основні частини:

- постановку задачі в новій неортогональній системі координат, в якій геометрична область оболонки вписується в лінії нової координатної сітки;
- розв'язання поставленої задачі за представленим в попередньому роз-

ділі алгоритмом для циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу без зрізів на граничних контурах.

Розроблений підхід застосовано для визначення НДС циліндричних оболонок двох типів: кругового (підрозділ 4.1) і еліптичного (підрозділ 4.2) перерізів зі скісними зрізами на торцях.

В обох випадках наводиться:

- постановка задачі в ортогональній криволінійній («старій») системі координат;
- формули переходу до неортогональної («новій») координатної системи;
- постановка задачі в побудованій «новій» системі;
- результати численних досліджень НДС оболонок в залежності від параметрів зрізів.

#### 4.1 Кругові циліндри зі скісними зрізами

Тут наводиться постановка задачі про НДС циліндричних оболонок кругового перерізу в вихідній ортогональній криволінійній системі координат [205].

Віднесемо серединну поверхню циліндричної оболонки до ортогональної системи координат  $O\alpha_1\alpha_2$ , де  $\alpha_1 = z$  – координата в напрямку осі обертання, а  $\alpha_2 = \theta$  – центральний кут в поперечному перерізі. Тоді, використовуючи рівняння уточненої теорії оболонок на основі гіпотези прямої лінії, що викладені в другому розділі, напружено-деформований стан оболонки під дією поверхневого нормального навантаження  $q$  можна описати системою диференціальних рівнянь з частинними похідними у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \theta} + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} &= a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \theta} + a_{22} u_2 + a_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_{24} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{25} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial \theta} + a_{26} \psi_2 + a_{27} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2}; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= a_{31} \frac{\partial u_1}{\partial z} + a_{32} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + a_{33} w + a_{34} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \\
& + a_{35} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + a_{36} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + a_{37} q; \\
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} &= a_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{42} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \theta} + a_{43} \frac{\partial w}{\partial z} + \\
& + a_{44} \psi_1 + a_{45} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + a_{46} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial \theta}; \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} &= a_{51} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \theta} + a_{52} u_2 + a_{53} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_{54} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
& + a_{55} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial \theta} + a_{56} \psi_2 + a_{57} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{R^2 C_{11}}{C_{66}}, a_{12} = -\frac{R(C_{12} + C_{66})}{C_{66}}, a_{13} = -\frac{RC_{12}}{C_{66}}, \\
a_{21} &= -\frac{D_{66} + R^2 C_{66} + R^2 C_{12}}{RC_{22}}, a_{22} = \frac{K_2}{C_{22}}, a_{23} = -\frac{R^2 C_{66}}{C_{22}}, \\
a_{24} &= -\frac{C_{22} + K_2}{C_{22}}, a_{25} = -\frac{D_{66}}{C_{22}}, a_{26} = -\frac{RK_2}{C_{22}}, a_{27} = -\frac{RD_{66}}{C_{22}}, \\
a_{31} &= \frac{RC_{12}}{K_2}, a_{32} = \frac{K_2 + C_{22}}{K_2}, a_{33} = \frac{C_{22}}{K_2}, a_{34} = -\frac{R^2 K_1}{K_2}, \\
a_{35} &= a_{34}, a_{36} = -R, a_{37} = -\frac{R^2}{K_2}, a_{41} = \frac{RC_{11}}{C_{66}}, \\
a_{42} &= \frac{C_{66} D_{12} + D_{66} C_{66} + D_{66} C_{12}}{D_{66} C_{66}}, a_{43} = \frac{R^2 C_{66} K_1 + D_{66} C_{12} + C_{66} D_{12}}{D_{66} C_{66}}, \\
a_{44} &= \frac{R^2 K_1}{D_{66}}, a_{45} = -\frac{R^2 D_{11}}{D_{66}}, a_{46} = -\frac{R(D_{12} + D_{66})}{D_{66}}, \\
a_{51} &= \frac{D_{22} D_{66} - R^2 D_{22} C_{66} - R^2 D_{22} C_{12} - R^2 C_{22} D_{66}}{R^2 D_{22} C_{22}}, \\
a_{52} &= \frac{K_2 (D_{22} - R^2 C_{22})}{RD_{22} C_{22}}, a_{53} = -\frac{RC_{66}}{C_{22}}, a_{54} = \frac{K_2 (R^2 C_{22} - D_{22})}{RD_{22} C_{22}}, \\
a_{55} &= -\frac{R^2 C_{22} (D_{12} + D_{66}) + D_{22} D_{66}}{RD_{22} C_{22}}, a_{56} = \frac{K_2 (R^2 C_{22} - D_{22})}{D_{22} C_{22}}, \\
a_{57} &= -\frac{D_{66} (R^2 C_{22} + D_{22})}{D_{22} C_{22}}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

В формулах (4.2)  $R$  – радіус циліндра, у випадку ізотропного матеріалу

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, C_{12} = \nu C_{11}, C_{66} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)}, \\ D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, D_{12} = \nu D_{11}, \\ D_{66} &= \frac{Eh^3}{24(1 + \nu)}, K_1 = K_2 = \frac{5Eh}{12(1 + \nu)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$h$  – товщина оболонки,  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

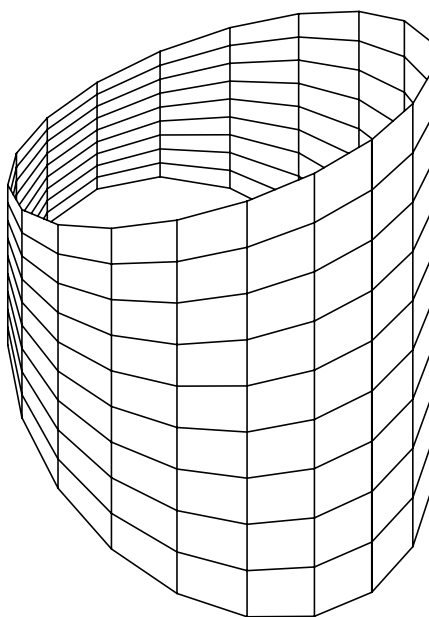


Рис. 4.1 – Циліндрична оболонка зі зрізаними торцями

В прямокутній декартовій системі координат  $Ox_1x_2x_3$  середину поверхню оболонки зі зрізаними торцями (рис. 4.1) можна задати за допомогою параметрів  $\xi_1, \xi_2$  системою рівнянь [86, 209]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = R \cos \xi_2, \\ x_2 = R \sin \xi_2, \\ x_3 = z = \xi_1 + R [\operatorname{tg} \beta_1 - \xi_1 (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) / L] (1 - \cos \xi_2), \end{array} \right. \quad (4.4)$$

де  $L$  – довжина твірної циліндра в перерізі  $\xi_2 = 0$ ,  $\beta_1$  і  $\beta_2$  кути нижнього і верхнього зрізів відповідно,  $0 \leq \xi_1 \leq L$ , якщо циліндр замкнутий, то  $0 \leq \xi_2 \leq 2\pi$ . Якщо кути  $\beta_1$  і  $\beta_2$  додатні, то проекція циліндра на площину  $Ox_1x_3$  буде мати вигляд, показаний на рис. 4.2. У випадку, коли один з кутів від’ємний ( $\beta_1 < 0$ ), проекція оболонки показана на рис. 4.3. Очевидно, що варіант двох від’ємних кутів вибором  $L$  можна звести до варіанта двох додатних кутів.

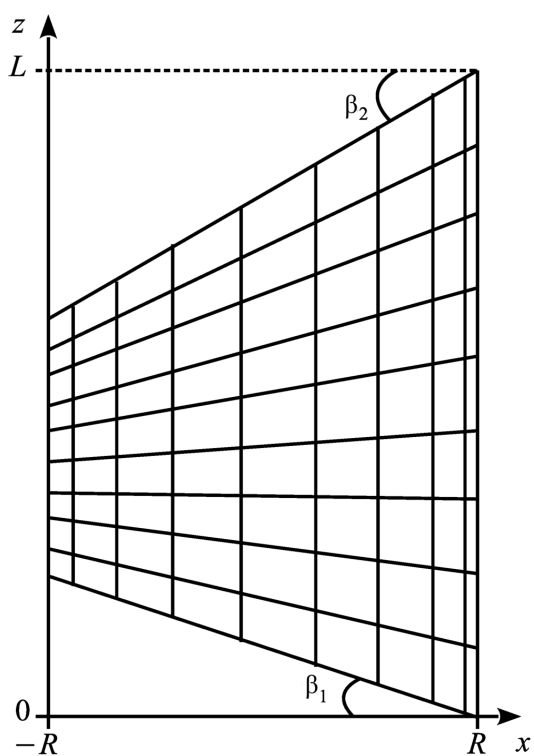


Рис. 4.2 – Проекція циліндра при додатних кутах  $\beta_1, \beta_2$

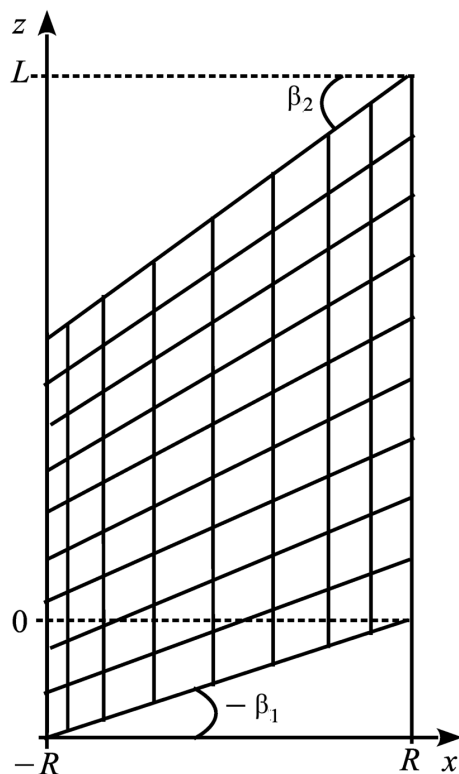


Рис. 4.3 – Проекція циліндра при різних знаках кутів  $\beta_1, \beta_2$

З (4.4) можна визначити залежність між новими координатами  $\xi_1, \xi_2$  і координатами циліндричної системи  $z, \theta$ :

$$\xi_1 = \frac{az + b(\cos \theta - 1)}{d \cos \theta + e}, \quad (4.5)$$

$$\xi_2 = \theta,$$

де  $a = L$ ,  $b = LR \operatorname{tg} \beta_1$ ,  $d = R(\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)$ ,  $e = a - d$ .

Для переходу в (4.1) від координат  $z, \theta$  до  $\xi_1, \xi_2$  для довільної функції



$f$  маємо формули:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta}. \quad (4.6)$$

З (4.5) і (4.6) одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + 2\lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \theta} &= \lambda_4 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a/(d \cos \xi_2 + e), \quad \lambda_2 = \lambda_1 (d\xi_1 - b) \sin \xi_2/a, \\ \lambda_3 &= d\lambda_1[2d\lambda_2 \sin \xi_2 + (d\xi_1 - b) \cos \xi_2]/a, \quad \lambda_4 = d\lambda_1^2 \sin \xi_2/a. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Використовуючи вирази (4.7) для функцій  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , з (4.1) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= -\lambda_3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + (a_{11}\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{12}\lambda_4 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \\ &\quad + a_{12}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + a_{12}\lambda_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{13}\lambda_1 \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} &= a_{21}\lambda_4 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a_{21}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + a_{21}\lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{22}u_2 - \lambda_3 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \\ &\quad + (a_{23}\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{24}\lambda_2 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + a_{24} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \\ &\quad + a_{25}\lambda_4 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + a_{25}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + a_{25}\lambda_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + a_{26}\psi_2 + a_{27}\lambda_1^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} &= a_{31}\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a_{32}\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + a_{32} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + a_{33}w - \lambda_3 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{34}\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{35}\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + \\
& \quad + a_{36}\lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + a_{36} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + a_{37}q, \tag{4.9} \\
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} & = a_{41}\lambda_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + a_{42}\lambda_4 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + a_{42}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + a_{42}\lambda_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + \\
& + a_{43}\lambda_1 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + a_{44}\psi_1 - \lambda_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + (a_{45}\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\
& \quad + a_{46}\lambda_4 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + a_{46}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} + a_{46}\lambda_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} & = a_{51}\lambda_4 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a_{51}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + a_{51}\lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{52}u_2 + a_{53}\lambda_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + \\
& + a_{54}\lambda_2 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + a_{54} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + a_{55}\lambda_4 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + a_{55}\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + a_{55}\lambda_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\
& \quad + a_{56}\psi_2 - \lambda_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + (a_{57}\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} - 2\lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}.
\end{aligned}$$

Інформація про форму граничного контура врахована в виразах для  $\lambda_i$ . Для зручності використання методу сплайн-колокації вздовж колової координати перепишемо (4.9) у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} & = b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{14} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \\
& \quad + b_{15} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{17} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} & = b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{22} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{23} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{24}u_2 + b_{25} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \\
& \quad + b_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{27} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{28} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + a_{29} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \\
& + b_{2,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{2,11} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{2,13}\psi_2 + b_{2,14} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} & = b_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{32} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + b_{34}w + b_{35} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \\
& + b_{36} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + b_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{38} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{39} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{3,10} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + b_{3,11}q, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} &= b_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{42} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{43} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + \\
&+ b_{45} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{46} \psi_1 + b_{47} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{48} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{49} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\
&\quad + b_{4,10} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{4,11} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} + b_{4,12} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} &= b_{51} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{52} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{53} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{54} u_2 + b_{55} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + \\
&+ b_{56} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{57} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + b_{58} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{59} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{5,10} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\
&\quad + b_{5,11} \psi_2 + b_{5,12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{5,13} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} + b_{5,14} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\lambda_3, b_{12} = a_{11} \lambda_1^2 - \lambda_2^2, b_{13} = -2\lambda_2 b_{14} = a_{12} \lambda_4, \\
b_{15} &= a_{12} \lambda_1 \lambda_2, b_{16} = a_{12} \lambda_1, b_{17} = a_{13} \lambda_1, \\
b_{21} &= a_{21} \lambda_4, b_{22} = a_{21} \lambda_1, b_{23} = a_{21} \lambda_1, b_{24} = a_{22} u_2 b_{25} = -\lambda_3, \\
b_{26} &= a_{23} \lambda_1^2 - \lambda_2^2, b_{27} = -2\lambda_2, b_{28} = a_{24} \lambda_2, b_{29} = a_{24}, \\
b_{2,10} &= a_{25} \lambda_4, b_{2,11} = a_{25} \lambda_1 \lambda_2, b_{2,12} = a_{25} \lambda_1, b_{2,13} = a_{26}, b_{2,14} = a_{27} \lambda_1^2, \\
b_{31} &= a_{31} \lambda_1, b_{32} = a_{32} \lambda_2, b_{33} = a_{32}, b_{34} = a_{33}, b_{35} = -\lambda_3, \\
b_{36} &= a_{34} \lambda_1^2 - \lambda_2^2, b_{37} = -2\lambda_2, b_{38} = a_{35} \lambda_1, \\
b_{39} &= a_{36} \lambda_2, b_{3,10} = a_{36}, b_{3,11} = a_{37}, \\
b_{41} &= a_{41} \lambda_1^2, b_{42} = a_{42} \lambda_4, b_{43} = a_{42} \lambda_1 \lambda_2, b_{44} = a_{42} \lambda_1, \\
b_{45} &= a_{43} \lambda_1, b_{46} = a_{44} \psi_1 b_{47} = -\lambda_3, b_{48} = a_{45} \lambda_1^2 - \lambda_2^2, b_{49} = -2\lambda_2, \\
b_{4,10} &= a_{46} \lambda_4, b_{4,11} = a_{46} \lambda_1 \lambda_2, b_{4,12} = a_{46} \lambda_1, \\
b_{51} &= a_{51} \lambda_4, b_{52} = a_{51} \lambda_1 \lambda_2, b_{53} = a_{51} \lambda_1, b_{54} = a_{52}, b_{55} = a_{53} \lambda_1^2, \\
b_{56} &= a_{54} \lambda_2, b_{57} = a_{54}, b_{58} = a_{55} \lambda_4, b_{59} = a_{55} \lambda_1, b_{5,10} = a_{55} \lambda_1, \\
b_{5,11} &= a_{56} \psi_2, b_{5,12} = -\lambda_3, b_{5,13} = a_{57} \lambda_1^2 - \lambda_2^2, b_{5,14} = -2\lambda_2.
\end{aligned}$$

Граничні умови формулюються на контурах  $\xi_1 = const$ ,  $\xi_2 = const$  у відповідності з заданим способом їх закріплення або навантаження.

Будемо проводити дослідження напружено-деформованого стану замкнених циліндричних оболонок з жорстко закріпленими зрізами. Отже, для країв  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_1 = L$  граничні умови запишемо у вигляді:

$$u_1 = u_2 = w = 0, \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (4.11)$$

а для  $\xi_2 = 0$  и  $\xi_2 = \pi$  використаємо умови симетрії:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial w}{\partial \xi_2} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = 0, \psi_2 = 0. \quad (4.12)$$

Двовимірну крайову задачу (4.10) – (4.12) розв'яжемо за допомогою зведення до одновимірної задачі в коловому напрямку методом сплайн-колокації. Для цього представимо невідомі функції у вигляді:

$$\begin{aligned} u(\xi_2, \xi_1) &= \sum_{i=0}^N u_{1i}(\xi_2)\phi_i(\xi_1); \quad u_2(\xi_2, \xi_1) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(\xi_2)\phi_i(\xi_1); \\ w(\xi_2, \xi_1) &= \sum_{i=0}^N w_i(\xi_2)\phi_i(\xi_1); \\ \psi_1(\xi_2, \xi_1) &= \sum_{i=0}^N \psi_{1i}(\xi_2)\phi_i(\xi_1); \quad \psi_2(\xi_2, \xi_1) = \sum_{i=0}^N \psi_{2i}(\xi_2)\phi_i(\xi_1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

де  $u_{1i}(\xi_2)$ ,  $u_{2i}(\xi_2)$ ,  $w_i(\xi_2)$ ,  $\psi_{1i}(\xi_2)$ ,  $\psi_{2i}(\xi_2)$  – шукані функції змінної  $\xi_2$ ,  $\phi_i(\xi_1)$  – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня, що задовольняють граничні умови (4.11) на контурах  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_1 = L$ .

Підставивши співвідношення (4.13) в рівняння (4.9) і граничні умови (4.12), будемо вимагати їх виконання в  $N + 1$  точках колокації  $\xi_{1k} = \zeta_k$  ( $k = \overline{0, N}$ ).

Використаємо оптимальне розміщення точок колокації, описане в під-розділі 2.3, при непарному  $N$ . Ввівши позначення для  $b_{ij}(\zeta_k, \xi_2) = \bar{b}_{ij}$  і  $q(\zeta_k, \xi_2) = \bar{q}$  отримаємо:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_1 + \bar{b}_{12} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{14} * \Phi_1 + \bar{b}_{15} * \Phi_2)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{16} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{17} * \Phi_1)\bar{w}, \\
\bar{u}_2'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_1 + \bar{b}_{22} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{23} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi + \bar{b}_{25} * \Phi_1 + \bar{b}_{26} * \Phi_2)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{28} * \Phi_1)\bar{w} + \bar{b}_{29} * \bar{w}' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,10} * \Phi_1 + \bar{b}_{2,11} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \\
&\quad + \bar{b}_{2,12} * \bar{\psi}_1' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,13} * \Phi + \bar{b}_{2,14} * \Phi_2)\bar{\psi}_2, \\
\bar{w}'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_1)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi_1)\bar{u}_2 + \bar{b}_{33} * \bar{u}_2' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{34} * \Phi + \bar{b}_{35} * \Phi_1 + \bar{b}_{36} * \Phi_2)\bar{w} + \Phi^{-1}(\bar{b}_{37} * \Phi_1)\bar{w}' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi_1)\bar{\psi}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{39} * \Phi_1)\bar{\psi}_2 + \bar{b}_{3,10} * \bar{\psi}_2' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{39} * \bar{q}), \quad (4.14) \\
\bar{\psi}_1'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{42} * \Phi_1 + \bar{b}_{43} * \Phi_1)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{45} * \Phi_1)\bar{w} + \Phi^{-1}(\bar{b}_{46} * \Phi + \bar{b}_{47} * \Phi_1 + \bar{b}_{48} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{49} * \Phi_1)\bar{\psi}_1' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,10} * \Phi_1 + \bar{b}_{4,11} * \Phi_2)\bar{\psi}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,12} * \Phi_1)\bar{\psi}_2', \\
\bar{\psi}_2'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{51} * \Phi_1 + \bar{b}_{52} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{53} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{54} * \Phi + \bar{b}_{55} * \Phi_2)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{56} * \Phi_1)\bar{w} + \bar{b}_{57} * \bar{w}' + \\
&\quad + \Phi^{-1}(\bar{b}_{58} * \Phi_1 + \bar{b}_{59} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,10} * \Phi_1)\bar{\psi}_1' + \\
&+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,11} * \Phi + \bar{b}_{5,12} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,13} * \Phi_2)\bar{\psi}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,14} * \Phi_1)\bar{\psi}_2',
\end{aligned}$$

де компоненти матриць  $\Phi$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – значення функцій  $\phi_j$  та їх похідних в точках колокації, тобто  $\Phi_{ij} = \phi_j(\zeta_i)$ ,  $\Phi_{1ij} = \phi_j'(\zeta_i)$ ,  $\Phi_{2ij} = \phi_j''(\zeta_i)$ .

Систему (4.14) запишемо у вигляді:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\xi_2} = A\bar{Y} + \bar{f}, \quad (4.15)$$

де  $\bar{Y} = \{u_{10}, \dots, u_{1N}, u'_{10}, \dots, u'_{1N}, u_{20}, \dots, u_{2N}, u'_{20}, \dots, u'_{2N}, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \psi_{10}, \dots, \psi_{1N}, \psi'_{10}, \dots, \psi'_{1N}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2N}, \psi'_{20}, \dots, \psi'_{2N}\}^T$  – вектор-функція змінної  $\xi_2$ ;  $A$  – квадратна матриця (3.15) розмірності  $10(N+1) \times 10(N+1)$ , елементи якої залежать від  $\xi_2$ ;  $\bar{f}$  – вектор правої частини (3.16).

Ненульові блоки  $T_{ij}$  матриці  $A$  у цьому випадку:

$$\begin{aligned}
T_{12} &= I, T_{21} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_1 + \bar{b}_{12} * \Phi_2), T_{22} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi_1), \\
T_{23} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{14} * \Phi_1 + \bar{b}_{15} * \Phi_2), T_{24} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{16} * \Phi_1), T_{25} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{17} * \Phi_1), \\
T_{34} &= I, T_{41} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_1 + \bar{b}_{22} * \Phi_2), T_{42} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{23} * \Phi_1), \\
T_{43} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi + \bar{b}_{25} * \Phi_1 + \bar{b}_{26} * \Phi_2), T_{44} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi_1), \\
T_{45} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{28} * \Phi_1), T_{46} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{29} * \Phi), T_{47} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,10} * \Phi_1 + \bar{b}_{2,11} * \Phi_2), \\
T_{48} &= \bar{b}_{2,12} * I, T_{49} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,13} * \Phi + \bar{b}_{2,14} * \Phi_2), \\
T_{56} &= I, T_{61} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_1), T_{63} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi_1), T_{64} = \bar{b}_{33} * I, \\
T_{65} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{34} * \Phi + \bar{b}_{35} * \Phi_1 + \bar{b}_{36} * \Phi_2), T_{66} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{37} * \Phi_1), \\
T_{67} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi_1), T_{69} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{39} * \Phi_1), T_{6,10} = \bar{b}_{3,10} * I, T_{78} = I, \\
T_{81} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_2), T_{83} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{42} * \Phi_1 + \bar{b}_{43} * \Phi_1), T_{84} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_1), \\
T_{85} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{45} * \Phi_1), T_{87} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{46} * \Phi + \bar{b}_{47} * \Phi_1 + \bar{b}_{48} * \Phi_2), \\
T_{88} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{49} * \Phi_1), T_{89} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,10} * \Phi_1 T_{82} = \bar{b}_{4,11} * \Phi_2), \\
T_{8,10} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,12} * \Phi_1), T_{9,10} = I, T_{10,1} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{51} * \Phi_1 + \bar{b}_{52} * \Phi_2), \\
T_{10,2} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{53} * \Phi_1) \bar{u}'_1, T_{10,3} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{54} * \Phi + \bar{b}_{55} * \Phi_2), T_{10,5} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{56} * \Phi_1), \\
T_{10,6} &= \bar{b}_{57} * I, T_{10,7} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{58} * \Phi_1 + \bar{b}_{59} * \Phi_2), T_{10,8} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,10} * \Phi_1), \\
T_{10,9} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,11} * \Phi + \bar{b}_{5,12} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,13} * \Phi_2), T_{10,10} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,14} * \Phi_1).
\end{aligned}$$

Єдиний ненульовий вектор-компонент вектора  $\bar{f}$  у цьому випадку:

$$\bar{f}_3 = \Phi^{-1} \bar{b}_{39} * \bar{q}.$$

Граничні умови для отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (4.15) у відповідності з (4.12) можна записати так:

$$B\bar{Y}(0) = \bar{0}; \quad B\bar{Y}(\pi) = \bar{0}, \quad (4.16)$$

де  $B$  – прямокутна матриця розмірності  $5(N + 1) \times 10(N + 1)$ :

$$B = \begin{pmatrix} O & I & O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & I & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & I & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O & I & O \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

В (4.17)  $O$  – нульова, а  $I$  – одинична матриці розмірності  $(N + 1) \times (N + 1)$ . Для розв’язання одновимірної крайової задачі (4.15), (4.16) застосуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

Проілюструємо застосування розробленого підходу до розв’язання ряду задач статки для кругової циліндричної оболонки зі зрізами на торцях.

Порівняємо результати отримані в [209] з використанням рівнянь класичної теорії оболонок і розв’язки на основі викладеного вище підходу. Для цього проведемо дослідження НДС оболонки з такими параметрами:  $L = 60$ ,  $R = 20$ ,  $h = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $\nu = 0,3$ . В цьому випадку проекція оболонки буде мати вигляд показаний на рис. 4.2. В таблиці 4.1 наведено дані для прогинів  $wE/q$  в перерізі  $\xi_1 = L/2$  при значеннях кутів  $\beta = 6^\circ; 18^\circ; 30^\circ$ . В стовпчику I – дані з статті [209], в II(20) – дані, отримані на основі описаного тут підходу при  $N + 1 = 20$  точках колокації, в II(30) – при  $N + 1 = 30$ . Відрізок  $0 \leq \xi_1 \leq \pi$  розбито на 400 частин. Як видно з таблиці, дані, отримані на основі обох підходів, достатньо близькі,

і розбіжність між результатами не перевищує 0,5%.

Табл. 4.1 – Порівняння прогинів, отриманих з використанням різних оболонкових теорій, для циліндра з проекцією у вигляді трапеції

$\xi_2$	$wE/q$								
	$\beta = 6^\circ$			$\beta = 18^\circ$			$\beta = 30^\circ$		
	I	II(20)	II(30)	I	II(20)	II(30)	I	II(20)	II(30)
0	383,4	383,8	383,1	411,2	413,4	410,7	437,1	440,5	436,3
$\pi/10$	382,7	383,0	382,4	409,3	410,9	408,7	433,2	435,5	432,4
$2\pi/10$	380,6	380,7	380,3	403,6	403,7	402,8	422,2	422,0	421,2
$3\pi/10$	377,3	377,1	377,0	394,4	393,0	393,4	406,8	404,1	405,3
$4\pi/10$	373,1	372,5	372,8	382,6	380,2	381,6	391,3	387,7	389,3
$5\pi/10$	368,3	367,4	368,0	369,2	366,8	368,5	379,4	376,6	377,7
$6\pi/10$	363,2	362,2	363,0	355,5	354,1	355,5	369,7	368,4	368,9
$7\pi/10$	358,6	357,5	358,4	343,0	342,8	343,5	352,2	352,7	352,8
$8\pi/10$	354,7	353,7	354,7	332,8	333,5	333,6	317,6	319,8	319,8
$9\pi/10$	352,2	351,2	352,2	326,0	327,3	326,9	275,3	279,5	279,5
$\pi$	351,3	350,4	351,3	323,5	325,1	324,5	255,5	260,6	260,6

Також проведемо дослідження прогинів для різних значень кута  $\beta$  у випадку, коли оболонка проектується в паралелограм, тобто, коли  $\beta = -\beta_1 = \beta_2$ . В таблиці 4.2 наведено дані для перерізу  $\xi_2 = \pi$ , в стовпчику I – дані з роботи [209], в стовпчику II – результати, отримані на основі викладеного вище підходу ( $N = 29$ , відрізок інтегрування розби-



то на 400 частин). Як і в попередньому випадку, різниця між значеннями, отриманими за допомогою різних теорій, відрізняються в найгіршому випадку приблизно на 0,5%. Отже, можна відмітити гарну відповідність підходу використаного в [209] і викладеного вище.

