

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**  
**Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка**

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ЮРЧУК ВАСИЛЬ МИКОЛАЙОВИЧ**

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ТЕОРІЯ ПООДИНОКИХ ХВИЛЬ В НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ  
МАТЕРІАЛАХ**

**ДОДАТКИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

113 – прикладна математика

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

науковий керівник:

**РУЩИЦЬКИЙ ЯРЕМА ЯРОСЛАВОВИЧ**

завідувач відділу реології

Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка

член-кор. НАН України доктор фіз.-мат. наук професор

КИЇВ-2019

## АНОТАЦІЯ

Юрчук В.М. Теорія поодиноких хвиль в нелінійно пружних матеріалах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико – математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04. Механіка деформівного твердого тіла. - Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, Київ, 2019.

У дисертації досліджено певний фрагмент теорії поодиноких хвиль в матеріалах, що деформуються пружно нелінійно. Поодинокі хвилі в матеріалах досліджені значно менше і досліджуються вони, головним чином, як один із видів простих хвиль. Тому розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах представляється актуальним з точки зору розвитку самої теорії хвиль. З практичної точки зору, знання закономірностей розповсюдження поодиноких хвиль корисно при інженерних розрахунках конструкцій, на які діє ударний імпульс. Основну увагу приділено еволюції початкового профіля поодиноких хвиль.

Досліджувались поодинокі поздовжна, поперечна та циліндрична хвилі в матеріалах (середовищах), що описуються пружним потенціалом Мурнагана, та еволюція їхнього початкового профіля, а також вплив нелінійності деформування матеріалу на поширення поодиноких хвиль, що описується цим же пружним потенціалом, та вплив початкової амплітуди, розміру підосви хвилі і параметрів матеріалу на характер еволюції початкового профілю.

Нелінійність основана на введенні потенціалу Мурнагана і наступному врахуванні квадратичної та кубічної нелінійностей в отриманих хвильових рівняннях. Нелінійні хвильові рівняння отримувались методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт зміщення для різних початкових профілів хвилі. Чисельний аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур комп'ютерного пакету «Wolfram

Mathematica 10.2». Вивчено плоскі поздовжні і поперечні та циліндричні радіальні хвилі.

Досліджено типи початкового профіля поодинокі хвилі, які є близькими до спостережуваних в експериментах профілів хвиль в матеріалах і які описуються аналітично відомими з математичної фізики функціями - у вигляді косинусоїдальної функції (гармонічний симетричний профіль), функції Гауса (дзвіноподібний симетричний профіль), Уіттекера та Макдональда (обидва профілі несиметричні).

Застосовано і розвинуто наближений підхід до розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, що дало змогу чисельно проаналізувати поставлені задачі про поширення хвиль.

Показано, що вплив нелінійності на поширення поздовжніх поодиноких хвиль з початковим гармонічним профілями (у вигляді косинусоїдальної функції), дзвіноподібним профілем (у вигляді функції Гауса) та профілем у вигляді функції Уіттекера є суттєвим. Також спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється симетрично, тоді як несиметричний профіль у вигляді функції Уіттекера деформується несиметрично.

Розв'язано задачу про поширення поперечної хвилі з дзвіноподібним профілем та зроблено порівняльний аналіз з задачею про поширення поздовжньої хвилі аналогічного профіля. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, де, зокрема, спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється симетрично у випадку поздовжньої хвилі і несиметрично у випадку поперечної, а відмінності в еволюції поперечної та поздовжньої хвиль викликані відмінностями моделі нелінійного деформування: вона є кубічна для поперечного та квадратична для поздовжнього.

Розв'язано задачу про поширення циліндричної радіальної хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, де, зокрема, спостережено, що еволюція початкового профіля відбувається з часом поширення хвилі.

Проведений теоретичний і числовий аналіз нелінійних поздовжних, поперечних та циліндричних поодиноких хвиль з різними початковими профілями, де вивчено вплив розміру підшови хвилі, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію профіля хвилі, показав, що вибір моделі нелінійного деформування і початкових параметрів хвилі є суттєвим в описі еволюції хвилі.

Достовірність даної роботи забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль, класичного підходу до аналізу поздовжних, поперечних та циліндричних хвиль, застосуванням апробованого методу послідовних наближень та методу обмеження на градієнт зміщення, використанням графічних алгоритмів пакету «Wolfram Mathematica 10.2», узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль і відповідністю міркуванням фізичного характеру.

Одержані результати дають можливість кращого розуміння впливу різних параметрів хвилі і матеріалу на поширення поодиноких хвиль в матеріалах, що описуються пружним потенціалом Мурнагана. Показано що застосування методу обмеження на градієнт зміщення до розв'язку хвильової задачі, дає практично прийнятні результати.

Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. Дисертанту належать аналітичні викладки, числа та графічна реалізація в системі символьних обчислень «Wolfram Mathematica 10.2». Визначення загального напрямку досліджень, постановка задач належать науковому керівникові Рущицькому Я.Я. Аналіз отриманих результатів проводився спільно з Я.Я. Рущицьким.

**Ключові слова:** нелінійна пружна поодинока хвиля, плоскі поздовжна і поперечна хвилі, циліндрична хвиля, пружний потенціал Мурнагана, квадратична і кубічна нелінійності, метод послідовних наближень, метод обмеження на градієнт зміщення, еволюція початкового профіля хвилі.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* Один приближенный метод анализа одиночных волн // Прикл. механика. – 2016. – 52, N3. – С. 83 – 94; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N3. – P. 282 – 290.
2. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* Числовой анализ эволюции плоской продольной нелинейно упругой волны с разными начальными профилями // Прикл. механика. – 2017. – 53, N2. – С. 88 – 96. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Numerical Analysis of Evolution Plane Longitudinal Nonlinearly Elastic Wave with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N1. – P. 104 – 111.
3. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* К эволюции SV-волны с колоообразным начальным профилем // Прикл. механика. – 2017. – 53, N3. – С. 77 – 81; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.*, Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile//Int.Appl.Mech. – 2017. – 53, N3. – P. 300 – 305.
4. *Юрчук В.Н., Рущицкий Я.Я.* Числовой анализ эволюции одиночной цилиндрической радиальной волны с начальным профилем в виде функции Макдональда // Прикл. механика. – 2018. – 54, N3. – С. 18 – 26; *Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J.* Numerical Analysis of Evolution of Solitary Cylindrical Radial Wave with an Initial Profile in the Form of Macdonald Function // Int. Appl.Mech.– 2018. – 54, N3. – P. 259 – 265.
5. *Юрчук В.Н.* О различии эволюции плоских продольной и поперечной колоообразных волн при их распространении в нелинейно упругих композитах// Прикл. Механика – 2019. – 55, N1. – С. 60 – 63; *Yurchuk V.N.* Difference in the evolution of longitudinal and transverse bell-shaped plane waves propagating in nonlinear elastic composites// Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N1. – P. 47 – 50.
6. *Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M.* On cubically nonlinear solitary plane transverse vertical wave in hyperelastic material // Abstracts of Int.Math.Conf. "Differential equations,computational mathematics, theory of functions and mathematical methods of mechanics" (to 100 birthday of G.N.Polozhii), Kiev, Ukraine. April 23 – 24, – 2014. – P. 125.

7. *Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M.* To analysis of solitary wave in nonlinear elastic material // Abstracts of the int. sci.-techn. conf. "Micro- and nanoheterogeneous materials: models and experiment". Lviv, Sept. 21 – 25, 2015. – P. 31 – 33.

8. *Юрчук В.М., Руцицький Я. Я.* Наближений спосіб аналізу поодинокі нелінійно пружної плоскої хвилі // Анотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. «Modern problems of thermomechanics», Львів, 22 – 24 вересня, – 2016. – P. 104 –105.

9. *Юрчук В.М., Руцицький Я.Я.* Еволюція поодинокіх хвиль з початковими профілями, що описуються функціями Чебишова-Ерміта // Анотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. « Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук » . Україна, Миколаїв, 22–24 вересня – 2016. – С. 92 – 94.

10. *Руцицький Я.Я., Юрчук В.М.* Незвичайна еволюція поодинокіх циліндричної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда // Ан-нотації доповідей XVIII International Conference. «DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 24-26 травня– 2017. Київ, Україна. – С. 133.

11. *Yurchuk V. M., Rushchitsky Ya. Ya.* Murnaghan's nonlinear elastic model: SV-wave with initial bell-shaped profile IV // Анотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми механіки». Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Кафедра теоретичної та прикладної механіки 27–30 серпня – 2017. Київ, Україна. – С. 108.

12. *Руцицький Я.Я., Юрчук В.М.* Моделювання еволюції поодинокіх хвиль в конструкційних матеріалах // Матеріали міжн. наук.- практ.конф.«Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання», Івано-Франківськ–Яремча, 14 – 19 травня – 2018.– С. 258-261.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.....</b>	<b>13</b>
Актуальність теми.....	13
Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.....	14
Мета і задачі дослідження.....	14
Методи дослідження.....	15
Наукова новизна одержаних результатів.....	15
Обґрунтованість та достовірність.....	16
Практичне значення одержаних результатів.....	16
Особистий внесок здобувача.....	16
Апробація результатів дисертації.....	17
Публікації.....	17
Структура та обсяг дисертації.....	17
Основний зміст дисертаційної роботи.....	18
<b>РОЗДІЛ 1 НЕОБХІДНІ ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ.....</b>	<b>20</b>
1.1. Класичні хвильові рівняння. Основні характеристики і термінологія .....	20
1.2. Класичні рівняння поширення плоских хвиль.....	22
1.3. Класичні лінійно пружні циліндричні хвилі.....	27
<b>РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЬ МУРНАГАНА НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ.....</b>	<b>30</b>
2.1. Необхідна попередня інформація.....	30
2.1.1. Про поділ теоретичних моделей пружних матеріалів на три групи.....	30
2.1.2. Про поділ деформацій на малі, помірні та великі.....	32

2.2.	Означення потенціалу Мурнагана. Важливі математичні і фізичні поняття.....	33
2.2.1.	Математичні вирази для потенціалу Мурнагана. Пружні постійні.....	33
2.2.2.	Найбільш важлива інформація щодо пружного потенціалу Мурнагана, що може виявитись корисною при інженерних розрахунках, у яких виникає необхідність враховувати нелінійність деформування.....	36
2.2.3.	Тензори напружень, що застосовуються в моделі Мурнагана.....	37
2.3.	Необхідні для числових розрахунків таблиці властивостей матеріалів в рамках нелінійної моделі Мурнагана.....	38
2.4.	Рівняння поширення хвиль (хвильові рівняння) в рамках моделі Мурнагана. Плоскі хвилі.....	41
2.4.1.	Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мурнагана.....	41
<b>РОЗДІЛ 3 ПООДИНОКІ ХВИЛІ (ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ).....</b>		<b>44</b>
3.1.	Прості хвилі (хвилі Ріманна) і поодинокі хвилі .....	44
3.1.1.	Прості хвилі (хвилі Ріманна).....	44
3.1.2.	Поодинокі хвилі. Профілі поодиноких хвиль в реальних експериментах.....	49
3.2.	Профілі поодиноких хвиль: у вигляді функції, яка описує гармонічну хвилю, і у вигляді функцій Чебишова – Ерміта, Уіттекера та Макдональда.....	53
3.2.1.	Профіль гармонічної хвилі.....	53
3.2.2.	Профіль у вигляді функції Чебишова-Ерміта.....	57
3.2.3.	Профіль у вигляді функції Уіттекера.....	58
3.2.4.	Профіль у вигляді функції Макдональда.....	60



<b>РОЗДІЛ 4 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПООДИНОКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ.....</b>	<b>63</b>
4.1. Про три підходи до аналізу.....	63
4.1.1. Метод послідовних наближень в знаходженні розв’язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі.....	63
4.1.2. Метод повільно змінних амплітуд в знаходженні розв’язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі.....	65
4.1.3. Наближений метод знаходження розв’язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення.....	68
4.2. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з гармонічним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі отриманих наближених розв’язків.....	72
4.2.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем. Аналіз на основі методу послідовних наближень і методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули. Градієнт зміщення. Основні формули.....	72
4.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	73
4.2.3. Аналіз впливу довжини хвилі хвилі на спотворення початкової форми профілю.....	73
4.2.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю.....	81
4.2.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю.....	88
4.3. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з дзвіноподібним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі отриманих наближених розв’язків.....	98

4.3.1. Квадратично нелінійна хвиля з дзвіноподібним профілем. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули.....	98
4.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі.....	98
4.3.3. Аналіз впливу величини підшви хвилі на спотворення початкової форми профілю.....	99
4.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю.....	105
4.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю.....	110
4.4. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера з урахуванням нелінійності деформування на основі отриманих автором наближених розв'язків.....	116
4.4.1. Квадратично нелінійна хвиля з профілем у вигляді функції Уіттекера. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули.....	116
4.4.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі.....	117
4.4.3. Аналіз впливу величини підшви хвилі на спотворення початкової форми профілю.....	117
4.4.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю.....	123
4.4.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю.....	128

<b>РОЗДІЛ 5 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПООДИНОКОЇ ПОПЕРЕЧНОЇ ХВИЛІ.....</b>	<b>135</b>
5.1. Постановка задачі, нелінійне хвильове рівняння.....	135
5.2. Про три підходи до аналізу нелінійного хвильового рівняння...	136
5.2.1. Метод послідовних наближень в знаходженні розв’язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поперечної гармонічної хвилі.....	136
5.2.2. Метод повільно змінних амплітуд в знаходженні розв’язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поперечної хвилі.....	138
5.2.3. Наближений метод знаходження розв’язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення.....	140
5.3. Числовий аналіз поперечної поодинокі хвилі з дзвіноподібним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі отриманих автором наближених розв’язків.....	143
5.3.1. Теоретичний аналіз поперечної поодинокі хвилі з дзвіноподібним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі двох наближених розв’язків.....	143
5.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі.....	146
5.3.3. Аналіз впливу величини підшви хвилі на спотворення початкової форми профілю.....	147
5.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю.....	152
5.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю.....	156

<b>РОЗДІЛ 6 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ПООДИНОКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ХВИЛЬ</b> .....	<b>161</b>
6.1. Постановка задачі, нелінійне хвильове рівняння.....	161
6.2. Про один підхід до аналізу нелінійного хвильового рівняння..	164
6.2.1. Наближений метод знаходження розв’язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення.....	164
6.3. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної поодинокі хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда на основі отриманих автором наближених розв’язків.....	165
6.3.1. Квадратично нелінійна хвиля з профілем у вигляді функції Макдональда. Аналіз на основі методу послідовних наближень і методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули....	165
6.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі.....	167
6.3.3. Аналіз впливу величини підшви хвилі на спотворення початкової форми профілю.....	167
6.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю.....	172
6.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю.....	177
<b>Висновки</b> .....	<b>180</b>
<b>Список Використаних Джерел</b> .....	<b>182</b>
<b>Додаток А</b> .....	<b>190</b>
<b>Додаток Б</b> .....	<b>195</b>
<b>Додаток В</b> .....	<b>227</b>
<b>Додаток Г</b> .....	<b>237</b>

## ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

**Актуальність теми.** Теорія нелінійних хвиль в пружних матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії пружності, який через властиві теорії нелінійних хвиль математичні труднощі не є закінченим до цього часу і розвивається у багатьох наукових центрах світової механіки. З іншого боку, сучасна промисловість виробляє незлічену кількість машин, конструкцій, приладів, устаткування, які або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення хвиль, або в яких часом спостерігаються хвильові процеси. Тому знання про хвилі є затребуваним продуктом для сучасної промисловості.

З-посеред маси різноманітних хвиль виділяються певні типи, затребуваність яких є особливою. Саме до таких відносяться поодинокі хвилі, знання про які є потрібним фактично у всіх галузях практичної діяльності людини – від медицини до архітектури, від машинознавства до історії. Підтвердження цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами *solitary waves in materials*.

Поодинокі хвилі мають давню історію. Вважається, що дослідження таких хвиль бере початок від спостережень Рассела 1838 рік поодиноких хвиль в одному із водних каналів Англії. З тих пір поодинокі хвилі традиційно вивчаються в рамках гідромеханіки. Переважаюча кількість результатів відноситься до особливого типу поодиноких хвиль – солітонів. Існує багато монографій і оглядів на цю тему.

Поодинокі хвилі в даній дисертаційній роботі розуміється як хвиля з залежним від просторових координат профілем, що концентрується в обмеженій частині простору і здебільшого має вигляд одного або кількох горбів. Відмінність так означеної поодинокі хвилі від солітону полягає у тому, що вона взаємодіє сама з собою і іншими хвилями, змінюючи при поширенні свій початковий профіль.

Поодинокі хвилі в матеріалах досліджені значно менше і досліджуються вони, головним чином, як один із видів простих хвиль. Тому розвиток

теорії поодиноких хвиль в матеріалах представляється актуальним з точки зору розвитку самої теорії хвиль. З практичної точки зору, знання закономірнос-тей розповсюдження поодиноких хвиль корисно при інженерних розрахунках конструкцій, на які діє ударний імпульс. Отже, розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах актуальний з точки зору як фундаментальних, так і прикладних аспектах теорії хвиль.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана у відповідності з основними напрямками наукових досліджень відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка; зокрема, з науково – дослідницькою темою № 1.3.1.399-16 «Ефекти локалізації напружень в околі криволінійних отворів та зовні-ніх границь в елементах композитних конструкцій» (І. 2016 – ІV. 2019, номер державної реєстрації 0115U005701). Отримані наукові результати увійшли до звіту науково-дослідної роботи № 1.3.1.399-16;

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* роботи є дослідження еволюції поодиноких хвиль. Вона включає:

- постановку задач про динамічні процеси в матеріалах (середовищах), що описуються пружним потенціалом Мурнагана;
- отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для поздовжних, поперечних та циліндричних хвиль в рамках двох різних наближених підходів до розв'язку хвильової задачі;
- вибір трьох типів початкового профіля поодинокі хвилі, які є близькими до реально спостережуваних профілів хвиль в матеріалах;
- теоретичний і числовий аналіз поширення поздовжних хвиль з початковим гармонічним і дзвіноподібним профілями з метою вивчення еволюції початкового профіля внаслідок слабкої нелінійності матеріалу;
- теоретичний і числовий аналіз поширення поперечних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера з метою вивчення еволюції початкового профіля внаслідок слабкої нелінійності матеріалу;

- теоретичний і числовий аналіз поширення циліндричних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Макдональда;
- проведення порівняльного аналізу нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих автором розв'язків, який включає вплив частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю.

*Об'єктом дослідження* є поодинокі поздовжня, поперечна та циліндрична хвилі в матеріалах (середовищах), що описуються пружним потенціалом Мурнагана, та еволюція їхнього початкового профіля.

*Предметом дослідження* є вплив нелінійності деформування матеріалу на поширення поодиноких хвиль, що описується пружним потенціалом Мурнагана, та вплив початкової амплітуди, розміру підшови хвилі і параметрів матеріалу на характер еволюції початкового профілю.

**Методи дослідження.** Дослідження проводилися в рамках нелінійної теорії пружності. Нелінійні хвильові рівняння отримувались методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт зміщення для різних початкових профілів хвилі. Чисельний аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур комп'ютерного пакету «Wolfram Mathematica 10.2».

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в таких положеннях, що виносяться на захист:

1. Отримані нові нелінійні хвильові рівняння для поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль в рамках двох різних наближених підходів до розв'язування хвильової задачі.
2. Розвинуто наближений метод обмеження на градієнт зміщення стосовно поодиноких хвиль.
3. Порівняно два різні методи розв'язування нелінійної задачі поширення поодинокі хвилі з початковим гармонічним та дзвіноподібним профілями в рамках двох перших наближень.

4. Проведено числове моделювання для різних типів матеріалів, підшов і максимальних амплітуд хвиль з метою виявлення впливу нелінійності матеріалу на процес еволюції (спотворення) початкового профілю хвилі.

5. Показано, що три досліджені типи поодиноких хвиль (з початковим профілем у вигляді функції Гауса, Уїттекера та Макдональда) поширюються за різними сценаріями еволюції. Симетричні профілі ( у вигляді функції Гауса) спотворюються симетрично – максимальна амплітуда зменшується, профіль розширюється, стаючи двогорбим.

6. Показано, що еволюція хвилі суттєво залежить від типу нелінійності деформування матеріалу (розглянуто квадратичну і кубічну нелінійності).

**Обґрунтованість та достовірність** забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль, класичного підходу до аналізу поздовжних, поперечних та циліндричних хвиль, застосуванням апробованого методу послідовних наближень та методу обмеження на градієнт зміщення, використанням графічних алгоритмів пакету «Wolfram Mathematica 10.2», узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль і відповідністю міркуванням фізичного характеру.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в можливості кращого розуміння впливу різних параметрів хвилі і матеріалу на поширення поодиноких хвиль в матеріалах, що описуються пружним потенціалом Мурнагана. Показано що застосування методу обмеження на градієнт зміщення до розв'язку хвильової задачі, дає практично прийнятні результати.

**Особистий внесок здобувача.** Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. Дисертанту належать аналітичні викладки, числа та графічна реалізація в системі символьних обчислень «Wolfram Mathematica 10.2». Визначення загального напрямку досліджень, постановка задач належать науковому керівникові Рушицькому Я.Я. Аналіз отриманих результатів проводився спільно з Я.Я. Рушицьким.



**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень, що включені в дисертацію, були представлені на таких міжнародних наукових конференціях: 1. Int. Math. Conf. (to 100 birthday of G.N.Polozhii), Kiev, Ukraine. April 23 – 24, 2014. 2. III Int. Sci. Conf. «Modern problems of mechanics» Taras Shevchenko National University of Kyiv Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kyiv, Ukraine, May 27-29, 2015. 3. Міжн.наук.-практ. конф. «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, Україна, 22 – 24 вересня, 2016. 4. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми термомеханіки», Львів, Україна, 23-25 травня, 2016. 5. DSMSI-2017 XVIII Int.Conf. «Dynamical system modeling and stability investigation», Kyiv, Ukraine, May 24-26, 2017. 6. IV Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» Київський національний університет імені Тараса Шевченка Кафедра теоретичної та прикладної механіки, Київ, Україна, 27–30 серпня, 2017. 7. Міжн. наук.- практ. конф. «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання», Івано-Франківськ – Яремча, Україна, 14 – 19 травня, 2018.

У повному обсязі дисертація доповідалася і обговорювалася на наукових семінарах: відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка, відділу поверхневих хвиль Інституту гідромеханіки НАН України, секції вченої ради Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка за напрямком «Механіка композитних і неоднорідних середовищ».

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 5 наукових робіт у фаховому виданні Міжнародному науковому журналі Прикладная механіка - «International Applied Mechanics».

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі анотації, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел із 99 найменувань на 8 сторінках та 4 додаків. Загальний обсяг дисертації становить 189 сторінок разом з 51 рисунками а також додатків які складаються з 57 сторінок в яких наведені 48 рисунків та 5 таблиць.

## **Основний зміст дисертаційної роботи.**

**Вступ** містить загальну характеристику роботи; проаналізовано стан наукової проблеми, обгрунтовано актуальність теми дисертації, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету роботи і задачі дослідження; відзначено наукову новизну і практичну цінність одержаних результатів; наведено дані про апробацію результатів дисертації та про публікацію результатів роботи, а також короткий опис структури дисертації.

**У першому розділі** розглянуто класичні хвильові рівняння поширення плоских та циліндричних хвиль а також основні характеристики і термінологія.

**Другий розділ** розглядаються основні моделі пружних матеріалів та модель нелінійного пружного деформування Мурнагана, в рамках якої і побудована дана робота.

**У третьому розділі** розглядаються прості хвилі та їх поведінка в різних середовищах. Розглядаються поодинокі хвилі, що виникали у експериментах у різних фізичних дослідах. А також профілі у вигляді функції Чебишова-Ерміта, профіль у вигляді функції Уіттекера і профіль у вигляді функції Макдональда.

**Четвертий розділ** розглянуті три підходи до розв'язування нелінійної хвильової задачі: метод послідовних наближень, метод повільно змінних амплітуд, та наближений метод, оснований на перетворенні хвильового рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Проведено теоретичний та числовий аналіз поширення поздовжних хвиль з початковим гармонічним та дзвіноподібним профілями.

**П'ятий розділ** розглянуто поширення нелінійно пружної плоскої поодинокі поперечної хвилі з початковим дзвіноподібним профілем. Проведено порівняльний аналіз із поздовжною поодинокію хвилею з тим же початковим профілем.

**Шостий розділ** розглянуто поширення нелінійно плоскої поодинокію циліндричної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи. Автор висловлює глибоку і щиру подяку науковому керівнику члену – кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Яремі Ярославовичу Рушицькому за постановку задачі, постійну консультацію, цінні та корисні поради і допомогу при виконанні роботи.

# РОЗДІЛ 1.

## НЕОБХІДНІ ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ

Необхідність внесення в текст цієї роботи певних фактів з лінійної теорії поширення пружних хвиль пов'язана з тим, що далі розглядатимуться нелінійні хвилі, які є розв'язками нелінійних хвильових рівнянь. Ці хвильові рівняння розв'язуватимуться наближеними способами, в яких використовуються розв'язки відповідних лінійних рівнянь.

### 1.1. Класичні хвильові рівняння. Основні характеристики і термінологія

Нагадаємо, що хвиля розуміється як поширення в просторі збурення певного стану фізичної чи іншої системи і розглянемо далі властивості хвилі. Хвилі відрізняються своєю геометричною формою (профілем) яка може бути найрізноманітнішою. На даний час розрізняють такі типи хвиль: 1. Поодинокі хвилі або імпульси. 2. Періодичні хвилі. 3. Пакети хвиль. 4. Біжучі хвилі. Однак є деякі хвилі, які не входять у цю класифікацію.

Крім профіля, хвилю також характеризують швидкість поширення і фаза. Ці поняття пояснюються за допомогою розв'язку Д'Алямбера класичного одновимірного хвильового рівняння

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Коли деякі початкові дані дорівнюють нулеві, то цей розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = u_{01}(vt - x) + u_{02}(vt + x). \quad (1.2)$$

Кожен з двох доданків в (1.2) називають біжучою хвилею. Перший описує хвилю, що поширюється в додатньому напрямку, другий - у зворотному нап-

рямку. Функції  $u_{01}$  і  $u_{02}$  задають форму хвилі. Величину  $\sigma = vt \pm x$  називають фазою і величину  $v$  - швидкістю хвилі (фазовою швидкістю хвилі).