Табл. 4.2 – Порівняння прогинів, отриманих з використанням різних оболонкових теорій, для циліндра з проекцією у вигляді паралелограма

$\xi_1/L$	$wE/q$							
	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 10^\circ$		$\beta = 20^\circ$		$\beta = 30^\circ$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
0,1	313,1	312,3	328,1	326,7	344,4	342,6	363,9	361,8
0,2	382,5	384,9	399,3	401,7	417,4	420,0	441,7	444,5
0,3	368,8	369,2	377,5	378,0	384,3	385,0	393,3	394,4
0,4	367,3	367,1	370,1	369,7	368,9	368,4	366,0	365,3
0,5	367,8	367,7	365,3	365,2	358,3	358,1	348,2	347,6
0,6	367,3	367,1	359,9	359,0	347,8	347,6	332,2	331,6
0,7	368,8	369,2	356,5	357,0	340,2	340,6	320,3	320,2
0,8	382,5	384,9	364,5	367,0	344,0	346,5	320,6	322,8
0,9	313,1	312,3	297,9	297,9	281,6	282,2	263,4	264,6

Розглянемо циліндри з різними значеннями  $\beta_1$  і  $\beta_2$ . Зафіксуємо значення  $\beta_1 = -30^\circ$ , а  $\beta_2$  будемо змінювати від  $25^\circ$  до  $-25^\circ$ . Результати, отримані для перерізу  $\xi_2 = \pi$ , показано на рис. 4.4. З графіків можна бачити, як в залежності від кута  $\beta_2$  змінюється довжина оболонки в перерізі  $\xi_2 = \pi$ . У зв'язку зі зміною параметрів оболонки змінюється і розподіл прогинів. Як

видно з рис. 4.4, прогин поблизу краю  $\xi_1 = 0$  змінюється в незначній мірі, а при значеннях  $\xi_1$  в околі торця  $\xi_1 = L$  помітно зростає зі зменшенням  $\beta_2$  от  $25^\circ$  до  $-25^\circ$ .

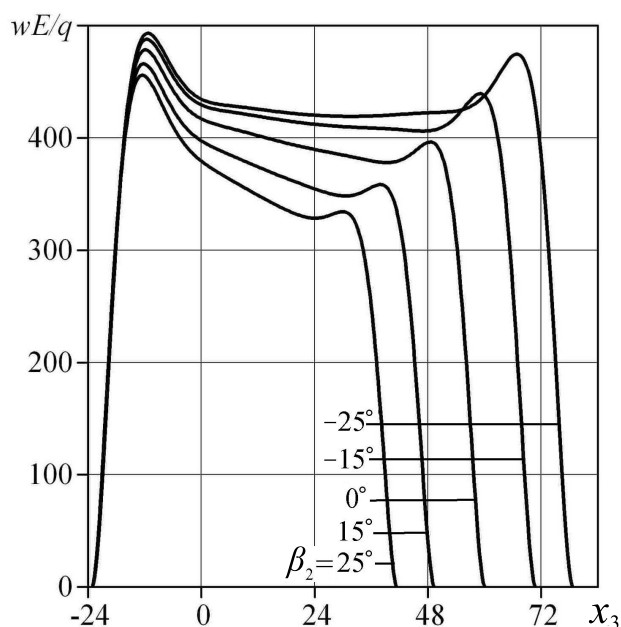


Рис. 4.4 – Розподіл переміщень в циліндричній оболонці для різних кутів зрізу  $\beta_2$ , при  $\beta_1 = -30^\circ$ ,  $\xi_2 = \pi$

Одержані результати розв'язання задач свідчать, що для опису оболонок досліджуваного класу можна використовувати як уточнену, так і класичну теорію оболонок. Розбіжності між розв'язками при цьому не перевищують 0,5%. Це дуже хороша збіжність, якщо враховувати, що в роботі [209] сплайн-апроксимація проводилась по координаті  $\xi_2$ .

## 4.2 Циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами

Дослідження, аналогічні викладеним в підрозділі 4.1 для кругового циліндра, проводяться далі для циліндричної оболонки еліптичного перерізу зі скісними зрізами [50]. Проекції цієї оболонки показано на рис. 4.5.

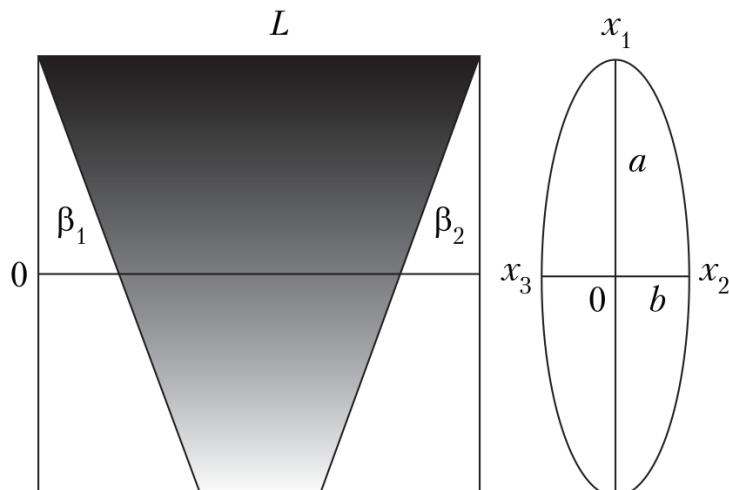


Рис. 4.5 – Проекції серединної поверхні циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами

Рівняння для некругових циліндричних оболонок сталої товщини під дією внутрішнього тиску  $q_3 = q$  в ортогональній криволінійній системі координат  $O\alpha_1\alpha_2$  з використанням (3.3) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
& a_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{14} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{15} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = 0, \\
& a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{22} u_2 + a_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{24} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{25} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2^2} + a_{26} w + \\
& \quad + a_{27} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{28} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{29} \psi_2 + a_{2,10} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} = 0, \\
& a_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + a_{32} u_2 + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{34} w + a_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + a_{36} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \\
& \quad + a_{38} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + a_{39} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{3,10} q = 0, \tag{4.18} \\
& a_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{42} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + a_{43} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{44} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + a_{45} \psi_1 + \\
& \quad + a_{46} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1^2} + a_{47} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + a_{48} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_2^2} + a_{49} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} = 0, \\
& a_{51} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} + a_{52} u_2 + a_{53} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{54} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + a_{55} w + a_{56} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \\
& \quad + a_{57} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + a_{58} \psi_2 + a_{59} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_1^2} + a_{5,10} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + a_{5,11} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \alpha_2^2} = 0,
\end{aligned}$$

де коефіцієнти  $a_{ij}$  такі:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= C_{11}A_2; \quad a_{12} = -\frac{C_{66}A'_2}{A_2^2}; \quad a_{13} = \frac{C_{66}}{A_2}; \quad a_{14} = C_{12} + C_{66}; \\
a_{15} &= C_{12}A_2k_2; \quad a_{21} = C_{12} + C_{66} - k_2^2D_{66}; \quad a_{22} = -K_2A_2k_2^2; \\
a_{23} &= A_2C_{66}; \quad a_{24} = -\frac{C_{22}A'_2}{A_2^2}; \quad a_{25} = \frac{C_{22}}{A_2}; \quad a_{26} = C_{22}k'_2; \\
a_{27} &= k_2(C_{22} + K_2); \quad a_{28} = D_{66}k_2; \quad a_{29} = K_2A_2k_2; \quad a_{2,10} = D_{66}A_2k_2 \\
a_{31} &= -C_{12}A_2k_2; \quad a_{32} = -K_2k'_2; \quad a_{33} = -k_2(C_{22} + K_2); \\
a_{34} &= -C_{22}A_2k_2^2; \quad a_{35} = A_2K_1; \quad a_{36} = -\frac{K_2A'_2}{A_2^2}; \quad a_{37} = \frac{K_2}{A_2}; \\
a_{38} &= A_2K_1; \quad a_{39} = K_2; \quad a_{3,10} = A_2; \quad a_{41} = \frac{k_2D_{66}C_{11}A_2}{C_{66}}; \\
a_{42} &= -\frac{D_{66}k'_2}{A_2}; \quad a_{43} = \left(D_{66} - D_{12} + \frac{D_{66}C_{12}}{C_{66}}\right)k_2; \\
a_{44} &= -A_2\left(k_2^2\left(D_{12} - \frac{C_{12}D_{66}}{C_{66}}\right) + K_1\right); \quad a_{45} = -A_2K_1; \\
a_{46} &= D_{11}A_2; \quad a_{47} = -\frac{D_{66}A'_2}{A_2^2}; \quad a_{48} = \frac{D_{66}}{A_2}; \quad a_{49} = D_{12} + D_{66}; \\
a_{51} &= -\frac{k_2}{C_{22}}\left(k_2^2D_{22}D_{66} - (C_{12} + C_{66})D_{22} + C_{22}D_{66}\right); \\
a_{52} &= A_2k_2K_2\left(1 - \frac{D_{22}k_2^2}{C_{22}}\right); \quad a_{53} = \frac{D_{22}C_{66}A_2k_2}{C_{22}}; \quad a_{54} = -\frac{k'_2D_{22}}{A_2}; \\
a_{55} &= -D_{22}k_2k'_2; \quad a_{56} = K_2\left(\frac{D_{22}k_2^2}{C_{22}} - 1\right); \quad a_{57} = D_{12} + D_{66} + \frac{k_2^2D_{22}D_{66}}{C_{22}}; \\
a_{58} &= K_2A_2\left(\frac{D_{22}k_2^2}{C_{22}} - 1\right); \quad a_{59} = D_{66}A_2\left(\frac{D_{22}k_2^2}{C_{22}} + 1\right); \\
a_{5,10} &= -\frac{D_{22}A'_2}{A_2^2}; \quad a_{5,11} = \frac{D_{22}}{A_2}.
\end{aligned}$$

Серединна поверхня оболонки зі зрізами в декартових координатах

$x_1, x_2, x_3$  задається таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(\xi_2), \\ x_2 = f_2(\xi_2), \\ x_3 = \frac{\xi_1}{L} (L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))\operatorname{tg}\beta_1, \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$0 \leq \xi_1 \leq L, 0 \leq \xi_2 \leq 2\pi, \beta_1, \beta_2$  – кути зрізів.

Далі замінимо змінні у рівняннях (4.18). Зв'язок між координатами  $\xi_1, \xi_2$  і  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\alpha_1 = \frac{\xi_1}{L} (L + (f_1(\xi_2) - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)) + (f_1(0) - f_1(\xi_2))\operatorname{tg}\beta_1, \quad (4.20)$$

$$\alpha_2 = \xi_2.$$

Для похідних довільної функції  $f$  мають місце такі формули:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} &= \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} + 2\lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= \lambda_4 \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{L}{\Delta_1}; \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} [f_1'' \Delta_1 - 2(f_1')^2 (\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2)]; \\ \lambda_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} f_1'; \quad \lambda_4 = -\frac{L}{\Delta_1^2} f_1' (\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2); \\ \Delta_1 &= (f_1 - f_1(0))(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2) + L; \\ \Delta_2 &= L \operatorname{tg}\beta_1 - \xi_1 (\operatorname{tg}\beta_1 + \xi_1 \operatorname{tg}\beta_2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Розв'язувальні рівняння в новій неортогональній системі координат

$O_{\xi_1 \xi_2}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} = & -\frac{a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{11} \lambda_1^2 + a_{13} \lambda_2^2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{12}}{a_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\
& - \frac{a_{14} \lambda_4}{a_{13}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{14} \lambda_1 \lambda_2}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{14} \lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{15} \lambda_1}{a_{13}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} = & -\frac{a_{21} \lambda_4}{a_{25}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{21} \lambda_1 \lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{21} \lambda_1}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\
& - \frac{a_{22} u_2}{a_{25}} - \frac{a_{24} \lambda_2 + a_{25} \lambda_3}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{23} \lambda_1^2 + a_{25} \lambda_2^2}{a_{25}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{24}}{a_{25}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \\
& - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{26} w}{a_{25}} - \frac{a_{27} \lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{a_{27}}{a_{25}} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{a_{28} \lambda_4}{a_{25}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} \\
& - \frac{a_{28} \lambda_1 \lambda_2}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{28} \lambda_1}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{29} \psi_2}{a_{25}} - \frac{a_{2,10} \lambda_1^2}{a_{25}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} = & -\frac{a_{31} \lambda_1}{a_{37}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{32} u_2}{a_{37}} - \frac{a_{33} \lambda_2}{a_{37}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{33}}{a_{37}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{34} w}{a_{37}} \\
& - \frac{a_{36} \lambda_2 + a_{37} \lambda_3}{a_{37}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{a_{35} \lambda_1^2 + a_{37} \lambda_2^2}{a_{37}} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{36}}{a_{37}} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \\
& - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{38} \lambda_1}{a_{37}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{39} \lambda_2}{a_{37}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{39}}{a_{37}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{3,10} q}{a_{37}}, \\
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} = & -\frac{a_{42} \lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{41} \lambda_1^2}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{42}}{a_{48}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \\
& - \frac{a_{43} \lambda_4}{a_{48}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{43} \lambda_1 \lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{43} \lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{44} \lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{a_{45} \psi_1}{a_{48}} \\
& - \frac{a_{47} \lambda_2 + a_{48} \lambda_3}{a_{48}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{46} \lambda_1^2 + a_{48} \lambda_2^2}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{47}}{a_{48}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} \\
& - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{a_{49} \lambda_4}{a_{48}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{49} \lambda_1 \lambda_2}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{49} \lambda_1}{a_{48}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} = & -\frac{a_{51} \lambda_4}{a_{5,11}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{51} \lambda_1 \lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{51} \lambda_1}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{52} u_2}{a_{5,11}} \\
& - \frac{a_{54} \lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{53} \lambda_1^2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{54}}{a_{5,11}} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{a_{55} w}{a_{5,11}} - \frac{a_{56} \lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{a_{56}}{a_{5,11}} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \\
& - \frac{a_{57} \lambda_4}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} - \frac{a_{57} \lambda_1 \lambda_2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{57} \lambda_1}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} - \frac{a_{58} \psi_2}{a_{5,11}} \\
& - \frac{a_{5,10} \lambda_2 + a_{5,11} \lambda_3}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} - \frac{a_{5,11} \lambda_2^2 + a_{59} \lambda_1^2}{a_{5,11}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} - \frac{a_{5,10}}{a_{5,11}} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} - 2 \lambda_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Перепишемо (4.23) у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{13} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + b_{14} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + \\
&+ b_{15} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{17} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{18} \frac{\partial w}{\partial \xi_1}; \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} &= b_{21} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{22} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{23} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + \\
&+ b_{24} u_2 + b_{25} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{27} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \\
&+ b_{28} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{29} w + b_{2,10} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{2,11} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + b_{2,12} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + \\
&+ b_{2,13} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{2,14} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{2,15} \psi_2 + b_{2,16} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2}; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} &= b_{31} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{32} u_2 + b_{33} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{34} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + b_{35} w + \\
&+ b_{36} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + b_{38} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + b_{39} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + \\
&+ b_{3,10} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{3,11} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{3,12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + b_{3,13} q; \\
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2^2} &= b_{41} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{42} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{43} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \\
&+ b_{44} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{45} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{46} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{47} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{48} \psi_1 + \\
&+ b_{49} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{4,10} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{4,11} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} + b_{4,12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \\
&+ b_{4,13} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} + b_{4,15} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2^2} &= b_{51} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b_{52} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} + b_{53} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{54} u_2 + \\
&+ b_{55} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + b_{56} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_1^2} + b_{57} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + b_{58} w + b_{59} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + b_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \\
&+ b_{5,11} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} + b_{5,12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_1^2} + b_{5,13} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} + b_{5,14} \psi_2 + \\
&+ b_{5,15} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} + b_{5,16} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_1^2} + b_{5,17} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} + b_{5,18} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -\frac{a_{12} \lambda_2 + a_{13} \lambda_3}{a_{13}}, b_{12} = -\frac{a_{11} \lambda_1^2 + a_{13} \lambda_2^2}{a_{13}}, b_{13} = -\frac{a_{12}}{a_{13}}, b_{14} = -2\lambda_2, \\
b_{15} &= -\frac{a_{14} \lambda_4}{a_{13}}, b_{16} = -\frac{a_{14} \lambda_1 \lambda_2}{a_{13}}, b_{17} = -\frac{a_{14} \lambda_1}{a_{13}}, b_{18} = -\frac{a_{15} \lambda_1}{a_{13}}, \\
b_{21} &= -\frac{a_{21} \lambda_4}{a_{25}}, b_{22} = -\frac{a_{21} \lambda_1 \lambda_2}{a_{25}}, b_{23} = -\frac{a_{21} \lambda_1}{a_{25}}, \\
b_{24} &= -\frac{a_{22}}{a_{25}}, b_{25} = -\frac{a_{24} \lambda_2 + a_{25} \lambda_3}{a_{25}}, b_{26} = -\frac{a_{23} \lambda_1^2 + a_{25} \lambda_2^2}{a_{25}}, b_{27} = -\frac{a_{24}}{a_{25}}, \\
b_{28} &= -2\lambda_2, b_{29} = -\frac{a_{26}}{a_{25}}, b_{2,10} = -\frac{a_{27} \lambda_2}{a_{25}}, b_{2,11} = -\frac{a_{27}}{a_{25}}, b_{2,12} = -\frac{a_{28} \lambda_4}{a_{25}}, \\
b_{2,13} &= -\frac{a_{28} \lambda_1 \lambda_2}{a_{25}}, b_{2,14} = -\frac{a_{28} \lambda_1}{a_{25}}, b_{2,15} = -\frac{a_{29}}{a_{25}}, b_{2,16} = -\frac{a_{2,10} \lambda_1^2}{a_{25}}, \\
b_{31} &= -\frac{a_{31} \lambda_1}{a_{37}}, b_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{37}}, b_{33} = -\frac{a_{33} \lambda_2}{a_{37}}, b_{34} = -\frac{a_{33}}{a_{37}}, b_{35} = -\frac{a_{34}}{a_{37}}, \\
b_{36} &= -\frac{a_{36} \lambda_2 + a_{37} \lambda_3}{a_{37}}, b_{37} = -\frac{a_{35} \lambda_1^2 + a_{37} \lambda_2^2}{a_{37}}, b_{38} = -\frac{a_{36}}{a_{37}}, b_{39} = -2\lambda_2, \\
b_{3,10} &= -\frac{a_{38} \lambda_1}{a_{37}}, b_{3,11} = -\frac{a_{39} \lambda_2}{a_{37}}, b_{3,12} = -\frac{a_{39}}{a_{37}}, b_{3,13} = -\frac{a_{3,10}}{a_{37}}; \\
b_{41} &= -\frac{a_{42} \lambda_2}{a_{48}}, b_{42} = -\frac{a_{41} \lambda_1^2}{a_{48}}, b_{43} = -\frac{a_{42}}{a_{48}}, \\
b_{44} &= -\frac{a_{43} \lambda_4}{a_{48}}, b_{45} = -\frac{a_{43} \lambda_1 \lambda_2}{a_{48}}, b_{46} = -\frac{a_{43} \lambda_1}{a_{48}}, b_{47} = -\frac{a_{44} \lambda_1}{a_{48}}, b_{48} = -\frac{a_{45}}{a_{48}}, \\
b_{49} &= -\frac{a_{47} \lambda_2 + a_{48} \lambda_3}{a_{48}}, b_{4,10} = -\frac{a_{46} \lambda_1^2 + a_{48} \lambda_2^2}{a_{48}}, b_{4,11} = -\frac{a_{47}}{a_{48}}, \\
b_{4,12} &= -2\lambda_2, b_{4,13} = -\frac{a_{49} \lambda_4}{a_{48}}, b_{4,14} = -\frac{a_{49} \lambda_1 \lambda_2}{a_{48}}, b_{4,15} = -\frac{a_{49} \lambda_1}{a_{48}}, \\
b_{51} &= -\frac{a_{51} \lambda_4}{a_{5,11}}, b_{52} = -\frac{a_{51} \lambda_1 \lambda_2}{a_{5,11}}, b_{53} = -\frac{a_{51} \lambda_1}{a_{5,11}}, b_{54} = -\frac{a_{52} u_2}{a_{5,11}}, \\
b_{55} &= -\frac{a_{54} \lambda_2}{a_{5,11}}, b_{56} = -\frac{a_{53} \lambda_1^2}{a_{5,11}}, b_{57} = -\frac{a_{54}}{a_{5,11}}, \\
b_{58} &= -\frac{a_{55} w}{a_{5,11}}, b_{59} = -\frac{a_{56} \lambda_2}{a_{5,11}}, b_{5,10} = -\frac{a_{56}}{a_{5,11}}, \\
b_{5,11} &= -\frac{a_{57} \lambda_4}{a_{5,11}}, b_{5,12} = -\frac{a_{57} \lambda_1 \lambda_2}{a_{5,11}}, b_{5,13} = -\frac{a_{57} \lambda_1}{a_{5,11}}, b_{5,14} = -\frac{a_{58}}{a_{5,11}}, \\
b_{5,15} &= -\frac{a_{5,10} \lambda_2 + a_{5,11} \lambda_3}{a_{5,11}}, b_{5,16} = -\frac{a_{5,11} \lambda_2^2 + a_{59} \lambda_1^2}{a_{5,11}},
\end{aligned}$$



$$b_{5,17} = -\frac{a_{5,10}}{a_{5,11}}, b_{5,18} = -2\lambda_2.$$

Додавши до (4.24) умови жорсткого закріплення (4.11) на контурах  $\xi_1 = const$  та умови симетрії (4.12) при  $\xi_2 = 0$  та  $\xi_2 = \pi$ , одержимо двовимірну крайову задачу відносно невідомих переміщень і повних кутів повороту, розв'язок якої шукаємо у вигляді (4.13). Застосувавши до рівнянь (4.24) метод сплайн-колокації в напрямку напрямної циліндра і ввівши позначення, описані в підрозділі 4.1, отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_1 + \bar{b}_{12} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi + \bar{b}_{14} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{15} * \Phi + \bar{b}_{16} * \Phi_1)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{17} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{18} * \Phi_1)\bar{w}, \\ \bar{u}_2'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_1 + \bar{b}_{22} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{23} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi + \bar{b}_{25} * \Phi_1 + \bar{b}_{26} * \Phi_2)\bar{u}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi + \bar{b}_{28} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{29} * \Phi + \bar{b}_{2,10} * \Phi_1)\bar{w} + \bar{b}_{2,11} * \bar{w}' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,12} * \Phi_1 + \bar{b}_{2,13} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \\ &+ (\bar{b}_{2,14} * \Phi_1)\bar{\psi}_1' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,15} * \Phi + \bar{b}_{2,16} * \Phi_2)\bar{\psi}_2, \\ \bar{w}'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_1)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi + \bar{b}_{33} * \Phi_1)\bar{u}_2 + \bar{b}_{34} * \bar{u}_2' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{35} * \Phi + \bar{b}_{36} * \Phi_1 + \bar{b}_{37} * \Phi_2)\bar{w} + \Phi^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi + \bar{b}_{39} * \Phi_1)\bar{w}' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,10} * \Phi_1)\bar{\psi}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,11} * \Phi_1)\bar{\psi}_2 + \bar{b}_{3,12} * \bar{\psi}_2' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,13} * \bar{q}), \quad (4.25) \\ \bar{\psi}_1'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_1 + \bar{b}_{42} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \bar{b}_{43} * \bar{u}_1' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_1 + \bar{b}_{45} * \Phi_1)\bar{u}_2 + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{46} * \Phi_1)\bar{u}_2' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{47} * \Phi_1)\bar{w} + \Phi^{-1}(\bar{b}_{48} * \Phi + \bar{b}_{49} * \Phi_1 + \bar{b}_{4,10} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,11} * \Phi + \bar{b}_{4,12} * \Phi_1)\bar{\psi}_1' + \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,13} * \Phi_1 + \bar{b}_{4,14} * \Phi_2)\bar{\psi}_2 + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,15} * \Phi_1)\bar{\psi}_2', \\ \bar{\psi}_2'' &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{51} * \Phi_1 + \bar{b}_{52} * \Phi_2)\bar{u}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{53} * \Phi_1)\bar{u}_1' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{54} * \Phi + \bar{b}_{55} * \Phi_1 + \bar{b}_{56} * \Phi_2)\bar{u}_2 + \bar{b}_{57} * \bar{u}_2' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{58} * \Phi + \bar{b}_{59} * \Phi_1)\bar{w} + \bar{b}_{5,10} * \bar{w}' + \\ &+ \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,11} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,12} * \Phi_2)\bar{\psi}_1 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,13} * \Phi_1)\bar{\psi}_1' + \end{aligned}$$

$$+\Phi^{-1}(\bar{b}_{5,14} * \Phi + \bar{b}_{5,15} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,16} * \Phi_2)\bar{\psi}_2 + \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,17} * \Phi + \bar{b}_{5,18} * \Phi_1)\bar{\psi}'_2.$$

Аналогічно з випадком циліндра кругового поперечного перерізу цю систему можна звести до нормального вигляду (4.15). Ненульові блоки матриці  $A$  в цьому випадку:

$$\begin{aligned} T_{12} &= I, T_{21} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{11} * \Phi_1 + \bar{b}_{12} * \Phi_2), T_{22} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{13} * \Phi + \bar{b}_{14} * \Phi_1), \\ T_{23} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{15} * \Phi + \bar{b}_{16} * \Phi_1), T_{24} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{17} * \Phi_1), T_{25} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{18} * \Phi_1)\bar{w}, \\ T_{34} &= I, T_{41} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{21} * \Phi_1 + \bar{b}_{22} * \Phi_2), T_{42} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{23} * \Phi_1), \\ T_{43} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{24} * \Phi + \bar{b}_{25} * \Phi_1 + \bar{b}_{26} * \Phi_2), T_{44} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{27} * \Phi + \bar{b}_{28} * \Phi_1), \\ T_{45} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{29} * \Phi + \bar{b}_{2,10} * \Phi_1), T_{46} = \bar{b}_{2,11} * IT_{47} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,12} * \Phi_1 + \bar{b}_{2,13} * \Phi_2), \\ T_{48} &= (\bar{b}_{2,14} * \Phi_1), T_{49} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{2,15} * \Phi + \bar{b}_{2,16} * \Phi_2), \\ T_{56} &= I, T_{61} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{31} * \Phi_1), T_{63} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{32} * \Phi + \bar{b}_{33} * \Phi_1), T_{64} = \bar{b}_{34} * I, \\ T_{65} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{35} * \Phi + \bar{b}_{36} * \Phi_1 + \bar{b}_{37} * \Phi_2), T_{66} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{38} * \Phi + \bar{b}_{39} * \Phi_1), \\ T_{67} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,10} * \Phi_1), T_{69} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,11} * \Phi_1), T_{6,10} = \bar{b}_{3,12} * \bar{\psi}'_2, \\ T_{78} &= I, T_{81} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{41} * \Phi_1 + \bar{b}_{42} * \Phi_2), T_{82} = \bar{b}_{43} * I, \\ T_{83} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{44} * \Phi_1 + \bar{b}_{45} * \Phi_1), T_{84} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{46} * \Phi_1), \\ T_{85} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{47} * \Phi_1), T_{87} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{48} * \Phi + \bar{b}_{49} * \Phi_1 + \bar{b}_{4,10} * \Phi_2), \\ T_{88} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,11} * \Phi + \bar{b}_{4,12} * \Phi_1), T_{89} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,13} * \Phi_1 + \bar{b}_{4,14} * \Phi_2), \\ T_{8,10} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{4,15} * \Phi_1), \\ T_{9,10} &= I, T_{10,1} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{51} * \Phi_1 + \bar{b}_{52} * \Phi_2), T_{10,2} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{53} * \Phi_1), \\ T_{10,3} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{54} * \Phi + \bar{b}_{55} * \Phi_1 + \bar{b}_{56} * \Phi_2), T_{10,4} = \bar{b}_{57} * I, \\ T_{10,5} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{58} * \Phi + \bar{b}_{59} * \Phi_1), T_{10,6} = \bar{b}_{5,10} * I, \\ T_{10,7} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,11} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,12} * \Phi_2), T_{10,8} = \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,13} * \Phi_1), \\ T_{10,9} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,14} * \Phi + \bar{b}_{5,15} * \Phi_1 + \bar{b}_{5,16} * \Phi_2), \\ T_{10,10} &= \Phi^{-1}(\bar{b}_{5,17} * \Phi + \bar{b}_{5,18} * \Phi_1), \end{aligned}$$

а ненульові компоненти вектора  $\bar{f}$ :

$$\bar{f}_3 = \Phi^{-1}(\bar{b}_{3,13} * \bar{q}). \quad (4.26)$$

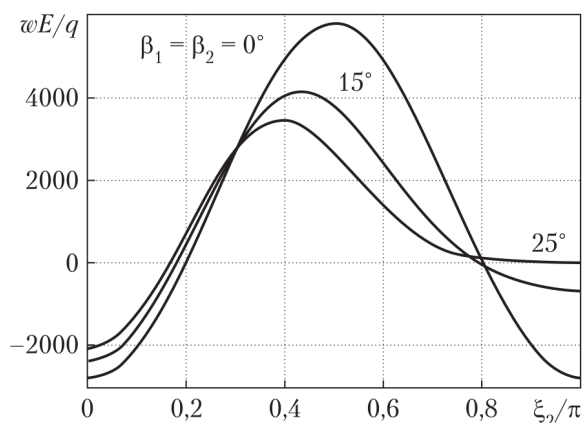


Рис. 4.6 – Розподіл переміщень в оболонці еліптичного поперечного перерізу з півосями  $a = 25, b = 16$  для кутів зрізів  $\beta_1 = \beta_2$ ;  $\xi_1 = L/2$

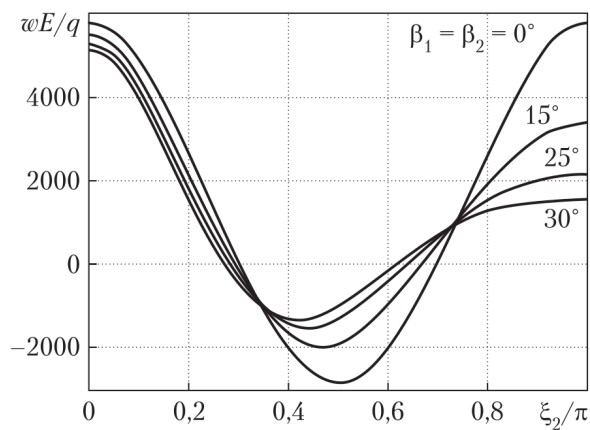


Рис. 4.7 – Розподіл переміщень в оболонці еліптичного поперечного перерізу з півосями  $a = 16, b = 25$  для кутів зрізів  $\beta_1 = \beta_2$ ;  $\xi_1 = L/2$

На основі цієї постановки задачі було проведено аналіз НДС циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу.

Розв'язано задачу про напружений стан циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу  $x_1 = a \cos \xi_2$ ,  $x_2 = b \sin \xi_2$  з півосями  $a = 25, b = 16$  та  $a = 16, b = 25$ ;  $L = 60, h = 1, \nu = 0,3$ .

Кути зрізів  $\beta_1$  і  $\beta_2$  у цьому випадку вибрано рівними.

На рис. 4.6 показано розподіл переміщень для  $b = 16, a = 25$  в залежності від кутів зрізу  $\beta_1 = \beta_2 = 0^\circ; 15^\circ; 25^\circ$ . Результати для нульових кутів зрізу було порівняно з результатами, що отримані за допомогою підходів, описаних у третьому розділі. Вони повністю збігаються. Як видно з графіків, максимальні прогини для оболонки з еліптичним поперечним перерізом більші в порівнянні з круговим циліндром на порядок. В перерізі  $\xi_2 = 0$  переміщення майже не змінюються в залежності від кутів зрізу, а от при

наближенні  $\xi_2 = \pi$  їх модулі зменшуються. При  $\beta_1 = \beta_2 = 25^\circ$  оболонка в околі  $\xi_2 = \pi$  майже не деформується. Для випадку  $a = 16, b = 25$  (рис. 4.7), максимальні переміщення  $wE/q$  спостерігаються при  $\xi_2 = 0$  і, так як і в попередньому випадку, мало залежать від кутів зрізів. Однак в перерізі  $\xi_2 = \pi$  для  $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$  переміщення більш ніж в 3 рази зменшуються в порівнянні з оболонкою без зрізів.

Наведені результати показують ефективність викладеного підходу, який дає змогу проводити багатоваріантні числові експерименти з метою вибору раціональних параметрів циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу зі скісними зрізами.

### 4.3 Результати та висновки

1. З використанням уточненої теорії оболонок типу Тимошенка одержано рівняння НДС циліндричних оболонок кругового і некругового поперечних перерізів зі скісними зрізами на торцях в новій неортогональній системі координат.
2. Одержані двовимірні крайові задачі зведено до одновимірних за допомогою методу сплайн-колокації при апроксимації за твірною, а останні розв'язано методом дискретної ортогоналізації.
3. У випадку кругового поперечного перерізу розв'язки задач порівняно з результатами, отриманими із застосуванням класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява. Встановлено, що розв'язки, отримані з використанням різних теорії для класів оболонок, що розглядаються, відрізняються несуттєво.

4. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів скісного зрізу на розподіл полів переміщень. Показано, що наявність зрізів не змінює якісної картини розподілу цих полів, а кількісні зміни спостерігаються переважно в околі торців.

## Розділ 5

### ОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН І КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРІВ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ТА ПОРОЖНИСТИХ КУЛЬ В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

В практиці інженерних розрахунків і при теоретичному дослідженні закономірностей стаціонарного деформування тонкостінних конструкцій широке розповсюдження набули наближені оболонкові моделі – безмоментна, Доннелла-Муштарі-Власова, класична Кірхгофа-Лява, уточнені зсувні моделі різного порядку, уточнена з врахуванням поперечного обтиску тощо [47]. На основі цих моделей вдалося скласти досить повну картину НДС, коливань, стійкості багатьох реальних конструкцій і виявити особливості їх поведінки в ситуаціях, близьких до реальних режимів експлуатації.

Але при оцінці достовірності одержаних результатів і висновків питання правомірності застосування наближених теорій завжди були в центрі уваги науковців. Особливо гостро вони виникали у випадках, коли оболонки, що розглядалися, мали складну структуру за товщиною, зокрема, були неперервно (функціонально-градієнтні матеріали) або дискретно (багатошарові з різкими відмінностями пружних характеристик шарів) неоднорідними.

Одним з вагомих індуктивних критеріїв правомірності застосування наближених моделей, де неоднорідність за товщиною враховувалась, зазвичай, осереднено, було порівняння з результатами, одержаними на основі просторової теорії пружності, де ці особливості враховувались в диферен-

ціальній формі.

Це спонукало науковців до розробки підходів, де розв'язання задач стаціонарного деформування пружних тіл проводилося за теорією пружності неоднорідного анізотропного тіла. Один з таких підходів пропонується в даному розділі дисертації.

Розглядається осесиметричний НДС кругових циліндрів (підрозділ 5.1) і порожнистих куль (підрозділ 5.2) зі змінними за радіальною координатою (тобто по товщині) фізико-механічними характеристиками матеріалів. Для розв'язання відповідних крайових задач пропонується чисельно-аналітичний підхід на основі застосування методу сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації, що в попередніх розділах був апробований на задачах теорії оболонок за уточненою моделлю Тимошенка.

Для практичного обґрунтування розробленого підходу в класі просторових задач проводиться порівняння одержаних результатів з результатами за методами розвинення в ряди Фур'є та скінченних елементів (МСЕ).

Матеріал дослідження подається за звичною схемою:

- постановка задачі у диференційній і варіаційній формах у відповідній просторовій системі координат: циліндричній (неоднорідні кругові циліндри) та сферичній (неоднорідні порожнисті кулі);

- розв'язання двовимірної крайової задачі з використанням таких методів: сплайн-колокацій в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, відокремлення змінних з використанням рядів Фур'є, методу скінченних елементів;

- порівняння одержаних результатів.

Підходи на основі методу сплайн-колокації і методу скінченних елементів представлені в підрозділі 5.3 для дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічного циліндра.

На базі основних співвідношень теорії електропружності даються дифе-

ренціальна і варіаційна постановки задачі, що містить числовий параметр  $\omega$ , який відповідає шуканим резонансним частотам. Для їх знаходження використовується методи сплайн-колокацій, дискретної ортогоналізації, МСЕ і покрокового пошуку.

### 5.1 НДС неоднорідного циліндра

Розглянемо порожнистий ортотропний циліндр з внутрішнім радіусом  $R-H$  і зовнішнім радіусом  $R+H$  ( $R$  – радіус серединної поверхні,  $2H$  – товщина циліндра) і довжиною  $L$  в циліндричній системі координат  $Or\theta z$  [202].

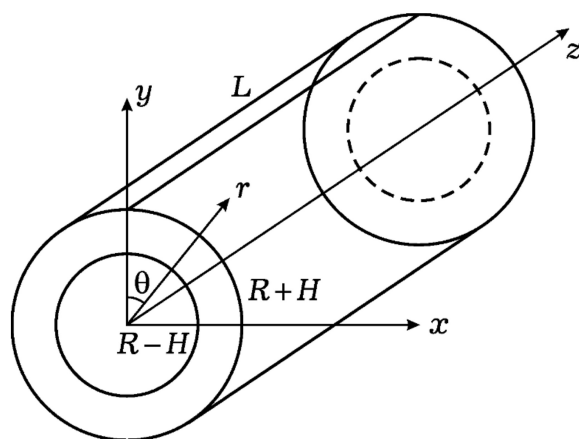


Рис. 5.1 – Порожнистий циліндр

Осесиметричний напружено-деформований стан такого циліндра описують співвідношення Коші:

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_\theta = \frac{u_r}{r}; e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (5.1)$$

закон Гука для ортотропного матеріалу:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_z; \quad \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_z; \\ \sigma_z &= c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_z; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}e_{rz} \end{aligned} \quad (5.2)$$

(для ізотропного тіла –  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ;  $c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda$ ;



$c_{55} = \mu$ ), рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \quad (5.3)$$

граничні умови на бічних поверхнях:

$$\sigma_r(R - H, z) = q_1; \quad \sigma_r(R + H, z) = q_2; \quad \sigma_{rz}(R \pm H, z) = 0,$$

на торцях  $z = 0$  і  $z = L$ :

$$1) \quad \sigma_z = 0; \quad u_r = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad u_r = 0 \quad (\text{шарнірне опирання});$$

$$2) \quad u_z = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0 \quad (\text{умови симетрії});$$

$$3) \quad u_r = 0; \quad u_z = 0 \quad (\text{жорстке закріплення}).$$

Розв'язувальні рівняння, що описують НДС неоднорідного ортотропного циліндра, для зручності застосування методу сплайн-колокації подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \left( \frac{c_{22}}{c_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \frac{1}{r} \right) u_r - \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{55}}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \\ &- \left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{13}}{\partial r} - \frac{c_{23} - c_{13}}{c_{11}} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{23}}{\partial z} \frac{u_r}{r} - \left( \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} + \frac{c_{23}}{c_{55}} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\ &- \left( 1 + \frac{c_{13}}{c_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{13}}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{33}}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \frac{c_{33}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Перепишемо рівняння (5.4) таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11} u_r + a_{12} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ &+ a_{15} \frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{16} \frac{\partial u_z}{\partial r} + a_{17} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = & a_{21} u_r + a_{22} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{23} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{24} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \\ & + a_{25} \frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{26} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{27} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

де коефіцієнти  $a_{kl} = a_{kl}(r, z)$  такі:

$$\begin{aligned} a_{11} = & -\frac{1}{c_{11} r} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} + \frac{c_{22}}{c_{11} r^2}; a_{12} = -\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z}; a_{13} = -\frac{c_{55}}{c_{11}}; \\ a_{14} = & -\left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right); a_{15} = -\left( \frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{13}}{\partial r} - \frac{c_{23} - c_{13}}{c_{11} r} \right); \\ a_{16} = & -\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial c_{55}}{\partial z}; a_{17} = -\frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}}, a_{21} = -\frac{1}{c_{55} r} \frac{\partial c_{23}}{\partial z}, \\ a_{22} = & -\left( \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} + \frac{c_{23}}{c_{55} r} + \frac{1}{r} \right), a_{23} = -\frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{13}}{\partial z}, \\ a_{24} = & -\left( 1 + \frac{c_{13}}{c_{55}} \right), a_{25} = -\frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{33}}{\partial z}, \\ a_{26} = & -\frac{c_{33}}{c_{55}}, a_{27} = -\left( \frac{1}{r} + \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial c_{55}}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Граничні умови на внутрішній поверхні циліндра:

$$c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} = q_1, \quad c_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0,$$

на зовнішній:

$$c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} = q_2, \quad c_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0.$$

Крайову задачу для системи (5.5) з відповідними граничними умовами можна розв'язати з використанням методу сплайн-колокації. Для цього невідомі функції  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  представимо у вигляді:

$$u_r = \sum_{i=0}^N u_{ri}(r) \varphi_{ri}(z), \quad u_z = \sum_{i=0}^N u_{zi}(r) \varphi_{zi}(z), \quad (5.6)$$

де  $u_{ri}(r)$ ,  $u_{zi}(r)$  – шукані функції змінної  $r$ ,  $\varphi_{ri}(z)$ ,  $\varphi_{zi}(z)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) – лінійні комбінації нормалізованих  $B$ -сплайнів третього степеня на рівномірній сітці  $\Delta$ :  $z_{-3} < z_{-2} < z_{-1} < 0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = L < z_{N+1} <$

$z_{N+2} < z_{N+3}$ , що враховують граничні умови при  $z = 0$  і  $z = L$ .

Тоді підставивши (5.6) в (5.5) і вимагаючи виконання отриманих рівнянь в точках колокації  $\xi_k = z_k$  ( $k = \overline{0, N}$ ) отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r'' &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{11} * \Phi_1 + \bar{a}_{12} * \Phi_1' + \bar{a}_{13} * \Phi_1'')\bar{u}_r + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{14} * \Phi_1)\bar{u}'_r + \\ &+ \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{15} * \Phi_2')\bar{u}_z + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{16} * \Phi_2 + \bar{a}_{17} * \Phi_2')\bar{u}'_z, \\ \bar{u}_z'' &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{21}\Phi_1 + \bar{a}_{22}\Phi_1')\bar{u}_r + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{23} * \Phi_1')\bar{u}'_r + \\ &+ \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{24} * \Phi_2 + \bar{a}_{25} * \Phi_2' + \bar{a}_{26} * \Phi_2'')\bar{u}_z + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{27} * \Phi_2)\bar{u}'_z, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де  $\Phi_k$  – матриці з компонентами  $\Phi_{1ij} = \varphi_{rj}(\xi_i)$ ,  $\Phi_{2ij} = \varphi_{zj}(\xi_i)$ , штрихами позначено матриці, компоненти яких є похідними функцій  $\varphi$ ,  $\bar{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1}, \dots, u_{rN}\}^T$ ,  $\bar{u}'_r = \{u'_{r0}, u'_{r1}, \dots, u'_{rN}\}^T$ ,  $\bar{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \dots, u_{zN}\}^T$ ;  $\bar{u}'_z = \{u'_{z0}, u'_{z1}, \dots, u'_{zN}\}^T$ ,  $\bar{a}_{kl}^T = \{a_{kl}(r, \xi_0), a_{kl}(r, \xi_1), \dots, a_{kl}(r, \xi_N)\}$ .

Запишемо (5.7) в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} \quad (R - H \leq r \leq R + H), \quad (5.8)$$

де  $\bar{Y} = \{u_{r0}, \dots, u_{rN}, u'_{r0}, \dots, u'_{rN}, u_{z0}, \dots, u_{zN}, u'_{z0}, \dots, u'_{zN}\}^T$  – вектор-функція, що залежить від  $r$ , а  $A(r)$  квадратна матриця порядку  $4(N+1) \times 4(N+1)$ , яку можна подати у вигляді:

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Ненульові матриці в (5.9):

$$\begin{aligned} T_{12} &= I, T_{21} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{11} * \Phi_1 + \bar{a}_{12} * \Phi_1' + \bar{a}_{13} * \Phi_1''), T_{22} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{14} * \Phi_1), \\ T_{23} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{15} * \Phi_2'), T_{24} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{16} * \Phi_2 + \bar{a}_{17} * \Phi_2')\bar{u}'_z, \\ T_{34} &= I, T_{41} = I, \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{21}\Phi_1 + \bar{a}_{22}\Phi_1'), T_{42} = \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{23} * \Phi_1')\bar{u}'_r, \\ T_{43} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{24} * \Phi_2 + \bar{a}_{25} * \Phi_2' + \bar{a}_{26} * \Phi_2'')T_{44} = \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{27} * \Phi_2)\bar{u}'_z. \end{aligned}$$

Граничні умови для системи звичайних диференціальних рівнянь (5.8) можна записати так:

$$B_1\bar{Y}(R - H) = \bar{b}_1, B_2\bar{Y}(R + H) = \bar{b}_2, \quad (5.10)$$

де  $B_1$  і  $B_2$  прямокутні матриці порядку  $2(N + 1) \times 4(N + 1)$ , а  $\bar{b}_1$  і  $\bar{b}_2$  — відповідні вектори.

Крайову задачу (5.8), (5.10) розв'яжемо методом дискретної ортогоналізації.

У випадку, коли торці циліндра шарнірно оперті, задачу можна розв'язати, подаючи шукані функції у вигляді рядів Фур'є:

$$u_r(r, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^M u_{rm}(r) \sin \frac{m\pi z}{L}, \quad u_z(r, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^M u_{zm}(r) \cos \frac{m\pi z}{L}. \quad (5.11)$$

Підставивши вирази (5.11) в рівняння (5.5) і граничні умови отримаємо послідовність окремих одновимірних крайових задач для знаходження шуканих функцій  $u_{rm}(r)$  і  $u_{zm}(r)$ . Кожну з цих задач можна розв'язати методом дискретної ортогоналізації.

Для порівняння результатів при жорсткому закріпленні країв можна застосувати метод скінченних елементів.

При дії на внутрішню і зовнішню бічні поверхні циліндра тисків  $q_1$  і  $q_2$

відповідно потенціальна енергія деформації має вигляд:

$$\begin{aligned} \Pi = 2\pi \int_0^L \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_z e_z + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{rz} e_{rz} \right\} r dz dr + \\ + 2\pi(R-H) \int_0^L q_1 u_r dz - 2\pi(R+H) \int_0^L q_2 u_r dz. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів подамо потенціальну енергію деформації в переміщеннях:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^L \int_{R-H}^{R+H} \frac{\pi}{r} \left\{ r^2 (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 r \lambda u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 r^2 \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \right. \\ + 2 r \lambda u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} + r^2 (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) u_r^2 + \mu r^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\ \left. + 2 \mu r^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu r^2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\} dz dr + \\ + 2\pi(R-H) \int_0^L q_1 u_r dz - 2\pi(R+H) \int_0^L q_2 u_r dz. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Далі при розв'язанні задач застосуємо прямокутні чотиривузлові скінченні елементи. Інтегрування для кожного елемента проведено методом квадратур Гаусса з використанням 3 точок для одновимірних інтегралів і 9 для подвійних. Отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язано методом Гаусса.

З використанням запропонованих підходів визначено НДС порожнистих циліндрів з такими параметрами: довжина  $L = 5$ , внутрішній радіус  $R - H = 3$ , зовнішній радіус  $R + H = 5$ , коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0,4$ . Модуль пружності змінюється за законом  $E(r) = ar^2 + br + c$ . Розглянуто три випадки:

1) модуль Юнга зростає:

$$E(R-H) = 11E_0/15, E(R) = E_0, E(R+H) = 81E_0/50,$$

$$a = 0,1767, b = -0,97, c = 2,053; \quad (5.14)$$

2) модуль Юнга спадає:

$$\begin{aligned} E(R - H) = 81E_0/50, E(R) = E_0, E(R + H) = 11E_0/15, \\ a = 0,1767, b = -1,857, c = 5,6; \end{aligned} \quad (5.15)$$

3) середній модуль Юнга:  $E = 1,0589E_0$ .

Нехай на внутрішню поверхню тіла діє рівномірно розподілений тиск  $q_1 = q$ . Проведено порівняння результатів розв'язання задач з використанням методу Фур'є, МСЕ та методу сплайн-колокації, коли на торцях задані граничні умови шарнірного опирання, а модуль Юнга відповідає випадку 1).

В рядах Фур'є (5.11) утримувалось  $M = 55$  членів апроксимації, при інтегруванні відрізок розбивали на 200 частин. При розв'язуванні задач методом сплайн-колокації і МСЕ внаслідок симетрії задачу розв'язували на інтервалі  $[0, L/2]$ . Тому для методу сплайн-колокації при  $z = L/2$  задано умови симетрії, відрізок інтегрування в цьому випадку розбито на 400 частин. Для використання МСЕ область була розбита на квадратні елементи розміру  $0,1 \times 0,1$ , при цьому в узлових точках, для яких  $z = 0$ , вимагалось виконання умови  $u_r = 0$ , а в точках  $z = L/2$  – умови  $u_z = 0$ .

Результати розрахунків для переміщень  $\hat{u}_z = u_z E_0/q$  при  $z = 0$  наведено в табл. 5.1, а  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$  в перерізі  $z = L/2$  – в табл. 5.2 ( $N + 1$  – кількість точок колокації) в різних точках по радіусу циліндра. При розв'язанні задачі методом скінченних елементів область розбивалась на квадрати  $0,1 \times 0,1$ .

Як видно з таблиць, результати, отримані різними методами, близькі між собою. При збільшенні точок колокації відмінності між розв'язками

Табл. 5.1 – Порівняння переміщень  $\hat{u}_z = u_z E_0/q$ , отриманих різними методами,  $z = 0$ 

$r$	Сплайн-колокація			МСЕ	Ряди Фур'є
	$N=39$	$N=49$	$N=59$		
3	3,188	3,172	3,161	3,044	3,081
4	0,6129	0,6095	0,6073	0,5958	0,5966
5	-1,337	-1,336	-1,335	-1,329	-1,331

Табл. 5.2 – Порівняння переміщень  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$ , отриманих різними методами,  $z = L/2$ 

$r$	Сплайн-колокація			МСЕ	Ряди Фур'є
	$N=40$	$N=50$	$N=60$		
3	5,612	5,606	5,602	5,578	5,58
4	4,89	4,882	4,877	4,85	4,853
5	4,054	4,047	4,042	4,017	4,02

зменшуються.

Також розв'язано задачі для даного циліндра при такому ж навантаженні у випадку жорсткого закріплення торців. На рис. 5.2 показано розподіли переміщень  $\hat{u}_z = u_z E_0/q$  в перерізі  $z = L/5$ , а на рис. 5.3 – розподіл переміщень  $\hat{u}_r = u_r E_0/q$  в перерізі  $z = L/2$ , цифри на малюнках відповідають варіантам зміни модуля пружності. Суцільні лінії – результати, отримані методом сплайн-колокації, трикутники – МСЕ (розміри циліндра такі ж як у попередній задачі). Як видно з графіків, результати для першого і другого варіантів модуля пружності відрізняються незначно, графік для третього варіанта розміщений між першим і другим. Слід відзначити, що результати, отримані МСЕ і методом сплайн-колокації для  $\hat{u}_z$ , практично збігаються, а для  $\hat{u}_r$  розбіжності більш помітні.

Далі розглянемо випадок, коли розподілений тиск діє на зовнішню поверхню циліндра (при цьому торці залишаються жорстко защемленими).

В цьому випадку  $q_2 = -q$ , а  $q_1 = 0$ .

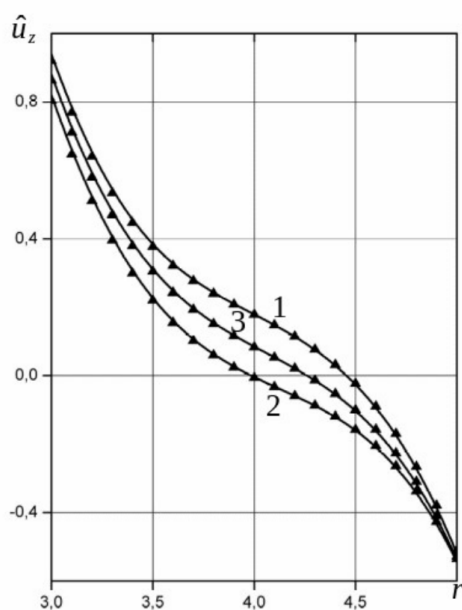


Рис. 5.2 – Залежність переміщень  $\hat{u}_z$  від характеру зміни модуля пружності при дії внутрішнього тиску  $q_1 = q$ ,  $z = L/5$

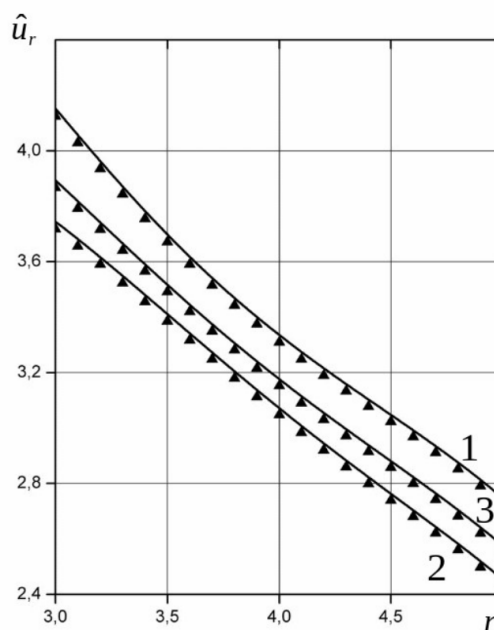


Рис. 5.3 – Залежність переміщень  $\hat{u}_r$  від характеру зміни модуля пружності при дії внутрішнього тиску  $q_1 = q$ ,  $z = L/2$

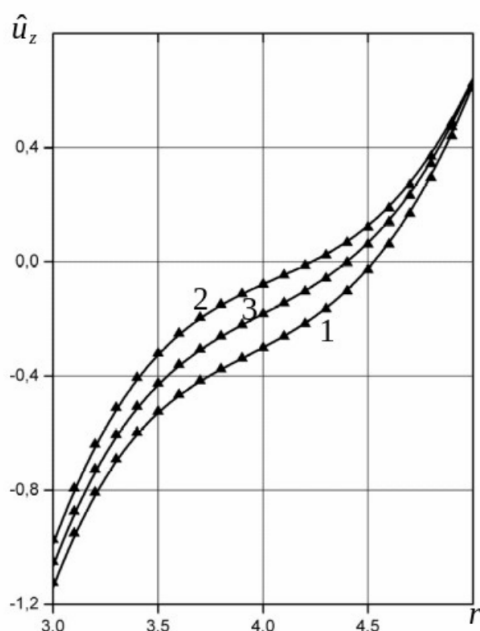


Рис. 5.4 – Залежність переміщень  $\hat{u}_z$  від характеру зміни модуля пружності при дії зовнішнього тиску  $q_2 = q$ ,  $z = L/5$

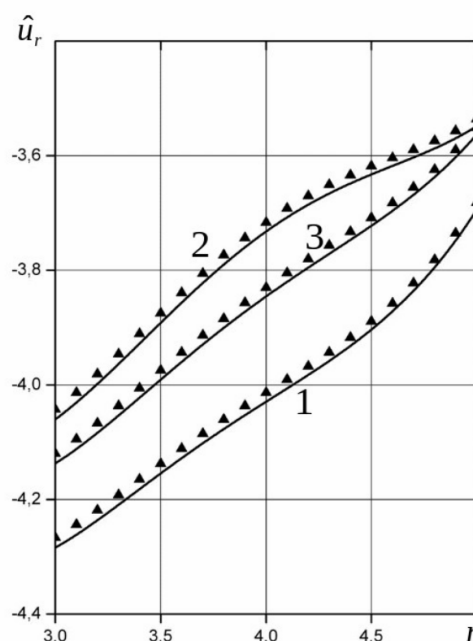


Рис. 5.5 – Залежність переміщень  $\hat{u}_r$  від характеру зміни модуля пружності при дії зовнішнього тиску  $q_2 = q$ ,  $z = L/2$



На рис. 5.4 показано розподіл переміщень  $\hat{u}_z$  в перерізі  $z = L/5$ , а на рис. 5.5 розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  в перерізі  $z = L/2$ . Позначення результатів такі ж, як і в попередньому прикладі. З графіків видно, що переміщення  $\hat{u}_z$  в даному випадку, так як і в попередньому, несуттєво залежать від зміни модуля пружності, а різниці в переміщеннях  $\hat{u}_r$  більш суттєві.