Якщо біжуча хвиля є періодичною, то зручно її розв'язок (1.2) представити у вигляді

$$u(x,t) = u_{01} \left[ \frac{v}{\omega} (\omega t - kx) \right] + u_{02} \left[ \frac{v}{\omega} (\omega t + kx) \right], \quad (1.3)$$

де  $\omega$  є частотою хвилі,  $k = (\omega/v) = (2\pi f/v) = (2\pi/\lambda)$  - хвильовим числом,  $\lambda$  - до-вжиною хвилі і  $f$  - круговою частотою.

Найчастіше біжучі хвилі розглядаються для випадку гармонічних хвиль. Тоді формула (1.3) спрощується

$$u(x,t) = A \cos \omega \left[ t - (x/v) \right] \quad \div \quad u(x,t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (1.4)$$

Якщо період  $T = (1/f)$  і кругова частота  $f = (\omega/2\pi)$  відомі, то швидкість хвилі записується так:  $v = (\omega/k)$ ;  $v = \lambda f$ ;  $v = (\lambda/T)$ . Швидкість  $v$  визначає швидкість руху одного гребеня, чи однієї впадини, чи вузла на профілі хвилі.

Вираз  $\varphi(x,t) = \omega t - kx$  називають функцією фази або фазою. Фаза лінійно залежить від просторової змінної  $x$  і часу  $t$ .

Існує просте пояснення, чому  $v$  називають фазовою швидкістю. Фіксуємо значення фази, тим самим фіксуємо певну точку на профілі хвилі. Якщо порахувати для постійної фази повний диференціал  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \omega dt - k dx = 0$ , то з отриманої формули випливає, що для точок стаціонарної фази  $(dx/dt) = (\omega/k)$ . Тобто, ці точки рухаються зі швидкістю  $v$ . В результаті, спостерігач, який рухається зі швидкістю  $v$ , бачить (супроводжує) весь час одну й ту ж точку профіля хвилі. Отже, фазова швидкість – швидкість фіксованої точки на профілі хвилі, фаза якої є незмінною.

Розглянемо тепер таку характеристику хвиль як стан поляризації біжучої гармонічної хвилі. Нагадаємо, що така хвиля характеризується: 1. формою профіля – він завжди синусоїдальний; 2. амплітудою, яка є постійною і векторною величиною; 3. хвильовим вектором, який визначає напрямок поши-

рення хвилі; 4. частотою. Кут, утворений вектором амплітуди і хвильовим вектором, або трохи більш абстрактно, загальні співвідношення між амплітудою і фазою характеризують стан поляризації хвиль.

Розглянемо плоску хвилю зміщення. Коли коливання частинок при поширенні хвилі відбуваються вздовж напрямку поширення хвилі (тобто, згаданий вище кут дорівнює нулеві), то хвилю називають поздовжньо поляризованою. Коли коливання частинок при поширенні хвилі відбувається поперек напрямку поширення хвилі (тобто, згаданий вище кут є прямим), то хвилю називають поперечно поляризованою.

Розрізняють два види поперечно поляризованих хвиль - вертикально поляризовані (що відповідають вертикальним поперечним коливанням частинок) і поперечно поляризовані (що відповідають вертикальним поперечним коливанням частинок). Стан поляризації впливає суттєво на взаємодію хвилі (з іншими хвилями, самої з собою, з іншими фізичними полями і так далі).

Поняття поляризації переноситься на хвилі, які вже не є гармонічними. Це стосується хвиль з більш складним профілем, дисперсивних хвиль, а також неперіодичних і поодиноких хвиль.

## 1.2. Класичні рівняння поширення плоских хвиль

Почнемо з того, що серед усіх типів хвиль, плоскі хвилі є найбільш вивченими. Виберемо певний напрямок, який визначається одиничним вектором  $\vec{n}^o$  і припустимо, що плоска хвиля є хвилею Д'Алямбера, що поширюється в напрямку  $\vec{n}^o$  з постійною швидкістю  $v$  і амплітудою  $\vec{u}^o$

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}^o f \left[ t - (\xi/v) \right], \quad (1.5)$$

$$\xi = \vec{n}^o \cdot \vec{r} = n_1^o x_1 + n_2^o x_2 + n_3^o x_3, \quad \vec{n}^o = \{n_k^o \equiv \cos \alpha_k^o\}, \quad \vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Існує пояснення терміну “плоска хвиля” щодо виразу (1.5). У фіксований момент часу функція  $\vec{u}(x,t)$  є постійною на площині, яка задається рівнян-

ням  $\xi = \vec{n}^o \cdot \vec{r} = n_1^o x_1 + n_2^o x_2 + n_3^o x_3 = \text{const}$ . Нехай хвиля рухається протягом деякого часу  $\Delta t$ , тоді вектор  $\vec{r}$  змінюється на величину  $\Delta\vec{r}$ . Якщо при цьому аргумент функції  $\vec{u}(x, t)$  є незмінним, то функція теж незмінна. Але це означає що напрямок  $\vec{k}$  є саме напрямком, в якому рухається хвиля. З іншого боку, між величинами  $\Delta t$  і  $\Delta\vec{r}$  існує зв'язок

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = \vec{k} (\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \omega(t + \Delta t) = \text{const} \quad \text{або} \quad \vec{k} \Delta\vec{r} = \omega \Delta t. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) може розглядатися як рівняння означеної вище площини, але конгруентно зміщеної в просторі на відстань  $|\Delta\vec{r}|$ . Тобто, ця площина рухається в напрямку хвильового вектора  $\vec{k}$ . В термінах теорії хвиль, написане вище формулюється так: гармонічна хвиля (1.5) має фронт у вигляді площини і цей фронт рухається в напрямку  $\vec{k}$ . Саме тому хвилю (1.5) називають плоскою хвилею.

Ще раз зафіксуємо, що для характеристики плоскої хвилі потрібні чотири параметри: I. Довільна форма профіля, що описується достатньо гладкою функцією  $f$ . II. Довільна амплітуда  $\vec{u}^o$ . III. Фіксована поляризація амплітуди (напрямок вектора  $\vec{u}^o$ ). IV. Фіксована фазова швидкість  $v$ . Розглянемо рівняння руху лінійної теорії пружності, записане в зміщеннях для довільного випадку анізотропії пружних властивостей

$$C_{iklm} u_{m,lk} - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (1.7)$$

Підставимо тепер представлення плоскої хвилі (1.5) в (1.7) і введемо тензор Крістоффеля  $\Gamma_{ik} = C_{ijk} k_j k_l$ . В результаті отримаємо рівняння Крістоффеля для плоских хвиль

$$\Gamma_{ik} u_k^o = \rho v^2 u_i^o. \quad (1.8)$$

З рівняння (1.8) випливає, що компоненти вектора  $\vec{u}^o$ , які визначають поляризовану хвилю, є власними векторами тензора  $\Gamma_{ik}$  і відповідними власними значеннями є  $\rho v^2$ , які визначають фазову швидкість поляризованої хвилі.

Таким чином процедура Крістоффеля зводить задачу визначення параметрів плоских хвиль до задачі на знаходження власних значень тензора  $\Gamma_{ik}$ .

Оскільки тензор гіперпружних властивостей  $C_{ijkl}$  симетричний, то тензор Крістоффеля  $\Gamma_{ik}$  також симетричний. Отже, його власні значення є дійсні величини і власні вектори ортогональні. Густина  $\rho$  є додатною величиною, тому власні значення теж додатні величини. Це означає що фазова швидкість плоскої хвилі є дійсною величиною і хвиля дійсно поширюється.

Розглянемо випадок ізоотропії і запишемо тензор Крістоффеля

$$\Gamma_{ik} = (\lambda + \mu)k_i^o k_k^o + \mu\delta_{ik} \quad (1.9)$$

і рівняння Крістоффеля

$$(\lambda + \mu)(\vec{k}^o \cdot \vec{u}^o)\vec{k}^o = (\rho v^2 - \mu)\vec{u}^o. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) допускає два варіанти поляризації. Перший варіант відповідає колінеарності хвилі, тут вектори зміщення описують поздовжню хвилю з постійною швидкістю  $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ . Другий варіант визначає нескінченне число напрямків, що впливає з ортогональності хвилі і вектора зміщення, і відповідає поперечній хвилі з постійною фазовою швидкістю  $v = \sqrt{\mu/\rho}$ . Таким чином, вибір певного напрямку поширення плоскої хвилі не впливає на хвильові характеристики: число хвиль (тільки дві), фазову швидкість і взаємну поляризацію.

Розглянемо тепер випадок поперечних трансверсально ізоотропних властивостей середовища поширення. Коли хвилі поширюються вздовж осі симетрії, то можливі два варіанти поляризації і, відповідно, два варіанти типів хвиль: поздовжня хвиля з фазовою швидкістю  $v_{ph} = \sqrt{(C_{3333}/\rho)}$  і поперечна хвиля в площині ізоотропії з поляризацією вздовж осі абсцис і фазовою швидкістю  $v_{ph} = \sqrt{(C_{1313}/\rho)}$ .

Коли хвилі поширюються перпендикулярно до осі симетрії, то можливі три типи поляризації: поздовжня хвиля з поляризацією в напрямку осі абсцис



і фазовою швидкістю  $v_{ph} = \sqrt{(C_{1111}/\rho)}$ ; поперечна хвиля з поляризацією в напрямку осі симетрії і фазовою швидкістю  $v_{ph} = \sqrt{(C_{4444}/\rho)}$ ; поперечна хвиля з поляризацією в напрямку осі ординат, і фазовою швидкістю, яка представляється у наступному вигляді  $v_{ph} = \sqrt{((1/2)(C_{1111} - C_{2211})/\rho)}$ .

В ортотропних матеріалах три поляризовані хвилі поширюються вздовж кожної з трьох осей симетрії - поздовжньої, поперечної горизонтальної поляризації і поперечно вертикальної поляризації. Деякі з них мають однакові фазові швидкості, як у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів.

Наступний крок при вивченні плоских хвиль в ізотропних матеріалах оснований на припущенні, що напрямок поширення збігається з віссю абсцис таким чином, що

$$\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}. \quad (1.11)$$

Підстановка представлення (1.11) в рівняння руху дає три лінійні хвильові рівняння

$$\rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_2 - \mu u_{2,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_3 - \mu u_{3,11} = 0. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.12) описують одну поздовжню плоску хвилю ( $P$ -хвилю), дві поперечні плоскі хвилі - горизонтально поляризовану хвилю ( $SH$ -хвилю) і вертикально поляризовану хвилю ( $SV$ -хвилю).

Відповідні розв'язки рівнянь (1.12) у вигляді гармонічних хвиль є такими

$$u_1(x_1, t) = u_1^o e^{i(k_L x_1 - \omega t)}, \quad k_L = (\omega/v_L), \quad v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1.13)$$

$$u_2(x_1, t) = u_2^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad u_3(x_1, t) = u_3^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad k_T = (\omega/v_T), \quad v_T = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (1.14)$$

Таким чином, плоскі гармонічні хвилі поширюються в лінійнопружному ізотропному середовищі з постійною швидкістю і є найпростішими хвилями, що не є дисперсійними хвилями.

Покажемо чотири стандартні зображення для пружних плоских гармонічних хвиль: один тривимірний хвильовий графік "амплітуда хвилі - просторова координата - час" і три двовимірні графіки "амплітуда - просторова

координат-та" (з фіксованим моментом часу), "фазова швидкість - частота " і "хвильове число - частота"(два останніх є так званими дисперсійними кривими в загаль-ному випадку, в цьому найпростішому випадку вони є прямими лініями).

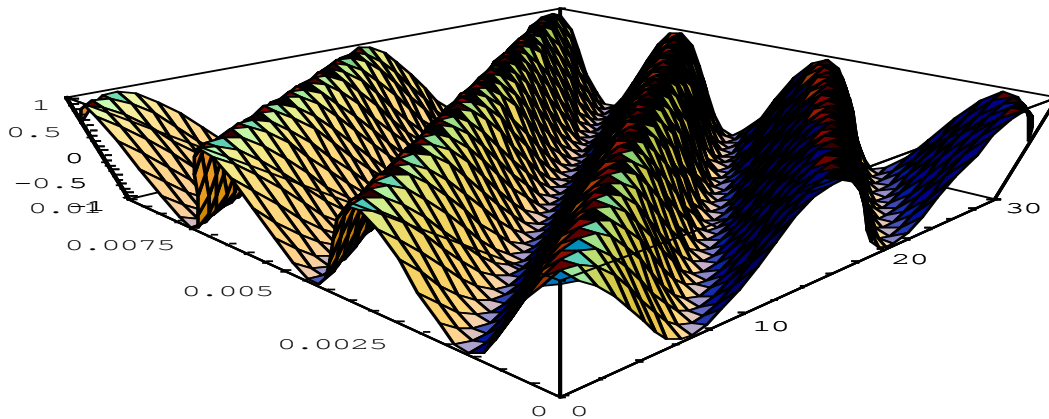


Рис. 1.1. Залежність амплітуди плоскої хвилі від просторової координати і часу

Всі графіки відповідають пружній поздовжній плоскій хвилі, що поширюється з частотою  $\omega = 100$  КГц в сталі з властивостями  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  КГ/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 94$  МПа,  $\mu = 79$  МПа. Хвильове число і швидкість дорівнюють  $k_L = (\omega/v_L) = 17,6$  м;  $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 5,68$  км/сек. Фаза хвилі:  $z = kx_1 - \omega t = 17,6x_1 - 100\,000t$ , коли відстань вимірюється в метрах, а час в секундах.

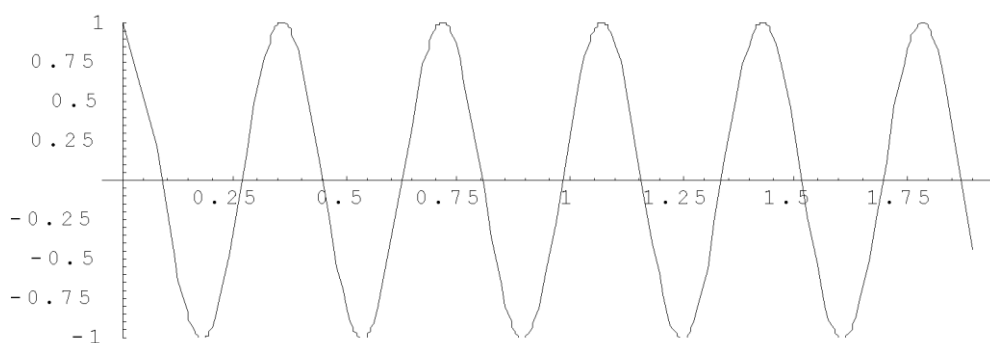


Рис. 1.2. Залежність амплітуди хвилі від просторової координати

На рисунках 1.1 і 1.2 показано графіки хвиль відповідно до формули  $u(x_1, t) = u^o \cos(17,6x_1 - 100\,000t)$  де початкова амплітуда хвилі  $u^o$  вважається малою  $u^o = 1 \cdot 10^{-4}$  м і відповідає на графіку одиниці.

Рисунки 1.3 і 1.4 відповідають довільній частоті і показують дві прямі лінії

$$v_{ph} = v_{ph}(\omega) = 5,68, k = 0,176\omega.$$

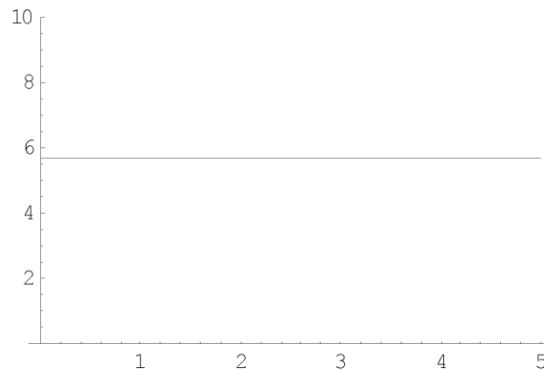


Рис. 1.3. Залежність фазової швидкості від частоти

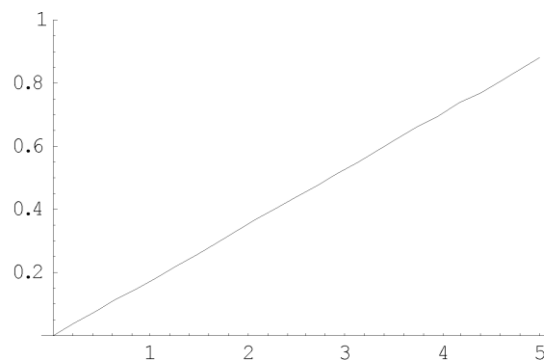


Рис. 1.4. Залежність хвильового числа від частоти

Таким чином, плоскі пружні гармонічні хвилі відображають найпростішу поведінку хвилі: синусоїдальний профіль не спотворюється з поширенням, хвиля не є дисперсійною - фазова швидкість постійна і не залежить від частоти, хвильове число лінійно залежить від частоти.

### 1.3. Класичні лінійно пружні циліндричні хвилі

Класична циліндрична хвиля є хвилею, яка виникає в нескінченному лінійно пружному тілі з циліндричною порожниною, до поверхні  $r = r_0$  якої прикладено однорідний у просторі і гармонічний у часі тиск

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} \quad (p_0 = \text{const}).$$

Якщо вибрати циліндричну систему координат  $O r \varphi z$  у такий спосіб, що вісь  $Oz$  співпадає з віссю порожнини, то задача про рух хвилі стає осесиметричною.

метричною і всі функції, які описують рух, залежатимуть від однієї просторової координати – радіуса  $r$  - і часу  $t$ .

У цьому випадку лише одне з трьох зміщень – радіальне зміщення – не є нульовим  $u_r(r,t) \neq 0$ ,  $u_\varphi(r,t) = u_z(r,t) = 0$  і лише три напруження відрізняються від нуля –  $\sigma_{rr}(r,t)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$ ,  $\sigma_{zz}(r,t)$ .

Компоненти тензорів деформації і напружень виражаються формулами

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r r, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{rz} = 0,$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r^2} + 2\mu \frac{u_r}{r^3}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right).$$

Ці компоненти можна виразити через потенціал  $\Phi(r,t)$  формулами

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \Delta_r \Phi,$$
(1.15)

у яких введений оператор Лапласа  $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ .

Потенціал  $\Phi(r,t)$  задовольняє рівняння

$$v_L^2 \Delta_r \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$
(1.16)

Це рівняння має відомий розв'язок через функцію Ханкеля (циліндричну функцію) у вигляді так званої циліндричної хвилі.

Циліндрична хвиля поширюється вздовж радіальної координати перпендикулярно до осі симетрії від поверхні порожнини до нескінченності. Вона задовольняє на нескінченності умови Зоммерфельда (умови скінченності і випромінювання). Розв'язок записується через функцію Ханкеля першого роду і нульового індекса

$$\Phi(r,t) = \Phi_o H_o^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} \quad (\Phi_o = \text{const}).$$
(1.17)

Як можна бачити з формул (1.16),(1.17), цей розв'язок включає швидкість хвилі (хвильове число), яка співпадає з швидкістю плоскої поздовжньої хвилі. Але функція Ханкеля з розв'язку (1.17) суттєво відрізняється від експоненціальної функції з розв'язку для плоскої поздовжньої хвилі. Циліндрична хвиля (1.17) вже не є гармонічною (можна лише сказати, що вона є асимптотично гармонічною) і її амплітуда (а отже і інтенсивність) спадає зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи від часу поширення хвилі. Невідома початкова амплітуда  $\Phi_o$  визначається з граничної умови на поверхні порожнини, де задане гармонічне коливання  $\sigma_{rr}(r_o, t) = -p_o e^{i\omega t}$ , і дорівнює

$$\Phi_o = \frac{p_o}{k_L(2\mu + \lambda k_L)H_o^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o}H_1^{(1)}(k_L r_o)}.$$

Тоді поширення циліндричної хвилі радіального зміщення описується вже двома функціями Ханкеля і задається формулою

$$u_r(r, t) = \frac{p_o k_L}{k_L(2\mu + \lambda k_L)H_o^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o}H_1^{(1)}(k_L r_o)} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}. \quad (1.18)$$

Таким чином, для кожного фіксованого моменту часу профіль циліндричної хвилі (1.18) повторює графік функції Ханкеля  $H_1^{(1)}(k_L r)$  (цей графік починається з поверхні порожнини  $r = r_o$  і закінчується в нескінченності).

Амплітуда циліндричної хвилі (1.18) зменшується зі збільшенням відстані, що пройшла хвиля. Для великих відстаней поширення цієї циліндричної хвилі її параметри будуть дуже близькими до параметрів відповідної плоскої поздовжньої хвилі (крім амплітуди).

## РОЗДІЛ 2.

### МОДЕЛЬ МУРНАГАНА

## НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

### 2.1. Необхідна попередня інформація

#### 2.1.1. Про поділ теоретичних моделей пружних матеріалів на три групи

Класична механіка матеріалів розділяє теоретичні моделі пружного деформування на три групи і створила для них відповідні назви: гіперпружні, пружні і гіпопружні матеріали. Приставка *giper* - означає сильне збільшення чого-небудь проти норми і приставка *gipo* - означає сильне зменшення чого-небудь проти норми. Тому вважається, що гіперпружні матеріали мають властивість пружності в більшій степені, ніж пружні, тоді як гіпопружні мають властивість пружності в меншій степені, ніж пружні [55].

Модель нелінійного пружного деформування Мурнагана відноситься до групи гіперпружних матеріалів.

Перш ніж формулювати означення гіперпружності, треба означити основні кінематичні і кінетичні поняття механіки матеріалів.

В теорії деформування тіла як зміни його початкової форми використовують поняття, пов'язані з геометрією тіла (кінематичні) і пов'язані з діючими на тіло і всередині тіла силами (кінетичні) [1,2,3,51,52,55]. Тіло в механіці задають як область тривимірного простору  $\mathbb{R}^3$ , в кожній точці якого задана густина маси  $\rho$ . В  $\mathbb{R}^3$  може бути задана лагранжева  $\{x_k\}$  чи ейлерова системи координат  $\{X_k\}$ .

До понять кінематики відносять конфігурацію  $\chi$ , вектор зміщення  $\vec{u} = \{u_k\}$  тензор деформацій  $\varepsilon_{ik}$  і тензор поворотів  $\omega_{ik}$ . До понять кінетики від-

носять зовнішні і внутрішні сили, включаючи тензори внутрішніх напружень.

Конфігурацію тіла в момент часу  $t$  називають актуальною, тоді як конфігурацію тіла в довільно обраний початковий момент часу  $t^o$  називають відліковою. При описі моделі Мурнагана зазвичай використовується тензор деформації Коші-Гріна, який задається за відомим вектором переміщень  $\vec{u}(x_k, t)$  в лагранжевій системі координат  $\{x_k\}$  і в відліковій конфігурації

$$\varepsilon_{nm}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{i,m}). \quad (2.1)$$

Гіперпружність матеріалу визначають за ознакою, згідно якою питома внутрішня енергія (енергія пружного деформування, потенціал)  $W$  є аналітичною функцією компонентів тензора деформацій, віднесених до природного стану. З точки зору математичного формалізму, аналітичність енергії  $W(\varepsilon_{nm})$  дозволяє представити внутрішню енергію, залежну від шести незалежних змінних  $\varepsilon_{IK}$ , у вигляді розкладу у ряд Тейлора в околі "точки" з нульовими координатами  $\varepsilon_{IK} = 0$  (при цьому покладається, що два перших члени ряду дорівнюють нулю) [1-4]

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{IK}) = & (1/2!) \left[ \left( \partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijkl} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ & + (1/3!) \left[ \left( \partial^3 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijklmn} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Найбільші труднощі в побудові нелінійних моделей виникали при переході від лінійного закону Гука до більш складних нелінійних залежностей як для ізотропних, так і для анізотропних матеріалів. Простіше було з ізотропними матеріалами. Тут запропоновано ряд придатних для аналізу моделей, які основані на відповідних пружних потенціалах.

Нагадаємо, що для ізотропних матеріалів пружні сталі є такими

$$C_{ijkl} \equiv \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$C_{ijklmn} = 2C\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + 2B(\delta_{ij}I_{klmn} + \delta_{kl}I_{mnij} + \delta_{mn}I_{ijkl}) + \\ + (1/2)A(\delta_{ik}I_{jlmn} + \delta_{il}I_{jkmn} + \delta_{jk}I_{ilmn} + \delta_{jl}I_{ikmn}).$$

В позначеннях Фойхта  $C_{ijkl} \equiv C_{IJ}$ ,  $C_{ijklmn} \equiv C_{IJK}$  і для випадку властивостей ізотропії внутрішня енергія (2.2) має вигляд

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)C_{12}(\varepsilon_{mn})^2 + (1/2)(C_{11} - C_{12})(\varepsilon_{ik})^2 + \\ + (4/3)C_{456}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + C_{144}(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mn} + (1/6)C_{123}(\varepsilon_{mn})^3 + \dots \quad (2.3)$$

Найбільш застосовними є потенціали Мурнагана, Рівліна-Саундерса, Муні, Йона, Блетца-Ко, Хазановича, Трелоара, Огдена-Саундерса, Сіньюоріні. Всі ці моделі запропоновані на основі умоглядних міркувань (за виразом Лур'є [2]), відносяться до теоретичних побудов феноменологічного характеру і припускають в кінцевому рахунку, визначення присутніх в потенціалах фізичних постійних, методами які не пов'язані з феноменологічними міркуваннями (головним чином, експериментальними способами).

### 2.1.2. Про поділ деформацій на малі, помірні та великі

Величина деформації визначається за величиною градієнтів деформації  $u_{i,k}$ . Якщо вони малі в порівнянні з одиницею  $|u_{i,k}| \ll 1$ , то відповідні деформації (2.1) називають малими. При цьому деформації (2.1) можуть залишатися нелінійними [3], що, зокрема, справедливо в разі моделі Мурнагана. У разі малих деформацій компоненти тензорів деформації і обертань настільки малі, що форми недеформованого і деформованого тіла можуть наближено вважатися однаковими.

Помірні деформації задаються різними обмеженнями на їх величину. Наприклад, в роботі [5] розглядаються помірно великі деформації, в даній роботі вважають помірно малими такі деформації, які в разі простого зсуву перевищують значення кута зсуву, прийняті при заміні тангенса кута зсуву



самим кутом або в разі об'ємного стиснення призводять до слабкої зміни початкового одиничного об'єму.

Великі деформації розуміють як такі, коли компоненти тензорів деформації і обертань настільки великі, що форма недеформованого і деформованого тіла істотно відрізняються.

Модель Мурнагана застосовна до всіх трьох типів деформацій.