Також розглянуто випадок, коли модуль пружності  $E$  змінюється вздовж радіальної координати  $r$  за степеневим законом [196]:

$$E(r) = \frac{E_0}{1 + \alpha} \left( 1 + \alpha \left( \frac{r}{R - H} \right)^\beta \right). \quad (5.16)$$

При розрахунках було використано такі параметри: довжина циліндра –  $L = 10$ , радіус –  $R = 10$ , товщина циліндра –  $2H = 2$ , коефіцієнт Пуассона –  $\nu = 0.34$ . Кінці циліндра жорстко закріплені, а на внутрішню поверхню циліндра діє рівномірно розподілений тиск  $q$ . Задачу розв'язано методом колокації з застосуванням сплайн-апроксимації в напрямку твірної циліндра.

Залежність радіального переміщення  $\hat{u}_r = u_r E_0 / q$  і напружень в колдовому напрямку  $\hat{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / q$  від параметрів, що впливають на зміну модуля пружності (5.16), показано на рис. 5.6 – 5.9 ( $\alpha = 1$  при зміні  $\beta$ , і  $\beta = 1$  при зміні  $\alpha$ ). Переміщення та напруження в середньому перерізі циліндра при  $z = L/2$  показано для внутрішньої поверхні при  $r = R - H$  (суцільні лінії), для  $r = R - H/2$  (штрихована лінія), для  $r = R$  (пунктирна лінія), для  $r = R + H/2$  (штрих пунктирна лінія), і на зовнішній поверхні при  $r = R + H$  (штрих два пунктири лінія).

Радіальне переміщення  $\hat{u}_r$  спадає з ростом параметра  $\beta$  від -5 до 5 (рис.5.6). Різниця між переміщеннями на внутрішній і зовнішній поверхнях зменшується з ростом  $\beta$ .

З рис. 5.7 видно, що колове напруження  $\hat{\sigma}_\theta$  на внутрішній поверхні змен-

шується з ростом  $\beta$ . Напруження на зовнішній поверхні має протилежний характер. А в середній поверхні (при  $r = R$ ) суттєвої зміни напружень не спостерігається. Також для від'ємних значень  $\beta$  колові напруження на внутрішній поверхні більші, ніж на зовнішній, а для від'ємних значень  $\beta$  – навпаки.

Рис. 5.8 показує, що переміщення  $\hat{u}_r$  спадають з ростом параметра  $\alpha$  від 0 до 10. З рисунка також видно, що найбільші зміни в переміщеннях відбуваються на інтервалі  $0 \leq \alpha \leq 5$ , а в інтервалі  $5 \leq \alpha \leq 10$  переміщення змінюються незначно. Той самий ефект спостерігається і у випадку напружень (рис. 5.9). Крім того колові напруження  $\hat{\sigma}_\theta$  збільшуються на зовнішній поверхні і зменшуються на внутрішній зі збільшенням  $\alpha$ , так само як і для  $\beta$ . Також максимальні колові навантаження  $\hat{\sigma}_\theta$  переходять з внутрішньої поверхні на зовнішню зі збільшенням  $\alpha$ .

З рис. 5.10 видно як змінюються радіальні напруження  $\hat{\sigma}_r = \sigma_r/q$  з зовнішньої до внутрішньої поверхні в середньому перерізі циліндра ( $z = L/2$ ) в залежності від величини параметра  $\beta$ . На рисунку використано такі позначення: суцільна лінія –  $\beta = -10$ , штрихова –  $\beta = -5$ , пунктирна –  $\beta = 0$ , штрих-пунктирна  $\beta = 5$ , штрихова з подвійним пунктиром –  $\beta = 10$  ( $\alpha = 1$ ). Як і слід було очікувати (з граничних умов) радіальні напруження на внутрішній і зовнішній поверхнях дорівнюють  $-1$  та  $0$ , відповідно. Криві змінюються з опуклої до вгору з ростом  $\beta$ . Залежність напружень від радіуса є найближчою до прямолінійною при  $\beta = 5$ .

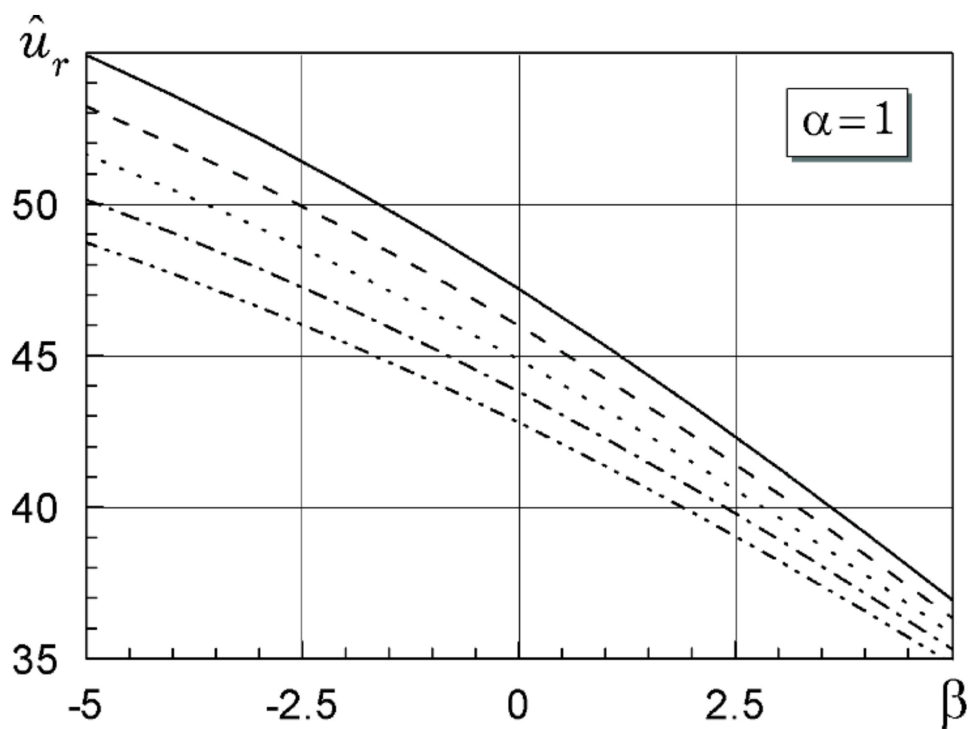


Рис. 5.6 – Залежність переміщень  $\hat{u}_r$  від параметра  $\beta$ ,  $\alpha = 1$ ,  $z = L/2$

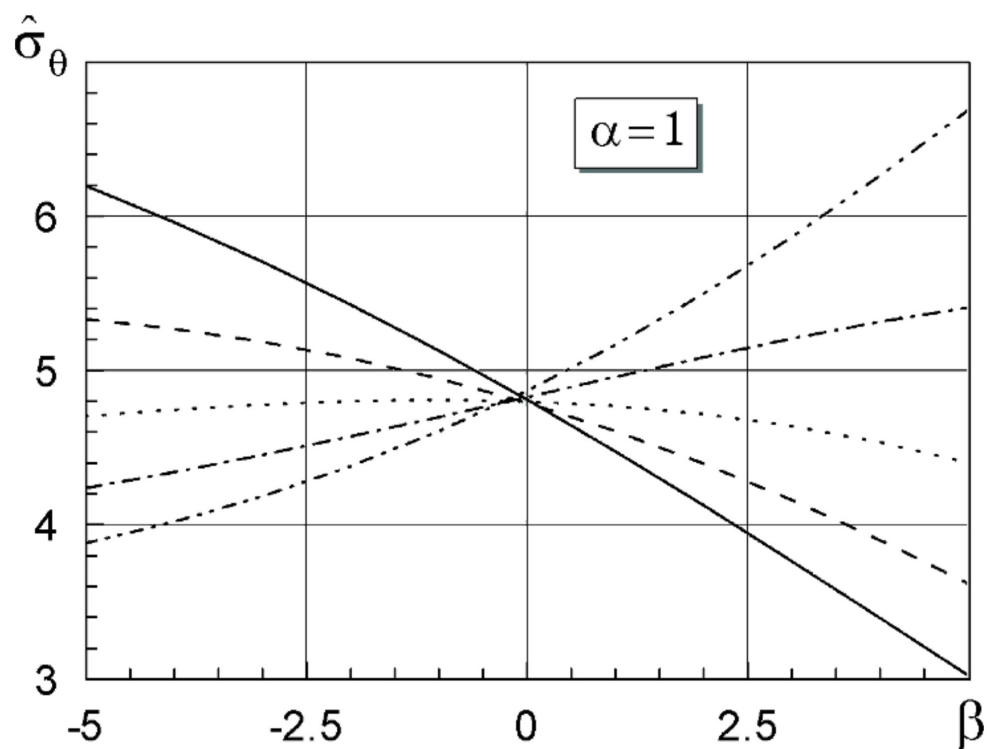


Рис. 5.7 – Залежність напружень  $\hat{\sigma}_\theta$  від параметра  $\beta$ ,  $\alpha = 1$ ,  $z = L/2$

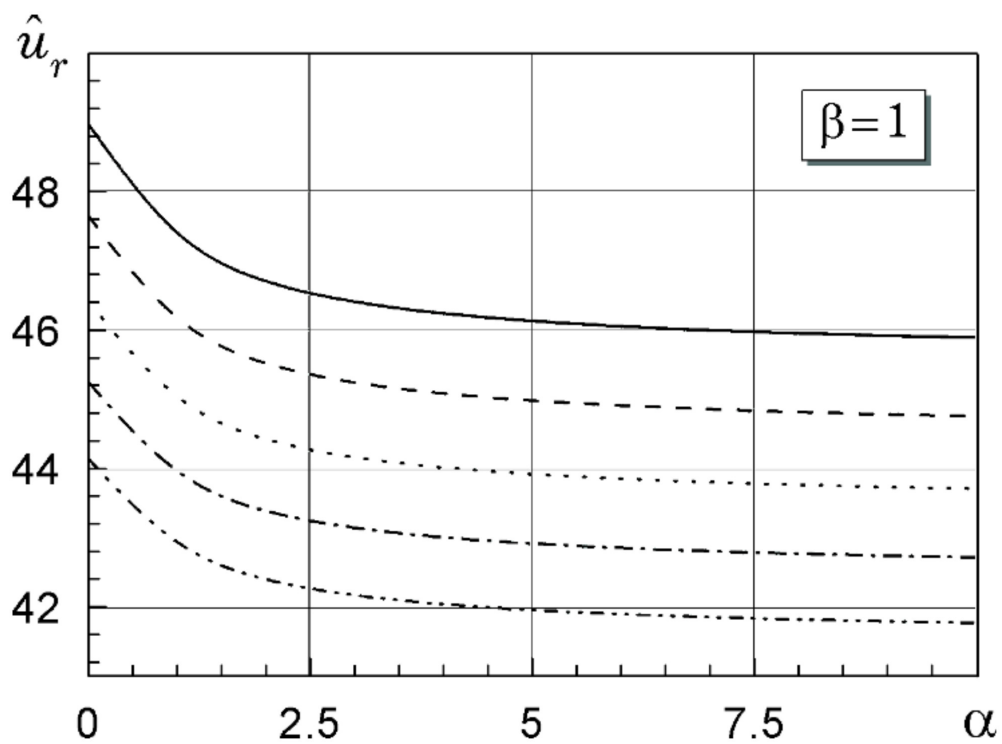


Рис. 5.8 – Залежність переміщень  $\hat{u}_r$  від параметра  $\alpha$ ,  $\beta = 1$ ,  $z = L/2$

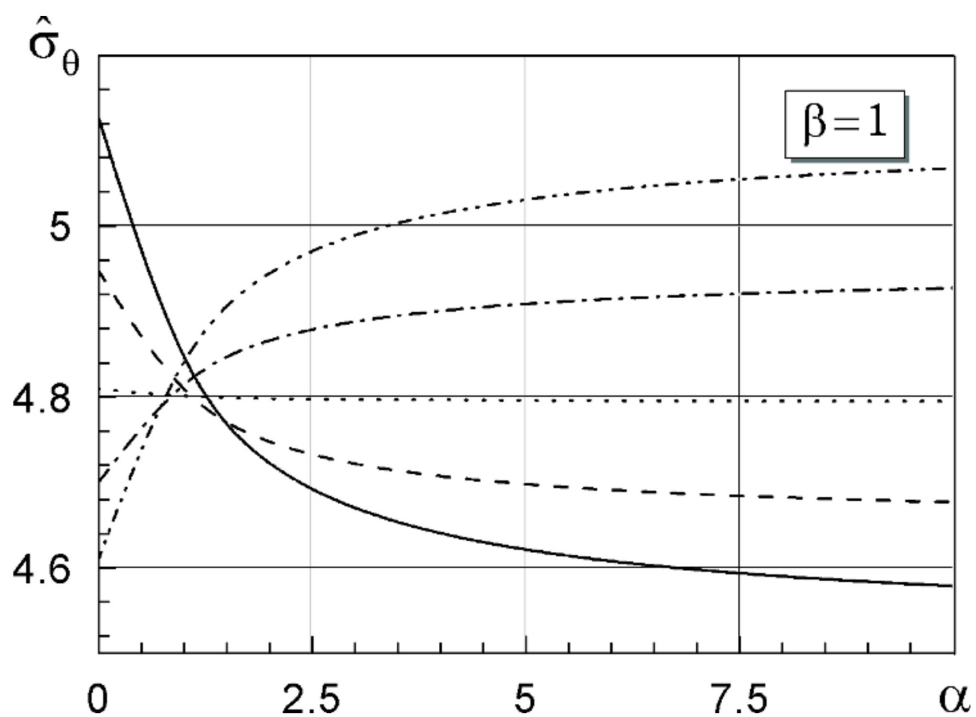


Рис. 5.9 – Залежність напружень  $\hat{\sigma}_\theta$  від параметра  $\alpha$ ,  $\beta = 1$ ,  $z = L/2$

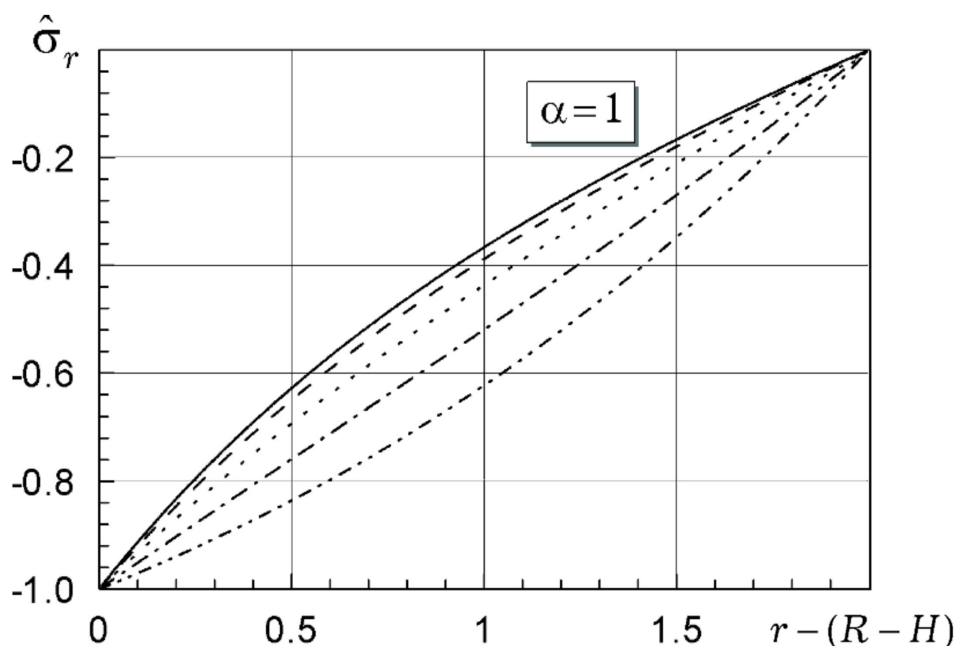


Рис. 5.10 – Розподіл напружень  $\hat{\sigma}_r$  вздовж радіуса при різних значеннях параметра  $\beta$ ,  $\alpha = 1$ ,  $z = L/2$

## 5.2 НДС неоднорідної порожнистої кулі

На основі загальних співвідношень просторової теорії пружності (2.26), (2.27), (2.28) розділу 2 далі дається постановка задачі про НДС осесиметричної неоднорідної по радіусу порожнистої кулі [201].

Співвідношення Коші в сферичних координатах  $r, \theta, \varphi$ :

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; e_\theta = \frac{1}{r}(u_r + u_\varphi \operatorname{ctg} \varphi); e_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right); \\
 2e_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right);
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

закон Гука:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_\varphi; \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_\varphi; \\
 \sigma_z &= c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_\varphi; \sigma_{r\varphi} = 2c_{55}e_{r\varphi};
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (5.19)$$

граничні умови на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі:

$$\sigma_r(R - H, \varphi) = q_1; \sigma_r(R + H, \varphi) = q_2; \sigma_{r\varphi}(R \pm H, \varphi) = 0; \quad (5.20)$$

потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned} \Pi = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi + \sigma_\theta e_\theta) + \sigma_{r\varphi} e_{r\varphi} \right\} r^2 \sin \varphi dr + \\ + 2\pi (R - H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_1 u_r \sin \varphi dz - 2\pi (R + H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_2 u_r \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Розв'язувальні рівняння НДС неоднорідної порожнистої кулі для зручності застосування методу сплайн-колокації, вибравши за невідомі функції переміщення, запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{c_{22} + c_{33} + 2c_{23} - c_{12} - c_{13} - c'_{12} r}{c_{11} r^2} u_r - \\ &- \frac{c_{55} \operatorname{ctg} \varphi}{c_{11} r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{c_{55}}{c_{11} r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2c_{11} + c'_{11} r}{c_{11} r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ &\quad \frac{(c_{55} - c_{12} + c_{22} + c_{23} - c'_{12} r) \operatorname{ctg} \varphi}{c_{11} r^2} u_\varphi + \\ &\quad + \frac{c_{33} - c_{13} + c_{23} + c_{55} - c'_{13} r}{c_{11} r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \\ &\quad - \frac{(c_{12} + c_{55}) \operatorname{ctg} \varphi}{c_{11} r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11} r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}; \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} &= \frac{(c_{22} - c_{33}) \operatorname{ctg} \varphi}{c_{55} r^2} u_r - \frac{c_{23} + c_{33} + 2c_{55} + c'_{55} r}{c_{55} r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \frac{(c_{12} - c_{13}) \operatorname{ctg} \varphi}{c_{55} r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{c_{55} + c_{13}}{c_{55} r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2c_{55} + c_{22}\operatorname{ctg}^2\varphi + c_{23} + c'_{55}r}{c_{55}r^2} u_\varphi - \\
& - \frac{c_{33}\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{c_{33}}{c_{55}r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{2c_{55} + c'_{55}r}{c_{55}r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Граничні умови в переміщеннях на поверхні  $r = R - H$  кулі:

$$\frac{c_{12} + c_{13}}{r} u_r + c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{12}\operatorname{ctg}\varphi}{r} u_\varphi + \frac{c_{13}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = q_1; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = 0.$$

Перепишемо (5.22) у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11} u_r + a_{12} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
&+ a_{15} u_\varphi + a_{16} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + a_{17} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + a_{18} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}; \\
\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} &= a_{21} u_r + a_{22} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + a_{23} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{24} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \\
&+ a_{25} u_\varphi + a_{26} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + a_{27} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + a_{28} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{c_{22} + c_{33} + 2c_{23} - c_{12} - c_{13} - c'_{12}r}{c_{11}r^2}, \\
a_{12} &= -\frac{c_{55}\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r^2}, \quad a_{13} = -\frac{c_{55}}{c_{11}r^2}, \quad a_{14} = -\frac{2c_{11} + c'_{11}r}{c_{11}r}, \\
a_{15} &= \frac{(c_{55} - c_{12} + c_{22} + c_{23} - c'_{12}r)\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r^2}, \\
a_{16} &= \frac{c_{33} - c_{13} + c_{23} + c_{55} - c'_{13}r}{c_{11}r^2}, \\
a_{17} &= -\frac{(c_{12} + c_{55})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{11}r}, \quad a_{18} = -\frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}r}, \\
a_{21} &= \frac{(c_{22} - c_{33})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r^2}, \quad a_{22} = -\frac{c_{23} + c_{33} + 2c_{55} + c'_{55}r}{c_{55}r^2}, \\
a_{23} &= \frac{(c_{12} - c_{13})\operatorname{ctg}\varphi}{c_{55}r}, \quad a_{24} = \frac{c_{55} + c_{13}}{c_{55}r},
\end{aligned}$$

$$a_{25} = + \frac{2c_{55} + c_{22}\text{ctg}^2\varphi + c_{23} + c'_{55}r}{c_{55}r^2},$$

$$a_{26} = - \frac{c_{33}\text{ctg}\varphi}{c_{55}r^2}, a_{27} = - \frac{c_{33}}{c_{55}r^2}, a_{28} = - \frac{2c_{55} + c'_{55}r}{c_{55}r}.$$

Як і у випадку циліндра, шукані функції  $u_r(r, \varphi)$ ,  $u_\varphi(r, \varphi)$  представимо у вигляді:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{i=0}^N u_{ri}(r)\phi_{ri}(\varphi), u_z = \sum_{i=0}^N u_{zi}(r)\phi_{zi}(\varphi), \quad (5.24)$$

де  $u_{ri}(r)$ ,  $u_{zi}(r)$  – невідомі функції змінної  $r$ , а  $\phi_{ri}(\varphi)$ ,  $\phi_{zi}(\varphi)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) – лінійні комбінації нормалізованих  $B$ -сплайнів третього степеня на рівномірній сітці, що враховують граничні умови при  $\varphi = \varphi_1$  і  $\varphi = \varphi_2$ . Застосувавши метод сплайн-колокації і ввівши позначення, аналогічні до попереднього підрозділу, отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r'' &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{11} * \Phi_1 + \bar{a}_{12} * \Phi_1' + \bar{a}_{13} * \Phi_1'')\bar{u}_r + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{14} * \Phi_1)\bar{u}'_r + \\ &+ \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{15} * \Phi_2 + \bar{a}_{16} * \Phi_2')\bar{u}_\varphi + \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{17} * \Phi_2 + \bar{a}_{18} * \Phi_2')\bar{u}'_\varphi, \\ \bar{u}_z'' &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{21}\Phi_1 + \bar{a}_{22}\Phi_1')\bar{u}_r + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{23} * \Phi_1 + \bar{a}_{24} * \Phi_1')\bar{u}'_r + \\ &+ \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{25} * \Phi_2 + \bar{a}_{26} * \Phi_2' + \bar{a}_{27} * \Phi_2'')\bar{u}_\varphi + \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{28} * \Phi_2)\bar{u}'_\varphi, \end{aligned} \quad (5.25)$$

Систему рівнянь (5.25) можна подати у вигляді (5.8). Ненульові блоки  $T_{ij}$  у цьому випадку:

$$\begin{aligned} T_{12} &= T_{34} = I, T_{21} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{11} * \Phi_1 + \bar{a}_{12} * \Phi_1' + \bar{a}_{13} * \Phi_1''), T_{22} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{14} * \Phi_1), \\ T_{23} &= \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{15} * \Phi_2 + \bar{a}_{16} * \Phi_2'), T_{24} = \Phi_1^{-1}(\bar{a}_{17} * \Phi_2 + \bar{a}_{18} * \Phi_2'), \\ T_{41} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{21}\Phi_1 + \bar{a}_{22}\Phi_1'), T_{42} = \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{23} * \Phi_1 + \bar{a}_{24} * \Phi_1'), \\ T_{43} &= \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{25} * \Phi_2 + \bar{a}_{26} * \Phi_2' + \bar{a}_{27} * \Phi_2''), T_{44} = \Phi_2^{-1}(\bar{a}_{28} * \Phi_2). \end{aligned}$$

Отриману одновимірну крайову задачу розв'яжемо методом дискретної ор-



тогоналізації.

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів запишемо вираз для потенціальної енергії деформації (5.21) в переміщеннях:

$$\begin{aligned}
\Pi = & 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R-H}^{R+H} \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin \varphi \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \operatorname{ctg}^2(\varphi)) u_\varphi^2 + \\
& + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
& + r \cos \varphi \lambda u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu) u_r u_\varphi + r \sin \varphi \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
& + 2r \sin \varphi \lambda u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu) u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \sin \varphi \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \\
& \left. - r \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \sin \varphi \mu u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right] d\varphi dr + \\
& + 2\pi (R - H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_1 u_r \sin \varphi dz - 2\pi (R + H)^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_2 u_r \sin \varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Для отримання матриці жорсткості скінченного елемента представимо розв'язувальні функції у вигляді:

$$u_r = u_{ri} N_i, u_\varphi = u_{\varphi i} N_i, \tag{5.27}$$

де  $u_{ri}$ ,  $u_{\varphi i}$  – шукані значення переміщень у вузлах, а  $N_i$  – функції форми, що залежать від вибраного скінченного елемента (тут і далі при наявності парних індексів знак суми не пишемо).

Підставивши (5.27) у перший підінтегральний вираз  $I_1$  (5.26), отримаємо:

$$\begin{aligned}
I_1 = & 2 \sin \varphi (\lambda + \mu) (u_{ri} N_i)^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi (\lambda + 2\mu) (u_{\varphi i} N_{\varphi i})^2 + \frac{1}{2} \sin \varphi \mu (u_{ri} N_{\varphi i})^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \operatorname{ctg}^2 \varphi) (u_{\varphi i} N_i)^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu) (u_{ri} N_{ri})^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_{ri})^2 + \cos \varphi \lambda (u_{\varphi i} N_i)(u_{\varphi i} N_{\varphi i}) + r \cos \varphi \lambda (u_{\varphi i} N_i)(u_{ri} N_{ri}) + \\
& + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{ri} N_i)(u_{\varphi i} N_i) + r \sin \varphi \lambda (u_{ri} N_{ri})(u_{\varphi i} N_{\varphi i}) + \quad (5.28) \\
& + 2 r \sin \varphi \lambda (u_{ri} N_i)(u_{ri} N_{ri}) + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{ri} N_i)(u_{\varphi i} N_{\varphi i}) + \\
& + r \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_{ri})(u_{ri} N_{\varphi i}) - r \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_i)(u_{\varphi i} N_{ri}) - \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_i)(u_{ri} N_{\varphi i}),
\end{aligned}$$

$$\text{де } N_{ri} = \frac{\partial N_i}{\partial r}; \quad N_{\varphi i} = \frac{\partial N_i}{\partial \varphi}.$$

Проваріюємо (5.28) по  $u_{rj}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}
I_{1,u_{rj}} & = 4 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{ri} N_i) N_j + \sin \varphi \mu (u_{ri} N_{\varphi i}) N_{\varphi j} + r^2 \sin \varphi (\lambda + 2\mu) \times \\
& \times (u_{ri} N_{ri}) N_{rj} + 2 r \sin \varphi \lambda (u_{ri} N_{ri}) N_j + 2 r \sin \varphi \lambda (u_{ri} N_i) N_{rj} + \quad (5.29) \\
& + r \cos \varphi \lambda (u_{\varphi i} N_i) N_{rj} + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{\varphi i} N_i) N_j + r \sin \varphi \lambda (u_{\varphi i} N_{\varphi i}) N_{rj} + \\
& + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{\varphi i} N_{\varphi i}) N_j + r \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_{ri}) N_{\varphi j} - \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_i) N_{\varphi j},
\end{aligned}$$

по  $u_{\varphi j}$  –

$$\begin{aligned}
I_{1,u_{\varphi j}} & = r \cos \varphi \lambda (u_{ri} N_{ri}) N_j + 2 \cos \varphi (\lambda + \mu)(u_{ri} N_i) N_j + r \sin \varphi \lambda (u_{ri} N_{ri}) N_{\varphi j} + \\
& + 2 \sin \varphi (\lambda + \mu)(u_{ri} N_i) N_{\varphi j} + r \sin \varphi \mu (u_{ri} N_{\varphi i}) N_{rj} - \sin \varphi \mu (u_{ri} N_{\varphi i}) N_j + \\
& + \sin \varphi (\lambda + 2\mu)(u_{\varphi i} N_{\varphi i}) N_{\varphi j} + \sin \varphi (\mu + (\lambda + 2\mu) \operatorname{ctg}^2 \varphi)(u_{\varphi i} N_i) N_j + \quad (5.30) \\
& + r^2 \sin \varphi \mu (u_{\varphi i} N_{ri}) N_{rj} + \cos \varphi \lambda ((u_{\varphi i} N_i)(N_{\varphi j}) + (u_{\varphi i} N_{\varphi i}) N_j) - \\
& - r \sin \varphi \mu ((u_{\varphi i} N_{ri}) N_j + (u_{\varphi i} N_i) N_{rj}).
\end{aligned}$$

Проінтегрувавши вирази (5.29) і (5.30) по площі скінченного елемента і записавши їх в матричному вигляді, отримаємо матрицю жорсткості елемента. Для елементів, що знаходяться на границі, потрібно враховувати також одновимірні інтеграли в (5.26), а також граничні умови на контурах  $\varphi = \text{const}$ . Склавши з матриць жорсткостей і векторів правих частин для

кожного елемента ансамблю, отримаємо систему рівнянь для визначення переміщень у всіх вузлових точках області.

За допомогою методів сплайн-колокації і методу скінченних елементів розв'язано задачі статички для куль з такими параметрами: внутрішній радіус  $R - H = 3$ , зовнішній радіус  $R + H = 5$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$ ; модуль пружності  $E(r) = ar^2 + br + c$ ,

1) модуль Юнга зростає вздовж радіуса (5.14),

2) модуль Юнга спадає – (5.15),

3) середній модуль Юнга  $E = 1,0589E_0$ .

На внутрішню поверхню діє нормально рівномірно розподілений тиск  $q$ ,  $q_1 = -q$ , а  $q_2 = 0$ .

Проведемо порівняння результатів розв'язання задач з використанням МСЕ і метода сплайн-колокації у випадку, коли на контурах  $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$  задано умови жорсткого закріплення, а модуль Юнга змінюється за варіантом 1).

На рис. 5.11 показано розподіли вздовж меридіана переміщень  $\hat{u}_r = \frac{u_r E_0}{q}$ , а на рис. 5.12 –  $\hat{u}_\varphi = \frac{u_\varphi E_0}{q}$  на різних поверхнях кулі: внутрішній 1), зовнішній 3) і серединній 2).

Так як задача симетрична по  $\varphi$  розв'язок показано на половині відрізка. Суцільні лінії – результат розрахунку методом сплайн-колокації, точки – МСЕ. При розв'язуванні методом сплайн-колокації  $N=49$ , точок інтегрування – 400. При розв'язуванні МСЕ відрізок по  $r$  було розділено на 20 частин, а по  $\varphi$  – на 60, таким чином область було розбито на 1200 «прямокутних» чотиривузлових елементів.

З рис. 5.11 видно що переміщення  $\hat{u}_r$ , отримані різними методами, відрізняються незначно, зокрема, на внутрішній поверхні кулі різниця складає біля 3%. Більш помітні розбіжності в розрахунках для  $\hat{u}_\varphi$ . Однак, ці пере-

міщення приблизно в 3 рази менші, ніж  $\hat{u}_r$ , причому на зовнішній поверхні поверхні кулі вони близькі до нуля.

При тих же граничних умовах для різних варіантів зміни модуля пружності 1), 2), 3) розв'язано задачу для несиметричної по  $\varphi$  кулі, коли

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{20}, \text{ а } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 5.13 і 5.14 наведено графіки розподілів вздовж меридіана переміщень  $\hat{u}_r$  на зовнішній і внутрішній поверхнях порожнистої кулі відповідно. Очікувано, переміщення  $\hat{u}_r$  для варіанта 1) найбільші, оскільки в зоні навантаження модуль пружності цього матеріалу нижче. Також можна відзначити, що на зовнішній поверхні кулі (рис. 5.14) можна спостерігати помітну різницю в розв'язках, отриманих різними методами. Хоч максимальні переміщення відрізняються мало, але графіки, отримані за допомогою МСЕ, помітно зсунуті вліво. Таку поведінку розв'язків можна, можливо, пояснити різними способами врахування умов жорсткого закріплення.

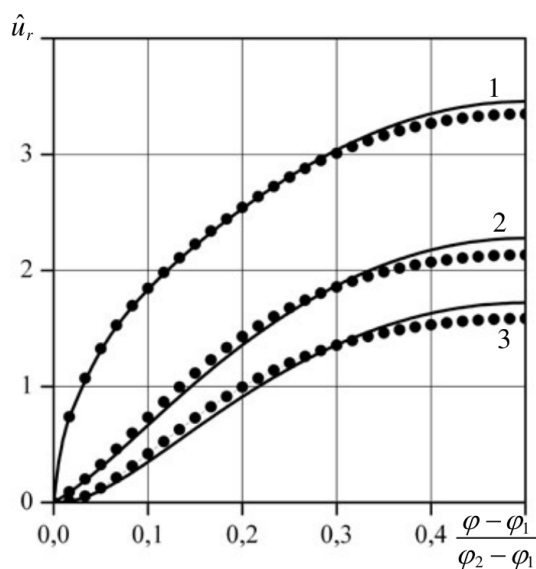


Рис. 5.11 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  на різних поверхнях кулі для зростаючого модуля пружності ( $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$ )

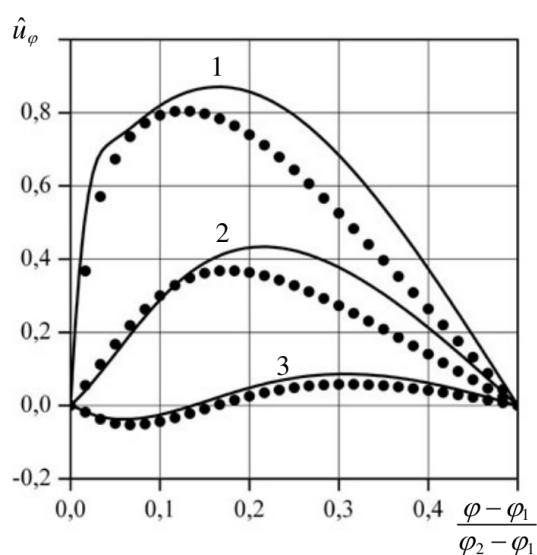


Рис. 5.12 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_\varphi$  на різних поверхнях кулі для зростаючого модуля пружності ( $\pi/6 \leq \varphi \leq 5\pi/6$ )

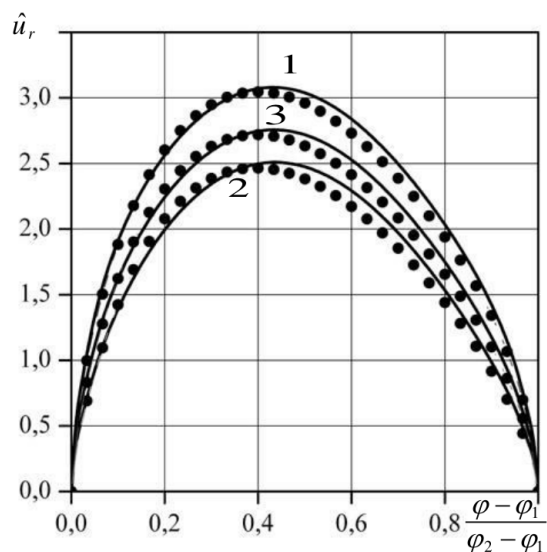


Рис. 5.13 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  на внутрішній поверхні кулі для різних варіантів модуля пружності ( $\pi/20 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

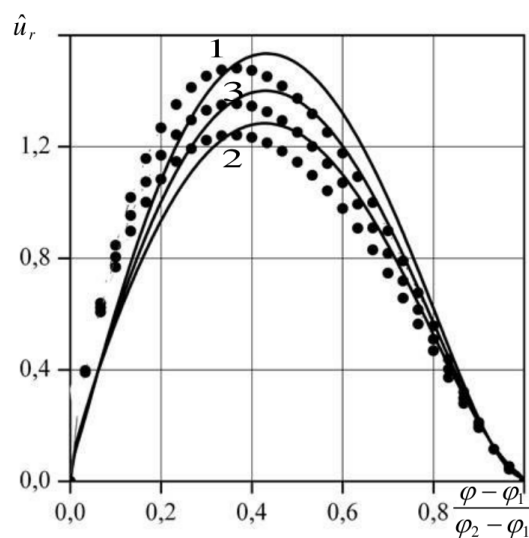


Рис. 5.14 – Розподіл переміщень  $\hat{u}_r$  на зовнішній поверхні кулі для різних варіантів модуля пружності ( $\pi/20 \leq \varphi \leq \pi/2$ )

### 5.3 Осесиметричні коливання п'єзоелектричного циліндра

У загальному випадку коливання п'єзокерамічних тіл як механічний процес описують рівняння електропружності, до яких входять механічні рівняння руху:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (5.31)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}$  тензор напружень,  $\rho$  густина матеріалу,  $\mathbf{u}$  – вектор переміщень, і рівняння Максвела:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (5.32)$$

де  $\mathbf{B}$  – вектор магнітної індукції,  $\mathbf{E}$  – напруженість електричного поля,  $\mathbf{D}$  – вектор електричної індукції,  $\mathbf{H}$  – вектор напруженості магнітного поля, а  $c$  – швидкість світла.

При низькочастотних коливаннях електромагнітне поле розділяється на електричне і магнітне, що взаємно не зв'язані. Нас цікавить тільки еле-

ктричне поле, тому запишемо рівняння Максвела в такій формі:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \quad (5.33)$$

З першого рівняння випливає, що електричне поле потенціальне, отже

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (5.34)$$

де  $\varphi$  – електростатичний потенціал. Ці рівняння також відомі як квазістатична апроксимація рівнянь Максвела. Отже, система рівнянь, що описує коливання п'єзокерамічного тіла має вигляд:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (5.35)$$

В циліндричній системі координат  $Or\theta z$  осесиметричні коливання п'єзокерамічних циліндрів описують рівняння руху [193]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z = 0; \quad (5.36)$$

співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (5.37)$$

електростатичні рівняння:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (5.38)$$

де  $D_r, D_z$  – компоненти вектора електричної індукції  $\mathbf{D}$ ,  $E_r, E_z$  – компоненти вектора напруженості електричного поля  $\mathbf{E}$ .

Фізичні співвідношення для п'єзокерамічного матеріалу, поляризовано-

го в радіальному напрямку:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - e_{33}E_r, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r, \\
\sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_r, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z; \\
D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{33}E_r, \quad D_z = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_z.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

В (5.39)  $c_{ij}$  — компоненти тензора модулів пружності;  $e_{ij}$  — компоненти тензора п'єзомодулів;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненти тензора діелектричної проникності матеріалу.

У варіаційній постановці коливання циліндра описуються функціоналом:

$$J = \pi \int_0^L \int_{r_0}^{r_1} (\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho\omega^2(u_r^2 + u_z^2)) r dz dr, \tag{5.40}$$

де  $L$ ,  $r_0$  і  $r_1$  — довжина та внутрішній і зовнішній радіуси циліндра.

Торці циліндра  $z = 0$  і  $z = L$  жорстко зацемлені:  $u_r = u_z = 0$ , і покриті тонкими закороченими електродами,  $\varphi = 0$ . Бічні поверхні  $r = r_0$  и  $r = r_1$  вільні:  $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ , на них задано різницю потенціалів  $\varphi = V_0 z$ .

Для зручності використання методу сплайн-колокації розв'язувальну систему подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= -\frac{c_{33}\varepsilon_{11} + e_{15}e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{e_{13}e_{33} - c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}^2}{r\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\
&+ \frac{(c_{11}e_{33} - \rho\omega^2 r^2 e_{33})u_r}{r^2 \Delta} + \frac{c_{33}e_{15} - c_{55}e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{c_{33}e_{13}}{r\Delta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
&+ \frac{c_{12}e_{33} - c_{13}e_{33} + c_{33}e_{13}}{r\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{33}e_{13} + c_{33}e_{15} - c_{13}e_{33} - c_{55}e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \\
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{e_{33}\varepsilon_{11} - e_{15}\varepsilon_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_{33}e_{13}}{r\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \\
&- \frac{(\varepsilon_{33}\rho\omega^2 r^2 - \varepsilon_{33}c_{11})u_r}{r^2 \Delta} - \frac{\varepsilon_{33}c_{55} + e_{15}e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{c_{33}\varepsilon_{33} + e_{13}e_{33} + e_{33}^2}{r\Delta} \frac{\partial u_r}{\partial r} +
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon_{33} c_{12} - \varepsilon_{33} c_{13} - e_{13} e_{33}}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\varepsilon_{33} c_{13} + \varepsilon_{33} c_{55} + e_{13} e_{33} + e_{15} e_{33}}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r}; \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} & = - \frac{e_{15}}{c_{55} r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e_{15} + e_{13}}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial r} - \left( \frac{c_{12}}{c_{55}} + 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\
& - \left( 1 + \frac{c_{13}}{c_{55}} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} - \frac{\rho \omega^2 u_z}{c_{55}} - \frac{c_{11}}{c_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r},
\end{aligned}$$

де  $\Delta = c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2$ .

Розв'язок представимо таким чином:

$$\begin{aligned}
\varphi(r, z) & = \sum_{i=0}^N \varphi_i(r) \phi_{1i}(z); \quad u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{ri}(r) \phi_{2i}(z); \\
u_z(r, z) & = \sum_{i=0}^N u_{zi}(r) \phi_{3i}(z),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

де  $\varphi_i(r)$ ,  $u_{ri}(r)$ ,  $u_{zi}(r)$  – невідомі функції, а  $\phi_{ji}(z)$  – лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня. Підставивши (5.42) в (5.41) і в граничні умови будемо вимагати їх виконання в точках колокації  $z_k$ . В результаті для частот отримаємо одновимірну крайову задачу, яку можна розв'язати методом дискретної ортогоналізації. Далі методом покрокового пошуку, тобто зміною з деяким кроком значення частоти  $\omega$ , знайдемо ті частоти, для яких спостерігається резонанс в переміщеннях.

Для застосування методу скінченних елементів запишемо функціонал варіаційної постановки задачі з невідомими переміщеннями  $u_r(r, z)$ ,  $u_z(r, z)$  та електростатичним потенціалом  $\varphi(r, z)$ :

$$\begin{aligned}
J & = \pi \int_0^L \int_{r_0}^{r_1} \left\{ c_{33} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + c_{11} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + c_{55} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - \right. \\
& - \varepsilon_{33} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon_{11} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + c_{11} \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2c_{13} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2c_{12} \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\
& \left. + 2e_{13} \frac{u_r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\}
\end{aligned} \tag{5.43}$$



$$+2e_{15} \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2c_{55} \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) \Big\} r dr dz.$$

При розв'язанні використані чотиривузлові прямокутні елементи, тому розв'язок подамо у вигляді :

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \varphi_i N_i; \quad u_r = \sum_{i=1}^4 u_{ri} N_i; \quad u_z = \sum_{i=1}^4 u_{zi} N_i, \quad (5.44)$$

де  $\varphi_i$ ,  $u_{ri}$ ,  $u_{zi}$  – значення невідомих функцій в узлах скінченного елемента,  $N_i$  – функції форми.

Підставивши (5.44) в (5.43) і використовуючи умову  $\delta J = 0$  можна отримати систему для елемента площі  $S_k$ :

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_{S_k} \left\{ c_{33} r (u_{ri} N_{ri}) N_{rj} + c_{55} r (u_{ri} N_{zi}) N_{zj} + \left( \frac{c_{11}}{r} - r \rho \omega^2 \right) (u_{ri} N_i) N_j \right. \\ & \quad + c_{13} ((u_{ri} N_{ri}) N_j + (u_{ri} N_i) N_{rj}) + c_{12} (u_{zi} N_{zi}) N_j + c_{55} r (u_{zi} N_{ri}) N_{zj} + \\ & \quad \left. + c_{13} r (u_{zi} N_{zi}) N_{rj} + e_{33} r (\varphi_i N_{ri}) N_{rj} + e_{15} r (\varphi_i N_{zi}) N_{zj} + e_{13} (\varphi_i N_{ri}) N_j \right\} dr dz = 0; \\ & 2\pi \iint_{S_k} \left\{ c_{12} (u_{ri} N_i) N_{zj} + c_{13} r (u_{ri} N_{ri}) N_{zj} + c_{55} r (u_{ri} N_{zi}) N_{rj} + c_{11} r (u_{zi} N_{zi}) N_{zj} + \right. \\ & \quad \left. + c_{55} r (u_{zi} N_{ri}) N_{rj} - r \rho \omega^2 (u_{zi} N_i) N_j + e_{13} r (\varphi_i N_{ri}) N_{zj} + e_{15} r (\varphi_i N_{zi}) N_{rj} \right\} dr dz = 0; \\ & 2\pi \iint_{S_k} \left\{ 2e_{13} (u_{ri} N_i) N_{rj} + e_{33} r (u_{ri} N_{ri}) N_{rj} + e_{15} r (u_{ri} N_{zi}) N_{zj} + e_{13} r (u_{zi} N_{zi}) N_{rj} + \right. \\ & \quad \left. + e_{15} r (u_{zi} N_{ri}) N_{zj} - \varepsilon_{33} r (\varphi_i N_{ri}) N_{rj} - \varepsilon_{11} r (\varphi_i N_{zi}) N_{zj} \right\} dr dz = 0; \end{aligned} \quad (5.45)$$

В (5.45) проводиться сумування по парних індексах, наприклад,  $u_i N_i = \sum_{i=1}^4 u_i N_i$ . Також введено позначення:  $N_{ri} = \frac{\partial N_i}{\partial r}$ ,  $N_{zi} = \frac{\partial N_i}{\partial z}$ .

Інтегрування в (5.45) проведено методом квадратур Гаусса у 9 точках. Розрахунки було проведено при таких параметрах циліндра з п'єзокераміки PZT-4:

$$r_0 = 3\text{см}, \quad r_1 = 5\text{см}, \quad L = 10\text{см}, \quad \rho = 7,5 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2,$$

Табл. 5.3 – Резонансні частоти, отримані МСК і методом сплайн-колокації

$\Omega$	МСК			МСЕ		
	$N = 15$	$N = 19$	$N = 23$	$K = 500$	$K = 2000$	$K = 8000$
$\Omega_1$	0.8	0.802	0.803	0.807	0.806	0.806
$\Omega_2$	0.875	0.879	0.881	0.891	0.889	0.888
$\Omega_3$	1.062	1.065	1.066	1.076	1.074	1.073
$\Omega_4$	1.431	1.428	1.428	1.441	1.436	1.434
$\Omega_5$	1.841	1.846	1.849	1.866	1.862	1.861
$\Omega_6$	1.999	1.99	1.988	2.002	1.992	1.989

$c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  
 $c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $e_{13} = -5,2 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{15} = 12,7 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{33} = 15,1$   
 $\text{Кл/м}^2$ ,  $\varepsilon_{11} = 730\varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_{33} = 635\varepsilon_0$ ,  $V_0 = 1 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_0$  – діелектрична проникність  
вакууму.

Було використано такі безрозмірні величини:  $\tilde{r} = r/h$ ,  $\tilde{z} = z/h$ ,  
 $\tilde{u}_r = u_r/h$ ,  $\tilde{u}_z = u_z/h$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi\sqrt{\varepsilon_0}/(h\sqrt{\lambda})$ ,  $\Omega = \omega h\sqrt{\rho/\lambda}$ ,  $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}/\lambda$ ,  
 $\tilde{e}_{ij} = e_{ij}/\sqrt{\varepsilon_0\lambda}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_0$ , де  $\lambda = 10^{10} \text{Н/м}^2$ ,  $h = (r_1 - r_0)/2$ .

Результати, отримані різними методами, наведено в табл. 5.3 для 6-ти  
нижчих резонансних частот циліндра ( $K$  – кількість елементів в МСЕ,  
на які була розбита область,  $N + 1$  – відповідає кількості апроксимуючих  
членів в методі сплайн-колокації. Як видно з таблиці, наведені результати  
по МСК і МСЕ відрізняються між собою в межах 0,1%.

#### 5.4 Результати та висновки

1. Дано постановки і нові розв'язки задач статки для неоднорідних тіл  
циліндричної і сферичної форми зі змінними за радіальною координа-  
тою фізико-механічними характеристиками матеріалу.
2. Проведено порівняльний аналіз результатів, одержаних на основі рі-

зних методів: методу відокремлення змінних за Фур'є, МСЕ та запропонованим чисельно-аналітичним підходом на основі методу сплайн-колокації з використанням двовимірних сплайнів у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Показана незначна відмінність результатів, одержаних за методами, що порівнюються (у межах 0,5%).

3. Досліджено вплив неоднорідності матеріалу на розподіл полів переміщень в цих тілах. Показано, що картина НДС може якісно змінюватись зі зміною пружних властивостей матеріалу.
4. Наведено основні співвідношення задачі про коливання порожнистого циліндра з п'єзокерамічного матеріалу.
5. Одержано розв'язки задачі по визначенню резонансних частот, що отримані на основі застосування методу сплайн-колокацій в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації і методу скінченних елементів. Для наведених шести перших резонансних частот відмічена високий ступінь їх співпадіння (у межах 0,1%), що свідчить про достовірність одержаних результатів.

Таким чином, в розділі дається обґрунтування підходу, оснований на поєднанні методів сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації, до чисельного розв'язання в просторовій постановці двох основних задач стаціонарного деформування – задачі про НДС та задачі про коливання. Обґрунтування базується на порівнянні одержаних за цим підходом результатів з результатами на основі методу Фур'є та методу скінченних елементів. Близькі за значенням порівнювальні розв'язки ряду просторових задач дозволяють рекомендувати розроблений підхід як еталонний при оцінці допустимості застосування наближених оболонкових моделей для елементів складної за товщиною неоднорідної структури.

## Розділ 6

### НДС КРУГОВОГО І ЕЛІПТИЧНОГО ЦИЛІНДРА В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Цей розділ є продовженням розділу 5 в плані розширення і ускладнення розглянутих там задач. Тут, на відміну від двовимірних задач статички для осесиметричних тіл обертання попереднього розділу, об'єктом дослідження є НДС, що описується суто тривимірними задачами теорії пружності неоднорідного тіла.

Розглянуто два класи пружних об'єктів: неоднорідні кругові порожнисті циліндри та циліндри з еліптичним поперечним перерізом.

Для кругових неоднорідних циліндрів (підрозділ 6.1) задача статички представлена диференціальною і варіаційною постановками. Для її розв'язання в диференційній постановці побудовано чисельно-аналітичний підхід з використанням методу колокації з двовимірними сплайн-функціями в коловому і осьовому напрямках.

Одержані при цьому одновимірні лінійні крайові задачі розв'язуються, як зазвичай, методом дискретної ортогоналізації.

Для розв'язання задачі в варіаційній постановці застосовано метод скінченних елементів. Проведено порівняння результатів за цими двома підходами і результатів роботи [237], що свідчить про достатньо високу точність одержаних розв'язків.

Для просторового циліндра з еліптичним поперечним перерізом (підрозділ 6.2) дана варіаційна постановка задачі за принципом стаціонарності

потенціальної енергії деформації. Поперечний переріз циліндра, що описаний в еліптичній системі координат, обіймає область, обмежену кофокальними еліпсами. Стаціонарне значення відповідного функціонала визначається за МСЕ, а одержана система алгебраїчних рівнянь стрічкової структури розв'язується методом Гаусса.

## 6.1 НДС неоднорідного кругового циліндра

Розглянемо порожнистий ортотропний циліндр з внутрішнім радіусом  $R-H$  і зовнішнім радіусом  $R+H$  ( $R$  – радіус серединної поверхні,  $2H$  – товщина циліндра) і довжиною  $L$  в циліндричній системі координат  $Or\theta z$  [204].

Рівняння тривимірної теорії пружності в цьому випадку мають вигляд: співвідношення Коші:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad e_\theta = \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\ 2e_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right); \quad 2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (6.1)$$

закон Гука для ортотропного тіла:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{11}e_r + c_{12}e_\theta + c_{13}e_z; \quad \sigma_\theta = c_{12}e_r + c_{22}e_\theta + c_{23}e_z; \\ \sigma_z &= c_{13}e_r + c_{23}e_\theta + c_{33}e_z; \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{44}e_{r\theta}; \\ \sigma_{rz} &= 2c_{55}e_{rz}; \quad \sigma_{\theta z} = 2c_{66}e_{\theta z}; \end{aligned} \quad (6.2)$$

(для ізотропного тіла  $c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ;  $c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda$ ;  $c_{44} = \mu$ ;  $c_{55} = \mu$ ;  $c_{66} = \mu$ );

рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (6.3)$$

граничні умови на бічних поверхнях:  $\sigma_r|_{r=R-H} = q_1$ ;  $\sigma_r|_{r=R+H} = q_2$ ;

$\sigma_{rz}|_{r=R\pm H} = 0$ ;  $\sigma_{\theta z}|_{r=R\pm H} = 0$ ;

на торцях  $z = const$ :

- жорстке закріплення:  $u_r = 0$ ;  $u_{\theta} = 0$ ;  $u_z = 0$ ;

- умови симетрії:  $\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$ ;  $\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} = 0$ ,  $u_z = 0$ ;

на площинах  $\theta = 0$  і  $\theta = \theta_e$  - умови симетрії або жорсткого закріплення;

потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^L \int_0^{\theta_e} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_z e_z + \sigma_{\theta} e_{\theta}) + \sigma_{r\theta} e_{rz} + \sigma_{rz} e_{rz} + \sigma_{\theta z} e_{\theta z} \right\} r dz d\theta dr + \\ + (R-H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_1 u_r dz d\theta - (R+H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_2 u_r dz d\theta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Розв'язувальні рівняння для зручності застосування методу сплайн-колокації:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11} u_r + a_{12} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + a_{13} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \\ &+ a_{16} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r \partial \theta} + a_{17} \frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{18} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{21} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + a_{22} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + a_{23} u_{\theta} + a_{24} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial \theta^2} + \\ &+ a_{25} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z^2} + a_{26} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + a_{27} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= a_{31} \frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{32} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + a_{33} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial \theta \partial z} + a_{34} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + a_{35} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{36} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

де  $a_{ij}$  - змінні коефіцієнти, що визначаються геометричними параметрами

та пружними властивостями матеріалу тіла.

Граничні умови в переміщеннях на бічній поверхні  $r = R - H$ :

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{12}}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= q_1, \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для розв'язання задачі (6.5), (6.6) будемо використовувати дві системи сплайн-функцій – за радіальною координатою і за твірною.

Шуканий розв'язок подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{rij}(r) \phi_i^{(r)}(\theta) \psi_j^{(r)}(z), \\ u_\theta &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{\theta ij}(r) \phi_i^{(\theta)}(\theta) \psi_j^{(\theta)}(z), \\ u_z &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N u_{zij}(r) \phi_i^{(z)}(\theta) \psi_j^{(z)}(z). \end{aligned} \quad (6.7)$$

де  $u_{rij}(r)$ ,  $u_{\theta ij}(r)$ ,  $w_{ij}(r)$  – невідомі функції, а функції  $\varphi_i^{(\alpha)}(\theta)$ ,  $\psi_j^{(\alpha)}(z)$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) визначаються через лінійні комбінації  $B$ -сплайнів на рівномірних сітках  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = \theta_e$  і  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_M = L$  відповідно з урахуванням граничних умов при  $z = 0$ ,  $z = L$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \theta_e$ .