## 2.2. Означення потенціалу Мурнагана.

### Важливі математичні і фізичні поняття

#### 2.2.1. Математичні вирази для потенціалу Мурнагана. Пружні постійні

Ця модель основана на пружному потенціалі, запропонованому Френсісом Домініком Мурнаганом [54]. Пружний потенціал Мурнагана є кубічним щодо тензора деформацій. Найчастіше він записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Гріна  $\varepsilon_{ik} = (1/2)(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{m,i}u_{m,k})$

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3 \quad (2.4)$$

або через перші алгебраїчні інваріанти  $I_k$  цього тензора

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3}C I_1^3. \quad (2.5)$$

Тут  $I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ik})$ ,  $I_2 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^2]$ ,  $I_3 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^3]$ ;  $\lambda$ ,  $\mu$  є пружними постійними (постійними другого порядку),  $A$ ,  $B$ ,  $C$  є пружними постійними Мурнагана (постійними третього порядку).

Необхідно звернути увагу на те, що вираз (2.4) відповідає точному представленні внутрішньої енергії у вигляді ряду Тейлора (2.3). Також існує зв'язок між постійними  $C_{IJK}$  и  $A, B, C$

$$\begin{aligned}
C_{111} &= 2(A + 3B + C), C_{112} = 2(B + C), C_{123} = 2C, \\
C_{144} &= B, C_{166} = (1/2)A + B, C_{456} = (1/4)A.
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Модель Мурнагана можна вважати класичною в нелінійній теорії гіперпружних матеріалів, вона враховує всі квадратичні і кубічні складові з формули (2.3) і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів. Якщо об'єднати дані про постійні моделі Мурнагана, що приведені в книгах [1, 2, 17], то отримаємо досить повну інформацію для десятків матеріалів. Як впливає з [1,2,10,17], в наведених там таблицях, постійних моделі Мурнагана, дві постійні Ляме відповідають значенням, визначеним для досліджуваних матеріалів в рамках моделі лінійної теорії пружності, тоді як три постійні Мурнагана визначалися з дослідів з розповсюдження хвиль.

Наприклад, в [1] пружні постійні визначалися з дослідів на поширення акустичних поздовжніх і поперечних плоских поляризованих хвиль в матеріалах з початковими напруженнями. Отримані формули (далі показана одна, позначення автора книги [1, том 2, с.55, ф. (1.206)]) мають вигляд

$$b = (2\lambda\mu/\sigma_{33}^0) \left\{ \left[ \frac{((C_{Sx_3})^2 - (C_S^0)^2)}{(C_S^0)^2} \right] + \left[ \frac{((C_{Sx_2})^2 - (C_S^0)^2)}{(C_S^0)^2} \right] ((\lambda + 2\mu)/2\lambda) \right\}$$

Другий приклад взятий з книги [17], де показано, як визначаються постійні Мурнагана  $l = B + C$ ,  $m = (1/2)(A + B)$ ,  $n = A$  з дослідів з акустичними хвилями. Отримані формули (далі показана одна, позначення автора книги [17, с.530, ф. (24)], АЕС<sub>ik</sub> мають сенс акустоелектричних констант) досить прості

$$m = \left[ 2(\lambda + \mu)/(3\lambda + 2\mu) \right] \left[ \lambda \text{АЕС}_{32} + 2(\lambda + \mu) \text{АЕС}_{31} \right] - 2\mu.$$

Як впливає з формул (2.4) і (2.5), вони являють собою найбільш повні представлення пружного потенціалу для гіперпружних матеріалів в рамках нехтування доданками від четвертого і далі порядків у записі внутрішньої енергії через ряд Тейлора. Тому п'ятиконстантна модель Мурнагана є найбільш повною моделлю нелінійного деформування з кубічною нелінійністю.

Вона враховує всі три перші інваріанти тензора деформацій. Часом зустрічаються інші представлення

$$W(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3) = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\widehat{I}_1^2 - 2\mu\widehat{I}_2 + n\widehat{I}_3 - 2m\widehat{I}_1\widehat{I}_2 + \frac{l+2m}{3}\widehat{I}_1^3,$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{4}{3}\nu_3 I_3 + \nu_2 I_1 I_2 + \frac{1}{6}\nu_1 I_1^3, \quad (2.7)$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{c}{3}I_3 + b I_1 I_2 + \frac{a}{3}I_1^3.$$

В (2.7) використані головні інваріанти  $\widehat{I}_k$  тензора деформацій Гріна.

Пружні постійні третього порядку, які використовуються в представленнях (2.4), є зручними в певних задачах механіки і при певних експериментах щодо нелінійного деформування.

Константи	$l, m, n$	$A, B, C$	$\nu_1, \nu_2, \nu_3$	$a, b, c$
$l$		$B+C$	$\frac{1}{2}\nu_1 + \nu_2$	$a+b$
$m$		$\frac{1}{2}A+B$	$\nu_2 + 2\nu_3$	$b + \frac{1}{2}c$
$n$		$A$	$4\nu_3$	$c$
$A$	$n$		$4\nu_3$	$c$
$B$	$m - \frac{1}{2}n$		$4\nu_3$	$b$
$C$	$l - m + \frac{1}{2}n$		$\frac{1}{2}\nu_1$	$a$
$\nu_1$	$2l - 2m + n$	$2C$		$2a$

$v_2$	$m - \frac{1}{2}n$	$B$		$b$
$v_3$	$\frac{1}{4}n$	$\frac{1}{4}A$		$\frac{1}{4}c$
$a$	$l - m + \frac{1}{2}n$	$C$	$\frac{1}{2}v_1$	
$b$	$m - \frac{1}{2}n$	$B$	$v_2$	
$c$	$n$	$A$	$4v_3$	

В основних наукових монографіях з нелінійної теорії пружності у яких детально описана модель Мурнагана (далі такими вважатимемо монографії Лур'є [15], Гузя [12] та Гаука [16]) дається таблиця переходу від однієї з цих систем до іншої. Ця таблиця показана нижче, вона скопійована з книги Гузя [12] (див. теж [13]).

2.2.2. Найбільш важлива інформація щодо пружного потенціалу Мурнагана, що може виявитись корисною при інженерних розрахунках, у яких виникає необхідність враховувати нелінійність деформування

1. Він є основою для моделі Мурнагана нелінійного пружного деформування матеріалів.
2. На даний час цей потенціал є найчастіше застосовним в задачах про нелінійне пружне деформування, коли деформації вважаються малими (зокрема, коли задача про деформування є геометрично лінійною).
3. Він достатньо повно враховує особливості нелінійного пружного деформування (враховує всю інформацію, закладену в тензор деформації, який

характеризується шістьма незалежними компонентами чи трьома незалежними інваріантами).

### 2.2.3. Тензори напружень, що застосовуються в моделі Мурнагана

Слід зазначити, що в нелінійних балансованих і визначальних рівняннях для моделі Мурнагана можна використовувати два тензори напружень [1,2, 6,16]: несиметричний тензор напруження Піоли-Кірхгоффа  $t_{ik}(x_k, t)$ , який утворює впорядковану пару з  $u_{i,k}$  і включає напруженість в момент часу  $t$  на площу елементарного об'єму в деформованому стані, які вимірюються на одиницю площі в недеформованому стані; симетричний тензор напружень Лягранжа  $\sigma_{ik}(x_n, t)$ , який утворює впорядковану пару з  $\varepsilon_{ik}$  і включає напруженість в момент часу  $t$  на площу елементарного об'єму в деформованому стані, які вимірюються на одиницю площі в недеформованому стані.

Далі використано певне спрощення потенціалу Мурнагана, яке запропоноване у свій час в нелінійній акустиці. Тут у представленні потенціалу через зміщення зберігаються лише нелінійності порядку 2 і 3

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left( \mu + \frac{1}{4} A \right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} + \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} + \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3. \quad (2.8)$$

Потенціал є далі нелінійним. Однак ця нелінійність тепер трансформувалася з не лінійності щодо тензора деформацій вона перетворилася в нелінійність щодо градієнтів зміщень.

Загальна схема переходу від потенціалу до хвильових рівнянь фактично складається з двох кроків: спочатку слід записати конститутивні рівняння і далі використати рівняння руху. В результаті отримується якийсь нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме. Зокрема, в рамках підходу (2.8) він є таким

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mm} = F_m. \quad (2.9)$$

Справа в рівнянні (2.9) зібрані всі нелінійні члени

$$\begin{aligned} F_i = & \left[ \mu + (1/4)A \right] (u_{l,kk} u_{l,i} + u_{l,kk} u_{i,l} + 2u_{i,lk} u_{l,k}) + \\ & + \left[ \lambda + \mu + (1/4)A + B \right] (u_{l,ik} u_{l,k} + u_{k,lk} u_{i,l}) + (\lambda + B) u_{i,kk} u_{l,l} + \\ & + (B + 2C) u_{k,ik} u_{l,l} + \left[ (1/4)A + B \right] (u_{k,lk} u_{l,i} + u_{l,ik} u_{k,l}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Важливий факт щодо рівнянь (2.9): ці рівняння складаються з двох частин – лінійної (вона записана зліва) і нелінійної (вона записана справа). Вказана особливість дає змогу застосувати наближені методи, у яких наявність лінійного розв'язку звичайно є необхідною.

### 2.3. Необхідні для числових розрахунків

#### таблиці властивостей матеріалів в рамках нелінійної моделі Мурнагана

Далі показано дані про значення пружних постійних моделі Мурнагана, які містяться в трьох найбільш інформативних монографіях: Лур'є А.І. [15], Гузя О.М. [12] та Гаука В. [16]. Нище наведені таблиці 2.1, 2.2 з монографії Лур'є А.І. [15], таблиці 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 з монографії Гузя О. М. [12] та таблиця 2.7 з монографії Гаука В. [16].

Таблиці 2.3–2.7 поміщені у “Додатку А”.

Матеріал	Посилання	Густина г/см <sup>3</sup>	В одиницях 10 <sup>12</sup> дин/см <sup>3</sup>					Примітка
			$\lambda$	$\mu$	$\nu_1, \frac{1}{2}C$	$\nu_2, B$	$\nu_3, \frac{1}{4}A$	
Сталь Rex 535	1	-	0,909	0,780	3,58	-2,65	-1,82	Містить нікель
Сталь Rex 535	2	7,065	1,09±0,01	0,818±0,005	-1,75±0,50	-2,40±0,50	-1,69±0,15	-
Сталь Necla 37	2	7,823	1,11±0,01	0,821±0,005	-3,58±0,70	-2,82±0,30	-1,77±0,08	0,4% C; 0,3% Si; 0,8% Mn
Сталь Necla 17	2	7,825	1,10±0,01	0,820±0,005	-1,34±0,20	-2,61±0,20	-1,67±0,06	0,6% C; 0,2% Si; 0,8% Mn
Сталь Necla 138A	2	7,843	1,09±0,01	0,819±0,005	-3,23±0,50	-2,65±0,30	-1,77±0,10	0,4% C; 0,4% Cr; 0,5% Mo; 2,5% Ni
Сталь Necla ATV	2	8,065	0,87±0,02	0,716±0,03	-0,34±0,20	-5,52±0,80	-1,00	3,6% Ni; 10% Cr; 1% Mn
Сталь 3	3	-	-	-	-1,6	-2,8	-2,05	Відпалений зразок
Сталь 35ХГСА	4	7,748	1,10±0,02	0,804±0,002	-1,9±0,15	-2,3±0,1	-2,01±0,04	Гарт 880°C; відпуск 350°C. Твердість HRC=46
Сталь 50ХГСМ2Ф	4	7,785	1,129±0,002	0,803±0,002	-2,8±0,2	-2,7±0,1	-1,87±0,04	Гарт 1020°C; відпуск 350-400°C. 1 год, HRC=50
Позначення: 50-0,5% вуглецю, Х – 1% хрому, Г – 1% марганцю, С – 1% кремнію, М – молібдену, 2Ф – 2% ванадію, А – покращена сталь (піддається будь-якої обробці), HRC – твердість по Роквеллу.								

Таблиця 2.1

Матеріал	Посилання	Густина г/см <sup>3</sup>	В одиницях 10 <sup>12</sup> дин/см <sup>3</sup>					Примітка
			$\lambda$	$\mu$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	
В 53 S	2	2,677	0,580±0,002	0,260±0,001	-2,49±0,60	-0,99±0,10	-0,60±0,05	2,8% Mg; 0,8% Mn; 0,1% Cr
D 54 S	2	2,719	0,491±0,002	0,260±0,001	-3,79±0,025	-1,98±0,09	-0,80±0,03	4,5% Mg; 0,8% Mn; 0,1% Cr
D 16	3	-	-	-	-1,3	-2,1	-0,92	
Латунь Л-62	3	-	-	-	-3,0	-2,1	-1,25	Відпалений зразок
Латунь Л-59-1	3	-	-	-	4,8	1,7	-1,22	Відпалений зразок
Бронза фосфориста	3	-	-	-	12,6	-1,5	-0,60	
БрОФ		-	-	-	12,1	-2,4	-0,42	Відпалений зразок
БрОФ 65-0,15	4	8,921	1,133±0,002	0,417±0,002	-4,9±0,4	-1,67±0,08	- 0,500±0,010	Відпал при 350°C; 1 год
Бронза бериллієва	4	8,317	1,042±0,002	0,490±0,002	-4,0±0,3	-1,7±0,08	- 0,600±0,010	Гарт з 770-780°C; відпуск 350°C. 1 год. Твердість HRC=36
Бр Б2								

Таблиця 2.2



## 2.4. РІВНЯННЯ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ (ХВИЛЬОВІ РІВНЯННЯ) В РАМКАХ МОДЕЛІ МУРНАГАНА. ПЛОСКІ ХВИЛІ

2.4.1. Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мурнагана

Використаємо далі потенціал (2.8) і запишемо його для зручності ще раз

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left( \mu + \frac{1}{4} A \right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} + \\ + \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} + \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3.$$

Перехід до нелінійних хвильових рівнянь виконується в два етапи. На першому етапі використовується формула для напружень Кірхгофа  $t_{ik}$ , що представляється через градієнти зміщення (несиметричний тензор напруження Кірхгофа утворює пару з градієнтами зміщення, тоді як симетричний тензор напружень Лягранжа утворює пару з тензора деформації Коші-Гріна) який оцінюється відповідно до співвідношення  $t_{ik} = (\partial W / \partial u_{k,i})$

$$t_{ik} = \mu (u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ik} + \left[ \mu + (1/4) A \right] (u_{l,i} u_{l,k} + u_{i,l} u_{k,l} + 2u_{l,k} u_{i,l}) + \\ + (1/2) (B - \lambda) \left[ (u_{m,l})^2 \delta_{ik} + 2u_{i,k} u_{l,l} \right] + (1/4) A u_{k,l} u_{l,i} + \\ + B (u_{l,m} u_{m,l} \delta_{ik} + 2u_{k,i} u_{l,l}) + C (u_{l,l})^2 \delta_{ik}. \quad (2.11)$$

Другий крок полягає у наступній підстановці виразу (2.11) у рівняння руху  $t_{ik,i} + X_k = \rho \ddot{u}_k$  і отриманні деякого нелінійного аналогу класичних рівнянь Ляме

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mm} = F_m. \quad (2.12)$$

В правій частині (2.25) записуються всі нелінійні члени

$$\begin{aligned}
F_i = & \left[ \mu + (1/4)A \right] (u_{l,kk}u_{l,i} + u_{l,kk}u_{i,l} + 2u_{i,lk}u_{l,k}) + \\
& + \left[ \lambda + \mu + (1/4)A + B \right] (u_{l,ik}u_{l,k} + u_{k,lk}u_{i,l}) + (\lambda + B)u_{i,kk}u_{l,l} + \\
& + (B + 2C)u_{k,ik}u_{l,l} + \left[ (1/4)A + B \right] (u_{k,lk}u_{l,i} + u_{l,ik}u_{k,l}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Як випливає з (2.13), нелінійність має другий порядок, а відповідне пружне середовище і плоскі хвилі можна назвати квадратично нелінійними.

Розглянемо плоскі поляризовані хвилі і припустимо, що хвилі поширюються вздовж осі абсцис, тобто,  $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$ . Тоді потенціал (2.8) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned}
W = & (1/2) \left[ (\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \\
& \left[ \mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1} \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Відповідні компоненти тензора напружень Кіргофа є наступними

$$\begin{aligned}
t_{11} = & (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + (3/2) \left[ \lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C) \right] (u_{1,1})^2 + \\
& + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right], \\
t_{12} = & \mu u_{2,1} + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1} u_{2,1}, \\
t_{13} = & \mu u_{3,1} + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1} u_{3,1},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Підстановка (2.15) в рівнянні руху дає квадратичне нелінійне хвильове рівняння для трьох поляризованих плоских пружних  $P, SH, SV$  хвиль

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} + N_2 (u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}), \tag{2.16}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}), \tag{2.17}$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}), \tag{2.18}$$

$$N_1 = 3 \left[ (\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C) \right], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \tag{2.19}$$

Особливістю нелінійних хвильових рівнянь (2.16) - (2.18) є те, що ліві - є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві включають тільки квадра-

тично нелінійні доданки. Ця структура виявилася дуже зручною в майбутніх дослідженнях. Друга особливість полягає в тому, що, на відміну від лінійних хвильових рівнянь, нелінійні рівняння є зв'язаними і цей зв'язок не є симетричним, що буде пізніше прокоментовано.

Рівняння (2.16) - (2.18) в основному були проаналізовані з використанням двох основних методів - методу послідовних наближень і методу повільно змінних амплітуд. Для цього необхідне припущення про слабку нелінійність в пружному середовищі, що означає деяке обмеження на пружні постійні і хвильові характеристики (амплітуда, довжина хвилі).

## РОЗДІЛ 3

### ПООДИНОКІ ХВИЛІ (ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ)

Поодинокі хвилі тісно пов'язані з простими хвилями. Можна сказати, що термін “поодинокі хвиля” є більш пристосованим до фізичної практики, тоді як термін “проста хвиля” (або “хвиля Ріманна”) має більш абстрактно-математичний сенс. Дана дисертаційна робота присвячена, в основному, саме поодиноким хвилям. Тому виклад певного загального погляду на такі хвилі виглядає доцільним.

#### 3.1 Прості хвилі (хвилі Ріманна) і поодинокі хвилі

##### 3.1.1 Прості хвилі (хвилі Ріманна)

Поняття простої хвилі виникло дуже давно при вивченні хвиль у рідині. При подальших дослідженнях в рамках теорії хвиль вияснилося, що як фізичне поняття “проста хвиля” стосується хвилі певного профіля, а як математичне поняття “проста хвиля” є одним з розв'язків нелінійного хвильового рівняння.

##### *Прості хвилі в нелінійній акустиці*

Вперше точний розв'язок для плоских хвиль в нев'язкій рідині був отриманий Пуассоном в 1808 році. Цей розв'язок мав вигляд біжучої хвилі, яка була названа простою. Далі теорія простих хвиль розвивалася в роботах Стокса, Ейрі і особливо Ірншоу. Ріманн дав у 1860 році загальний розв'язок одновимірної задачі для рівнянь гідродинаміки, коли збурення плоске і конститутивне рівняння “тиск-густина” є довільним.

Рівняння, з яких виходив Ріманн, були нелінійними

$$\rho_t + \rho v_x + v \rho_x = 0; \quad \rho v_t + \rho v v_x + p_x = 0.$$

Далі Ріманн ввів функцію  $\sigma(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} c(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$  ( $\rho_0$  є густиною незбуреного сере-

довища і  $c(\rho) = \sqrt{dp/d\rho}$  (є швидкістю звуку), використав представлення цієї функції  $\sigma_x = c \rho_x / \rho$ ;  $\sigma_t = c \rho_t / \rho$ , записав основні рівняння у новому вигляді

$$P_t + (c+v)P_x = 0, \quad Q_t + (c-v)Q_x = 0, \quad P = v + \sigma, \quad Q = v - \sigma$$

і представив розв'язок рівнянь у такий спосіб

$$v = \frac{1}{2} \left[ P \left( t - \frac{x}{c+v} \right) + Q \left( t + \frac{x}{c-v} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Розв'язок у вигляді окремо взятої функції  $P$  або  $Q$  називають простою хвилею. Але в сучасній акустиці формулюють і інші означення простої хвилі. Наприклад: Проста хвиля є таким хвильовим процесом, у якому всі параметри, що описують цей процес, можуть бути виражені через один параметр.

Для показаних вище рівнянь гідродинаміки це означає справедливість формул  $\rho = \rho(u)$ ,  $p = p(u)$  або  $u = u(\rho)$ ,  $p = p(\rho)$ . Тоді можна довести ідентичність цих двох означень простої хвилі. Для цього враховують вказані вище залежності пара метрів в рівняннях гідродинаміки і отримують рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

З цих рівнянь випливають рівності  $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \pm \frac{c}{\rho}$ , з яких випливають формули  $u = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}$ , зо допомогою яких записують систему диференціальних рівнянь щодо  $u$  та  $\rho$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u \pm c(u)] \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + [u(\rho) \pm c(\rho)] \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Далі будують рівняння характеристик  $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u \pm c(u)} = \frac{du}{0}$ , які відповідають записаним вище диференціальним рівнянням, і відповідні їм інтеграли  $u = C_1$ ;  $-x + [u \pm c(u)] t = C_2$ . На наступному кроці записують граничні умови  $u(0, t) = \Phi(t)$ .

Тут слід зазначити, що саме такий запис граничних умов для поодиноких хвиль застосовується в представленій тут дисертації.

З граничних умов отримуються значення довільних постійних

$$C_1 = \Phi(t); \quad C_2 = [\Phi \pm c(\Phi)]t; \quad C_2 = [C_1 \pm c(C_1)]\Phi^{-1}(C_1).$$

В кінцевому результаті, формула для простої хвилі має такий вигляд

$$u = \Phi\left(t \pm \frac{x}{c(u) \pm u}\right). \quad (3.2)$$

Таким чином, формули для простих хвиль (3.1) і (3.2) насправді однакові. Хоча вони отримані за різними процедурами і описані різними словами.

### *Прості хвилі в механіці рідин і газів*

Візьмемо за основу книгу Лайтхілла [78] і опишемо більш докладно результати Ріманна і Лайтхілла щодо простої хвилі. Лайтхілл формулює задачу так: чи можна передбачити еволюцію плоскої хвилі з довільною амплітудою при відсутності дисипації за допомогою простих фізичних міркувань, припускаючи знання лише лінійної теорії.

Початкові міркування на цю тему полягають у наступному. Розглянемо для довільного положення  $x = x_1$  і часу  $t = t_1$  певний просторовий інтервал навколо  $x = x_1$  і певний інтервал часу навколо  $t = t_1$ . Нехай вони настільки малі, що для  $i$  з цих інтервалів відповідні збурення величин  $u$  та  $p$  відносно значень  $u_1(x_1, t_1)$  і  $p_1(x_1, t_1)$  залишаються достатньо малими, щоб лінійна теорія описувала їх правильно.

Далі розглядається спеціальна систему відліку, яка рухається з постійною швидкістю  $u_1$  і положення в якій визначають просторовою координатою  $x - u_1 t$ . Швидкість в цій системі дорівнює  $(u - u_1)$  і є завжди малою в рамках цього аналізу. Для швидкості звуку  $c$  приписують локальне значення  $c_1$ , яке визнача-

ється за формулою  $c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{p=p_1; \rho=\rho_1}}$ .

Так поставлена задача має розв'язок типу Д'Алямбера у вигляді простої хвилі в системі відліку з просторовою координатою  $x - u_1 t$

$$p - p_1 = f[x - u_1 t - c_1 t] + g[x - u_1 t + c_1 t],$$

$$u - u_1 = \frac{1}{\rho_1 c_1} f[x - u_1 t - c_1 t] - \frac{1}{\rho_1 c_1} g[x - u_1 t + c_1 t].$$

Якщо позначити  $p - p_1 = \delta p$ ;  $u - u_1 = \delta u$ , то  $\delta u + \frac{\delta p}{\rho_1 c_1}$  є функцією лише  $x - (u_1 + c_1)t$ ,

тоді як  $\delta u - \frac{\delta p}{\rho_1 c_1}$  є функцією лише  $x - (u_1 - c_1)t$ . На основі останніх формул Рі-

манн ввів інтеграл  $\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_1 c_1} = P(p)$  (тут  $p_0$  є початковим тиском). Продовжуючи

аналіз цього інтеграла, Ріманн отримав два важливі результати (інваріанти Ріманна):

$$u + P = \text{const} \text{ вздовж кривої } C_+ : dx = (u + c) dt,$$

$$u - P = \text{const} \text{ вздовж кривої } C_- : dx = (u - c) dt.$$

Лайтхілл означає просту хвилю як хвилю в області, де постійні значення величини  $u + P$  вздовж довільної кривої  $C_+$  завжди дорівнюють нулеві, що має наслідком формулу

$$u = P(p - p_0) = \int_0^{p-p_0} \frac{d(p-p_0)}{\rho c}. \quad (3.3)$$

Тоді відповідні криві  $C_+$  є прямими лініями, вздовж кожної з яких функція  $u$  приймає постійне значення (різне для різних  $C_+$ ).

Ряд вчених (див., наприклад, [79]) розрізняють лінійні біжучі хвилі, які поширюються без міни профіля вздовж осі  $Ox$  з постійною і однаковою для всіх збурень швидкістю  $a_0$ , та хвилі, які є розв'язком нелінійних хвильових рівнянь. Такі нелінійні рівняння мають розв'язки у вигляді плоскої хвилі, які є узагальненням розв'язків типу Д'Алямбера лінійної теорії  $f(x \pm a_0 t)$ . Однак, це такі частинні розв'язки, для яких швидкість є функцією лише густини, тобто

$$u = u(\rho) \quad \rho = \rho(x, t). \quad (3.4)$$

Такі розв'язки в [79] називають розв'язками Ріманна і рухи, що відповідають цим розв'язкам, називають хвилями Ріманна або простими хвилями.

Відомий підручник [55] викладає прості хвилі в розділі про поширення малих збурень в газі. Тут задача зводиться до класичного хвильового рівняння, для якого будується розв'язок ДАлямбера у вигляді хвилі з постійною швидкістю. Такі хвилі називають простими. Це досить поширена позиція.

### *Прості хвилі в загальній теорії хвиль*

Значна частина вчених, які працюють в області загальної теорії хвиль, трактує прості хвилі, базуючись на нелінійних рівняннях газової динаміки (прикладом може бути книга Уізема [34]). Тут звичайно розглядаються нелінійні плоскі хвилі, які описуються розв'язками цих рівнянь. Для цього використовуються характеристичні рівняння. Тому одразу записуються інваріанти Ріманна

$$\int \frac{a(\rho)d\rho}{\rho} + u = const \quad \text{на } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + a,$$

$$\int \frac{a(\rho)d\rho}{\rho} - u = const \quad \text{на } C_- : \frac{dx}{dt} = u - a.$$

Проста хвиля означається як такий розв'язок нелінійної системи рівнянь, для якого інваріанти Ріманна залишаються на всіх характеристиках постійними.