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \Phi^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)} &= \phi_m^{(\alpha)}(\xi_i) \psi_n^{(\alpha)}(\zeta_j), \\ \Phi_\theta^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)\theta} &= \left( \phi_m^{(\alpha)} \right)'(\xi_i) \psi_n^{(\alpha)}(\zeta_j), \\ \Phi_z^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)z} &= \phi_m^{(\alpha)}(\xi_i) \left( \psi_n^{(\alpha)} \right)'(\zeta_j), \\ \Phi_{\theta\theta}^{(\alpha)}: \varphi_{i(N+1)+j, m(N+1)+n}^{(\alpha)\theta\theta} &= \left( \phi_m^{(\alpha)} \right)''(\xi_i) \psi_n^{(\alpha)}(\zeta_j) \end{aligned}$$

і т. д. ( $i, m = 0, \dots, M$ ;  $j, n = 0, \dots, N$ ),

$$\bar{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1}, \dots, u_{r,(M+1)(N+1)}\}^T, \quad \bar{u}_\theta = \{u_{\theta0}, u_{\theta1}, \dots, u_{\theta,(M+1)(N+1)}\}^T,$$

$$\bar{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \dots, u_{z,(M+1)(N+1)}\}^T.$$

Тоді розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_r}{dr} &= \bar{u}'_r, \quad \frac{d\bar{u}_\theta}{dr} = \bar{u}'_\theta, \quad \frac{d\bar{u}_z}{dr} = \bar{u}'_z, \\ \frac{d\bar{u}'_r}{dr} &= \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} (a_{11}\Phi^{(r)} + a_{12}\Phi_{\theta\theta}^{(r)} + a_{13}\Phi_{zz}^{(r)})\bar{u}_r + a_{14}\bar{u}'_r + a_{15} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_\theta \bar{u}_\theta + \\ &\quad + a_{16} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_\theta \bar{u}'_\theta + a_{17} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_z \bar{u}_z + a_{18} \left(\Phi^{(r)}\right)^{-1} \Phi_z \bar{u}'_z, \\ \frac{d\bar{u}'_\theta}{dr} &= a_{21} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_\theta^{(r)} \bar{u}_r + a_{22} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_\theta^{(r)} \bar{u}'_r + \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} (a_{23}\Phi^{(\theta)} + \\ &\quad + a_{24}\Phi_{\theta\theta}^{(\theta)} + a_{25}\Phi_{zz}^{(\theta)})\bar{u}_\theta + a_{26}\bar{u}'_\theta + \bar{a}_{27} \left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1} \Phi_{\theta z}^{(z)} \bar{u}_z, \\ \frac{d\bar{u}'_z}{dr} &= a_{31} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_z^{(r)} \bar{u}_r + a_{32} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_z^{(r)} \bar{u}'_r + a_{33} \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} \Phi_{\theta z}^{(\theta)} \bar{u}_\theta + \\ &\quad + \left(\Phi^{(z)}\right)^{-1} (a_{34}\Phi_{\theta\theta}^{(z)} + a_{35}\Phi_{zz}^{(z)})\bar{u}_z + a_{36}\bar{u}'_z, \end{aligned} \quad (6.8)$$

а граничні умови на бічній поверхні  $r = R - H$  для одновимірної задачі запишемо так:

$$\begin{aligned} c_{11}\Phi^{(r)}\bar{u}'_r + \frac{c_{12}}{r} \left(\Phi^{(r)}\bar{u}_r + \Phi^{(\theta)}\bar{u}_\theta\right) + c_{13}\Phi_z^{(z)}u_z &= \bar{q}_1, \\ \frac{1}{r} \left(\Phi_\theta^{(r)}\bar{u}_r - \Phi^{(\theta)}\bar{u}_\theta\right) + \Phi^{(\theta)}\bar{u}'_\theta &= 0, \quad \Phi_z^{(r)}\bar{u}_r + \Phi^{(z)}\bar{u}'_z = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким чином, вихідна тривимірна задача про НДС неоднорідного кругового циліндра методом сплайн-колокацій з апроксимацією сплайн-функціями за змінними  $z$  і  $\theta$  звелась до одновимірної лінійної крайової задачі (6.8), (6.9).

Ця задача, як і в попередніх розділах, розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації.

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів запишемо потен-



ціальну енергію деформації (6.4) у переміщеннях:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_0^L \int_0^{\theta_e} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{c_{11}r}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{c_{22}}{2r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{c_{33}r}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{c_{44}}{2r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{c_{44}r}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{c_{55}r}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_{55}r}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \\
& + \frac{c_{66}r}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_{66}}{2r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2 + c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + c_{12} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{22} u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
& + c_{23} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{23} u_r \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{44} u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + c_{44} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - c_{44} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \\
& + c_{13} r \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22} u_r^2}{2r} + \frac{c_{44} u_\theta^2}{2r} + c_{55} r \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} + c_{66} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \left. \right\} dz d\theta dr + \\
& + (R-H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_1 u_r dz d\theta - (R+H) \int_0^L \int_0^{\theta_e} q_2 u_r dz d\theta.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Шукані функції запишемо у вигляді:

$$u_r = \sum_{i=1}^n u_{ri} N_i; \quad u_\theta = \sum_{i=1}^n u_{\theta i} N_i; \quad u_z = \sum_{i=1}^n u_{zi} N_i, \tag{6.11}$$

де  $n$  – кількість вузлів скінченного елемента.

Використавши умову стаціонарності функціоналу  $\delta\Pi = 0$ , систему рівнянь для визначення вузлових переміщень в елементі, що має об'єм  $V$  і з площею грані  $S$ , на яку діє навантаження, буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V [c_{11} r (u_{ri} N_{ri}) N_{rj} + \frac{c_{44}}{r} (u_{ri} N_{\theta i}) N_{\theta j} + c_{55} r (u_{ri} N_{zi}) N_{zj} + \\
& + c_{12} (u_{\theta i} N_{\theta i}) N_{rj} + c_{12} ((u_{ri} N_{ri}) N_j + (u_{ri} N_i) N_{rj}) + \frac{c_{22}}{r} (u_{\theta i} N_{\theta i}) N_j + \\
& + c_{23} r (u_{zi} N_{zi}) N_j - \frac{c_{44}}{r} (u_{\theta i} N_i) N_{\theta j} + c_{44} ((u_{\theta i} N_{ri}) N_{\theta j} + c_{13} r (u_{zi} N_{zi}) N_{rj} + \\
& + \frac{c_{22}}{r} (u_{ri} N_i) N_j + c_{55} r (u_{zi} N_{ri}) N_{zj}] dz d\theta dr = -(R-H) \iint_S q_1 N_j dz d\theta \\
& \iiint_V \left[ \frac{c_{22}}{r} (u_{\theta i} N_{\theta i}) N_{\theta j} + c_{44} r (u_{\theta i} N_{ri}) N_{rj} + c_{66} r (u_{\theta i} N_{zi}) N_{zj} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_{12}(u_{ri}N_{ri})N_{\theta j} + \frac{c_{22}}{r}(u_{ri}N_i)N_{\theta j} + c_{23}r(u_{zi}N_{zi})N_{\theta j} \\
& - \frac{c_{44}}{r}(u_{ri}N_{\theta i})N_j + c_{44}(u_{ri}N_{\theta i})N_{rj} - c_{44}((u_{\theta i}N_{ri})N_j + (u_{\theta i}N_i)N_{rj}) \\
& \quad + \frac{c_{44}}{r}(u_{\theta i}N_i)N_j + c_{66}(u_{zi}N_{\theta i})N_{zj}] dzd\theta dr = 0; \\
& \iiint_V [c_{33}r(u_{zi}N_{zi})N_{zj} + c_{55}r(u_{zi}N_{ri})N_{rj} + \frac{c_{66}}{r}(u_{zi}N_{\theta i})N_{\theta j} + \\
& \quad + c_{23}(u_{\theta i}N_{\theta i})N_{zj} + c_{23}(u_{ri}N_i)N_{zj} + c_{13}r(u_{ri}N_{ri})N_{zj} + \\
& \quad + c_{55}r(u_{ri}N_{zi})N_{rj} + c_{66}(u_{\theta i}N_{zi})N_{\theta j}] dzd\theta dr = 0,
\end{aligned}$$

В (6.1) припускається сумування по парних індексах. Далі при розрахунках були використані восьмивузлові і двадцятивузлові елементи в вигляді паралелепіпедів. Інтеграли в (6.1) обчислюються методом Гаусса (тривимірні в 27 точках, а двовимірні в 9). Отримана після ансамблювання всіх елементів система стрічкової структури для сукупності всіх елементів розв'язана методом Гаусса.

Спочатку проведемо порівняння результатів, отриманих за викладеними методиками, з результатами, отриманими в статті [237] для замкнутого ізотропного циліндра з розмірами  $L = 20$ ,  $R = 10$ ,  $H = 2,5$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Торці  $z = 0$  і  $z = L$  закріплені жорстко, на внутрішню поверхню циліндра діє тиск  $q_1 = q_0 \cos(k\theta)$ .

Оскільки задача симетрична, вона була розв'язана на відрізках  $0 \leq z \leq L/2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (при  $k = 0, 1$ ),  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  (при  $k = 2$ ).

У таблиці 6.1 наведено значення переміщення  $u_r E/q_0$  при  $z = L/2$ ,  $r = 7,5$ ,  $\theta = 0$ , отримані методами сплайн-колокації при різному числі точок колокації (відрізок інтегрування при цьому був розбитий на 100 частин) і методом скінченних елементів (8 вузлів) при різній кількості елементів (елементи отримані розподілом відрізків по  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  на одне і то ж число, отже кількість елементів  $K_e$  дорівнювала  $10^3$ ,  $15^3$ ,  $20^3$ ).

Як видно з таблиці, різниця в результатах, отриманих різними метода-

Табл. 6.1 – Порівняння розв’язків для замкнутого циліндра

$k$	$u_r E/q_0$			
	Метод сплайн-колокації (МСЕ)			
	$M = 11, N = 9$ ( $Ke = 10^3$ )	$M = N = 11$ ( $Ke = 15^3$ )	$M = 11, N = 13$ ( $Ke = 20^3$ )	[237]
0	16,244 (16,014)	16,199 (16,050)	16,172 (16,065)	16,2
1	23,716 (23,174)	23,617 (23,267)	23,557 (23,305)	23,9
2	23,199 (22,255)	23,106 (22,579)	23,050 (22,7)	23,1

ми, становить не більше 2 %.

За допомогою викладених підходів визначимо напружено-деформований стан незамкнутих циліндрів з тими ж лінійними розмірами з жорстко закріпленими торцями і краями  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  при рівномірно розподіленому тиску  $q_1 = q_0$ . У цьому випадку коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,4$ , а модуль пружності змінюється за законом  $E(r) = ar^2 + br + c$ . Розглядали такі випадки:

1) спадаючий модуль Юнга ( $E(R-H) = 2E_0$ ,  $E(R) = E_0$ ,  $E(R+H) = 0,5E_0$ ,  $a = 0,04$ ,  $b = -1,1$ ,  $c = 8$ );

2) зростаючий модуль Юнга ( $E(R-H) = 0,5E_0$ ,  $E(R) = E_0$ ,  $E(R+H) = 2E_0$ ,  $a = 0,04$ ,  $b = -0,5$ ,  $c = 2$ ).

З міркувань симетрії задача розв’язана в області  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq z \leq L/2$ .

На рис. 6.1 – 6.2 показано розподіли переміщень  $u_r$  при  $\theta = \pi/2$ ,  $z = L/2$ ,  $u_z$  при  $r = R - H$ ,  $\theta = \pi/2$ , лінії без маркерів - результати, отримані методом сплайн-колокації (суцільні – спадаючий модуль пружності, пунктирні – зростаючий), лінії з маркерами – результати отримані МСЕ (восьмивузло-

вий скінченний елемент) (точки – спадаючий модуль пружності, трикутники – зростаючий).

При розрахунках методом сплайн-колокації приймалося:  $M = N = 11$  і 100 точок інтегрування, при розрахунках МСЕ використано  $15^3$  елементів.

Як видно з графіків, характер розподілу переміщень збігається для результатів, отриманих різними методами, проте відмінності між ними все ж істотні, особливо це стосується переміщень  $u_z$ . Також ця задача була розв’язана з використанням 20-ти вузлових скінченних елементів, при співмірній з першим випадком кількості вузлів. Однак, результати, отримані цим способом, практично збігаються з результатами для 8-ми вузлових елементів (на графіках лінії майже не відрізняються і для другого випадку їх не наведено). Можливо, згущенням сіток кінцевих елементів і сплайнів, можна домогтися більш точного збігу, але слід враховувати, що при цьому зростають вимоги до обчислювальних потужностей і, очевидно, витрати в часі на розв’язання задач.

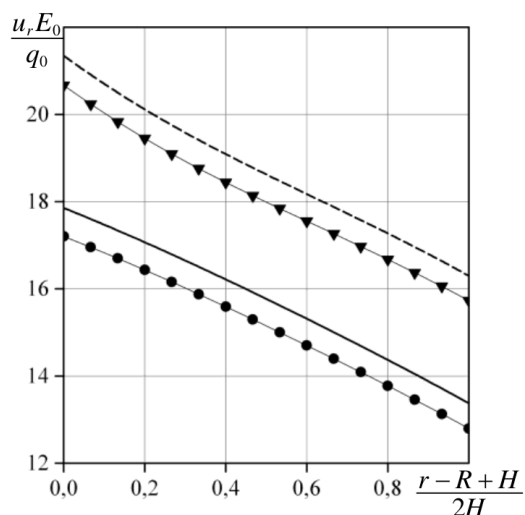


Рис. 6.1 – Розподіл переміщень  $u_r E_0/q_0$  вздовж радіуса для різних варіантів модуля Юнга, одержані різними методами,  $\theta = \pi/2, z = L/2$

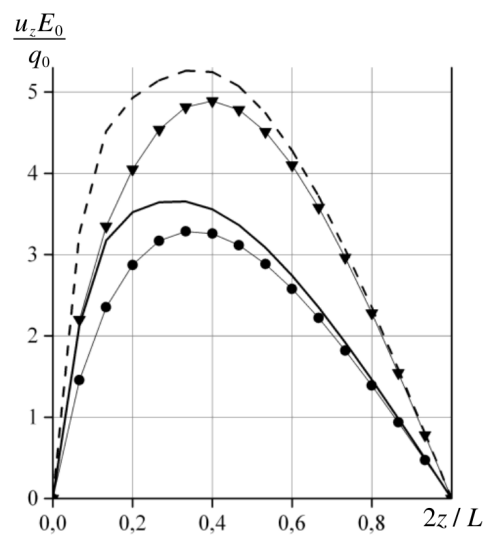


Рис. 6.2 – Розподіл переміщень  $u_z E_0/q_0$  вздовж твірної для різних варіантів модуля Юнга, одержані різними методами,  $\theta = \pi/2, r = R - H$

Таким чином, наведені результати розрахунку за ідеологічно різни-

ми чисельно-аналітичними методиками, що побудовані на основі методу сплайн-колокацій і МСЕ, якісно вірно і кількісно задовільно відтворюють характер деформованого стану неоднорідного незамкнутого кругового циліндра.

## 6.2 НДС еліптичного циліндра

Розглянемо циліндр, площина поперечного перерізу якого задається в двовимірній еліптичній ортогональній системі координат  $\xi, \eta$  і обмежена кофокальними еліпсами  $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2, 0 \leq \eta \leq 2\pi$  [34]. Координата, що змінюється по нормалі до цієї площини  $0 \leq z \leq L, L$  – довжина циліндра.

Зв'язок між декартовою і еліптичною системами координат задається формулами:

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z. \quad (6.12)$$

Коефіцієнти Ламе системи координат  $O\xi\eta z$ :

$$H_\xi = H_\eta = H = c\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad H_z = 1. \quad (6.13)$$

Співвідношення Коші :

$$\begin{aligned} e_\xi &= \frac{1}{H} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \eta} u_\eta, \quad e_\eta = \frac{1}{H} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \xi} u_\xi, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\xi}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u_\eta}{H} \right) \right), \quad e_{\xi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \right), \\ e_{\eta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= c_{11}e_\xi + c_{12}e_\eta + c_{13}e_z, \quad \sigma_\eta = c_{12}e_\xi + c_{22}e_\eta + c_{23}e_z, \\ \sigma_z &= c_{13}e_\xi + c_{23}e_\eta + c_{33}e_z, \quad \sigma_{\xi\eta} = 2c_{44}e_{\xi\eta}, \quad \sigma_{\xi z} = 2c_{55}e_{\xi z}, \quad \sigma_{\eta z} = 2c_{66}e_{\eta z}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Нехай на внутрішню поверхню  $\xi = \xi_1$  діє нормальний рівномірно розподілений тиск  $q$ . Тоді потенціальна енергія деформації:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_\xi e_\xi + \sigma_\eta e_\eta + \sigma_z e_z) + \sigma_{\xi\eta} e_{\xi\eta} + \sigma_{\xi z} e_{\xi z} + \sigma_{\eta z} e_{\eta z} \right\} H^2 dz d\eta d\xi - \\ - q \int_0^L \int_0^{2\pi} u_\xi H dz d\eta, \end{aligned} \quad (6.16)$$

в переміщеннях:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{c_{22}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ + \frac{c_{55}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{c_{66}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{c^2 \Delta c_{33}}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{c^2 \Delta c_{55}}{2} \left( \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \right)^2 + \\ + \frac{c^2 \Delta c_{66}}{2} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\sinh 2\xi \sin 2\eta (c_{12} + c_{44})}{4\Delta^2} u_\xi u_\eta + \frac{c_{12} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \\ + \frac{c_{12} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{cc_{13} \sin 2\eta}{2\sqrt{\Delta}} u_\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{cc_{23} \sinh 2\xi}{2\sqrt{\Delta}} u_\xi \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ + \frac{c_{22} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} - \\ - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\xi \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{c_{22} \sinh^2 2\xi + c_{44} \sin^2 2\eta}{8\Delta^2} u_\xi^2 + \\ + \frac{c_{44} \sinh^2 2\xi + c_{11} \sin^2 2\eta}{8\Delta^2} u_\eta^2 + \frac{c_{11} \sin 2\eta}{2\Delta} u_\eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + c_{12} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \\ + cc_{13} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + cc_{23} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + c_{44} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \\ \left. + cc_{55} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial z} + cc_{66} \sqrt{\Delta} \frac{\partial u_\eta}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right\} dz d\eta d\xi - q \int_0^L \int_0^{2\pi} u_\xi H dz d\eta, \end{aligned} \quad (6.17)$$

де  $\Delta = \cosh^2 \xi - \cos^2 \eta$ .

Розв'язання задачі по визначенню НДС еліптичного циліндра на основі співвідношень тривимірної теорії пружності (6.14)–(6.17) проводиться з ви-

користанням МСЕ з записом скінченного елемента у відповідній еліптичній системі координат.

Представимо шуканий розв'язок у вигляді:

$$u_{\xi} = u_{\xi i} N_i, \quad u_{\eta} = u_{\eta i} N_i, \quad u_z = u_{z i} N_i, \quad (6.18)$$

тут і далі приймається сумування по парних індексах.

Рівняння для скінченного елемента:

$$\begin{aligned} & \iiint_V [c_{11}(u_{\xi i} N_{\xi i}) N_{\xi j} + c_{44}(u_{\xi i} N_{\eta i}) N_{\eta j} + c^2 \Delta c_{55}(u_{\xi i} N_{z i}) N_{z j} + \\ & + \frac{c_{12} \sinh 2\xi}{2\Delta} ((u_{\xi i} N_{\xi i}) N_j + (u_{\xi i} N_i) N_{\xi j}) + \frac{c_{22} \sinh^2 2\xi + c_{44} \sin^2 2\eta}{4\Delta^2} (u_{\xi i} N_i) N_j - \\ & - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} ((u_{\xi i} N_{\eta i}) N_j + (u_{\xi i} N_i) N_{\eta j}) + \frac{\sinh 2\xi \sin 2\eta (c_{12} + c_{44})}{4\Delta^2} (u_{\eta i} N_i) N_j + \\ & + \frac{c_{22} \sinh 2\xi}{2\Delta} (u_{\eta i} N_{\eta i}) N_j - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} (u_{\eta i} N_i) N_{\eta j} - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} (u_{\eta i} N_{\xi i}) N_j + \\ & + c_{44}(u_{\eta i} N_{\xi i}) N_{\eta j} + \frac{c_{11} \sin 2\eta}{2\Delta} (u_{\eta i} N_i) N_{\xi j} + c_{12}(u_{\eta i} N_{\eta i}) N_{\xi j} + \\ & + c c_{13} \sqrt{\Delta} (u_{z i} N_{z i}) N_{\xi j} + c c_{55} \sqrt{\Delta} (u_{z i} N_{\xi i}) N_{z j} + \\ & + \frac{c c_{23} \sinh 2\xi}{2\sqrt{\Delta}} (u_{z i} N_{z i}) N_j] dV - q \iint_S N_j H dS = 0, \\ & \iiint_V \left[ \frac{c_{22} \sinh 2\xi}{2\Delta} (u_{\xi i} N_i) N_{\eta j} - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} (u_{\xi i} N_{\eta i}) N_j - \frac{c_{44} \sin 2\eta}{2\Delta} (u_{\xi i} N_i) N_{\xi j} + \right. \\ & + \frac{\sinh 2\xi \sin 2\eta (c_{12} + c_{44})}{4\Delta^2} (u_{\xi i} N_{\eta i}) N_j + c_{44}(u_{\xi i} N_{\eta i}) N_{\xi j} + \frac{c_{11} \sin 2\eta}{2\Delta} (u_{\xi i} N_{\xi i}) N_j + \\ & + c_{12}(u_{\xi i} N_{\xi i}) N_{\eta j} + c_{22} (u_{\eta i} N_{\eta i}) N_{\eta j} + c_{44} (u_{\eta i} N_{\xi j}) N_{\xi j} + \\ & + c^2 \Delta c_{66} (u_{\eta i} N_{z i}) N_{z i} + \frac{c_{12} \sin 2\eta}{2\Delta} ((u_{\eta i} N_{\eta i}) N_j + (u_{\eta i} N_i) N_{\eta j}) - \\ & - \frac{c_{44} \sinh 2\xi}{2\Delta} ((u_{\eta i} N_{\xi i}) N_j + (u_{\eta i} N_i) N_{\xi j}) + \frac{c_{44} \sinh^2 2\xi + c_{11} \sin^2 2\eta}{4\Delta^2} (u_{\eta i} N_i) N_j + \\ & \left. + \frac{c c_{13} \sin 2\eta}{2\sqrt{\Delta}} (u_{z i} N_{z i}) N_j + c c_{23} \sqrt{\Delta} (u_{z i} N_{z i}) N_{\eta j} + c c_{66} \sqrt{\Delta} (u_{z i} N_{\eta i}) N_{z j} \right] dV = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ \frac{cc_{23} \sinh 2\xi}{2\sqrt{\Delta}} (u_{\xi i} N_i) N_{zj} + cc_{13} \sqrt{\Delta} (u_{\xi i} N_{\xi i}) N_{zj} + cc_{55} \sqrt{\Delta} (u_{\xi i} N_{zi}) N_{\xi j} + \right. \\ & \quad \left. + cc_{66} \sqrt{\Delta} (u_{\eta i} N_{zi}) N_{\eta j} + \frac{cc_{13} \sin 2\eta}{2\sqrt{\Delta}} (u_{\eta i} N_i) N_{zj} + cc_{23} \sqrt{\Delta} (u_{\eta i} N_{\eta i}) N_{zj} + \right. \\ & \quad \left. + c_{55} (u_{zi} N_{\xi i}) N_{\xi j} + c_{66} (u_{zi} N_{\eta i}) N_{\eta j} + c^2 \Delta c_{33} (u_{zi} N_{zi}) N_{zj} \right] dV = 0. \end{aligned}$$

Розглянуто замкнуті порожнисті циліндри, умовна серединна поверхня яких, – циліндрична поверхня з напрямною у вигляді еліпса з півосями  $a$  і  $b$ . Для того, щоб визначити рівняння цього еліпса в системі координат  $O\xi\eta$  необхідно розв’язати рівняння  $a \sinh \xi = b \cosh \xi$ , корінь якого

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}.$$

Отже рівняння “серединного” еліпса має вигляд:

$$x = c_0 \cosh \xi_0 \cos \eta, \quad y = c_0 \sinh \xi_0 \cos \eta, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad c_0 = a / \cosh \xi_0.$$

Нехай довжина циліндра  $L = 20$ ,  $ab = 100$ ,  $\xi_0 - 0,05 \leq \xi \leq \xi_0 + 0,05$ , торці циліндра жорстко защемлено, матеріал – ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Досліджено розподіл переміщень на внутрішній поверхні циліндра в залежності від форми еліпса в поперечному перерізі. Проведено розрахунки для різних значень меншої півосі еліпса  $b = 9,999; 8; 7; 6,25$ . Поперечні перерізи тіла, що досліджується при  $b = 9,999; 8; 6,25$ , показано на рис. 6.3.

З міркувань симетрії задача розв’язана в області  $[0; L/2] \times [0; \pi/2] \times [\xi_0 - 0,05; \xi_0 + 0,05]$ . Так як в цьому випадку розміри тіла по координаті  $\xi$  незначні, для оцінки точності вибрано такі три варіанти розбиття області на елементи по  $\xi, \eta, z$ :

$$(i) - 6 \times 10 \times 15,$$

$$(ii) - 8 \times 15 \times 20,$$

$$(iii) - 10 \times 20 \times 25.$$

В табл. 6.2 наведено геометричні параметри циліндрів, що досліджують-



Табл. 6.2 – Значення переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра

$b$	$h_a$	$h_b$	$u_\xi E/q$					
			$\eta = 0$			$\eta = \pi/2$		
			(i)	(ii)	(iii)	(i)	(ii)	(iii)
9,999	1,0003	1,0005	96,953	96,565	96,378	97,246	96,872	96,690
9	0,9003	1,1115	-39,364	-48,232	-52,124	266,15	272,04	274,15
8	0,8003	1,2505	-146,12	-167,84	-178,24	470,63	482,09	486,06
7	0,7002	1,4291	-205,26	-243,40	-263,38	658,19	673,88	679,64
6,25	0,6252	1,6006	-206,91	-255,55	-282,83	722,49	738,08	744,44

ться, а також значення переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра при  $z = L/2$  ( $h_a$  – товщина циліндра при  $\eta = 0$ ,  $h_b$  – при  $\eta = \pi/2$ ).

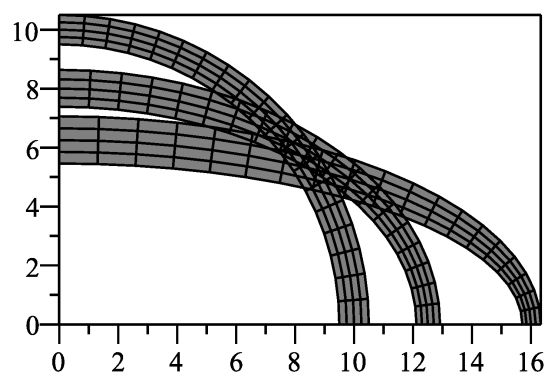
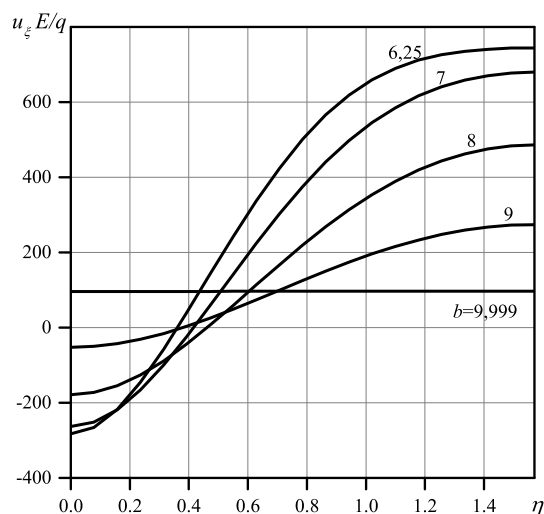


Рис. 6.3 – Форми поперечних перерізів циліндра

Рис. 6.4 – Розподіли переміщень в залежності від значень півосі  $b$  еліпса

Параметр  $b = 9,999$  вибрано для того, щоб порівняти отриманий розв'язок з розв'язком для кругового циліндра. В цьому випадку еліптичний циліндр буде дуже близьким до кругового з внутрішнім радіусом 9,51 и товщиною 1. Цю задачу розв'язано методом скінченних елементів в обла-

сті  $[0; L/2] \times [9, 51; 10, 51]$ , яку було розбито на  $100 \times 100$  елементів. Значення  $u_r E/q$  в цьому випадку дорівнює 96,193. Розподіл переміщень  $u_\xi E/q$  на внутрішній поверхні циліндра при  $z = L/2$  в залежності від значення півосі  $b$  еліпса показано на рис. 6.4.

### 6.3 Результати та висновки

1. Наведено постановку задачі про НДС порожнистого кругового замкнутого циліндра зі змінними за радіальною координатою пружними властивостями матеріалу, що знаходиться під дією нормального тиску на бічних поверхнях і має жорстке закріплення на торцевих площинах і на площинах в перерізах  $\theta = const$ .
2. Дано розв'язок задачі на основі методу сплайн-колокацій з застосуванням двовимірних сплайнів за коловою координатою і координатою, що змінюється вздовж осі циліндра.
3. Проведено порівняння одержаних результатів та результатів МСЕ з використанням скінченних елементів у вигляді паралелепіпедів з 8-ма та 20-ма вузлами, відмічено задовільне співпадіння переміщень для різних варіантів неоднорідності матеріалу.
4. Дана постановка задачі про НДС однорідного замкнутого циліндра, поперечний переріз якого обмежений конфокальними поверхнями.
5. Одержано розв'язок задачі про НДС порожнистого циліндра з еліптичним поперечним перерізом в варіанті МСЕ, коли скінчений елемент записаний в еліптичній системі координат.
6. Показано збіжність розв'язку при збільшенні дискретизації області та неперервну залежність переміщень циліндра від ексцентриситету еліпса з граничним переходом до випадку кругового циліндра.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Представлена дисертаційна робота присвячена дослідженню стаціонарного деформування товстостінних неоднорідних циліндричних оболонок та порожнистих куль методами чисельного аналізу, що є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

На основі просторової теорії пружності та уточненої теорії оболонок типу Тимошенка було розроблено дискретно-континуальний і розвинуто дискретний підходи до розв'язання відповідних двовимірних і тривимірних крайових задач, побудовано алгоритми їх реалізації і програмні комплекси, що забезпечують високий ступінь точності отриманих результатів.

Одержано нові розв'язки широкого класу задач стаціонарного деформування і проведено аналіз впливу неоднорідності структури, пружних властивостей матеріалу та геометричних параметрів механічних об'єктів, що розглядаються, на розподіл полів напружень та переміщень при різних видах навантаження та граничних умов.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче.

1. Виконано постановку та побудовано розрахункові схеми задач про напружено-деформований стан і коливання циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом та тіл сферичної форми з врахуванням їх конструктивної та структурної неоднорідності на основі просторової та оболонкової моделей.
2. Розроблено нові дискретно-континуальні підходи на основі методу сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації та розвинено варіант дискретного підходу (метод скінченних елементів) для дослідження зазначеного класу задач стаціонарного деформування.
3. Побудовано нові розв'язки задач статички та коливань, одержаних за різними методиками, для таких оболонок і просторових тіл:

- циліндричні оболонки некругового перерізу та пластини, змінної та знаковмінної кривизни, при різних фізико-механічних властивостях матеріалу;
  - циліндричні оболонки кругового і еліптичного перерізів зі скісними зрізами;
  - неоднорідні за пружними характеристиками порожнисті циліндри скінченної довжини та порожнистої кулі в просторовій постановці (осесиметрична задача);
  - неоднорідний циліндр скінченної довжини з п'єзокерамічного матеріалу (осесиметричні коливання) ;
  - циліндри скінченної довжини: круговий та обмежений конфокальними еліпсами, в циліндричній та еліптичній системах координат.
4. Проведено порівняльний аналіз ефективності різних чисельних підходів, що базуються на застосуванні таких методів:
- методу сплайн-колокації з вибором різних напрямків апроксимації в двовимірних задачах статички циліндричних оболонок некругового перерізу;
  - методів сплайн- колокацій, скінченних елементів та методу Фур'є в двовимірних та тривимірних задачах НДС і коливань неоднорідних пружних та електропружних циліндрів скінченної довжини.
5. Розроблені дискретно-континуальні та дискретні підходи реалізовано в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах з автоматизацією окремих етапів розрахунку та використано в науково-дослідних та договірних роботах відділу.
6. Встановлено характерні закономірності впливу фактору неоднорідності структури циліндричних та сферичних тіл на розподіл переміщень та напружень і виявлено ряд нових механічних ефектів, пов'язаних з неоднорідною структурою, геометричними та механічними характери-

стиками об'єктів дослідження. Відмічено:

- складний характер НДС в гофрованих циліндричних оболонках і пластинах, наявність зон стискуючих та розтягуючих напружень, що чергуються у відповідності зі зміною знаку кривини геометрії; можливість раціонального вибору параметрів гофрування для одержання розподілу напружень, що відповідають технічним вимогам;
- наявність зрізів в циліндричних оболонках зі скісними зрізами не змінює якісної картини їх НДС, а кількісні зміни спостерігаються переважно в околі торців;
- неперервність залежності переміщень еліптичного циліндра скінченної довжини від його ексцентриситету з граничним переходом до випадку кругового циліндра (тривимірна постановка задачі з залученням еліптичної системи координат);
- дискретно-континуальний підхід, що базується на зведенні дво- і тривимірних задач до одновимірних за методом сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації, в даному класі пружних тіл і оболонок не поступається за точністю розрахунків методу скінченних елементів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алберг Дж. Нильсен Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Мир, Москва (1972)
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва (1974)
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. Наука, Москва (1961)
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Наука, Москва (1967)
5. Антонов Е.Н. Основы практического расчета оболочек вращения переменной толщины башенного типа Изв. вузов. Строит и архит. № 6, 61–68 (1971)
6. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Развитие метода граничных элементов в линейных и нелинейных задачах теории пластин и оболочек Тр. 18 Международн конф. по теории оболочек и пластин, Саратов, Т. 3. Саратов, 3–9 (1997)
7. Бахттагария П.К. Исследование открытых некруговых цилиндрических оболочек малой длины Ракетная техника и космонавтика. 9(7), 238–240 (1971)
8. Биргер И.А. Круглые пластины и оболочки вращения. Оборонгиз, Москва (1961)
9. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Наукова думка, Киев (1976)
10. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций.

- Машиностроение, Москва (1980)
11. Булгаков В.Н. Статика тороидальных оболочек. Изд-во АН УССР, Киев (1962)
  12. Бушнел Д., Хофф Н. Коэффициенты влияния для круговой цилиндрической оболочки с толщиной стенки, резко изменяющейся по параболе Ракетная техника и космонавтика. 2(12), 141–142 (1964)
  13. Вайнберг Д.В., Ждан В.З. Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения. Изд-во КГУ, Киев (1967)
  14. Василенко А.Т., Судацова Г.К. Анализ напряжений и перемещений в ортотропных некруговых цилиндрических оболочках под действием центробежных нагрузок Прикл. механика. 40(1), 117–124 (2004)
  15. Василенко А.Т., Урсова Г.П. Решение задач о напряженном состоянии упругих систем из анизотропных оболочек вращения с учетом поперечных сдвигов и обжатия Прикл. механика. 39(5), 98–106 (2003)
  16. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. Москва Машиностроение, (1988)
  17. Васюник О.І. Дослідження напруженодеформованого стану гофрованої циліндричної оболонки, навантаженої внутрішнім тиском Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Зб. праць. Інст прикл. пробл. мех. і мат. НАН України. Т. 2. Львів: Інст прикл. пробл. мех. і мат. НАН України. 312–315 (2000)
  18. Виноградов Ю.И., Кочемасова Е.И. Эффективное приложение аналитических решений задач механики деформирования оболочек Исслед. по теории пластин и оболочек. № 25, 93–99 (1992)
  19. Винсон Ж.Р., Сираковский Р.А. Поведение конструкций из композитных материалов. Металлургия, Москва (1991)
  20. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Госте-

- хиздат, Москва (1949)
21. Волков А.Н. К расчету замкнутой цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения Инж. журнал. 1(2), 204–208(1961)
  22. Воробьев Л.Н., Еременко И.А. К расчету цилиндрических оболочек с произвольным замкнутым контуром Прикл. механика. 8(6), 118–122 (1972)
  23. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии (геометрические вопросы теории оболочек) Изд. КГУ, Казань (1985)
  24. Ганеева М.С., Косолапова Л.А. Оболочки вращения переменной толщины несимметричного относительно поверхности приведения строения Труды семинара по теории оболочек. Казань: Казан. физ.техн. инт АН СССР. Вып. 6. 74–81 (1975)
  25. Геккелер И.В. Статика упругого тела. ОНТИ, ГТТИ, Москва, Ленинград (1934)
  26. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений Успехи мат. наук. 16(3) 171–174 (1961)
  27. Гольденвейзер А.Л. К теории изгиба пластинок Рейснера Изв. АН СССР ОТН. № 4, 441–467 (1958)
  28. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. 2е изд., испр. и доп. Наука, Москва (1976)
  29. Горячев О.А. К расчету цилиндрических оболочек переменной толщины методом сеток Тр. Куйбыш. авиац. ин-та. Вып. 48, 113–118 (1971)
  30. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.Н., Жадрасинов Н. Т. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 39, 80–84 (1971)
  31. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. О коэффициенте сдвига в теории оболочек



- чек типа Тимошенко Докл. РАН. № 1, 47–49 (2001)
32. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях. Доп. НАН України. № 6, 31–37 (2016)
33. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке. Доп. НАН України. №2, 76–82 (2012)
34. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. О напряженно-деформированном состоянии эллиптических цилиндров в пространственной постановке. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 62(2), 120–126 (2019)
35. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій змінної товщини в уточненій постановці. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Вип. 10, 63–69 (2009)
36. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці. Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 3, 61–64 (2011)
37. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Наук. думка, Киев (1973)
38. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек методами численного анализа Прикл. механика. 20(10), 3–22 (1984)
39. Григоренко Я.М. Решение на ЭЦВМ задач о напряженном состоянии конических оболочек переменной жесткости ЭЦВМ в строительной механике: Тр. I Всесоюз. совещ. по применению ЭЦВМ в строит. механике,

- Ленинград, 535–543 (1963)
40. Григоренко Я.М., Беренов М.Н. Напряженное состояние пологих оболочек двойкой кривизны Докл АН УССР. Сер. А. № 4, 27–31 (1988)
41. Григоренко Я.М., Беренов М.Н. О решении задач статики пологих оболочек и пластин с шарнирно опертыми и жестко закрепленными противоположными краями Прикл. механика. 26(1), 30–35 (1990)
42. Григоренко Я.М., Беренов М.Н., Овлякулиев О. Применение В-сплайнов к решению задач об изгибе прямоугольных пластин. Вычислит. и прикл. математика. № 66, 47–51 (1988)
43. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций Наук. думка, Киев (1986)
44. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. Наука, Москва (1992)
45. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами Прикл. механика. 38(11), 32–68 (2002)
46. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Уточненные модели деформирования неоднородных анизотропных оболочек Проблемы механики тонких деформированных тел: Сборник Киев Посвящается 80летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна. Инт мех. НАН Армении. Гитуюн, Ереван (2002) 155–166.
47. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Наук. думка, Киев (1987)
48. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек. Наук. думка, Киев (1977)
49. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотро-

- пных толстостенных оболочек. Вища школа, Киев (1985)
50. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. Доп. НАН України. № 6, 21–29 (2020)
51. Григоренко Я.М., Захарийченко Л.И. Анализ напряженнодеформированного состояния цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при локализованных нагрузках Прикл. механика. 40(10), 113–121 (2004)
52. Григоренко Я.М., Захарийченко Л.И. Расчет гофрированных цилиндрических оболочек при различных граничных условиях на торцах Прикл. механика. 35(9), 38–46 (1999)
53. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. К симметричной деформации оболочек вращения средней толщины Прикл. механика. 5(7), 27–33 (1969)
54. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. О некоторых подходах к решению задач теории оболочек и пластин на основе сплайн-аппроксимации Тр. XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Казань: Издво Казан. унта. 31–36 (1990)
55. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций Прикл. механика. 31(6), 3–27 (1995)
56. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н., Демянчук В.С. Решение задачи о деформировании пологих оболочек в температурном поле методом сплайн-колокации Докл. АН УССР. Сер. А. № 3, 45–48 (1990)
57. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н., Иванова Ю.И. Анализ напряженного состояния двояковыпуклых слоистых ортотропных оболочек при различной степени пологости Прикл. механика. 39(6), 74–81 (2003)
58. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н., Крижановская Т.В. Расчет напряжен-

- нодеформированного состояния ортотропных некруговых цилиндрических оболочек в уточненной постановке Прикл. механика. 28(1), 63–69 (1992)
59. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. Вища школа, Киев (1979)
60. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Наук. думка, Киев (1978)
61. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т.; Т. 3) Наук. думка, Киев (1985)
62. Гузь А.Н., Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Краевые задачи теории тонких и нетонких ортотропных оболочек с учетом нелинейно упругих свойств и пониженной сдвиговой жесткости композитных материалов Мех. композит. матер. 37(1), 91–100 (2001)
63. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Наук. думка, Киев (1974)
64. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. Наук. думка, Киев (1970)
65. Гусятников А.Ю., Корнеев В.М. Влияние формы поперечного сечения на деформацию замкнутой цилиндрической оболочки Межвуз. сб. научн. тр.: Куйбыш. архит.строит. ин-та. № 13, 104–107 (1990)
66. Деклу Ж. Метод конечных элементов. Мир, Москва (1976)
67. Дмитриева Л.М., Карасев С.Н. Действие нормальных нагрузок на цилиндрическую оболочку эллиптического сечения Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань. № 21, 54–61 (1989)
68. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. Машиностроение, Москва (1972)

69. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций Наука, Москва: (1980)
70. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Мир, Москва (1975)
71. Знаменский Н.П. Применение интегральных уравнений для расчета конических и цилиндрических оболочек переменной жесткости Прикл. пробл. прочности и пластичности. № 8, 27–32 (1978)
72. Калекин О.Ю. К приближенной теории оболочек средней толщины Прикл. механика. 1(12), 29–37 (1961)
73. Кантор Б.Я., Миткевич В.М., Шишкина Э.С. К расчету тонкостенных конструкций вращения методом конечных элементов. Инт Пробл. машиностроения АН УССР, Харьков (1976)
74. Кепич Т.Ю., Сичко В.М., Ковбасенко В.В., Радченко Н.Н. Исследование напряженного состояния гофрированных оболочек. Конструкция и строит. мех. корабля: Сб. науч. тр. Николаев 45–53 (1989)
75. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Наук. думка, Киев (1964)
76. Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. № 1, 35–40 (2015)
77. Кныш Т.П. Расчет замкнутой сферической оболочки на локальную осесимметрическую нагрузку Вестн. С.Петербург. унта. № 2, 94–97 (1998)
78. Коваленко А.Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Изд-во АН УССР, Киев (1955)
79. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Издво АН УССР, Киев

- (1963)
80. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А., Полищук Т.И. Расчет конических оболочек при антисимметричных нагрузках. Наукова думка, Киев (1966)
81. Коваленко А.Д., Лобкова Н.А. Расчет конических оболочек линейнопеременной толщины. Изд-во АН УССР, Киев (1961)
82. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. Высшая школа, Москва (1972)
83. Коломоец А.А., Болдырева Н.А. Изгиб цилиндрической оболочки неравномерным внешним давлением Труды XVIII Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Том 1. Саратов. 96–101 (1997)
84. Коннор Дж. Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Судостроение, Ленинград (1979)
85. Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Андреев С.В. К вариационным методам исследования устойчивости тонких оболочек сложной геометрии Тр. XII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин: В 3х т. Т. 1. Изд. Ереванского университета, Ереван. 67–72 (1980)
86. Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. Наука, Москва (1989)
87. Корнишин М.С., Якупов Н.М. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ Прикл. механика. 25(8), 53–60 (1989)
88. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Москва Машиностроение (1965)
89. Кравченко В.Л., Хома И.Ю., Шаропова Д.И., Шевченко Э.Е. О напряженно деформированном состоянии цилиндрической оболочки из армированного материала Прикл. механика. 16(2), 115–119 (1980)

90. Крюков М.М., Ляшко О.В., Шутовський О.М., Андрейцев А.Ю. Застосування В-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. Матеріали 18 Міжнародної наукової конф. імені академіка Кравчука, Київ, 7–10 жовтня, 2017 р. НТУУ «КПІ», Київ. 95–98 (2017)
91. Ларднер Т.И., Стилл Р.С. Симметричная деформация упругих круговых оболочек переменной толщины. Прикл. механика: Тр. амер. об-ва инж.мех. 35(1), 98–100 (1968)
92. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Наука, Москва (1977)
93. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, Москва, Ленинград (1947)
94. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, Москва, Ленинград (1935)
95. Максименко В.П. Цилиндрические оболочки переменной толщины, нагруженные продольными и переменными по длине поперечными нагрузками Прикл. механика. 16(1), 55–61 (1980)
96. Малахов В.Г. Поиск оптимальной толщины нетонкой оболочки вращения Механика оболочек и пластин: Сборник докладов 19 Международной конференции по теории оболочек и пластин. Издво ННГУ, Н. Новгород. 135–140 (1999)
97. Малинин М.Ю., Снигирев В.Ф. Численное решение задачи параметризации для анализа оболочек произвольной формы Прикл. пробл. прочн. и пластичн.: Алгоритмиз. и автоматиз. науч. исслед. Горький. 67–74 (1988)
98. Мальков В.М. Расчет цилиндрической оболочки с косым срезом Сб. "Исследования по упругости и пластичности". Т. 3 Изд. ЛГУ (1963)
99. Методы расчета оболочек в 5 т. / Ы Т. 4: Теория оболочек переменной

- жесткости. Наук. думка, Киев (1981)
100. Методы расчета стержневых систем, пластинок и оболочек с использованием ЭЦВМ / Александров А.В., Лащенко Б.Я., Шапошников Н.Н. и др. Москва Стройиздат, Ч. 1.; Ч. 2. (1976)
101. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3 т. / Т. 2. Механика элементов конструкций. Наукова думка, Киев (1983)
102. Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 8. Статика элементов конструкций. А.С.К., Киев (1999)
103. Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 11: Численные методы. А.С.К., Киев (2002)
104. Муштари Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия Прикл. математика и механика. 2(14), 494–496 (1939)
105. Мышков В.Г. Матричный алгоритм расчета тонких открытых цилиндрических оболочек методом разложения в одинарные тригонометрические ряды по  $\xi$  (общее решение) Моск. инт инж. ж.д. трансп. Рус. Деп. ЦНИИ ТЭИтяжмаш 20.12.91, № 802тм91 (1991)
106. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Изд-во лит. по стр-ву, Ленинград, Москва (1966)
107. Насонов В.В. Дискретная модель цилиндрической оболочки. Инт автомат. и процессов упр. с ВЦ ДВО АН СССР, Владивосток (1989)
108. Недорезов П.Ф. Об определении НДС при циклическом нагружении некруговой цилиндрической оболочки из вязкоупругого материала Труды 18 Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 3. Саратов. 141–146 (1997)
109. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю., Чернопиский Д. И., Крижановский Е.И. О пространственном упругом равновесии изотропной цилиндрической оболоч-



- чки переменной толщины Прикл. механика. 26(12), 7–15 (1990)
110. Немиш Ю.Н., Чернопиский Д.И. Упругое равновесие гофрированных тел. Наук. Думка, Киев (1983)
111. Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П. Нерубайло Т.Б. О напряженном состоянии цилиндрической оболочки, нагруженной по отрезкам направляющей окружности Прикл. механика и техн. физ. 37(6), 139–147 (1996)
112. Николаев Н.В. Применение метода интегральных матриц к решению задач о напряженнодеформированном состоянии кругоцилиндрической оболочки в общем случае нагружения Изв. вузов. Стр-во. № 2, 12–17 (1994)
113. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. 2е изд., испр. и доп. Судостроение, Ленинград (1962)
114. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении Судостроение, Ленинград (1977)
115. Певный А.Б. Дискретные периодические сплайны и решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке Вестн. Сыктывкар. унта. № 2, Сер. 1, 187–200 (1996)
116. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Наук. думка, Киев (1973)
117. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. Наук. думка, Киев (1975)
118. Петров Ю.П. Дифференциально-разностный метод расчета на прочность анизотропных оболочек переменной толщины Самолетостр. и техн. возд. флота. Вып. 17, 47–62 (1970)
119. Петров Ю.П. Расчет на прочность некруговых цилиндрических оболочек дискретным методом Сопротивл. матер. и теория сооруж. Вып. 10, 10–22 (1970)

120. Пискунов В.Г., Бурьгина А.В., Рассказов А.А. Сдвиговые эффекты напряженного состояния в трансверсальноизотропных пластинах Пробл. Прочности. № 1, 56–71 (1998)
121. Пискунов В.Г., Рассказов А.А. Исследование напряженнодеформированного состояния ортотропных пологих оболочек и пластин на основе сдвиговой теории второго приближения. Прикл. механика. 34(8), 103–110 (1998)
122. Пискунов В.Г., Рассказов А.А. Сдвиговая теория второго приближения для многослойных пологих оболочек и пластин. Механика композиционных материалов. 34(3), 363–373 (1998)
123. Подільчук Ю. М. Деформація пружного параболічного циліндра Доп. АН УРСР. Сер. А. № 7, 628–631 (1971)
124. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. Машиностроение, Москва (1980)
125. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Судостроение, Ленинград (1977)
126. Постнов В.А., Корнеев В.С., Слезина Н.Г. Расчет тонких оболочек вращения произвольной формы методом конечных элементов Стрелит. механика корабля. Вып. 148, 5–18 (1970)
127. Рекач В.Г. К технической теории расчета толстых сферических оболочек Тр. унта дружбы народов им. П. Лумумбы. Вып. 9, 54–83 (1965)
128. Родионова В.А. Влияние условий закрепления торцов на напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки при действии радиальных сосредоточенных сил. Вестн. ЛГУ. № 1. Вып. 1, 119–124 (1969)
129. Родионова В.А. Численный расчет цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением. Труды Дальневост. политехн. инта. № 98, 60–66 (1974)

130. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Вестн. АН СССР. № 5, 38–49 (1979)
131. Сидоров И.Н., Сулейманов И.М. Методика построения граничных элементов для расчета параметров напряженнодеформированного состояния тонких или пологих оболочек сложной геометрии. Казан. гос. техн. ун-т., Казань (1996)
132. Соболева В.А., Важдаева Е.В. О расчете кольцевой полой оболочки по уточненной теории Прикл. пробл. прочн. и пластич. № 56, 139–148 (1997)
133. Сплайн-функции в задачах теории оболочек неканонической формы: Препринт № 794. / Мамай В.И., Кудрина Т.Д., Ананченко Т.Н. и др. Инт механики МГУ, Москва (1994)
134. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. Машиностроение, Москва (1975)
135. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, Москва (1977)
136. Тагиев И.Г. Об одном методе решения задач упругого равновесия тонких оболочек переменной жесткости Тр. VI Всесою. Конф. по теории оболочек и пластинок. Наука, Москва, 783–785 (1966)
137. Тарасов А.А. К упругому изгибу некруговой цилиндрической оболочки под действием системы сосредоточенных сил Волгогр. гос. архит.строит. акад. Волгоград. Деп. В ВИНТИ 21.02.96 г., № 533В96 (1996)
138. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Антюхин Ю.П., Галимов К.З., Дараган В.И. и др. Издво Казан. унта, Казань (1977)
139. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Наук. думка, Киев (1972)
140. Тимошенко С.П., ВойновскийКригер С. Пластины и оболочки. Фи-

- зматгиз, Москва (1963)
141. Токаренко А.В., Петровский Н.И. Вариационноструктурный метод расчета цилиндрических оболочек Харьк. инт инж. ж.д. трансп. Харьков, Деп. в ВИНТИ 1.8.89 г., № 5108В89 (1989)
142. Тюкалов Ю.Я. Расчет цилиндрических оболочек методом конечных элементов в напряжениях. Изв. вузов. Стр-во. № 7, 33–38 (2004)
143. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. Академперіодника, Киев (2002)
144. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах упругости. Наук. Думка, Киев (1979)
145. Федорченко Л.М., Жук Я.О. Аналіз напружено-деформівного стану ортотропної циліндричної оболонки при різних способах закріплення контуру. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. № 1, 49–52 (2015)
146. Хома И.Ю. Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин Прикл. механика. 37(1), 91–100 (2001)
147. Хома И.Ю. Об уравнениях теории термопъезокерамических нетонких оболочек Прикл. механика. 41(2), 12–22 (2005)
148. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. Наук. Думка, Киев (1986)
149. Хорошун Л.П., Козлов С.П., Патлашенко И.Ю. Определение осесимметричного напряженнодеформированного состояния термочувствительных оболочек вращения методом сплайн-колокации. Прикл. механика. 24(6), 56–63 (1988)
150. Черепанов Г.П., Кулиев С.А. Пластинки и оболочки переменной толщины Прикл. механика. 15(10), 70–74 (1979)
151. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. Наука, Мо-

- сква (1968)
152. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Издво ЛГУ, Ленинград, ч. I (1962); ч. II (1964)
153. Чирков А.Ю. Применение смешанных вариационных формулировок метода конечных элементов к решению задач о собственных колебаниях упругих тел. Проблемы прочности. №2, 121–140 (2008)
154. Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А. Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости. Надежность и долговечность машин и сооружений. № 31, 195–207 (2008)
155. Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Беспалова Е.И. и др. Наук. думка, Киев (1975)
156. Численные методы в прикладной теории упругости / Филиппов А. П., Булгаков В.Н., Воробьев Ю.С. и др. Наук. думка, Киев (1968)
157. Шагивалиев К.Ф. Расчет на прочность замкнутой цилиндрической оболочки. Издво ун-та, Саратов (1991)
158. Шагивалиев К.Ф., Кривоногов А.В., Сурнина Е.К. К расчету замкнутой цилиндрической оболочки на локальную нагрузку Совершенствование методов расчета строительных конструкций и технологии строительства. Межвузовский научный сборник. Саратов. гос. техн. унт. Издво СГТУ, Саратов, 33–38 (2004)
159. Шагивалиев К.Ф., Степанов С.В. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки со ступенчатопеременной толщиной со ступенчатопеременной толщиной стенки на осесимметричную нагрузку Совершенствование методов расчета строительных конструкций и технологии строительства: Межвузовский научный сборник Саратов. гос. техн. унт. Издво СГТУ,

- Саратов, 76–81 (2002)
160. Шевченко В.П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев, 159–196 (1998)
161. Шклярчук Ф.Н., Кочемасова Е.И., Тютюнников Н.П. Решение задачи о деформировании анизотропной безмоментной цилиндрической оболочки *Мех. композит. матер. и конструкций*. 8(4), 447–455 (2001)
162. Экстрем Д.Э. Тонкостенные симметричные купола. ОНТИ, Гос. науч.тех. издво Украины, Харьков; Киев (1936)
163. Эстрин М.И. Расчет цилиндрической оболочки, закрепленной по косоугому контуру *Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машиностр.* № 2, 151–155 (1959)
164. Яремченко С.М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій. *Доп. НАН України*. № 11, 75–80 (2007)
165. Adelman N.T., Stavsky Y., Segal E. Axisymmetric vibrations of radially polarized piezoelectric ceramic cylinders *Journal of Sound and Vibration*. 38(2), 245–254 (1975)
166. Allik H. and Hughes T.J.R. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:151–157 (1970)
167. Bahri A., Salehi M., Akhlaghi M. Three dimensional static and dynamic analyses of the functionally graded cylinder bonded to the laminated plate under general loading *Mech. of Adv. Materials and Struct.* 23(12), 1437–1453 (2016)
168. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis functionally graded materials and structures *Appl. Mech. Reviews*. Vol. 60, 195–215 (2007)
169. Bolle L. Contribution on problem linearire de flexion dune plaque elastique.