### *Прості хвилі в механіці електромагнітних середовищ*

Тут зручно вибрати класичну монографію Можена [160], оскільки вона приділяє окрему увагу означенню простої хвилі. Звичайно, означається вона для спеціальних середовищ, де враховуються електромагнітні поля.

Тут спочатку вводиться поняття однорідних розв'язків системи хвильових рівнянь, куди відносяться розв'язки у вигляді хвиль, які є більш простими, ніж прості хвилі. Наступними за складністю вважаються прості хвилі, які означаються так: непостійний неперервно диференційований розв'язок є простою хвилею в певній області простору, якщо його компоненти є постійними вздовж ліній з



однопараметричного сімейства, які покривають всю цю область.

Важливість розв'язків у вигляді простих хвиль пояснюється тими обставинами, що більш загальний розв'язок з непостійними параметрами зникається з розв'язком з постійними параметрами обов'язково через область, розв'язок у якій є простою хвилею.

Стисле пояснення полягає у введенні ліній вказаної вище однопараметричного сімейства ліній  $\{l(\sigma)\}$  з параметром  $\sigma$  за формулою

$$l(\sigma): x = c(\sigma)t + a(\sigma), \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2].$$

Тут функції  $c(\sigma), a(\sigma)$  повинні бути диференційовними.

Для знаходження  $\sigma = \sigma(x, t)$  необхідно накласти умову

$$\Delta(\sigma, t) = c'(\sigma)t + a'(\sigma) \neq 0, \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$$

Умова  $\Delta(\sigma, t) = 0$  означає, що сімейство ліній  $\{l(\sigma)\}$  має огинаючу. З моменту, коли виникає огинаюча, вона має вигляд якогось загострення. Далі розв'язок у вигляді простої хвилі вже невірний. Його продовження реалізується у вигляді ударної хвилі.

Отже, можна стверджувати, що крім описання різних точок зору на прості хвилі, показані міркування підтверджують факт, що вони не співпадають лише в одному – чи відносити хвилі Д'Алямбера до простих хвиль, чи ні.

В даній роботі хвилі Д'Алямбера віднесені до простих хвиль.

### 3.1.2 Поодинокі хвилі. Профілі поодиноких хвиль в реальних експериментах

За багато сотень років експериментування з реальними матеріалами механіка накопичила спостереження хвиль з різноманітними початковими профілями. Найбільш повним джерелом описання хвиль з реальними профілями можна вважати том з енциклопедії фізики Флюгге, написаний Беллом [44].

Перші експерименти, у яких вивчалось поширення хвиль, в [44] відносять до 1809 року, коли Жан-Баптист Біо вивчав у Парижі хвилі в чавунних водопровідних трубах, і до 1851 року, коли Гійом Вертхейм і Луї Бреге, як і Біо, вивча-

ли тривалість поширення хвилі у Версальській лінії електротелеграфа, зроблених з залізного дроту.

Як пише Белл в [44], при вивченні профіля хвилі у відносно малих обмежених твердих тілах навантаження повинні бути прикладені впродовж гранично короткого інтервалу часу. Першими експериментами такого роду були експерименти про співудар тіл. Теорія співудару пружних тіл була розвинена ще Коші у 1826 році і Пуассоном у 1833 році. Далі теоретичні і експериментальні студії розвивалися Сен-Венаном (1867 рік), Больцманом (1881 рік), Герцом (1882 рік) і Фойх-том (1883 рік). Досліди Больцмана мали багатьох послідовників серед експериментаторів наступних поколінь. Тут слід вказати на те, що уже в 1940 році були зафіксовані профілі хвилі, яка поширюється при співударі стержнів. Нижче показані такі профілі з дослідів Фаннінга і Бассетта 1940 року.

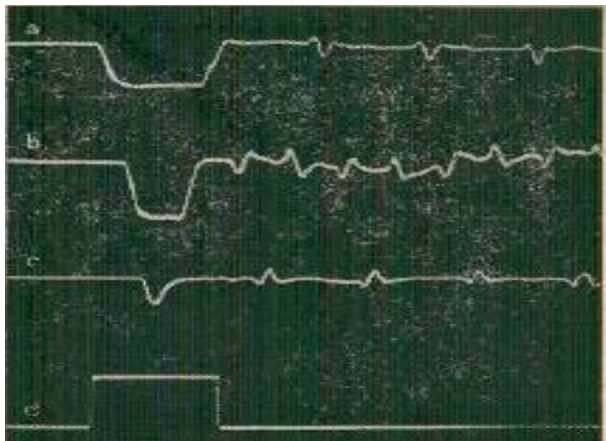
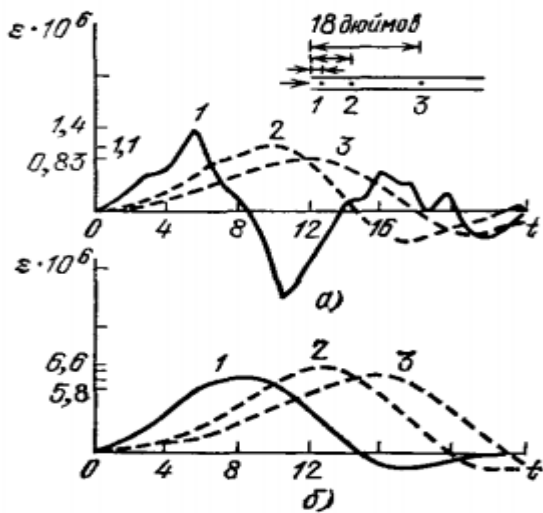


Рис.3.1. Дослід Фаннінга і Бассетта (1940). Перший дослід для встановлення залежності деформації від часу в експерименті спів ударних деталей. Результати були отримані за допомогою вуглецевого естензометра. Показання експериментів: а) біля ударного кінця б) в середині довжини с) на ударному кінці стержня д) синхронізаційний хронометррражний сигнал

Рис.3.1. Профілі хвилі з дослідів на співудар стержнів

З наступних експериментальних спостережень профіля хвилі слід показати профілі, отримані Девісом у 1956 році і Ріппергером у 1953 році



Дослід Ріппергера (1953): визначає за допомогою п'єзоелектричних датчиків профіль хвилі деформації в трьох різних точках стержня при осьовому зіткненні кульок. Діаметр стержня дорівнює одному дюйму. 1-перший датчик, 2- другий датчик, 3- третій датчик;  $t$  – час в  $10^{-6}$  с,  $\varepsilon$  – деформація. а) Випадок коли діаметр кульки дорівнює 0,125 дюйма б) Випадок, коли діаметр кульки дорівнює 0,25 дюйма.

Рис.3.2. Профілі хвилі з дослідів на удар кульки в стержень

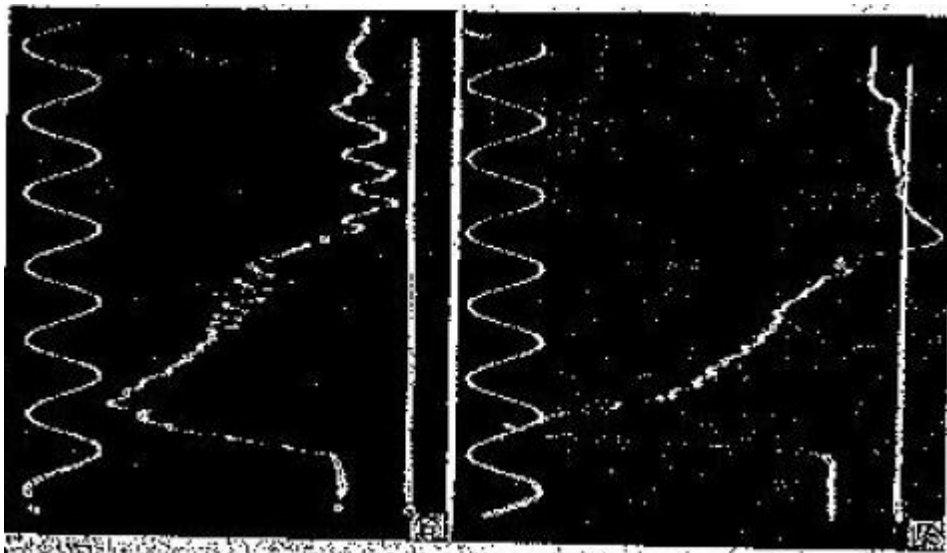


Рис.3.3. Профілі хвилі з дослідів на ударний тиск води в стержень

На рисунку дослід Девіса (1956): профіль хвилі отриманий за допомогою датчиків електричного опору: а) для повздовжніх при наявності вигинистих складових б) для повздовжніх без вигинистих складових.

Також слід вказати на експериментальні спостереження Мікловітца і Найзвангера 1957 року деформації стержня з алюмінієвого сплаву і Кертіса 1960 року деформації магнієвого стержня під дією повітряної хвилі.

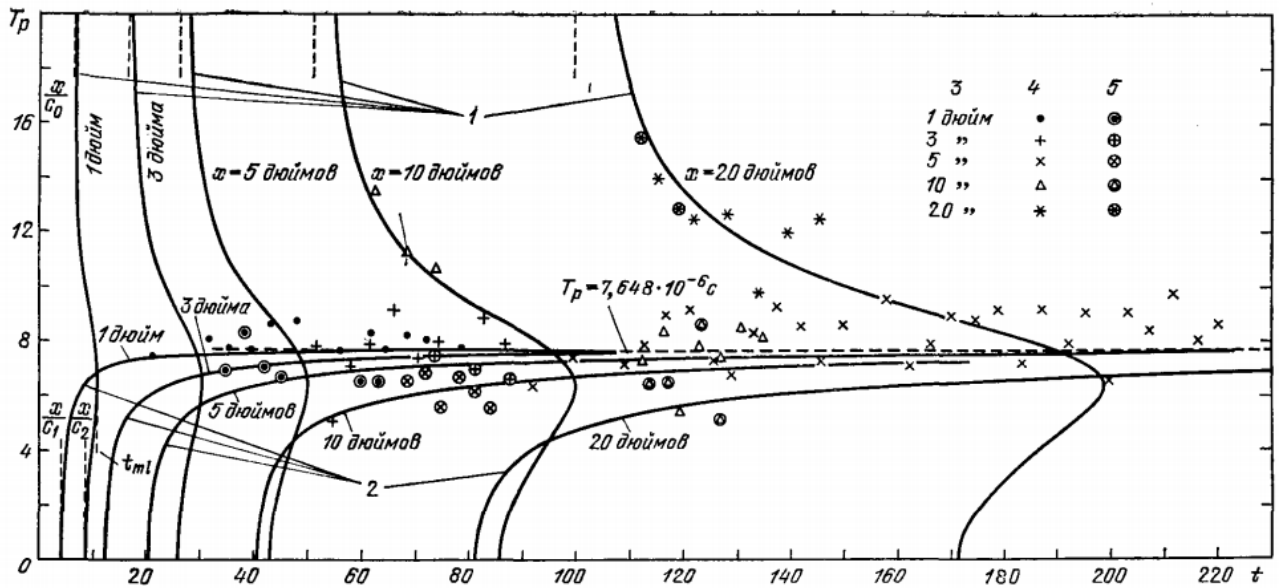


Рис.3.4. Профілі хвилі з дослідів на ударну дію повітряної хвилі на стержень

На рис.3.4 показані досліді Мікловітца і Найзвангера (1957); порівняння розрахункових експериментальних значень для результатів, які представлені на рис.2 1- поздовжні форми, 2- радіальні форми, 3- відстань в дюймах між точкою удару і точкою спостереження, 4- позначення радіальних переміщень, 5-основні деформації. По осі абсцис  $t \cdot 10^6$  с ( $t$  – час); по осі ординат відкладено  $Tr \cdot 10^6$  с ( $Tr$  -превалюючий період).

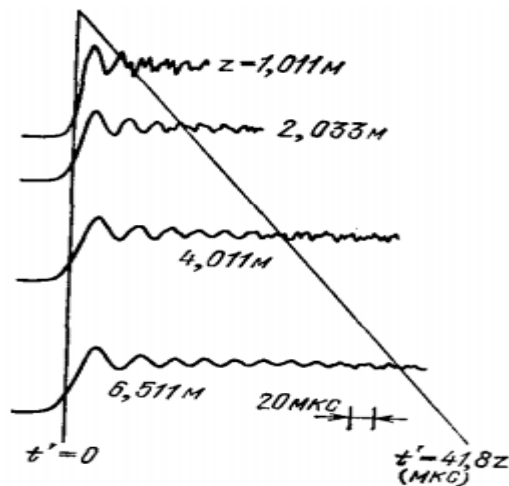


Рис.3.5. Профілі хвилі з дослідів на ударну дію повітряної хвилі на стержень

Дослід Картиса (1960): профіль хвилі в послідовному ряді точок у вздовж стержня який підвергся повітряному удару, який показує розсіяння основного фронту до розвитку другої форми колювання. Фронти основної хвилі зміщенні так, щоб співпали в часі їх початки.

Покажемо, профіль хвилі радіального зміщення круглого стержня з дослідів Белла 1960 року

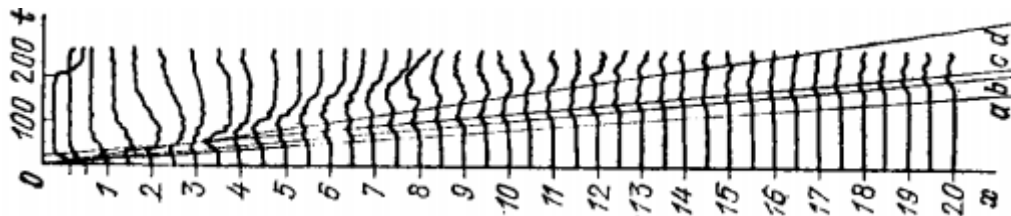


Рис.3.6. Профілі хвилі з дослідів на дію імпульса на стержень

Дослід Белла (1960); дослідження радіальних переміщень, отримано на експериментальній установці, показаний на рисунку. Дослідження було виконано за допомогою ємкісних датчиків;  $t$  – час в мкс,  $x$  – довжина від торця, по якому відбувся удар (одиницею виміру являється довжина діаметра стержня). Для кожного перетину, який знаходиться на вказаній відстані на осі, отримано графік профілю хвилі радіальних переміщень точок границь поперечного перетину.

Під поодинокими хвилями далі будемо розуміти неперіодичні і негармонічні хвилі, які мають початковий профіль спеціального виду. Цей профіль є нульовим всюди, за винятком скінченного інтервалу, де він має один або кілька горбів, що формують профіль.

### 3.2. Профілі поодиноких хвиль: у вигляді функції, яка описує гармонічну хвилю, і у вигляді функцій Чебишова – Ерміта, Уїгтекера та Макдональда

#### 3.2.1. Профіль гармонічної хвилі

Гармонічною називають хвилю з формою профіля, заданою функціями: комплексно-значна функція  $u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$  або  $u(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$ , дійсна функція  $u(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$  або  $u(x,t) = A\cos k(x-vt)$ . Гармонічні хвилі поділяють на недисперсивні і дисперсивні. Недисперсивна гармонічна хвиля коротко описана в параграфі 1.2. Дисперсивна гармонічна хвиля означається як хвиля, швидкість якої  $v$  нелінійно залежить від частоти. Це означає, що для кожного фіксованого значення частоти фаза хвилі  $\sigma = kx - \omega t$  або  $\sigma = k(x - vt)$  лінійно залежить від пройденого хвилею шляху  $x$  і часу поширення хвилі  $t$ .

Для того, щоб теоретично описати дисперсійну хвилю, необхідно ускладнити модель пружного деформування матеріалу. Покажемо такий шлях на прикладі моделі композитного матеріалу, оснований на концепції двокомпонентної пружної суміші. Зразу звуємо розгляд аналізом плоских хвиль.

Означення цих хвиль в моделі суміші подібне до класичного. Але в двокомпонентній суміші рух вже описується двома векторами зміщення  $\vec{u}^{(\alpha)}(x,t)$  (кожен компонент суміші характеризується своїм вектором зміщення). Отже, одночасно тут поширюються дві хвилі і плоский фронт цих хвиль співпадає. Аналітичне представлення гармонічних хвиль є таким

$$\vec{u}^{(\alpha)}(x,t) = \vec{u}^{o(\alpha)} e^{i(\xi - \omega t)},$$

де  $\vec{u}^{o(\alpha)}$  є довільними постійними векторами;  $\xi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ ;  $\vec{r}$  є радіусом-вектором точки  $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ .

Припустимо далі, що плоскі хвилі поширюються в напрямку осі абсцис  $Ox_1$ . Тоді  $\vec{u}^{(\alpha)} \equiv \{u_k^{(\alpha)}(x_1, t)\}$  і хвильові рівняння утворюють таку систему ( $m = 2, 3$ )

$$\begin{aligned} & (\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{12}) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial t^2} - \\ & - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_1^2} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{12}) \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial t^2} - \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial x_1^2} - \beta(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}) = 0. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.5),(3.6) є системами з двох взаємозв'язаних рівнянь і ці системи описують незалежне поширення всіх трьох типів плоских хвиль. Інваріантне щодо типу хвиль представлення системи є таким

$$\begin{aligned} & (\rho_{\alpha\alpha} - \rho_{12}) \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial t^2} - a_\alpha^{(k)} \frac{\partial^2 u_k^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} - a_3^{(k)} \frac{\partial^2 u_k^{(\delta)}}{\partial x_1^2} - \beta(u_k^{(\alpha)} - u_k^{(\delta)}) = 0, \\ & (a_m^{(1)} = \lambda_m + 2\mu_m, \quad a_m^{(2)} = a_m^{(3)} = \mu_m). \end{aligned}$$

Ця система має розв'язок у вигляді гармонічних хвиль

$$u_m^{(\alpha)}(x_1, t) = A_{om}^{(\alpha)} e^{-i(k_\alpha^{(m)} x - \omega t)} + l(k_\delta^{(m)}) A_{om}^{(\delta)} e^{-i(k_\delta^{(m)} x - \omega t)}, \quad (3.7)$$

де хвильові числа  $k_\alpha^{(m)}$  визначаються з так званого дисперсійного рівняння (його називають дисперсійним тому, що воно встановлює нелінійну залежність між частотою і хвильовим числом)

$$M_1^{(m)}k^4 - 2M_2^{(m)}k^2\omega^2 + M_3^{(m)}\omega^4 = 0,$$

$$M_1^{(m)} = a_1^{(m)}a_2^{(m)} - (a_3^{(m)})^2; \quad M_3^{(m)} = \rho_{11}\rho_{22} - (\rho_{11} + \rho_{22})\left(\left(\beta/\omega^2\right) + \rho_{12}\right);$$

$$2M_2^{(m)} = a_1^{(m)}\rho_{11} + a_2^{(m)}\rho_{22} - (a_1^{(m)} + a_2^{(m)} + 2a_3^{(m)})\left(\left(\beta/\omega^2\right) + \rho_{12}\right),$$

і коефіцієнти  $l(k_\alpha^{(m)})$  знаходяться за простою алгебраїчною формулою

$$l(k_\alpha^{(m)}) = \left\{ - \left[ a_\alpha^{(m)} (k_\alpha^{(m)})^2 + \beta - \rho_{\alpha\alpha} \omega^2 \right] / a_3^{(m)} (k_\alpha^{(m)})^2 - \beta \right\}^{(-1)\alpha}.$$

Хвилі (3.7) мають такі особливості: 1. Існують одночасно дві моди хвилі, що відрізняються хвильовими числами  $k_\alpha^{(m)}$  ( $\alpha$  фіксує номер моди, тоді як  $m$  характеризує тип хвилі). 2. Обидві моди є суттєво дисперсивними хвилями. 3. Суміш фільтрує (запирає) одну моду (мода не існує для малих частот), починаючи з частоти  $\omega_{cut}^* = \sqrt{\beta(\rho_{11} + \rho_{22})/\rho_{11}\rho_{22}}$ , яку називають частотою запирання. 4. По дві моди поширюються в кожному компоненті і кожна зі своєю амплітудою, яка залежить нелінійно від частоти.

Далі показані характерні для моделі суміші графіки для поперечних плоских хвиль для реальних композитних матеріалів. Одиниця на осі абсцис відповідає частоті в 10МГц і на осі ординат – швидкості в 1 км/сек.

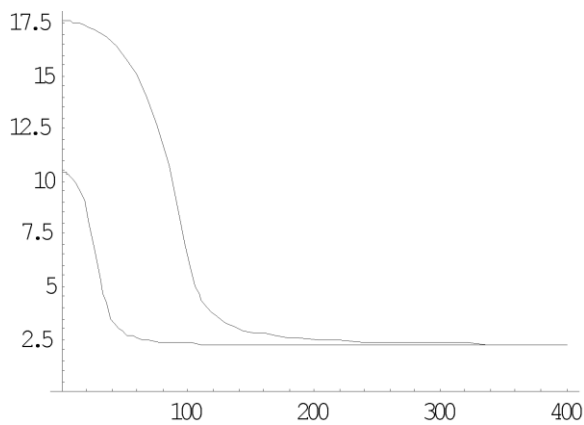


Рис. 3.1. Дисперсійні криві “швидкість - частота” для першої моди

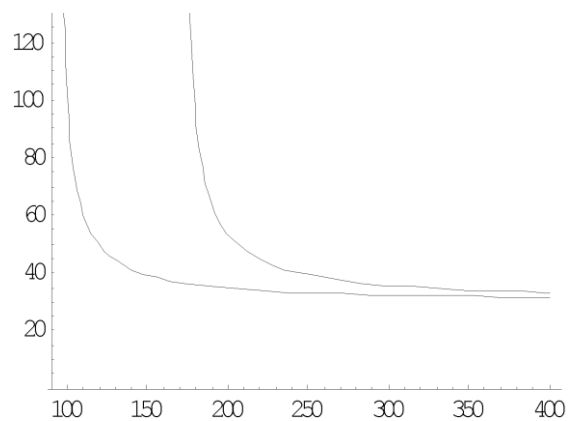


Рис. 3.2. Дисперсійні криві “швидкість - частота” для другої моди

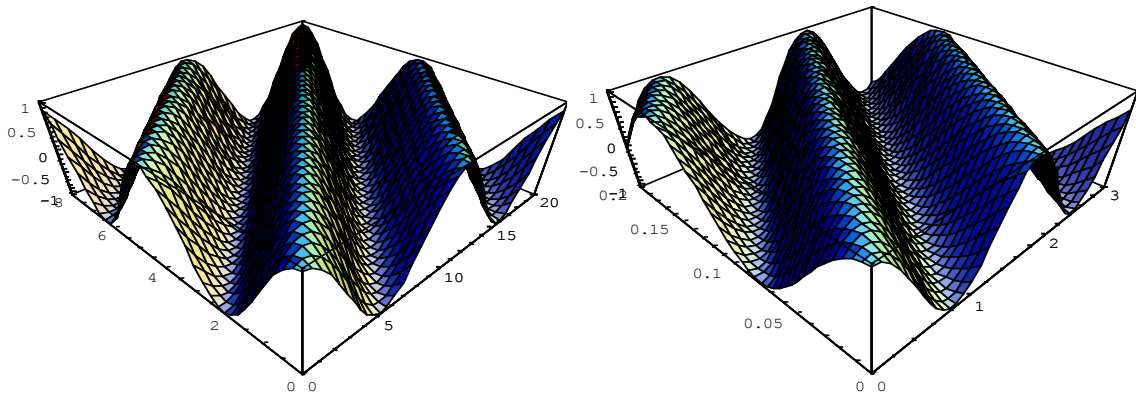


Рис. 3.3. Хвильова картина в координатах амплітуда – час – просторова координата для реального композитного матеріалу

Одиниці на всіх трьох осях з Рис. 3.3 відповідають одиничній амплітуді, часу в мікросекундах, відстані в мікронах, відповідно. Лівий графік відповідає першій повільній моді і правий – другій швидкій моді. На обох графіках відстань вимірюється в мікронах, час в мікросекундах (зліва) і 0,1 мікросекунди (справа), частота в 100 МГц (зліва) і 100ГГц (справа).

Далі показані графіки для коефіцієнтів розподілу амплітуд  $l(k_1^{(1)}, \omega)$ ,  $l(k_1^{(2)}, \omega)$  для реальних композитних матеріалів

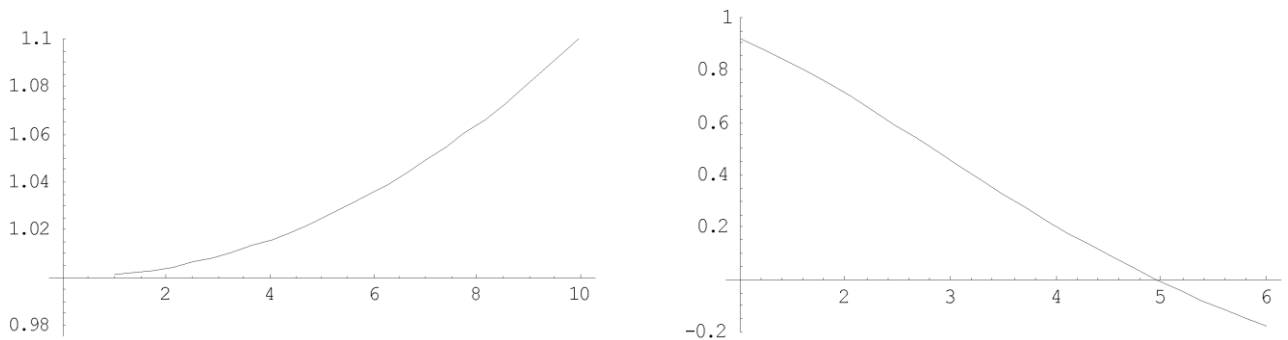


Рис. 3.4. Залежності коефіцієнтів  $l(k_1^{(1)}, \omega)$ ,  $l(k_1^{(2)}, \omega)$  від частоти

Зауважимо наприкінці, що реальна хвильова картина в двокомпонентних композитних матеріалах є складнішою, ніж в теоретичних схемах. Дисперсія хвиль при спостереженні плоских хвиль може мати різну природу – вона може бути геометричною, в'язкопружною і конструкційною. Ефекти дисперсії, показані вище, мають структурний характер і хвилі є лінійними. Тому в моделі суміші відображена лише геометрична дисперсія.



### 3.2.2. Профіль у вигляді функції Чебишова-Ерміта

Функції Чебишова-Ерміта задаються формулою

$$\psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n^*(z), \quad (3.8)$$

де  $H_n^*(z)$  є поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n^*(z) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}z); \quad H_n(z) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right).$$

Ці поліноми визначаються твірною функцією  $e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$  і їх загальний вигляд задається формулою

$$H_n(x) = x^n - \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{1}{2^2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \dots = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{(-n, 2j)}{(1, j)} x^{n-2j}$$

і рекурентними співвідношеннями

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z); \quad \frac{dH_n(z)}{dz} = 2nH_{n-1}(z).$$

$$H_{2n}(-x) = H_{2n}(x); \quad H_{2n+1}(-x) = -H_{2n+1}(x);$$

$$H_0^*(z) = 1; \quad H_1^*(z) = z; \quad H_2^*(z) = z^2 - 1; \quad H_3^*(z) = z^3 - 3z;$$

$$H_4^*(z) = z^4 - 6z^2 + 3; \quad H_5^*(z) = z^5 - 10z^3 + 15z.$$

Функції  $\psi_n(x)$  є дійсними для дійсних значень аргумента і вони ортого-

нальні з вагою 1 на дійсній осі  $(-\infty, \infty)$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n; \\ 1 & m = n. \end{cases}$

Також вони є розв'язками диференціального рівняння Вебера

$$\psi_n''(z) + (1 + 2n - z^2)\psi_n(z) = 0,$$

а поліноми  $H_n^*(z)$  є розв'язками диференціального рівняння Чебишова-Ерміта

$$w'' - 2zw' + 2nw = 0.$$

З показаних на Рис. 3.5 графіків видно, що функції  $\psi_n(z)$  означені на нескінченному інтервалі, але основна частина графіка завжди відповідає скінченному інтервалу (говорять, що функції мають скінченну масу)

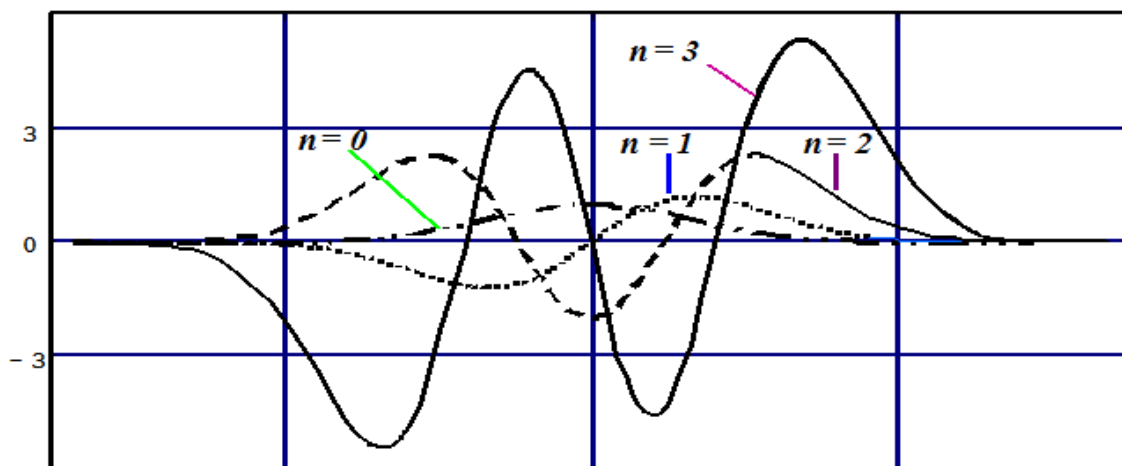


Рис. 3.5. Графіки перших п'ятьох функцій Чебишова-Ерміта

Якщо вибрати ці функції для опису початкового профіля хвилі, то хвиля матиме всі ознаки поодинокі хвилі.

Далі будуть розглядатися хвилі з початковим профілем у вигляді функції Чебишова-Ерміта нульового індекса

$$\psi_0(x) = e^{-x^2/2}. \quad (3.9)$$

Ця функція добре відома в теорії сигналів і загальній теорії хвиль і має там назву “дзвіноподібна функція”.

### 3.2.3. Профіль у вигляді функції Уїттекера

Функції Уїттекера  $M_{k,m}(z)$  і  $W_{k,m}(z)$  генеруються таким диференціальним

рівнянням  $w'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1-m^2}{4z^2} \right) w = 0$ . Фундаментальна система розв'язків

цього рівняння формують функції  $W_{k,m}(z)$  та  $W_{-k,m}(-z)$ .

Нескінченно-значна аналітична функція  $W_{k,m}(z)$  означена для всіх значень  $k, m$  і для всіх невід'ємних дійсних  $z$ . Вона може бути представлена через вироджену гіпергеометричну функцію  $\Psi(a, c, z)$ ,  $\Phi(a, c, z)$

$$M_{k,m}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Psi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right),$$

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Phi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right), \quad (3.10)$$

де  $\Phi(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{k,-m}(z).$$

Також функція Уіттекера має представлення

$$M_{p+m+\frac{1}{2}, m}(z) = \frac{z^{-m+\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}}}{(2m+1) \cdots (2m+p)} \frac{d^p}{dz^p} \left( z^{p+2m} e^{-z} \right).$$

Існують важливі зв'язки функції Уіттекера з певними значеннями індексів і інших відомих у математичній фізиці функціями:

1. Функції параболічного циліндра

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Простий зв'язок між функціями Чебишова-Ерміта  $\psi_n(z)$  і функціями параболічного циліндра є таким  $D_n(z) = (2\pi)^{\frac{1}{4}} (n!)^{\frac{1}{2}} \psi_n(z)$ .

2. Функція помилок

$$\operatorname{Erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \quad \text{або} \quad \operatorname{Erfc}(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(z^2).$$

3. Функції Бесселя уявного аргумента  $K_m(z)$ ,  $I_m(z)$

$$K_m\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} W_{0,m}(z), \quad M_{0,m}(z) = 2^{2m} \Gamma(m+1) \sqrt{z} I_m\left(\frac{z}{2}\right).$$

Як відомо, функції Бесселя уявного аргумента не мають осциляторного характеру, перша монотонно зростає, тоді як друга монотонно спадає.

В наступному аналізі поодиноких хвиль вибрані такі функції Уіттекера, які мають графік з одним горбом:

А.  $W_{0,0}(z)$ , яка є розв'язком рівняння  $\frac{d^2 W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + 4 \frac{1}{z^2} \right\} W = 0$ .

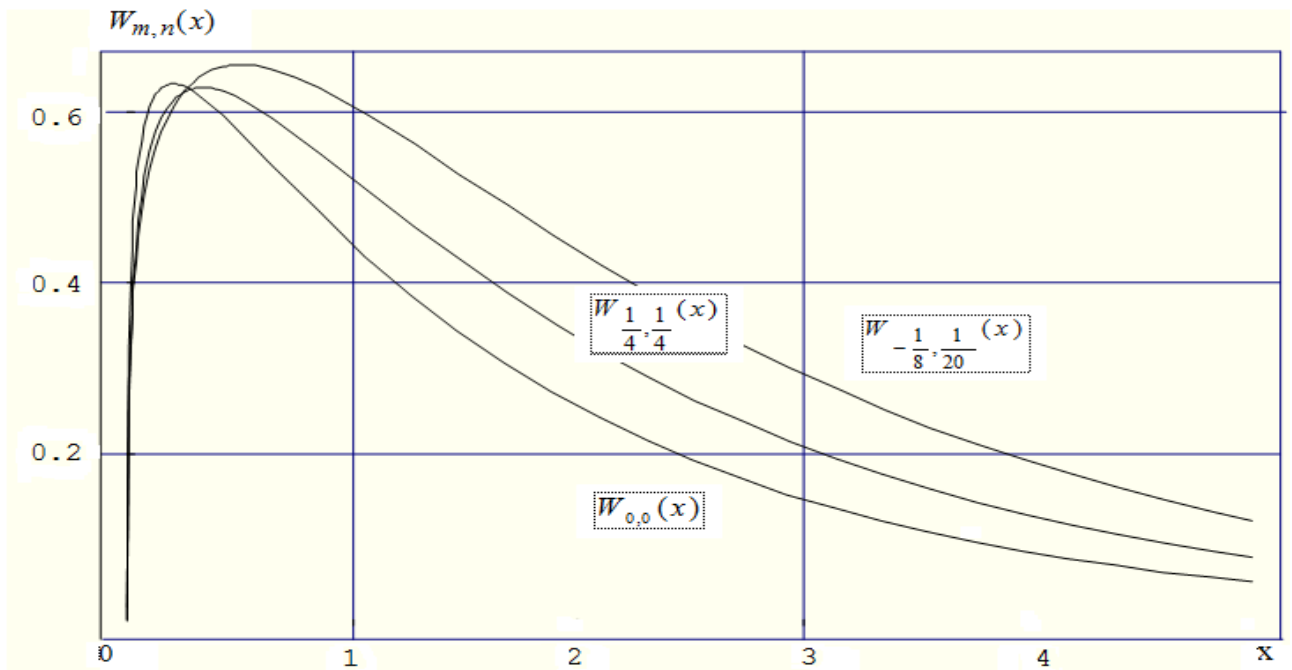


Рис.3.6. Графіки функцій Уїттекера.

Б.  $W_{0,1}(z)$ , яка є розв'язком рівняння  $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{3}{4z^2} \right\} W = 0$ .

В.  $W_{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(z)$ , яка є розв'язком рівняння  $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4z} + \frac{3}{16z^2} \right\} W = 0$ .

Г.  $W_{\frac{1}{8}, \frac{1}{20}}(z)$ , яка є розв'язком рівняння  $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{8z} + \frac{99}{400z^2} \right\} W = 0$ .

### 3.2.4. Профіль у вигляді функції Макдональда

Функція Макдональда—це модифікована функція Бесселя другого роду наступного вигляду

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \quad (3.11)$$

де  $\nu$  є не ціле дійсне число і

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

є циліндричною функцією з чисто уявним аргументом.

Функції  $I_{-\nu}(z)$  та  $I_{\nu}(z)$  називають модифікованими функціями Бесселя першого роду.

Якщо  $\nu$  – ціле чило то розглядають  $K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_{\nu}(z)$ .

Функція Макдональда є розв'язком наступного диференціального рівняння Бесселя:

$$z^2 \frac{d^2 z}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0, \quad (3.12)$$

що прямує експотенціально до нуля коли  $z \rightarrow \infty$ , приймаючи додатні значення. Функції  $I_{\nu}(z)$  та  $K_{\nu}(z)$  утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.12).

Якщо  $-\pi < |\arg(z)| < \pi/2$  то  $K_{\nu}(z)$  може бути представлена через функцію Ханкеля першого роду

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2} i^{a+1} H_{\nu}^{(1)}(iz).$$

Якщо  $\pi/2 < |\arg(z)| < \pi$  то  $K_{\nu}(z)$  може бути представлена через функцію Ханкеля другого роду

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2} (-i)^{a+1} H_{\nu}^{(2)}(-iz).$$

Загальний вигляд представлення функції Макдональда через ряди:

$$K_{n+1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)(2z)^r}, \quad n - \text{ціле невід'ємне};$$

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} \psi(m+1), \quad (3.13)$$

$$\psi(1) = -C, \quad \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - C,$$

$C = 0,5772157\dots$  - стала Ейлера;

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (m-n-1)!}{m!(z/2)^{n-2m}} +$$

$$+(-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \times \left\{ \ln(z/2) - \frac{1}{2}\psi(m+1) - \frac{1}{2}\psi(n+m+1) \right\} \quad (3.14)$$

де  $n \geq 1$  - ціле;

Асимптотичні представлення:

$$K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \times \left[ 1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots \right].$$

$z$  - велике і  $|\arg(z)| < \pi/2$ .

Для малого аргументу  $0 < |z| \leq \sqrt{\nu+1}$  маємо:

$$K_\nu(z) = \begin{cases} -\ln(z/2) - c, \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu, \nu > 0 \end{cases}.$$

Рекурентні формули:

$$K'_0(z) = -K_1(z), \quad (3.15)$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \quad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2 \frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

Графік функції Макдональда для різних індексів  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$  зображено на рис.3.7.

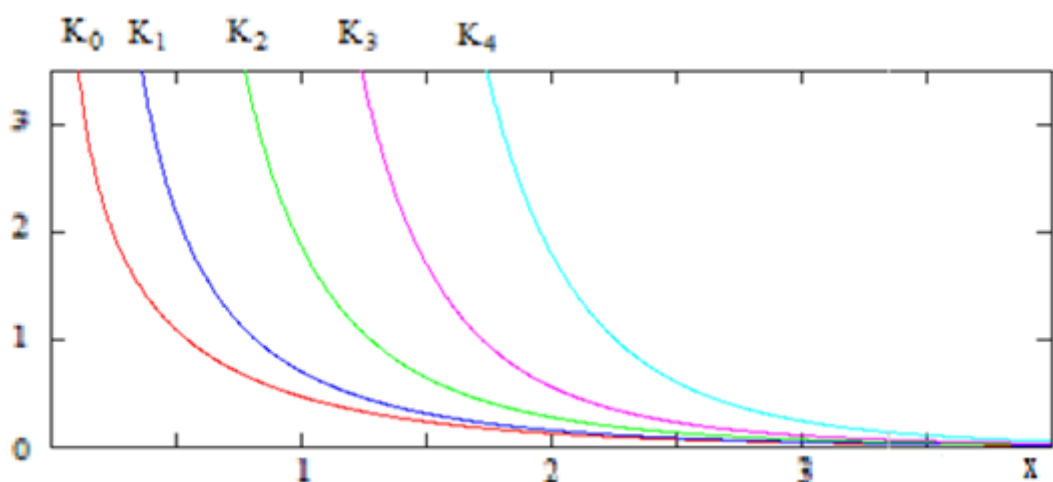


Рис. 3.7. Графіки функції Макдональда для  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$

## РОЗДІЛ 4

### ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПООДИНОКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ХВИЛІ

#### 4.1. Про три підходи до аналізу

##### 4.1.1. Метод послідовних наближень в знаходженні розв'язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі

Цей метод ще називають методом збурень або методом малого параметра. Він оснований на введенні малого параметра  $\varepsilon$ . Застосовувати метод зручно, коли відомий розв'язок задачі, близької до тої, яку треба розв'язати. У випадку нелінійних хвиль близькою задачею вважають лінійну задачу і використовують її класичний розв'язок. Нехай це буде задача про плоску поздовжню хвилю, яка описується квадратично нелінійним рівнянням (2.16). Тоді лінійна задача описується хвильовим рівнянням

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = 0 \quad (4.1)$$

Далі треба ввести в нелінійне рівняння (2.16)

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}$$

параметр збурення (малий параметр)  $\varepsilon$  таким чином: при  $\varepsilon = 1$  рівняння повинно співпадати з рівнянням (2.16) і при  $\varepsilon = 0$  – з лінійним варіантом (4.1) рівняння (2.16), тобто, мати вигляд

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = \varepsilon (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}. \quad (4.2)$$

Згідно з методом, розв'язок  $u_1(x_1, t, \varepsilon)$  рівняння (4.2) шукають у вигляді збіжного ряду

$$u_1(x_1, t) = u_1(x_1, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_1^n(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + \varepsilon u_1^{(1)}(x_1, t) + \varepsilon^2 u_1^{(2)}(x_1, t) + \dots \quad (4.3)$$

де нульове наближення  $u_1^{(0)}(x_1, t)$  є розв'язком лінійного рівняння (4.1) і припу-

скають, що основна невідома функція (у даному випадку, зміщення  $u_1(x_1, t)$ ) достатньо гладка, так що може бути розкладена у ряд за малим параметром.

Якщо підставити представлення (4.3) у рівняння (4.2), то отримується рекурентне співвідношення

$$u_{1,tt}^{(n)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}. \quad (4.4)$$

Слід зазначити, що рекурентна формула (4.4) спрощує обчислення наближень.

З врахуванням (4.4) розв'язок представляється у вигляді

$$u_1(x_1, t) = u_1(x_1, t, \varepsilon = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1^{(n)}(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + \dots \quad (4.5)$$

Отже, розв'язок у нульовій апроксимації є лінійним і в класі гармонічних плоских хвиль для заданих початкової амплітуди  $u_{1(0)}$  і частоти має вигляд(1.13)

$$u_1^{(0)}(x, t) = u_{1(0)} \cos(kx - \omega t) \quad ((\omega/k) = v_L). \quad (4.6)$$

Тут слід зазначити, що основний хвильовий ефект полягає в тому, що хвиля є лінійною гармонічною у вигляді першої гармоніки, яка поширюється без зміни профіля (не спотворюється) і не взаємодіє сама з собою.

Для отримання першого наближення необхідно розв'язувати наступне рівняння  $\rho \ddot{u}_1^{(1)} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11}^{(1)} = (1/2) N_1 (u_{1(0)})^2 k^3 \sin 2(kx - \omega t)$ . Тут права частина включає другу гармоніку, яка є розв'язком однорідного рівняння. Тому розв'язок слід шукати подібно випадку параметричного резонанса. Відповідний розв'язок цього рівняння є таким

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = [N_1/8(\lambda + 2\mu)] (u_{1(0)})^2 k_L^2 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (4.7)$$

Розв'язок у вигляді перших двох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{1_0} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1_0})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Якщо ввести позначення



$$M_L = \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{v_L^4},$$

то розв'язок можна представити у вигляді

$$u_1(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + u_{1o} M_L x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (4.9)$$

Розв'язок (4.9) звичайно коментують таким чином: він підтверджує теоретично генерацію другої гармоніки. Цей головний хвильовий ефект формується у три етапи. Спочатку хвиля слабо відрізняється від лінійної гармонічної хвилі. Далі зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи часу її поширення перша гармоніка сумується з другою гармонікою, амплітуда якої повільно зростає, і вони утворюють модульовану хвилю. Крок за кроком вплив другої гармоніки зростає і вона стає домінантною.

Таким чином, головною характеристикою методу послідовних наближень є те, що для знаходження будь-якого наближення треба розв'язувати неоднорідне лінійне рівняння.

В нелінійній теорії хвиль вважається, що метод послідовних наближень працює добре, коли амплітуда першого наближення зростає не дуже швидко (звичайно, зростає не більше, ніж на половину значення початкової амплітуди). Це обмеження не дозволяє вивчати ряд нелінійних хвильових ефектів, які можуть бути вивчені методом повільно змінних амплітуд, де обмеження є іншим – повільність зміни амплітуди.

#### 4.1.2. Метод повільно змінних амплітуд в знаходженні розв'язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі

Цей метод запропонований Бальтазаром ван дер Полем для розв'язування задач про нелінійні коливання в радіофізиці. Його ще називають методом ван дер Поля. В механіці метод застосовується дуже часто при вивченні нелінійних коливань. З розвитком нелінійної оптики і нелінійної радіофізики метод повільно змінних амплітуд став широко використовуватися при вивченні задач про хвилі. Далі він почав використовуватися в задачах про поширення пружних хвиль.

Основним припущенням методу, як і методу послідовних наближень, є припущення, що слабо нелінійна система рівнянь є близькою до лінійної системи рівнянь. Термін “повільно змінна амплітуда” означає, що амплітуда хвилі змінюється мало (більш точно, не змінюється) на відстані, рівній одній довжині хвилі.

Розглянемо знову квадратично нелінійне рівняння (2.16), для якого нелінійний розв’язок шукатимемо у вигляді

$$u_1(x, t) = A_1(x)e^{i(k_1x - \omega t)} \quad (4.10)$$

або 
$$u_1(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ A_1(x)e^{i(k_1x - \omega t)} \right\} = a_1(x) \cos [k_1x - \omega t + \varphi_1(x)]. \quad (4.11)$$

Далі припускається, що задача полягає у вивченні взаємодії певної скінченної кількості хвиль (головним чином, двох, трьох чи чотирьох) і розв’язок нелінійного рівняння (2.16) має вигляд суми хвиль зі змінною амплітудою

$$u_1(x, t) = \sum_{m=1}^M A_{1m}(x)e^{i\sigma_m}, \quad \sigma_m = k_{1m}x - \omega_m t. \quad (4.12)$$

Далі розв’язок (4.12) підставляється в рівняння (2.16) і враховується факт, що цей розв’язок є розв’язком лінійного рівняння. Тоді припускається, що в цій задачі притік енергії відсутній і тому можна знехтувати другими похідними зміщення в отриманому рівнянні. При цьому в рівнянні добутки амплітуд зберігаються, що має наслідком врахування взаємодії і дії самих на себе всіх хвиль-учасниць. В результаті отримуються так звані вкорочені рівняння

$$\sum_{m=1}^M k_{1m} (A_{1m})_{,1} e^{i\varphi_m} = -\frac{N_1}{2(\lambda + 2\mu)} \sum_{n=1}^M \sum_{p=1}^M k_{1n} k_{1p}^2 A_{1n} A_{1p} e^{i(\varphi_n + \varphi_p)}. \quad (4.13)$$

Також існує інший спосіб отримання вкорочених рівнянь. Тут припускається, що амплітуда є функцією повільної координати  $A(\tilde{x}) = A(\varepsilon x)$ , де  $\varepsilon$  є малим параметром. Тоді перші показані вище два припущення залишаються, а наступні два замінюються припущенням про збереження в обох сторонах отриманого рівняння лише доданків з першою степінню параметра  $\varepsilon$ . Можливо, у цьому випадку припущення про повільність зміни амплітуди видно краще.

Для спрощення вкорочених рівнянь вводяться наступні додаткові припущення щодо зв'язку між хвильовими числами  $k_{1m}$  і частотами  $\omega_m$ . Перше припущення називають умовами частотного синхронізму

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3. \quad (4.14)$$

У цьому випадку вкорочені рівняння розпадаються на три так звані еволюційні рівняння

$$\begin{aligned} (A_{11})_{,1} &= \sigma_1 \bar{A}_{12} A_{13} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}, & (A_{12})_{,1} &= \sigma_2 \bar{A}_{11} A_{13} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}, \\ (A_{13})_{,1} &= \sigma_3 A_{11} A_{12} e^{i(k_{13} - k_{12} - k_{11})x}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{1\delta} k_{13} (k_{1\delta} + k_{13})}{2(\lambda + 2\mu) k_{1\alpha}}; \quad \sigma_\alpha = -\frac{N_1 k_{11} k_{12}}{2(\lambda + 2\mu)}; \quad (\alpha + \delta = 3).$$

Другим припущенням є припущення про синхронізацію хвильових чисел, які присутні в еволюційних рівняннях (4.15)

$$k_{11} \pm k_{12} = k_{13}. \quad (4.16)$$

Умова (4.16) уможлиблює аналіз різних задач про взаємодію хвиль. Найпростішою з таких задач є задача про генерацію другої гармоніки. Тут припускається, що третя хвиля початково не збуджується, тобто,  $A_3(0) = 0$ . Також вважається, що перша і друга хвилі ідентичні (рівні за амплітудою, хвильовим числом і частотою). Також допускається з метою узгодження з класичним експериментом про генерацію другої гармоніки, що амплітуда першої хвилі постійна  $A_1 = const$ .

Як наслідок, розв'язувати треба лише третє рівняння системи (4.15). Відповідний розв'язок має вигляд

$$A_3(x_1) = -\frac{N_1 (k_{L1})^2}{2(\lambda + 2\mu)} (A_1)^2 x_1. \quad (4.17)$$

Таким чином, при прийнятих спрощеннях третя хвиля має на виході з середовища частоту  $2\omega_1$  і хвильове число  $2k_{L1}$ , тобто, вона є другою гармонікою

для першої хвилі. Але при цьому амплітуда третьої хвилі зростає прямо пропорційно шляху  $x_1$ , який пройшла хвиля. Також вона залежить від квадрату амплітуди  $(A_1)^2$  і квадрату хвильового числа  $(k_{L1})^2$  першої хвилі. Для отримання необхідних параметрів третьої хвилі на виході з середовища цими трьома величинами можна керувати. При цьому слід мати на увазі, що величина  $N_1/2(\lambda + 2\mu)$  характеризує пружний матеріал і її зміна має вузькі рамки. Така задача часто використовується як приклад у нелінійній оптиці як така, що адекватно описує експерименти про генерацію другої гармоніки. Класичний дослід з оптичною хвилею є таким:

червоне світло рубінового лазера перетворюється на фіолетове при поширенні в кристалі амонія дігідрогенфосфата. Більш загально математично і фізично, задача така: генерується гармонічна хвиля на вході в середовище з квадратично нелінійними властивостями, яка при поширенні в середовищі взаємодіє сама з собою (самогенерується); на виході з середовища хвиля фіксується у вигляді другої гармоніки первинної хвилі.

#### 4.1.3 Наближений метод знаходження розв'язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення

Розглянемо цей метод на прикладі простого нелінійного рівняння для поздовжньої хвилі, яке отримується в рамках так званої першої стандартної задачі, коли початково збуджується лише поздовжна хвиля [33, 35, 36]

$$\rho u_{1,t} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad \text{або} \quad u_{1,t} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}. \quad (4.18)$$

Перша особливість даного методу полягає у тому, що нелінійне хвильове рівняння, до якого він застосовується, повинно мати особливу структуру. Якраз рівняння (4.18) таку структуру має: права нелінійна частина може бути перенесена у лінійну ліву частину з метою формального запису лінійного хвильового рівняння зі змінною швидкістю хвилі

$$u_{1,t} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,t} - \left\{ 1 + \alpha u_{1,1} \right\} (v_L)^2 u_{1,11} = 0, \quad (4.19)$$

де  $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$ .

Далі припустимо, що початковий профіль хвилі задається функцією, яка може описувати поодинокую хвилю (для цього вона повинна бути фінітною чи мати фінітну вагу)

$$u(x_1, t=0) = F(ax_1),$$

де зразу введено довільний параметр  $a$ , який дозволить змінювати підосву поодинокій хвилі. Зазначимо тут, що підосва поодинокій хвилі є параметром, який відповідає у гармонічній хвилі довжині хвилі.

Наступне припущення є таким: поодинокую хвилю з початковим профілем у вигляді  $F(ax_1)$  поширюється у такому ж вигляді, але функція вже залежить від фазової змінної  $\sigma = a(x_1 - vt)$ ,

$$u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)], \quad (4.20)$$

куди входить змінна швидкість хвилі

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L. \quad (4.21)$$

Зазначимо, що швидкість  $v$  можна трактувати як локальну швидкість хвилі в точці  $x$  і в момент часу  $t$ . Це нагадує трактування Лайтхілла простих хвиль Ріманна, які описані в розділі 2. Оскільки з формули (4.21) випливає, що швидкість  $v$  залежить нелінійно від  $u_{1,1}$ , тобто, від розв'язку хвильового рівняння (4.19) чи, іншими словами, від профіля хвилі в точці  $x$  і в момент часу  $t$ , то по-одинокую хвилю (4.20) можна теж розуміти як просту хвилю.