- Bull. Technique de la Suisse Romande. Vol. 73, 281–285 (1947)
170. Buchan G.R., Peddieson J. A finite element in elliptic coordinates with application to membrane vibration. *Thin-walled structures*. 43(9), 1444–1454 (2005)
171. Chang M., Chang L.L. Analysis of the eccentric cylindrical thin shell. *Appl. Math. and Mech. Engl. Ed.* 15(9), 887–895 (1994)
172. Chen W.Q., Ding H.J. Free vibration of multilayered spherically isotropic hollow spheres. *Int. J. of Mech. Sci.* Vol. 43, 667–680 (2001)
173. Cheung Y.K., Fan S.C. Static analysis of right box girder bridges by spline finite strip method *Proc. Inst. Civ. Eng. Part 2*. 75(6), 311–323 (1983)
174. Civalek O., Gurses M. Frequency analysis of trapezoidal plates and membrane using discrete singular convolution. *Asian J. of Civil Engineering (Building and Housing)*. 9(6), 593–605 (2009)
175. Collin F., Caillerie D., and Chambon R., Analytical solutions for the thick-walled cylinder problem modeled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation. *Int. J. Solids Struct.* 46(22-23), 3927–3937 (2009)
176. Conway H.P. On an axially symmetrically loaded circular shell of variable thickness. *ZAMM*. 38(12), 69–70 (1958)
177. Davies G.C., Bruce D.M. A stress analysis model for composite coaxial cylinders. *Journ. Mater. Sci.* 32(29), 5425–5437 (1997)
178. De Silva C.N., Naghdi P.M. Asymptotic solutions of a class of an elastic shell of revolution with variable thickness. *Quart. Appl. Math.* 15(2), 169–182 (1957)
179. Drumheller D.S., Kalnins A. Dynamic shell theory for ferroelectric ceramics. *J. Acoust. Soc. Amer.* 47(5B), 1343–1349 (1970)
180. Feng Y., Chui D. Analysis of B-spline weighted residual method on strength for shallow shell with simply edges. *J. Nanjing Aeronaut. Inst.* 25(2),

- 161–167 (1993)
181. Flanerty J.E., Vafakos W.P. Asymptotic solutions for pressurized noncircular cylinders with nonuniform rings AIAA Journ. 9(9), 1725–1732 (1971)
182. Flügge W. Stresses in shells. Springer Verlag, Berlin (Heidelberg), NewYork (1964)
183. Geanukakes G.N., Wang P.C. Moving load analysis of arbitrarily shaped plates using Bspline finit strip method. J. Sound and Vibration. 141(1), 127–142 (1990)
184. Ghafoori E., Asghari M. Threedimensional elasticity analysis of functionally graded rotating cylinders with variable thickness profile. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C. Journ. of Mech. Eng. Sci. 226(3), 585–594 (2012)
185. Givoli P. Finite element analysis of long cylindrical shells. AIAA Journal. 28(7), 1331–1333 (1990)
186. Gordon B.S. Numericall analysis of noncircular cylindrical shells. J. of the Eng. Mech. div. proc. of the Amer. Soc. of Civ. Eng. 93(3), 487–494 (1967)
187. Greer James M. (Jr), Palazotto Anthony N. Singularities in polynomial representations of transverse shear in finite elements. AIAA Journal. 35(7), 1248–1250 (1997)
188. Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical solution of bending problems for rectangular plates. Int. Appl. Mech. 49(1), 81–94 (2013)
189. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L Free axisymmetric vibrations of solid cylinders: numerical problem solving. Int. Appl. Mech. 46(5), 499–508 (2010)
190. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. Propagation of elastic waves in a noncircular hollow anisotropic cylinder. Int. Appl. Mech. 33(7), 513–518 (1997)
191. Grigorenko A.Ya., Grigorenko Ya.M. State and dynamical problems for



- anisotropic inhomogeneous shells with variable thickness (review). *Int. Appl. Mech.* 49(2), 123–193 (2013)
192. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. Solution of the Problem of Nonaxisymmetrical Free Vibrations of the Piezoceramic Hollow Cylinders with Axial Polarization. *Journal of Math. Sci.* 184(1), 69–77 (2012)
193. Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N. Numerical analysis of free vibrations of piezoelectric cylinders. In: Abali B., Altenbach H., dell'Isola F., Eremeyev V., Öchsner A. (eds) *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Advanced Structured Materials, Vol 108.* Springer, Cham. 187–196 (2019)
194. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Wille R., Loza I.A. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Hollow Sphere Made of Functionally Gradient Piezoelectric materials. *Cont. Mech. and Thermodynamics Vol. 26*, 717–781 (2014)
195. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Loza I. Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Cylinders Made of Functionally Gradient Piezoelectric Materials. *Continuum Mech. Thermodyn*, 24(4-6), 515–524 (2012)
196. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations. *J. Math. Sci.* 180(2), 135–145 (2012)
197. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A. Stress-strain state of complexshaped orthotropic plates under variable load. *Int. Appl. Mech.* 54(4), 411–417 (2018)
198. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of complex-shaped plates. *Int. Appl. Mech.* 54(6), 695–701 (2018)
199. Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. On effect of

- orthotropy on stress-strain state of quadrangular plates of different shape. *Int. Appl. Mech.* 55(2), 199–210 (2019)
200. Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Investigation of the static and dynamic behaviour of anisotropic cylindrical bodies with noncircular crosssection. *Int. J. Solids Struct.* 41(9-10), 2781–2798 (2004)
201. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere. *Int. Appl. Mech.* 54(5), 577–583 (2018)
202. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders. *Int. Appl. Mech.* 52(4), 342–349 (2016)
203. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Investigation of static and dynamic behavior of anisotropic inhomogeneous shallow shells by spline approximation method. *Journal of Civil Engineering and Management.* 15(1), 87–93 (2009)
204. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches. *Int. Appl. Mech.* 55(5), 487–494 (2019)
205. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Kryukov N.N. Yaremchenko S.N. Design of cylindrical shells with oblique cuts in refined statement using spline-approximation. *Int. Appl. Mech.* 56(3), 326–333 (2020)
206. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. *Academperiodika, Kyiv* (2009)
207. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N. Solution of problems of the theory of plates and shells with spline functions (survey). *Int. Appl. Mech.* 31(6), 413–434 (1995)
208. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N. Use of spline approximation to study displacement and stress fields in cylinders with different boundary conditions

- on the ends. *Int. Appl. Mech.* 33(12), 958–965 (1997)
209. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Kholkina N.S. Spline-approximation solution of stress-strain problems for beveled cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 45(12), 1357–1364 (2009)
210. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Krizhanovskaya T.V. Improved calculation of the stress-strain state of orthotropic noncircular cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 28(1), 54–60 (1992)
211. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using spline functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness. *Int. Appl. Mech.* 41(4), 413–420 (2005)
212. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of change in the curvature parameters on the stress state of concave corrugated hollow cylinders. *Int. Appl. Mech.* 54(3), 266–273 (2018)
213. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. *J. Eng. Math.* 54(2), 145–157 (2006)
214. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semi-corrugations. *J. Math. Sci.* 220(2), 133–148 (2017)
215. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Layered inhomogeneous hollow cylinders with concave corrugations under internal pressure. *Int. Appl. Mech.* 54(5), 531–538 (2018)
216. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders. *International Applied Mechanics.* 42(12), 1389–1397 (2006)
217. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of hollow elliptic cylinders with variable eccentricity and thickness. *Int. Appl. Mech.* 38(8), 954–966

- (2002)
218. Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G., Shevchenko S.N. Stress State of ThickWalled Cylindrical Shells of Noncircular Cross Section Soviet Appl. Mech. 22(4), 332–338 (1986)
219. Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G., Shevchenko S.N. Study of the stress state of thick-walled noncircular cylinders in relation to indices of the variability of the load along the generatrix and directrix. Soviet Appl. Mech. 27(3), 231–336 (1991)
220. Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters. Int. Appl. Mech. 44(9), 998–1005 (2008)
221. Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells. Int. Appl. Mech. 48(2), 205–212 (2012)
222. Grigorenko Ya.M., Zakhariichenko L.I. Design of corrugated cylindrical shells under different end conditions International Applied Mechanics. 35(9), 897–905 (1999)
223. Hasheminejad S.M., Ghaheri A. Exact solution for free vibration analysis of an eccentric elliptical plate. Arch. of Appl. Mech. 84(4), 543–552 (2014)
224. Hasheminejad S.M., Ghaheri A. Free vibration analysis of a finitelength isotropic solid elliptic cylinder using exact three dimensional elasticity theory. Appl. Math. Modelling. 37(20-21), 8725–8741 (2013)
225. Hasheminejad S.M., Ghaheri A. Free vibration analysis of elastic elliptic cylinders with an eccentric elliptic cavity. Int. J. Mech. Sci. Vol. 108–109, 144–156 (2016)
226. Haskins J.F., Walsh J. L. Vibrations of ferroelectric cylindrical shells with transversely isotropy (I. radially polarized case). J. of the Acoust. Soc. of America. 29(6), 729–734 (1956)

227. Hirano K., Hiroshima K. Formulation and accuracy of a circular cylindrical shell theory due to a higherorder approximation. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* 54(5-6), 1915–1919 (1988)
228. Hughes T.J.R. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, International Editions (1987)
229. Hutchins G.J., Soler A.J. Approximate elasticity solution for moderately thick shells of revolution. *Trans. ASME, E.* 40(4), 955–960 (1973)
230. Ivanova J., Valeva V. On the integral formulation of the problem of strainstress state of cylindrical shell under external load. *J. Theor. and Appl. Mech.* 24(4), 122–129 (1993)
231. Kagawa Y, Yamabushi T. Finite element approach for piezoelectric circular rod. *IEEE Trans Sonics Ultrasonics* 23(6), 379–385 (1976)
232. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Zavgorodnii A.V., Umrykhin I.N. Forced resonant vibrations and selfheating of solids of revolution made of viscoelastic piezoelectric material. *Int. Appl. Mech.* 51(6), 614–622 (2015)
233. Kashtalyan M. Threedimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics. A/Solids.* 23(5), 853–864 (2004)
234. Klimov B. Ein zur biege Theory der Flächen doppelt gekrummten Schalen mit veranderlicher. Dicke *Acta techn. Acad. Seint. Hung.* 13(1), 107–116 (1961)
235. Koizumi M. The concept of FGM ceramic transactions. *Funct. Gradient Mater.* Vol. 34, 3–10 (1993)
236. Kryukov N.N. Design of Oblique and Trapezoidal Plates with the Use of Spline Functions *Int. Appl. Mech.* 33(5), 414–417 (1997)
237. Kryukov N.N. Solution of problems of the stressed state of thickwalled orthotropic cylindrical shells with the aid of spline functions *Int. Appl. Mech.*

- 29(7), 541–547 (1993)
238. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Simple and effective elements based upon Timoshenko-Mindlin shell theory. *Comput. Meth. Appl. Mech and Eng.* 191(11-12), 1173–1187 (2002)
239. Li L., Liu F., Mei Z. Analysis of combined shells of revolution using the method of spline function. *Comput. Struct. Mech. and Appl.* 12(1), 76–79 (1995)
240. Li W.Y., Tham L.G. Cheung Y.K. Free vibration analysis of doubly curved shells by spline finite strip method. *J. Sound and Vibration.* 140(1), 39–53 (1990)
241. Lukas S., Davgherty R. Accuracy of Donnel's equations for noncircular cylinders *AIAA Journ.* 9(11), 2276–2278 (1971)
242. Lukasiewicz S. The effect of transverse shear deformations in the locally loaded spherical shell. *Arch. budowy maszyn.* 16(4), 439–449 (1969)
243. Lukasiewicz S. The equations of the technical theory of shells of variable rigidity. *Arch. Mech. Stosowanej.* 13(1), 107–116 (1961)
244. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *Int. Appl. Mech.* 48(6), 613–687 (2012)
245. Masayuki Ishihara, Yoshihiro Ootao, Yoshitaka Kameo. Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with D symmetry in cylindrical coordinates. *Journal of Thermal Stresses.* 41(1), 29–41 (2016)
246. Masayuki Ishihara, Yoshihiro Ootao, Yoshitaka Kameo, Takuro Saito. Thermoelectroelastic response of a piezoelectric cylinder with D symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading. *Mechanical Engineering Journal.* 4(5), 1–13 (2017)
247. McDevitt T.I., Simmonds J.G. Reduction of the SandersKoiter equations

- for fully anisotropic circular cylindrical shells to two coupled equations for a stress and a curvature functions *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 66(3), 593–597 (1999)
248. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. *Functionally Graded Materials, Design, Processing and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston (1999)
249. Mizoguchi K., Shirakawa K., Hayashi S. Deformation and strength of a pressure vessel with elliptical cross section *Bull. of ISME*. 11(4-8), 1015–1026 (1968)
250. Mizusawa T. Application of spline strip method to analyse vibration of open cylindrical shells *Int. J. Num. Mech. and Appl.* 12(1), 76–79 (1995)
251. Mizusawa T. Review on application of spline functions to structural analysis. *Bull. Daido Inst. Technol.* Vol. 25, 199–212 (1989)
252. Mizusawa T., Kajita T. The recent advances of finite strip models for structural analysis *Bull. Daido Inst. Technol.* Vol. 27, 67–83 (1991)
253. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells. *Quart. Appl. Math.* 14(4), 369–380 (1957)
254. Navaneethakrishnan P.V. Buckling of nonuniform plates: spline method *J. Eng. Mech.* 114(5), 893–898 (1988)
255. Nemish Yu. N., Chernopiskii D. I. Certain three-dimensional boundary value problems for longitudinally corrugated thick-walled cylinders. *Soviet Appl. Mech.* 14(3), 249–257 (1978)
256. Ootao Y., Ishihara M. Transient Thermal Stress Problem of a Functionally Graded Magneto-Electro-Thermoelastic Hollow Sphere. *Materials*. 4(12), 2136–2150 (2011)
257. Paimushin V.N., Andreev S.V. Numerical Study of the Stress-Strain State of One and Three-Layer Plates and Shells of Complex Geometry *Soviet Appl.*

- Mech. 19(7), 583–588 (1983)
258. Paris A.J., Costello G.A. Bending of core composite cylindrical shells  
Trans. ASME J. Appl. Mech. 67(1), 117–127 (2000)
259. Paul H.S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric quartz  
Arch. Mech. Stosow./, N 5. P. 127–134 (1962)
260. Paul H.S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals  
J. Acoust. Soc. Amer. 40(5), 1077–1080 (1966)
261. Paul H.S., Natarajan K. Axisymmetric free vibration of piezoelectric finite cylindrical bone.  
J. Acoust. Soc. Amer. 96(1), 213–220 (1994)
262. Paul H.S., Natarajan K. Flexural vibration in a finite piezoelectric circular cylinder of crystal class 6 mm.  
Journal of Engineering Science. 32(8), 1303–1314 (1994)
263. Paul H.S., Nelson V.K., Vazhapadi K. Flexural vibration of piezoelectric composite cylinder  
J. Acoust. Soc. Am. 99(1), 309–313 (1996)
264. Paul H.S., Venkatesan M. Axisymmetric vibration of a piezoelectric solid cylinder guided by a thin film  
J. Acoust. Soc. Am. 80(4), 1091–1096 (1986)
265. Pich R. Betrachtungen über die durch den innern Überdruck in dünnwandigen Hohlzylinder mit unrundem Querschnitt hervorgerufenen Biegespannungen  
Mitt. Verein Gross Kesselbesitzer. № 93, 408–416 (1964)
266. Piefort V. Finite element modelling of piezoelectric active structures. Dissertation, Department of Mechanical Engineering and Robotics, University Libre de Bruxelles, Bruxelles (2001)
267. Reddy J.N. Finite element modeling of layered, anisotropic composite plates and shells: a review of recent research.  
Shock Vib. Dig. 13(12), 3–12 (1981)
268. Redekop D., Azar P. Ram bending of a cylindrical pipe in the elastic range  
Int. J. Pressure Vessels and Pip. 37(5), 307–320 (1989)



269. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *J. Math. and Phys.* 23(1-4), 184–191 (1944)
270. Ren D., Fu K.C. Analysis of shallow cylindrical shell by boundary element method *Int. J. Solids and Struct.* 35(1-2), 1–17 (1998)
271. Romano F., Kempner J. Stresses in short noncircular cylindrical shells under lateral pressure *Trans. ASME.* 29(4), 669–674 (1962)
272. Sandeep K. Parashar A.K. Threedimensional analytical modeling of vibration behavior of piezoceramic cylindrical shells. *Arch. of Appl. Mech.* 85(5), 331–352 (2015)
273. Shen D., He D., Shen X. The multivariable spline method for analysis of shallow shells based on Hu-Washizu principle. *China Civ. Eng. J.* 29(4), 11–20 (1996)
274. Shen P.C., Wang J.G. Static analysis of cylindrical shells by using B-spline functions. *Comp. and Struct.* 25(6), 809–816 (1987)
275. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O. Radial ElasoElectric Nonstationary Oscillations of Piezoceramic Cylinder under Mechanical Loading *Int. Appl. Mech.* 45(4), 466–471 (2009)
276. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O. Radial Electromechanical NonStationary Vibrations of a hollow Piezoceramic Cylinder under Elastic Excitation. *Int. Appl. Mech.* 45(2), 230–235 (2009)
277. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with noncircular cross section. A survey. *Appl. Mech. Rev.* 52(8), 237–274 (1999)
278. Sukumar B. Note on the symmetrical bending of non homogeneous cylindrical shells of variable thickness. *Indian. J. theor. phys.* 9(23), 43–46 (1961)
279. Sun B.H., Zhang W., Yen K.Y., Rimrott F.D. J. Exact displacement solution of arbitrary degree paraboloidal shallow shell of revolution made of linear elastic materials *Int. Journ. Solids and struct.* 33(16), 2299–2308 (1996)

280. Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. Maney, London (1998)
281. Tiersten H.F., . *Hamilton's Principle For Linear Piezoelectric Media*. In: *Proceedings of the IEEE*, 1523–1524 (1967)
282. Todhunter I. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials: Volume I. Galilei to Saint-Venant* (1886)
283. Todhunter I. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials: Volume II. Saint-Venant to Lord Kelvin* (1893)
284. Tölke F. *Zur Integration der Differentialgleichungen der drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen beliebiger Wandsärke* *Ing. Arch.* 9(3) 282–288 (1938)
285. Traas C.R. *Application of bivariate Bsplines to a plate bending problem* *Trends. Appl. Mech.: Proc. 7th Symp. Berlin etc.* 290–296 (1988)
286. Tsukimori K., Iwata K. *Strength evaluation of bellows subjected to torsion*. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* 58(555), 2125–2131 (1992)
287. Tzou H.S., Zhong J.P. *A linear theory of piezoelectric shell vibrations*. *J. of Sound and Vibr.* 175(1), 77–88 (1994)
288. Valenta I. *Theoretische Lösung der dünnwandigen Zylinderschale veränderlicher Dicke*. *Bull. Inst. Politechn. Jasi.* 7(3), 323–348 (1961)
289. Vrabie M., Ibanescu Mihaela, Jerca St. *Linear finite elements applied to the design of axialsymmetric cylindrical shells* *Bull. Inst. politechn. Iasi. Sec. 6.* 42(12), 13–22 (1996)
290. Wan H. *Mixed spline finite element analysis of shells of revolution* *Comput. Mech. '88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci. Vol. 1.* Berlin. 22.VII–122.VII.2 (1988)
291. Wang J.T.S., Lin C.C. *Stresses in openended cylindrical shells*. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 62(1), 229–230 (1995)

292. Wang J.G. Shen P.C. Solution of static cylindrical shells problems by spline functions *China Civ. Eng. J.* 17(2), 75–85 (1984)
293. Wong P. K., Miklowitz J., Scott R. A., Propagation of harmonic flexural waves in an infinite elastic rod of elliptical cross section. *J. Acoust. Soc. Am.* 40(2), 393–398 (1966)
294. Woo Kwang S., Basu Prodyot K. Analysis of singular cylindrical shells by pversion of FEM *Int. J. Solids and Struct.* 25(2), 151–165 (1989)
295. Woodward B., Kashtalyan M. Threedimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates *European Journal of Mechanics A/Solids.* 30(5), 705–718 (2011)
296. Yi W., Basavaraju C. Cylindrical shells under partially distributed radial loading *Trans ASME. J Pressure Vessel Technol.* 118(1), 104–108 (1996)
297. Yu H.R., Liang B., Li L. Optimal design of cylindrical shells *Struct. Optimiz.* 3(4), 252–256 (1991)

**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА****Статті у фахових виданнях України**

1. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43**(6), 82–92 (2007)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section. Int. Appl. Mech. **43**(6), 654–661 (2007)
2. Яремченко С.М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій. Доп. НАН України. № 11, 75–80 (2007)
3. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Анализ напряженного состояния ортотропных эллиптических цилиндрических оболочек в уточненной постановке при изменении геометрических параметров Прикл.механика.**44**(9), 53–62 (2008)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined Analysis of the Stress State of Orthotropic Elliptic Cylindrical Shells with Variable Geometrical Parameters. Int. Appl. Mech. **44**(9), 998–1005 (2008)
4. Яремченко С.М. Напружено-деформований стан гофрованих циліндричних оболонок в уточненій постановці. Доп. НАН України. № 4, 66–69 (2009)
5. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій змінної тов-

- щини в уточненій постановці. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Вип. 10, 63–69 (2009)
6. Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці. Вісник Київського національного університету імені Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 3, 61–64 (2011)
7. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem on the stress-strain state in hollow cylinders by means of spline-approximations. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* **53**(3), 127–134 (2010)
- Те саме: Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N. Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations. *J. Math. Sci.* **180**(2), 135–145 (2012)
8. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых прямоугольных в плане пологих ортотропных оболочек в уточненной постановке. *Доп. НАН України.* №2, 76–82 (2012)
9. Григоренко Я.М., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением в уточненной постановке. *Прикл. механика.* **48**(2), 106–113 (2012)
- Те саме: Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* **48**(2), 205–212 (2012)
10. Григоренко А.Я., Бергулев А.С., Яремченко С.Н. Численное решение задач об изгибе прямоугольных пластин. *Прикл. механика.* **49**(1), 101–112 (2013)
- Те саме: Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical

- solution of bending problems for rectangular plates. *Int. Appl. Mech.* **49**(1), 81–94 (2013)
11. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно деформированного состояния неоднородных полых цилиндров. *Прикл. механика.* **52**(4), 16–24 (2016)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders. *Int. Appl. Mech.* **52**(4), 342–349 (2016)
12. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях. *Доп. НАН України.* № 6, 31–37 (2016)
13. Григоренко А.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.Н. Расчет осесимметричного напряженно-деформированного состояния непрерывно неоднородного полого шара. *Прикл. механика.* **54**(5), 96–102 (2018)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere. *Int. Appl. Mech.* **54**(5), 577–583 (2018)
14. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. Об определении напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы. *Прикл. механика.* **54**(6), 94–101 (2018) 94-101.  
Te same: Grigorenko A.Ya., Pankrat'ev S.A., Yaremchenko S.N. Analysis of the stress-strain state of complex-shaped plates. *Int. Appl. Mech.* **54**(6), 695–701 (2018)
15. Григоренко А.Я., Панкратьев С.А., Яремченко С.Н. О влиянии ортотропии на напряженно-деформируемое состояние четырехугольных

- пластин различной формы. Прикл. механика. **55**(2), 101–112 (2019)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. On effect of orthotropy on stress-strain state of quadrangular plates of different shape. Int. Appl. Mech. **55**(2), 199–210 (2019)
16. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. Прикл. механика. **55**(5), 39–46 (2019)  
Te same: Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches. Int. Appl. Mech. **55**(5), 487–494 (2019)
17. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. О напряженно-деформированном состоянии эллиптических цилиндров в пространственной постановке. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **62**(2), 120–126 (2019)
18. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Крюков Н.Н., Яремченко С.Н. Расчет цилиндрических оболочек с косыми срезами в уточненной постановке на основе сплайн-аппроксимации. Прикл. механика. **56**(3), 76–83 (2020)  
Te same: Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Kryukov N.N. Yaremchenko S.N. Design of cylindrical shells with oblique cuts in refined statement using spline-approximation. Int. Appl. Mech. **56**(3), 326–333 (2020)
19. Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. Доп. НАН України. № 6, 21–29 (2020)

### Статті у закордонних виданнях

20. Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of static and dynamic behavior of anisotropic inhomogeneous shallow shells by spline approximation method. *Journal of Civil Engineering and Management*, **15**(1), 87–93 (2009).
21. Grigorenko A.Ya., Loza I.A., Yaremchenko S.N. Numerical analysis of free vibrations of piezoelectric cylinders. In: Abali B., Altenbach H., dell’Isola F., Eremeyev V., Öchsner A. (eds) *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. Advanced Structured Materials*, vol 108. Springer, Cham. 187–196 (2019)

### Праці апробаційного характеру

22. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. On some approaches to solving the problems of the theory of orthotropic shells with complex shape on the basis of classic and refined models. In: *35th Solid Mechanics Conference. Kraków, Poland, September 4-8, 2006, Book of Abstracts*, 427–428 (2006)
23. Григоренко Я.М., Яремченко С.М. Про вплив зміни параметрів ортотропії на напружений стан нетонких некругових циліндричних оболонок. В: *Збірник праць VII Міжнар. конф. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”*, Львів, 20-23 вересня 2006 р.: в 2-х т. Том 1 ,71–73 (2006)
24. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells with complex shape on basis of spline-approximation. In: *Abstracts. International Workshop “Research in Mechanics of Composites”*. November 26-29, 2006. Bad Herrenalb, Germany, 22 (2006)



25. Grigorenko Ya., Grigorenko A., Yaremchenko S. Numerical analysis of mechanical behavior of anisotropic inhomogeneous shell structures basing on spline-approximation. In: Abstract Book. 6th International Conference on Composite Science and Technology. 22-24 January, 2007. Durban, South Africa, 44 (2007)
26. Яремченко С.М. Про розв'язання задач теорії оболонок з використанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. В: Матеріали Всеукраїнської наукової конференції “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем”, Черкаси, 19-20 червня 2007 р., 48 (2007)
27. Яремченко С.М. Розв'язання крайових задач про згин прямокутних пластин з вільними контурами з використанням сплайн-функцій. В: Тези доповідей XI Міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців”, Миколаїв, 20-22 вересня 2007 р., 29–30 (2007)
28. Grigorenko A., Yaremchenko S. Spline approximation method for investigation of mechanical behaviour of anisotropic inhomogeneous shells. In: The 9th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques”. 16-18 May, 2007, Vilnius, Lithuania. Selected papers. Vol. 3, 918–924 (2007)
29. Grigorenko Ya., Yaremchenko S. Stress state of nonthin noncircular orthotropic cylindrical shells with variable thickness under different types of boundary conditions. In: Proceedings of the 36th Solid Mechanics Conference, Gdansk, Poland, September 9-12, 2008, 312–313 (2008)
30. Yaremchenko S.M. Solving static problem for elliptic cylindrical shells with free end in a refined formulation. In: Solid mechanics 2008. Young scientists'

- conference on the occasion of the 90th anniversary of the National academy of sciences of Ukraine and the S.P. Timoshenko institute of mechanics. Abstracts of papers. *Int. appl. mech.* **49**(3), 335–336 (2009)
31. Grigorenko A.Ya, Yaremchenko S.M. Static problems for noncircular cylindrical shells: Classical and refined theories. In: Proceedings of the 9th Conference “Shell Structures and Applications”, Vol.2, Gdansk-Jurata, 2009, Taylor and Francis Group, London, UK, 241–244 (2009)
  32. Grigorenko Ya.M. and Yaremchenko S.M. Solution of stress-strain problems for noncircular cylindrical shells based upon different models. In: The 10th International Conference “Modern Building Materials Structures and Techniques”. Selected papers, Vol.II. Lithuania, VGTV leidyklos, Technika, 885–889 (2010)
  33. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние полых цилиндров из функционально градиентных материалов. В: Матеріали міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки – 2014”, Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 45 (2014)
  34. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Осесимметричное напряженное состояние неоднородного полого шара. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції “Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовин” , 17-19 вересня 2015 р., Миколаїв, 49 (2015)
  35. Григоренко А.Я., Яремченко С.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния полых цилиндров из функционально-градиентных материалов. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції “Математичні проблеми технічної механіки - 2017” , 17-20 квітня 2017 р., Дніпродзержинськ, 11 (2017)

36. Григоренко О., Яремченко С. Напружений стан неоднорідних порожнистих циліндрів в тривимірній постановці. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. , Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 3, 19–20 (2018)

**ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ**

Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на

- 35th and 36th Solid Mechanics Conference (Краків, Польща, 2006, Гданськ, Польща 2008), “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур”(Львів, 2006),
- International Workshop “Research in Mechanics of Composites” (Бад-Герренальб, Німеччина 2006),
- 6th International Conference on Composite Science and Technology (Дурбан, ПАР, 2007),
- 9th and 10th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” (Вільнюс, Литва, 2007, 2010),
- Всеукраїнській науковій конференції “Актуальні проблеми аналізу та моделювання складних систем” (Черкаси, 2007),
- XI Міжнародній науково-методичній конференції “Сучасні проблеми природничих наук та підготовка фахівців” (Миколаїв, 2007),
- 9th Conference “Shell Structures and Applications” (Гданськ, Польща, 2009),
- Міжнародних конференціях “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпро – Кам’янське, 2014, 2017),
- Міжнародній науково-практичній конференції “Проблеми механіки та фізико-хімічного конденсованого стану речовин” (Миколаїв, 2015),
- Міжнародній конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” (Львів, 2018).

У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник — член-кор. НАН

України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2020 р.),

- науковому семінарі за напрямом “Механіка оболонкових систем” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник — д.т.н., професор П.З. Луговий, 2020 р.),
- науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н, професор І.А. Лоза, 2021 р.),
- на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2021 р.),
- на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України д.т.н., професор О.М. Гузь, 2020 р.)