Приймемо обмеження в представленні швидкості хвилі (4.21)

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1, \quad (4.22)$$

з метою записати корінь у формулі (4.21) у вигляді ряду

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots. \quad (4.23)$$

Тоді умова (4.22) дає право наближено представити швидкість (4.21) першими двома членами ряду

$$u_1(x_1, t) \cong F \left[ a \left( x_1 - v_L t - (1/2) \alpha u_{1,1} t \right) \right]. \quad (4.24)$$

Обмеження (4.22) бажано прив'язати до класу конструктивних матеріалів, для яких модель Мернагана достатньо прийнятна. Тоді для параметра  $\alpha$  може бути вказаний певний діапазон зміни  $-2 < \alpha < -19$  [2].

Далі достатньо прийняти класичне в теорії пружного деформування матеріалів обмеження малості деформації, яке звичайно записують як

$$|u_{1,1}| \ll 1$$

(тобто, вважається, що градієнт зміщення є малим). Як відомо [22,23], потенціал Мернагана описує нелінійне деформування теж і в рамках малих деформацій. Тому це обмеження зберігає можливість нелінійного деформування, але нелінійність має бути слабкою.

Далі слід визначити прийнятну точність в наближеному обчисленні швидкості в формулі (4.24). Нехай вона складає 0,1%. Порахуємо наближено корінь

$$\sqrt{1+0,094} = 1,00459\dots, \quad \sqrt{1-0,094} = 0,9518\dots,$$

$$\sqrt{1 \pm 0,094} \approx 1 \pm (1/2)0,094 = 1,0047; 0,953$$

Отже, можна прийняти, що точність 0,1% зберігається при максимальному значенні добутку  $|\alpha u_{1,1}| \leq 0,094$ . Тому у випадку точності 0,1% обмеження на параметри можна уточнити:

$$|\alpha u_{1,1}| \leq 0,001, \quad |u_{1,1}| \leq 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}.$$

У випадку хвилі з відомим профілем цим обмеженням можна надати геометричний зміст: величину  $u_{1,1}$  можна розуміти як дотичну до профіля хвилі і її малі значення відповідають малим значенням тангенса кута, утвореного дотичною з віссю абсцис. Як відомо, значення тангенса кута і кута співпадають в діапазоні  $0 < \gamma < 5^\circ \cong 0,0873$ . Тоді обмеження може трактуватися таким чином, що профіль хвилі повинен бути таким, щоб перевищення довжини гармонічної хвилі чи подошви одиночної хвилі над максимальним значенням амплітуди в профілі хвилі мало приблизно один - два порядки. Це обмеження для кожного конкретного випадку в числовому моделюванні повинно перевірятися.

Розглянемо тепер фазу хвилі  $\sigma = a(x_1 - vt) = a\left[x_1 - \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L t\right]$  і врахуємо наближене представлення (4.24). Тоді фазу можна наближено представити так:

$$\sigma \approx \left[ a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t \right]. \quad (4.25)$$

Як випливає з формули (4.25), фаза складена з двох частин – класичної фази з постійною фазовою швидкістю  $\sigma = a(x_1 - v_L t)$  і можливо малого додаткового параметра  $\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t$ . При достатньо малих проміжків часу і малих підошвах параметр дійсно малий. Тоді розв'язок (4.24) можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром  $\delta$  в околі класичного постійного значення фази  $\sigma$

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots. \quad (4.26)$$

У цьому розкладі збережемо перші два доданки, враховуючи малість параметра  $\delta$ , тобто умову

$$|\delta| = \left| -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t \right| \ll 1. \quad (4.26')$$

Оскільки малість  $|\alpha u_{1,1}|$  вже припущена в (4.22), то це фактично умова на  $a v_L t$ .

Якщо обмежитись класом конструкційних матеріалів, то пройдена хвилею відстань повинна бути приблизно 1 -10 м і характерний розмір хвилі (довжина підошви)  $a$  повинна бути значно меншою цієї відстані).

Вирахуємо наближено похідну через введену раніше функцію  $F$

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} = F'_\sigma(\sigma)a + F''_{\sigma\sigma}(\sigma)\left(-\frac{1}{2}\alpha a^2 v_L u_{1,1} t\right) \approx F'_\sigma(\sigma).$$

Тоді наближеному розв'язку (4.26) можна надати вигляд

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)a\left[\delta = -\frac{1}{2}\alpha a v_L u_{1,1} t\right] = F(\sigma) - \frac{1}{2}\alpha a^2 v_L t \left[F'(\sigma)\right]^2 \quad (4.27)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (4.27) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

Необхідність застосування методу 2 до задач про поодинокі хвилі з профілями які не описуються експоненціальними функціями виникає через те, що метод 1 не може бути застосований у випадку таких профілів.

Далі буде показано, що цей метод може бути використаний для аналізу квадратично нелінійних циліндричних хвиль і кубічно нелінійних поперечних плоских хвиль. Річ у тім, що відповідні нелінійні хвильові рівняння також допускають представлення у вигляді лінійного хвильового рівняння зі змінною швидкістю.

## 4.2 Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з гармонічним профілем з врахуванням нелінійності деформування на основі отриманих наближених розв'язків

4.2.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем. Аналіз на основі методу послідовних наближень і методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули.

Основним нелінійним хвильовим рівнянням у цій задачі є рівняння (4.18)

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad \text{або} \quad u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}.$$

Обома вказаними в заголовку методами буде розглядатися задача про хвилю з гармонічним профілем (гармонічну хвилю (4.6))

$$u_1^{(0)}(x_1, t) = u_{1(0)} \cos(k_L x_1 - \omega t) \quad \text{або} \quad u_1^{(0)}(x_1, t) = u_{1(0)} e^{i(k_L x_1 - \omega t)}. \quad (4.28)$$

Як вказано в п.4.1.1, методом послідовних наближень ця задача розв'язувалась ще в минулому столітті в нелінійній акустиці [3,4,16]. Розв'язок в рамках перших двох наближень показаний в п.4.1.1 як формула (4.8)

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Другий метод виходить з того, що початковий профіль хвилі є гармонічним у просторі і має вигляд  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$ . Тоді формула (4.27) приймає конкретний



ВИГЛЯД

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha(k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}; \quad (4.30)$$

Порівняння розв'язків (4.8) і (4.29) показує, що вони ідентичні з точністю до постійного множника, що не змінює якісну картину еволюції хвилі.

#### 4.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три металічні конструкційні матеріали з такими параметрами в рамках моделі Мернагана (система СІ) [18]:

Алюміній –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ;  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ;

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3; \alpha = -16,81;$$

Мідь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ;

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Параметри гармонічної хвилі вибирались такими:

додатково до швидкості хвилі  $c_L = (\omega/k_L)$ , яка задається через властивості матеріалу, вибиралася початкова частота  $\omega$  і при вже відомому хвильовому числі  $k_L = (\omega/c_L)$  за формулою  $L = (2\pi/k_L)$  вибиралася довжина хвилі (для кожного матеріалу своя довжина хвилі) -

$$\omega = 0,8 \cdot 10^5; L = 0,492 \text{ (алюміній)}, L = 0,374 \text{ (мідь)}, L = 0,446 \text{ (сталь)};$$

$$\omega = 1,8 \cdot 10^5; L = 0,219 \text{ (алюміній)}, L = 0,166 \text{ (мідь)}, L = 0,198 \text{ (сталь)};$$

$$\omega = 2,6 \cdot 10^5; L = 0,151 \text{ (алюміній)}, L = 0,115 \text{ (мідь)}, L = 0,137 \text{ (сталь)}.$$

#### 4.2.3. Аналіз впливу довжини хвилі на спотворення початкової форми профілю

Початковий профіль гармонічної хвилі приймається у вигляді  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$ . Далі чисельно аналізуються формули для хвилі в довільний момент часу, отри-

Початковий профіль гармонічної хвилі приймається у вигляді  $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$ .

Далі чисельно аналізуються формули для хвилі в довільний момент часу, отримані двома різними підходами: формула (4.30) отримана методом, що ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення, формула (4.29) отримана методом послідовних наближень.

За цими формулами далі показані двовимірні графіки з координатами "зміщення  $u_1$  - пройдена хвилею відстань  $x_1$ ". Всього розглянуто 27 наборів параметрів:

3 метали – алюміній, мідь, сталь;

3 варіанти довжини хвилі –  $L = 0.246; 0.187; 0.243$ ; що відповідають наступним частотам  $\omega = 0.8 \cdot 10^5; 1.8 \cdot 10^5; 2.6 \cdot 10^5$ ;

3 варіанти максимальної амплітуди –  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}; 1.5 \cdot 10^{-5}; 3.5 \cdot 10^{-5}$ ;

Для кожного набору побудовано 4 графіки.

В залежності від параметрів конкретного набору графіки відрізняються діапазоном амплітуди хвилі і відстані яку пройшла хвиля.

Вказані чотири графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно.

Параметри для тривимірних графіків підібрані таким чином, щоб наглядніше продемонструвати еволюцію хвилі.

Нижче спочатку показані графіки, отримані за методом, що оснований на перетворенні рівняння і обмеженні градієнта зміщення, а потім графіки, що отримані за методом послідовних наближень.

*Особливості еволюції при застосуванні методу, що оснований на обмеженні градієнта зміщення (формула 4.30)*

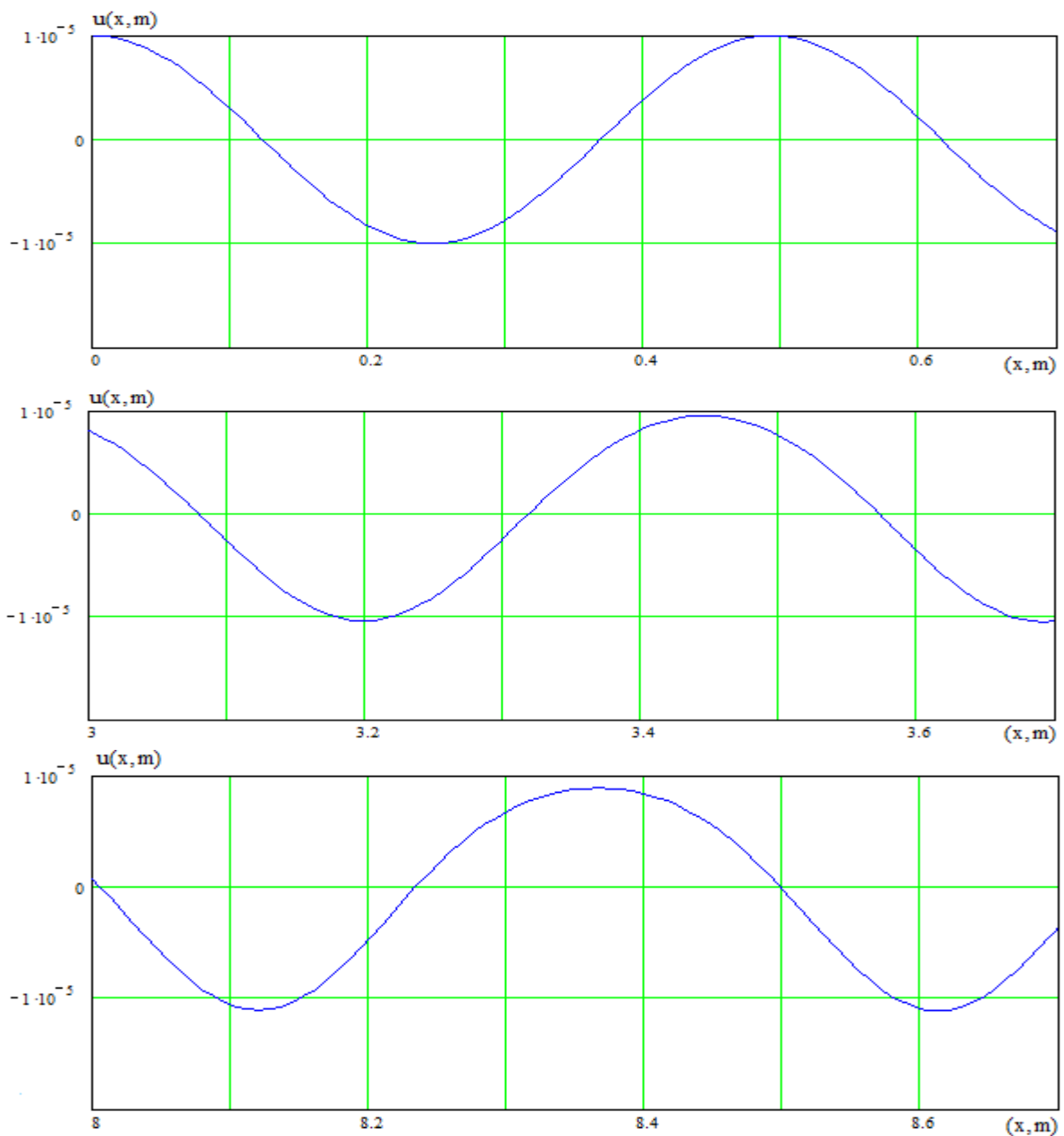
На рис. 4.7 - 4.12 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, мідь; фіксована амплітуда та три значення частоти.

На рис. 4.7 - 4.9 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (4.30) для плоскої хвилі гармонічного профі-

лю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та три значення частоти  $\omega = 0.8 \cdot 10^5; 1.8 \cdot 10^5; 2.6 \cdot 10^5$ .

Рис. 4.7 відповідає частоті  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$ ; Рис. 4.8 відповідає частоті  $\omega = 1.8 \cdot 10^5$ ; Рис. 4.9 відповідає частоті  $\omega = 2.6 \cdot 10^5$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, першими у цьому “Додатку Б” є Рис. 4.8 і 4.9.



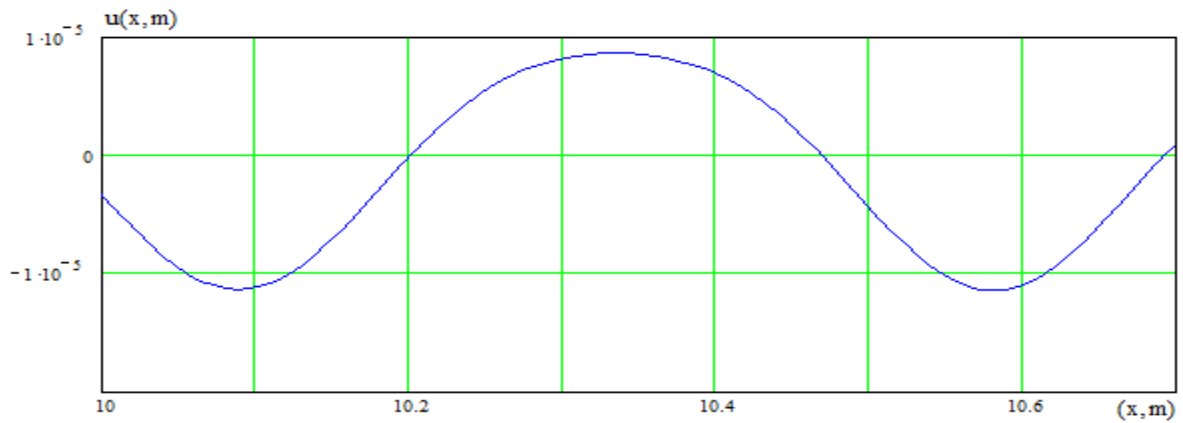


Рис. 4.7

Таким чином, на графіках рис. 4.7 виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному верхньому горбі починає формуватися плато.

Графіки Рис.4.8 демонструють більш розвинену еволюцію початкового гармонічного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби.

Графіки Рис. 4.9 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового гармонічного профіля: утворення плато, западання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного, наближення профіля першої гармоніки до профіля другої гармоніки.

З графіків 4.7- 4.9 видно, що при зміні частоти (яка вибиралась  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$ ;  $1.8 \cdot 10^5$ ;  $2.6 \cdot 10^5$ ) змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час. Також прискорюється процес еволюції початкового профіля хвилі, оскільки він нелінійно залежить від частоти, тобто для іншого матеріалу і тих же значень.

На Рис. 4.10-4.12 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та три частоти  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$ ;  $1.8 \cdot 10^5$ ;  $2.6 \cdot 10^5$ .

Рис. 4.10 відповідає частоті  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$  ; Рис. 4.11 відповідає частоті  $\omega = 1.8 \cdot 10^5$  ; Рис. 4.12 відповідає частоті  $\omega = 2.6 \cdot 10^5$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.11 і 4.12.

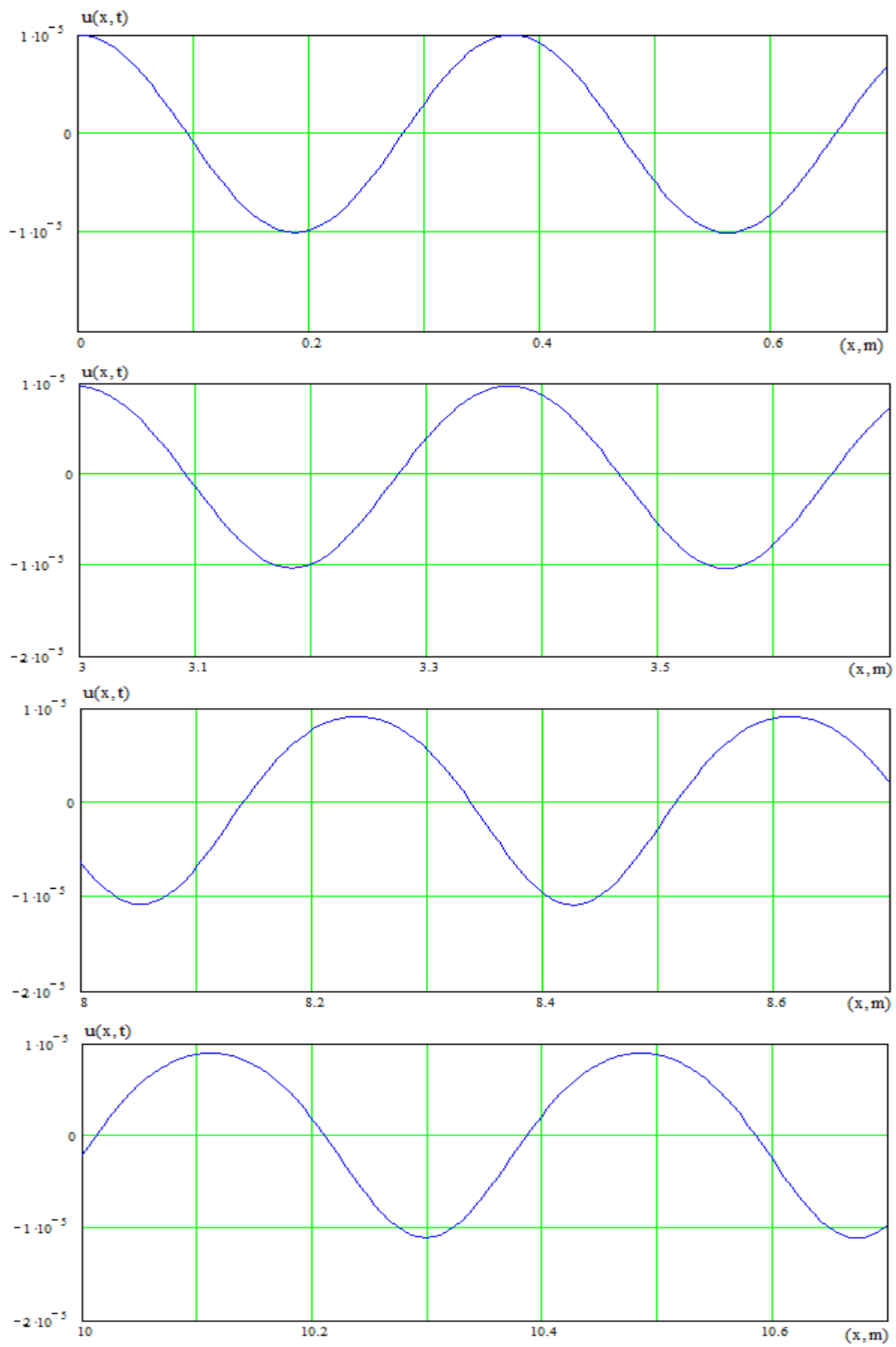


Рис.4.10

Отже на графіках Рис. 4.10 виявляється лише перший етап еволюції (спотворення) початкового профіля хвилі. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки Рис.4.11 демонструють більш розвинену еволюцію початкового гармонічного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки Рис. 4.12 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового гармонічного профіля: утворення плато, западання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного, наближення профіля першої гармоніки до профіля другої гармоніки.

З графіків 4.10- 4.12 видно, що при зміні частоти (яка вибиралась  $\omega=0.8 \cdot 10^5$ ;  $1.8 \cdot 10^5$ ;  $2.6 \cdot 10^5$ ) змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час.

Також прискорюється процес еволюції початкового профіля хвилі, оскільки він нелінійно залежить від частоти, тобто для іншого матеріалу і тих же значень

Взагалі кажучи, цей факт відмінності між матеріалами в прояві еволюції лише у тому, що один і той же прояв фіксується на різних відстанях, можна передбачити, за виглядом формули (4.29). Але можна вказати більш конкретно цю відмінність: відстань для матеріалу 2 можна перерахувати через відстань для матеріалу 1 за формулою

$$x_2 = \left\{ \left[ \frac{N_1^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2m^{(2)}} \right] / \left[ \frac{N_1^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2m^{(1)}} \right] \right\} = x_1.$$

Подібна ж ситуація може бути передбачена і у вигляді іншого підходу, коли еволюція описується формулою (4.30).

Порівняння графіків для двох матеріалів (алюміній та мідь) для одних і тих же частот, показує - що дисторсія хвилі проявляється з різною швидкістю в залежності від виду матеріалу, але тут залежність амплітуди хвилі від властивостей матеріалу вже є нелінійною.

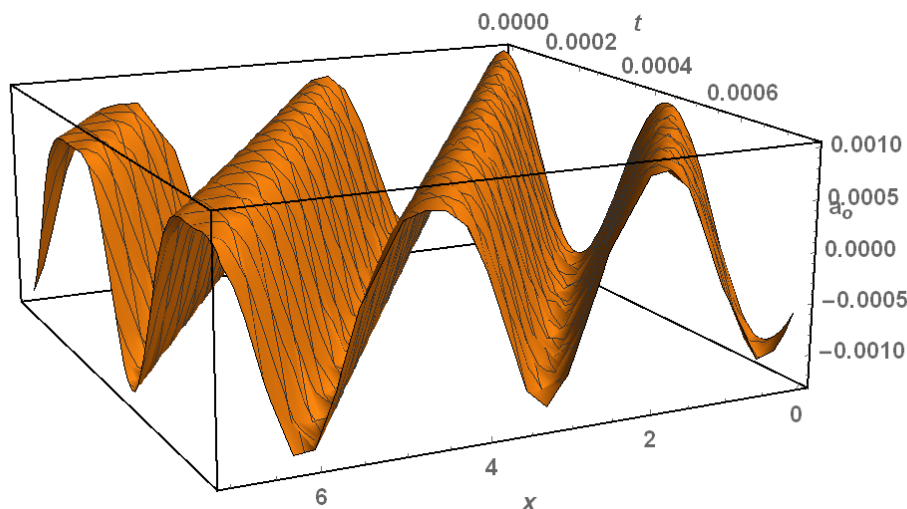


Рис. 4.13

Рис. 4.13 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $10^{-2}$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  та  $\omega = 2.2$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

*Особливості еволюції при застосуванні методу послідовних наближень (формула 4.29)*

На рис. 4.14 - 4.16 графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (4.29) для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та три значення частоти  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$ ;  $1.8 \cdot 10^5$ ;  $2.6 \cdot 10^5$ .

Рис. 4.14 відповідає частоті  $\omega = 0.8 \cdot 10^5$ ; Рис. 4.15 відповідає частоті  $\omega = 1.8 \cdot 10^5$ ; Рис. 4.16 відповідає частоті  $\omega = 2.6 \cdot 10^5$ .

Далі частина рисунків поміщена у "Додаток Б", з номерами рисунків розділу 4. Тому у "Додатку" введена своя схема і рисунки "Розділу 4" поміщені у "Додаток до розділу 4". Зокрема, у цьому "Додатку Б" внесені Рис. 4.15 і 4.16.

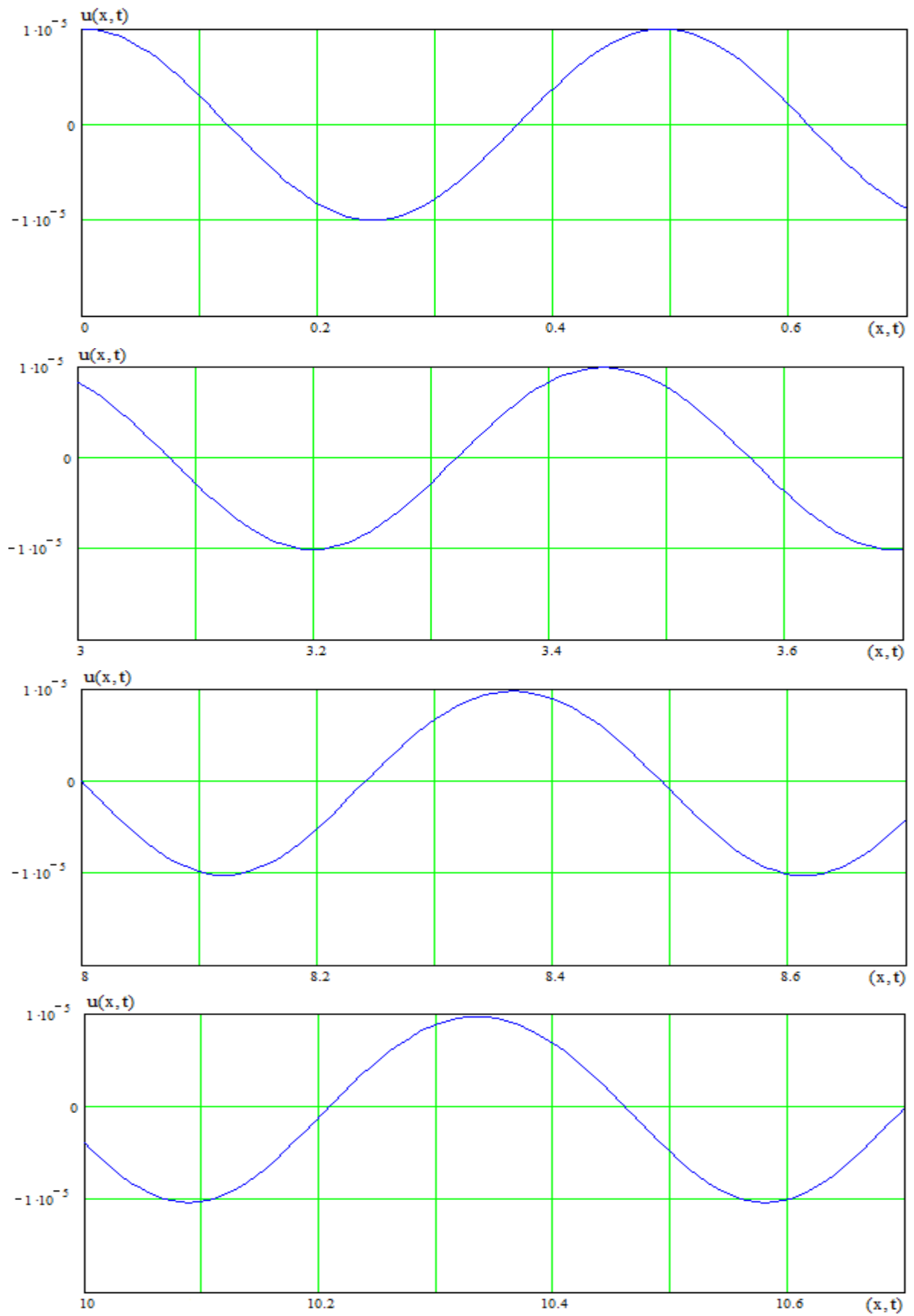


Рис. 4.14



Рис. 4.14 відповідає початковій фазі еволюції хвилі. Порівняння графіків 4.7 і 4.14 свідчать про близькість результатів, отриманих двома методами—методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт переміщення.

Рис. 4.15 відповідає також як і рис.4.14 початковій фазі еволюції хвилі але еволюція тут більш помітна. Порівняння графіків 4.8 і 4.15 свідчать про початкову близькість результатів.

Рис. 4.16 відповідає такій фазі еволюції хвилі, коли вже формується плато та є тенденція до западання центральної частини та утворення другої гармоніки. Порівняння графіків 4.9 і 4.16 свідчать про близькість результатів, отриманих двома методами—методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт переміщення.

Якщо порівняти графіки які отримані двома методами, то можна сказати, що еволюція початкового профілю відбувається за однаковим сценарієм

#### 4.2.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю

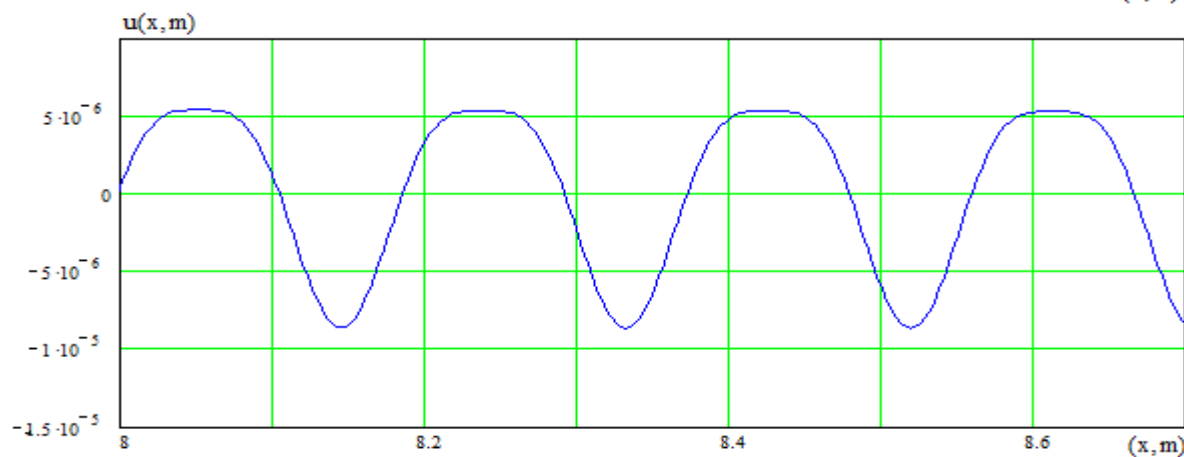
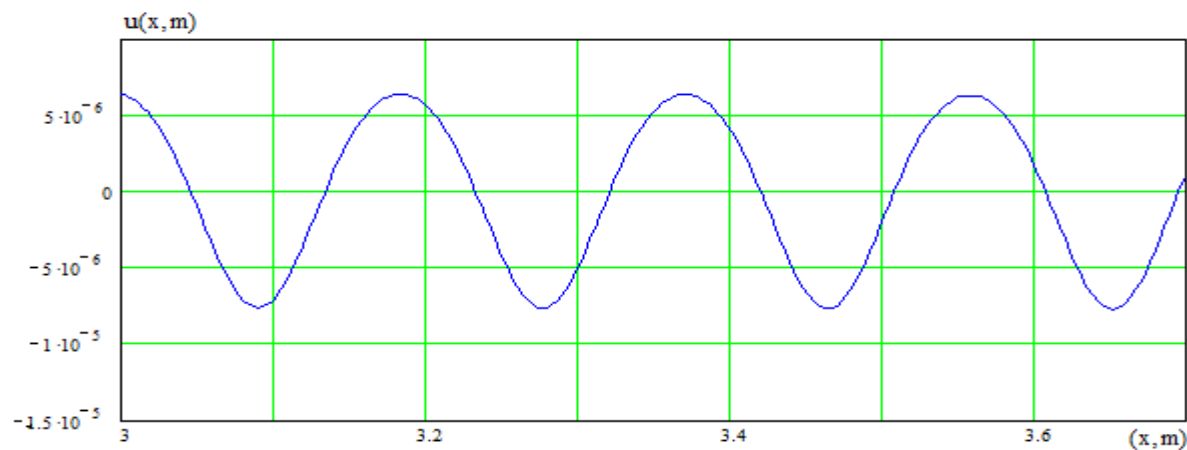
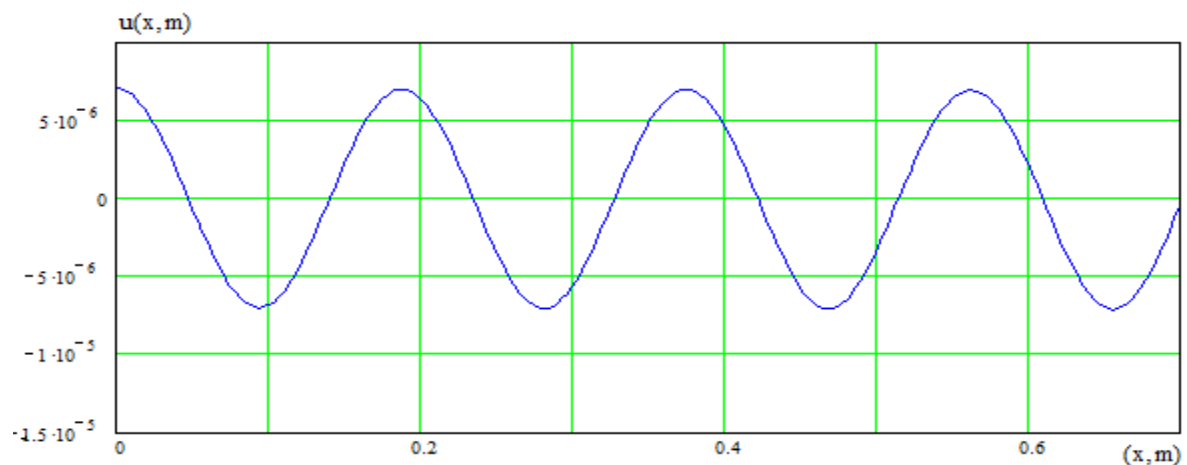
*Особливості еволюції при застосуванні методу, що оснований на обмеженні градієнта зміщення (формула 4.30)*

На рис. 4.17 - 4.22 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал мідь, сталь; фіксована частота та три значення максимальної амплітуди.

На рис. 4.17-4.19 графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Рис. 4.17 відповідає амплітуді  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.18 відповідає амплітуді  $a_0 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.19 відповідає амплітуді  $a_0 = 3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.18 і 4.19.



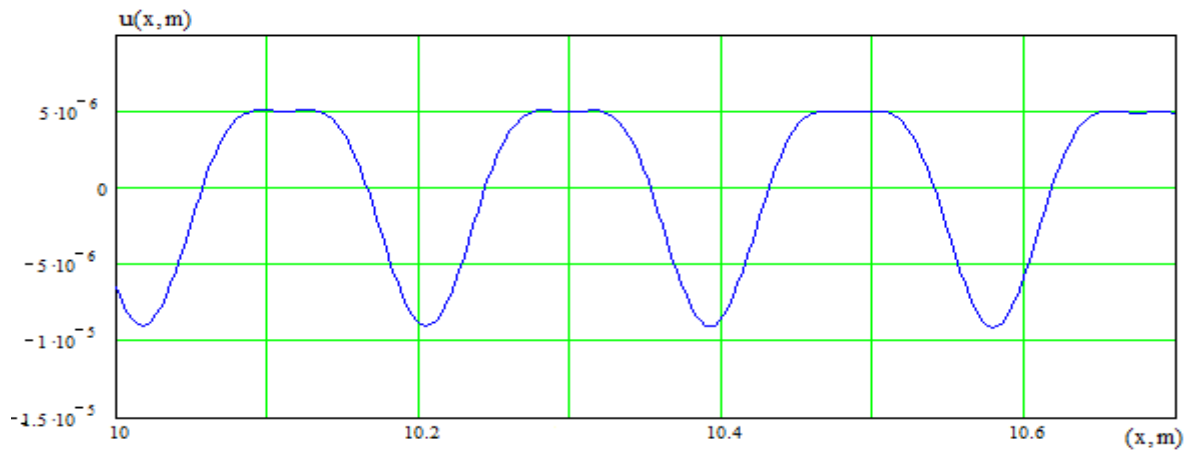


Рис. 4.17

Отже на графіках рис. 4.17 поступово починає проявлятися початкова фаза еволюції, коли на кожному верхньому горбі починає формуватися плато.

Графіки, які зображені на рис. 4.18 демонструють більш виражену еволюцію початкового профіля хвилі. Тут чітко спостерігається плато, яке потім западається вниз утворюючи два горби.

Графіки Рис. 4.19 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового гармонічного профіля: утворення плато, западання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного, наближення профіля першої гармоніки до профіля другої гармоніки. Дисторсія яка спостерігається подібна тій, що спостерігалася коли змінювалася довжина хвилі, для однакових матеріалів.

З графіків 4.17- 4.19 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}, 1.5 \cdot 10^{-5}, 3.5 \cdot 10^{-5}$ ) змінюється швидкість спотворення профілю хвилі.

На рис. 4.20-4.22 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}, 1.5 \cdot 10^{-5}, 3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Рис. 4.20 відповідає амплітуді  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.21 відповідає амплітуді  $a_0 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ;  $\omega = 1.8 \cdot 10^5$ ; Рис. 4.22 відповідає амплітуді  $a_0 = 3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.21 і 4.22.

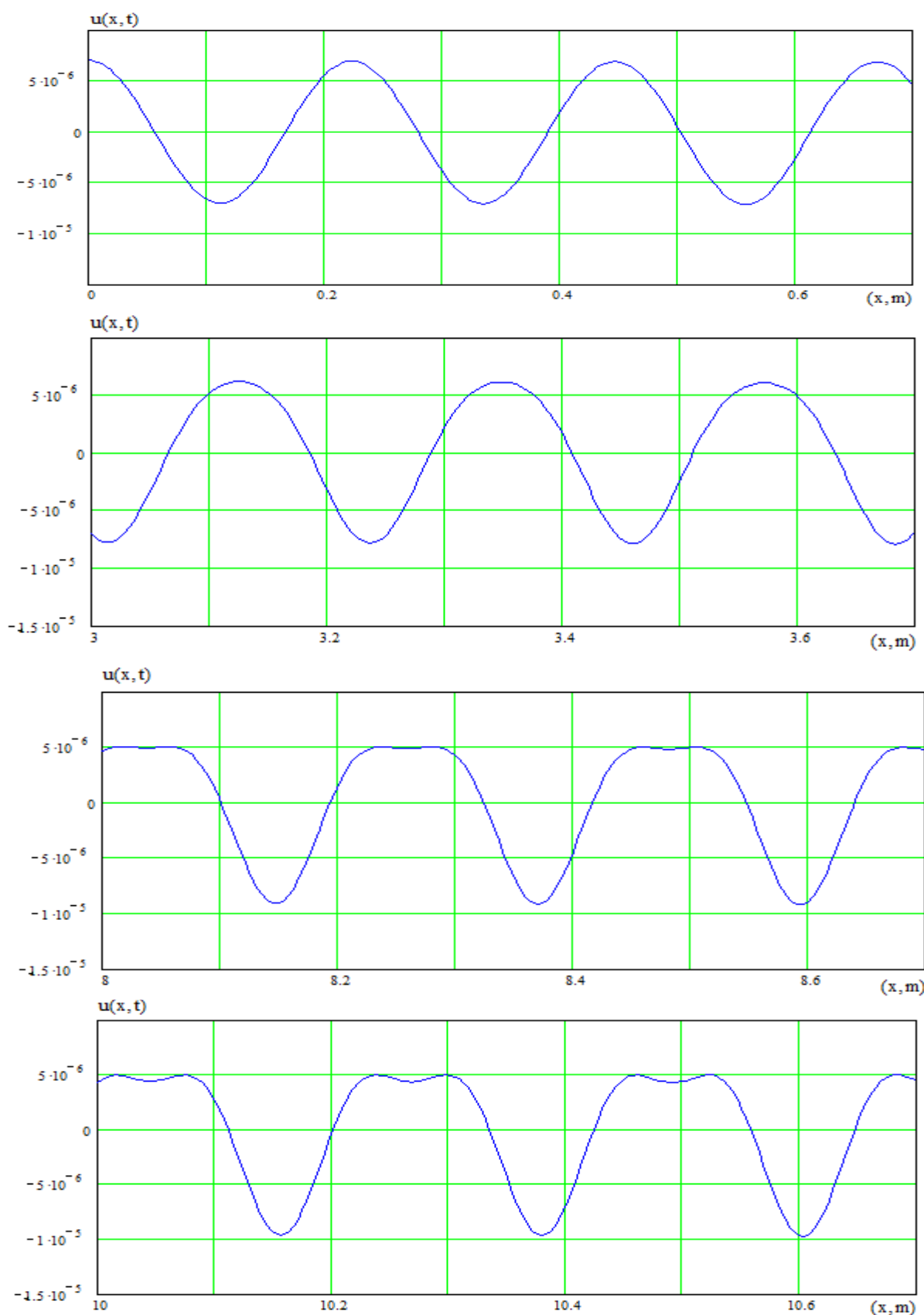


Рис. 4.20

Отже на вище зазначених графіках рис. 4.20 поступово починає проявлятися початкова фаза еволюції, коли на кожному верхньому горбі починає формуватися плато, але більш виражено чим це спостерігається для матеріалу мідь. Така залежність залежить від вибору матеріалу.

Графіки Рис.4.21 демонструють більш розвинену еволюцію початкового гармонічного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби. Порівняння з відповідними графіками для міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

На графіках рис. 4.22 чітко спостерігається плато яке потім западається у два горби, таке перетворення характеризує повний цикл спотворення (дисторсії).

З графіків рис. 4.20- 4.22 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}, 1.5 \cdot 10^{-5}, 3.5 \cdot 10^{-5}$ ) змінюється швидкість спотворення початкового профілю хвилі.

Зміна амплітуди для вибраних двох матеріалів (мідь та сталь) дає наочний вигляд спотворення початкового профіля хвилі. Чим більша амплітуда тим швидкість спотворення зростає адже вона нелінійно впливає на швидкість еволюції. Характеристика матеріалу також впливає на швидкість дисторсії, якщо мідь, то швидкість менша, а якщо сталь то більша.

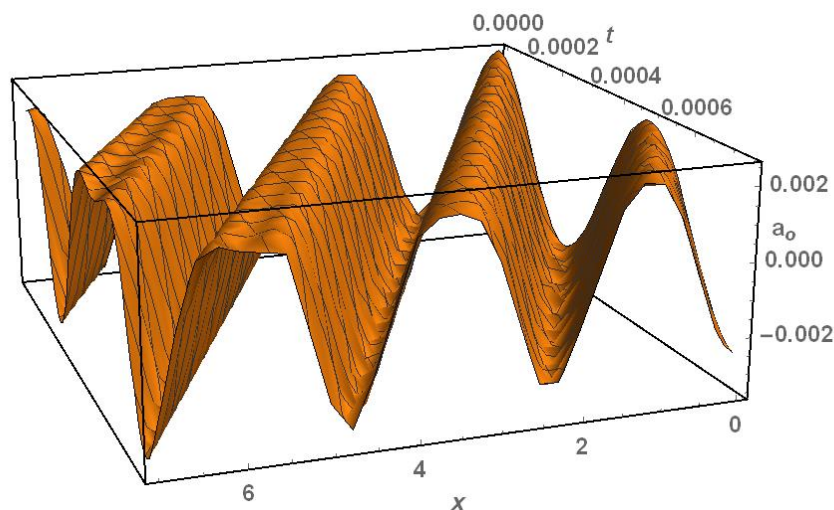


Рис. 4.23

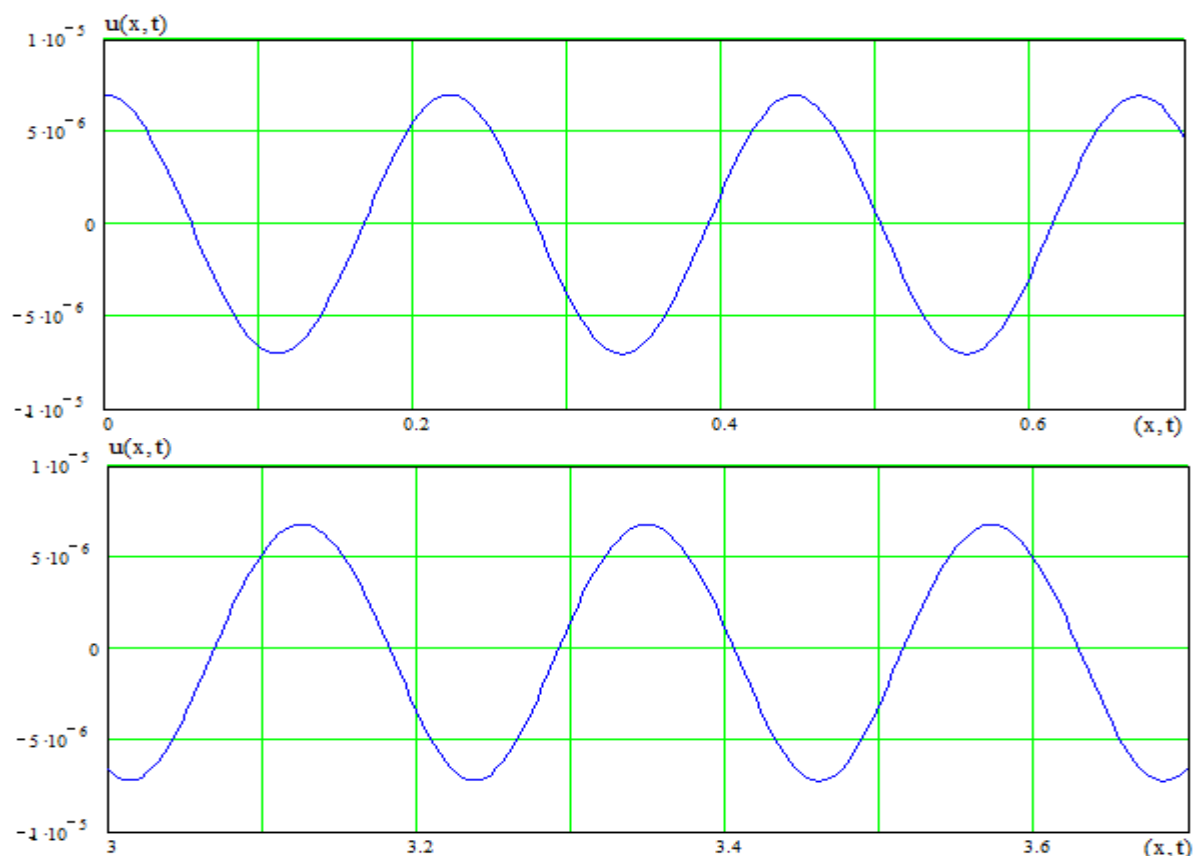
Рис. 4.23 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $10^{-2}$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 2.6$  та значення максимальної амплітуди  $a_0 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

*Особливості еволюції при застосуванні методу послідовних наближень (формула 4.29)*

Графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Рис. 4.24 відповідає амплітуді  $a_0 = 0.7 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.25 відповідає амплітуді  $a_0 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.26 відповідає амплітуді  $a_0 = 3.5 \cdot 10^{-5}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.25 і 4.26.



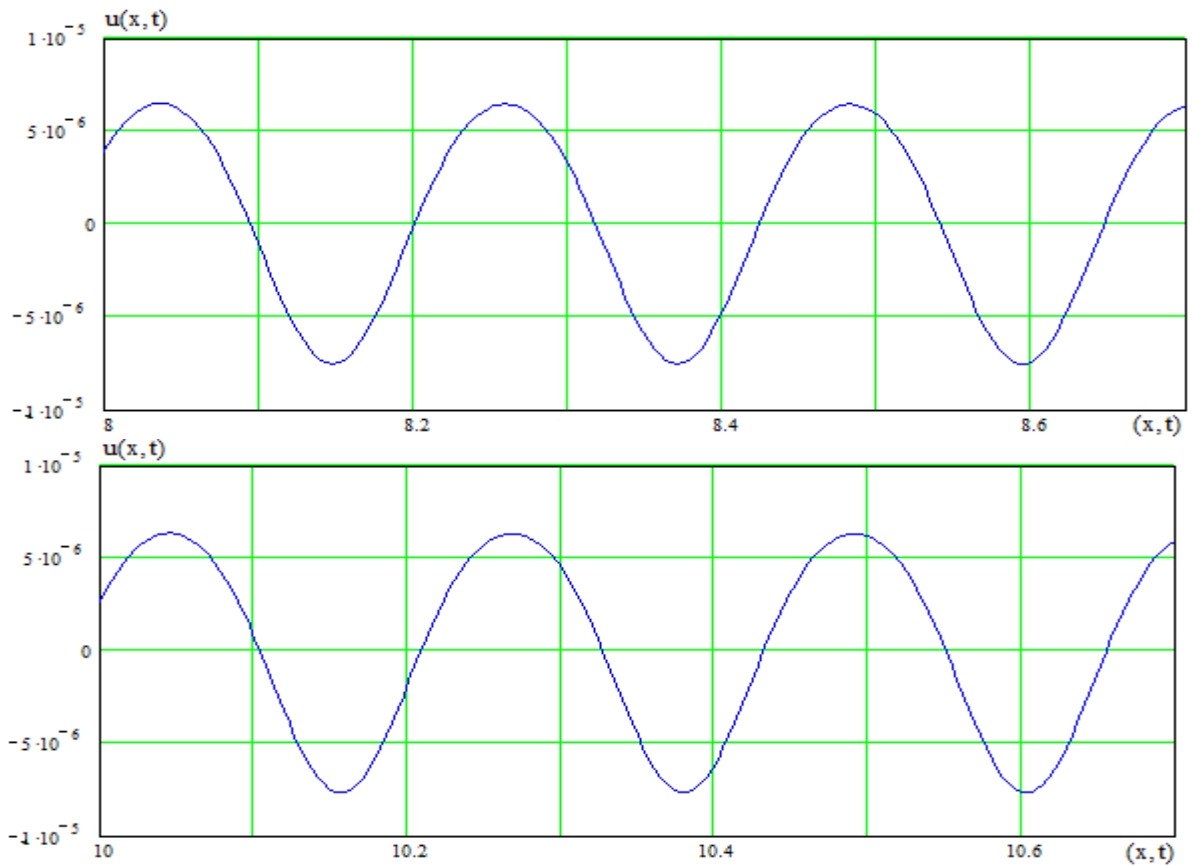


Рис. 4.24

Рис. 4.24 відповідає початковій фазі еволюції хвилі. Порівняння графіків 4.19 і 4.24 свідчать про близькість результатів, отриманих двома методами – методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт переміщення.

Рис. 4.24 відповідає початковій фазі еволюції хвилі. Порівняння графіків 4.20 і 4.25 свідчать про близькість результатів, отриманих різними методами.

Рис. 4.26 відповідає такій фазі еволюції хвилі, коли вже формується плато та є тенденція до западання центральної частини та утворення другої гармоніки. Порівняння графіків 4.20 і 4.26 свідчать про близькість результатів, отриманих двома методами - методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт переміщення.

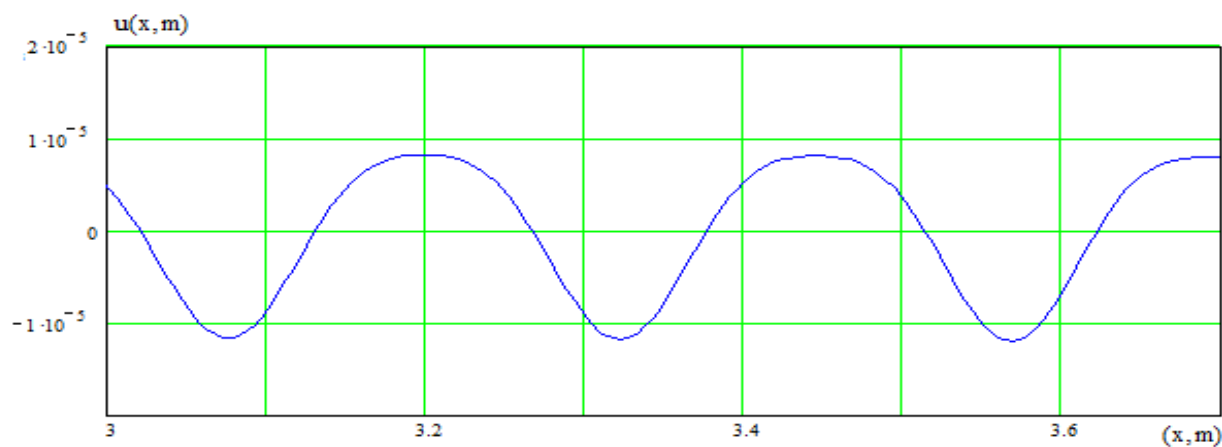
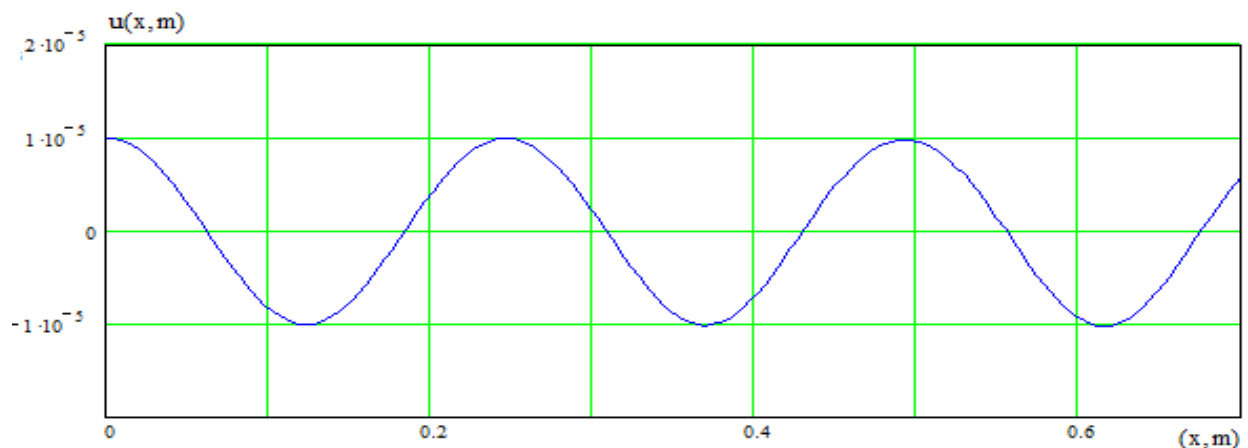
Якщо порівняти графіки які отримані двома методами, то можна сказати, що еволюція початкового профілю відбувається за однаковим сценарієм але з різною швидкістю. Тобто, швидкість поширення хвилі для двох підходів різна.

#### 4.2.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю

*Особливості еволюції при застосуванні методу, що оснований на обмеженні градієнта зміщення (формула 4.30)*

Розглядаються три набори графіків рис. (4.27- 4.29), які показують вплив матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі. Кожний набір характеризується наступними характеристиками: алюміній,  $\alpha = -16.811$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.27; мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.28; сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.29.

На рис. 4.27 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .





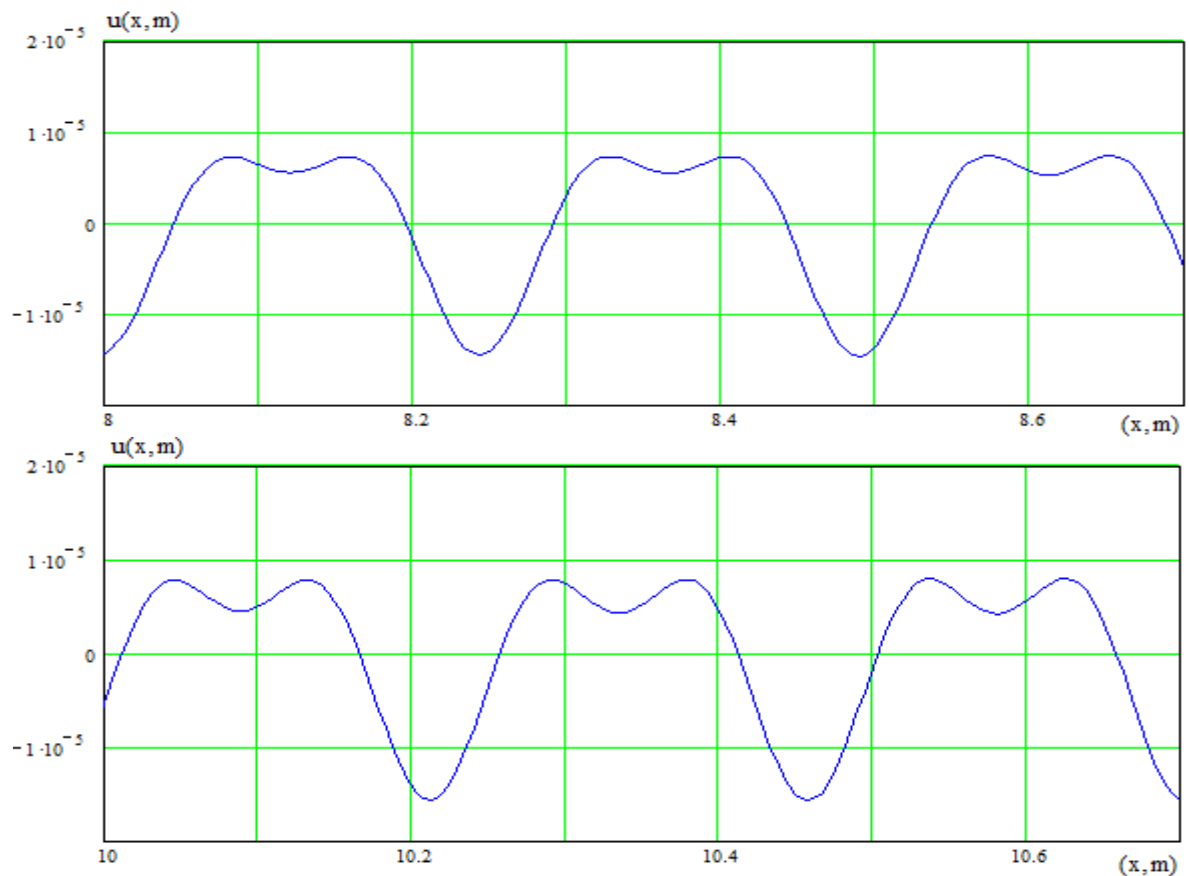
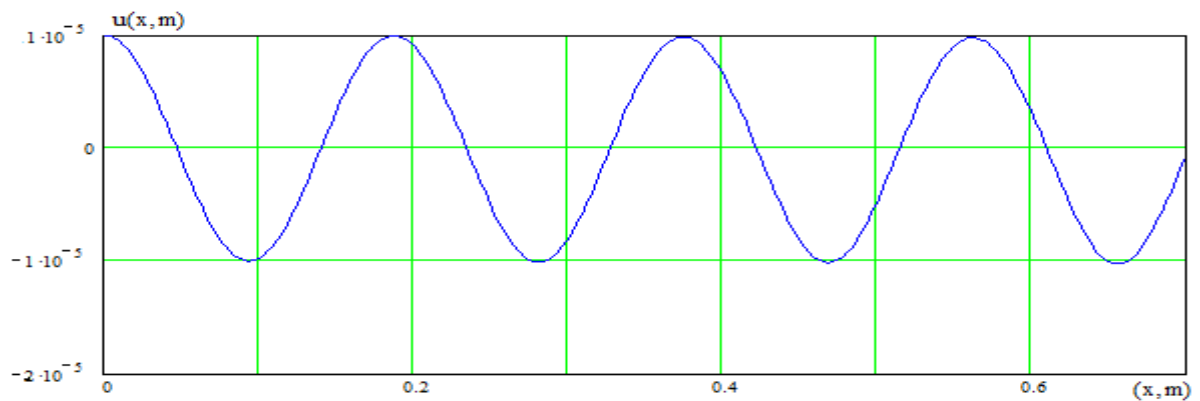


Рис.4.27

Графіки Рис.4.27 демонструють розвинену еволюцію початкового гармонічного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби.

На рис. 4.28 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .



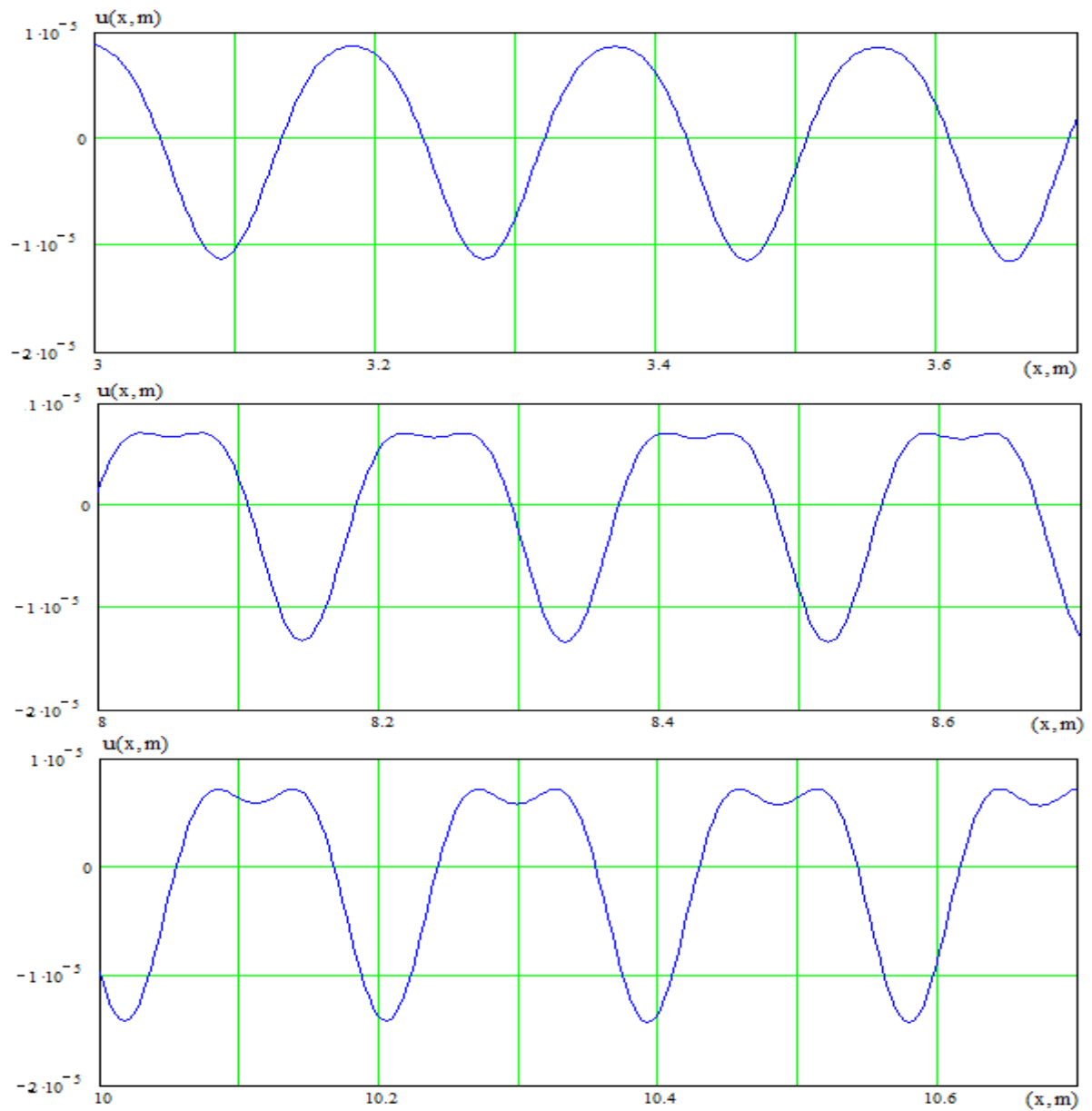


Рис.4.28

Графіки рис. 4.28 демонструють перший етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки западатися, топто утворювати плато. В порівнянні з графіками рис. 4.27 дисторсія тут відбувається повільніше.

На рис. 4.29 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .

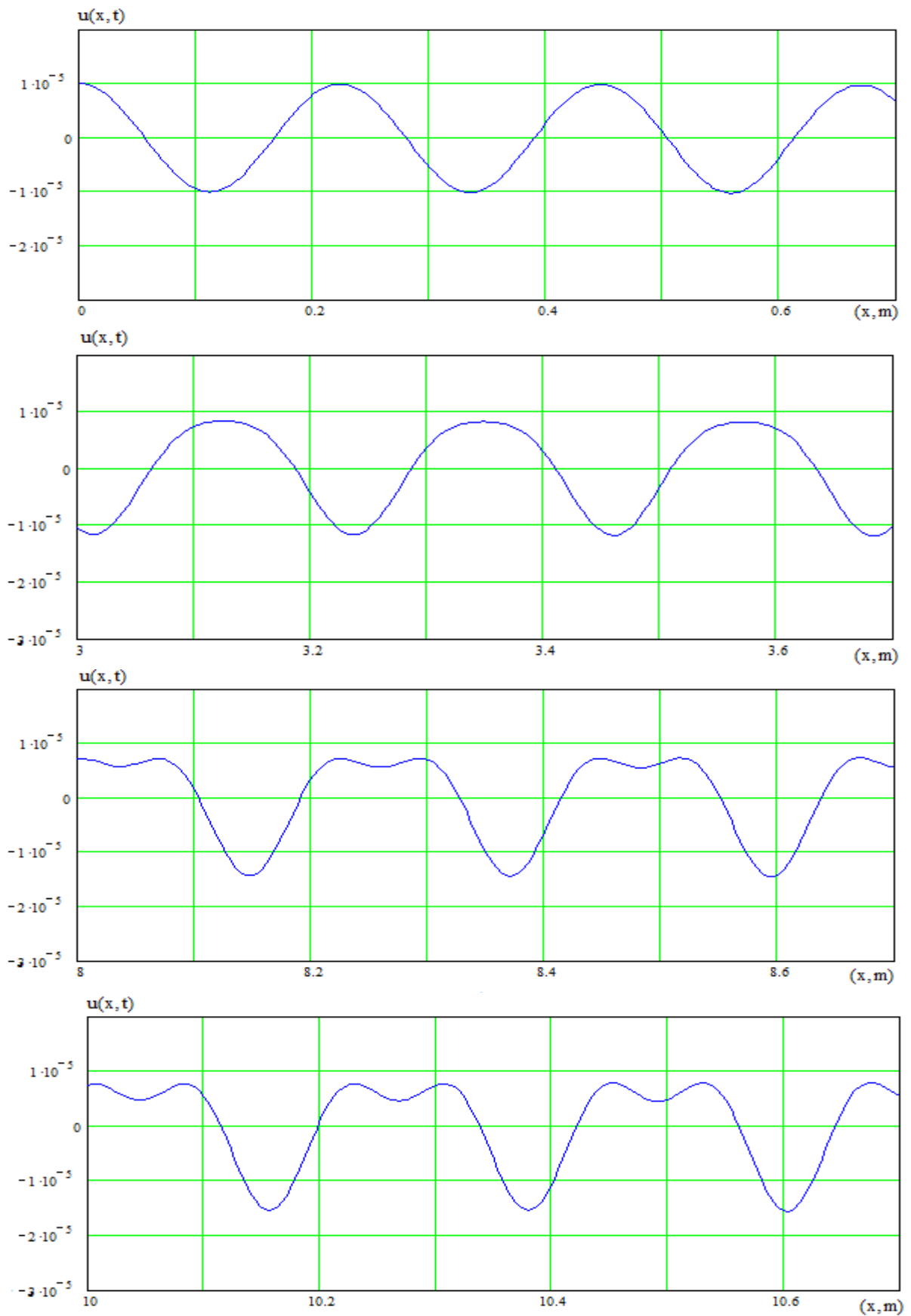


Рис.4.29

Отже, на графіках Рис. 4.29 виявляється практично повний етап еволюції (спотворення) початкового профіля хвилі. Порівняння з відповідними графі-

ками для алюмінію та міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристик хвилі подібні.

Графіки рис. 4.27-4.29 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового гармонічного профіля: утворення плато, западання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного, наближення профіля першої гармоніки до профіля другої гармоніки.

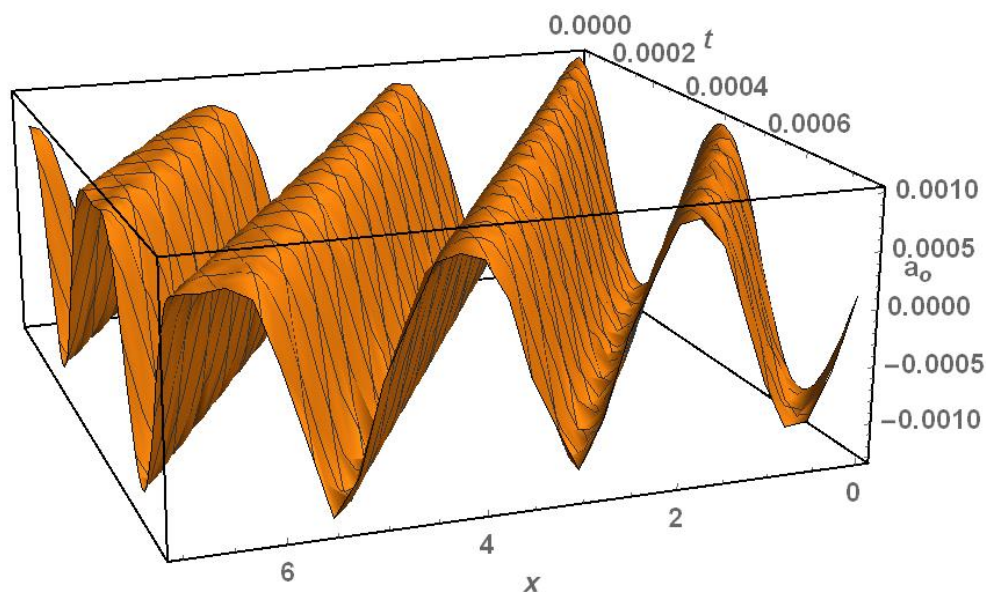


Рис. 4.30

Рис. 4.30 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $10^{-2}$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-5}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 2.6$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

*Особливості еволюції при застосуванні методу послідовних наближень (формула 4.29).*

Далі розглядаються набори графіків зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля рис.4.31 - 4.33, які показують спотворення початкового профілю для методу послідовних наближень в знаходженні розв'язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поздовжньої хвилі, що описується рівнянням

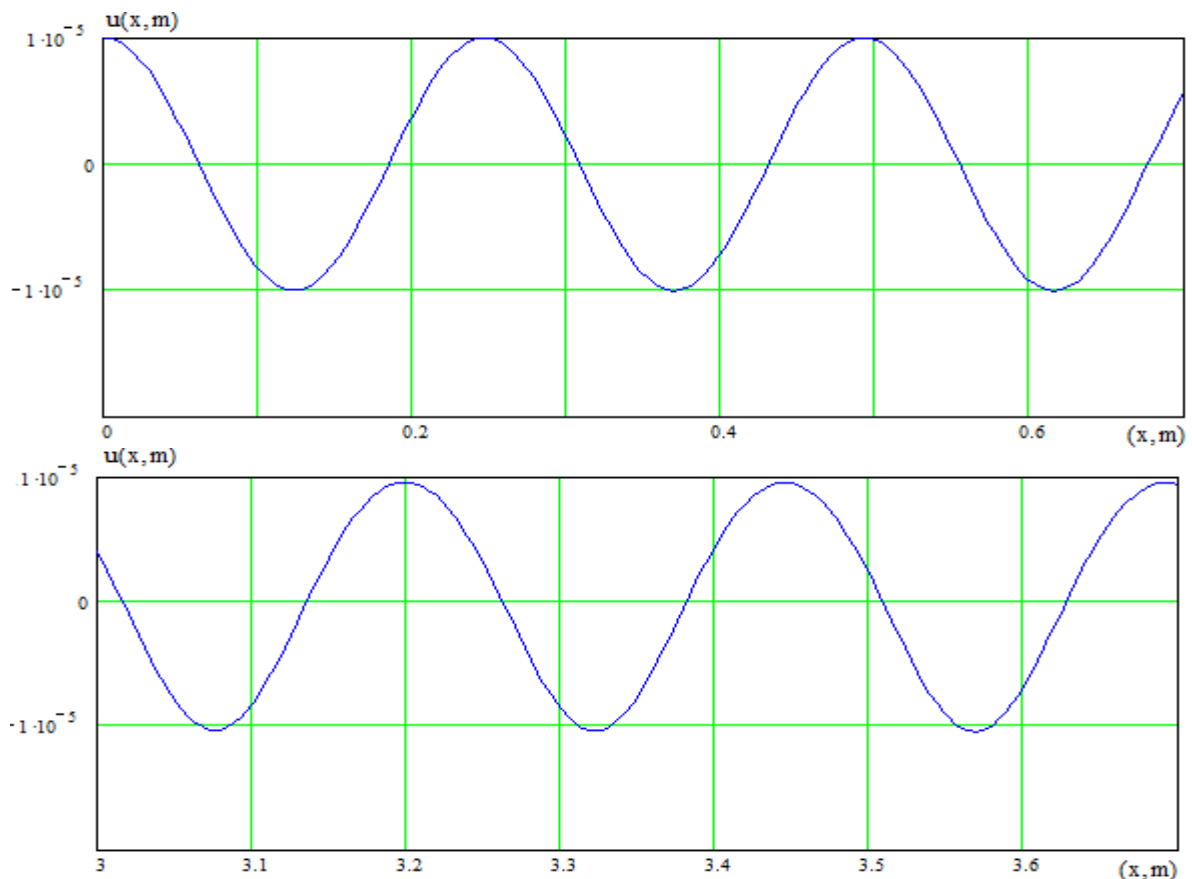
(4.1). Розв'язок має наступний вигляд:

$$u_1(x,t) = u_1^{(0)}(x_1,t) + u_1^{(1)}(x_1,t) =$$

$$= u_{10} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{10})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t).$$

На рис.4.31-4.33 показані набори графіків трьох типів з наступними характеристиками: матеріал : алюміній,  $\alpha = -16.811$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.31; мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.32; сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.33.

На рис.4.31 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .



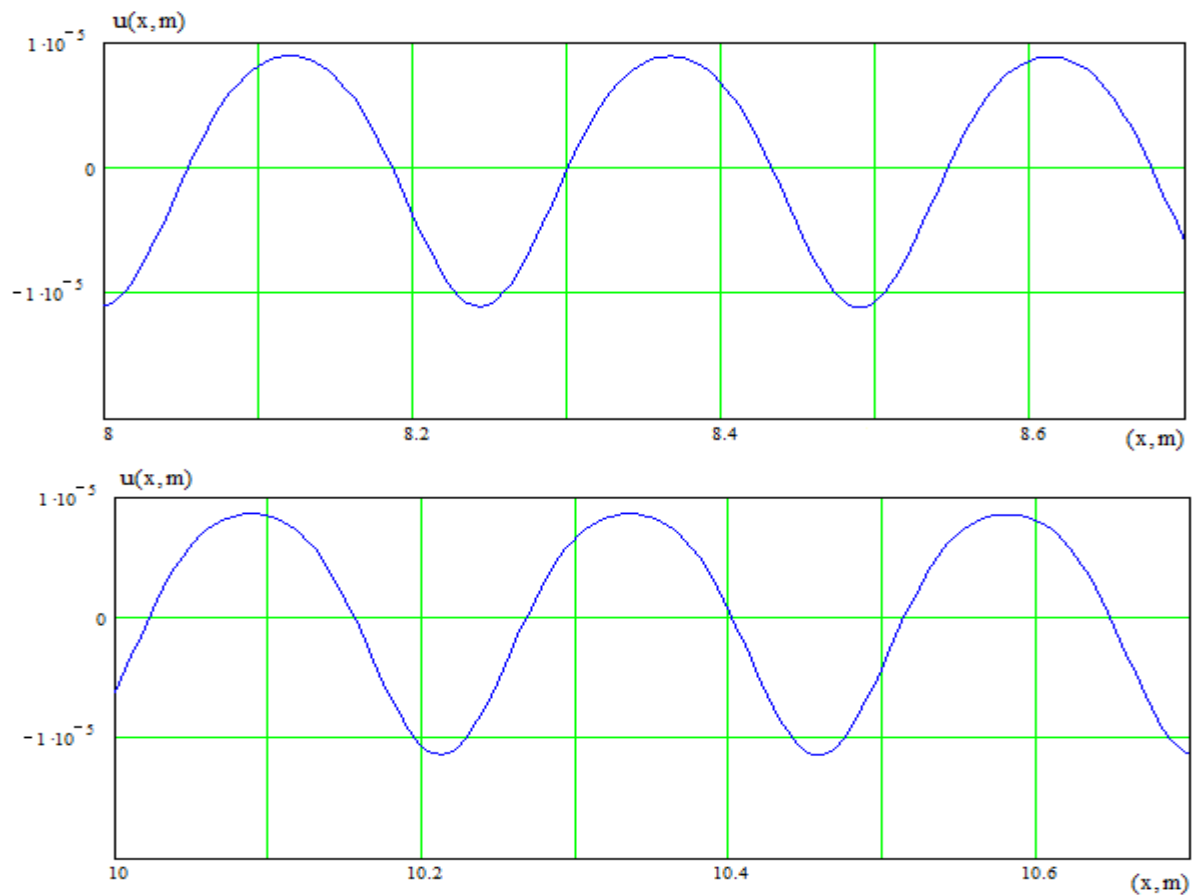
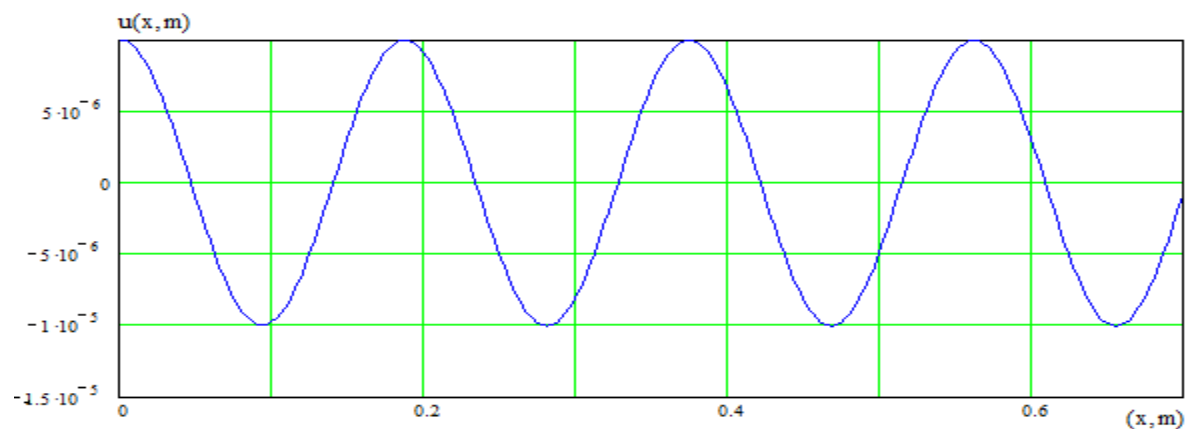


Рис.4.31

Рис. 4.31 відповідає початковій фазі еволюції хвилі. Порівняння графіків 4.31 і 4.27 свідчать про близькість результатів, отриманих різними методами але з різною відстанню, що пройшла хвиля.

На рис.4.32 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .



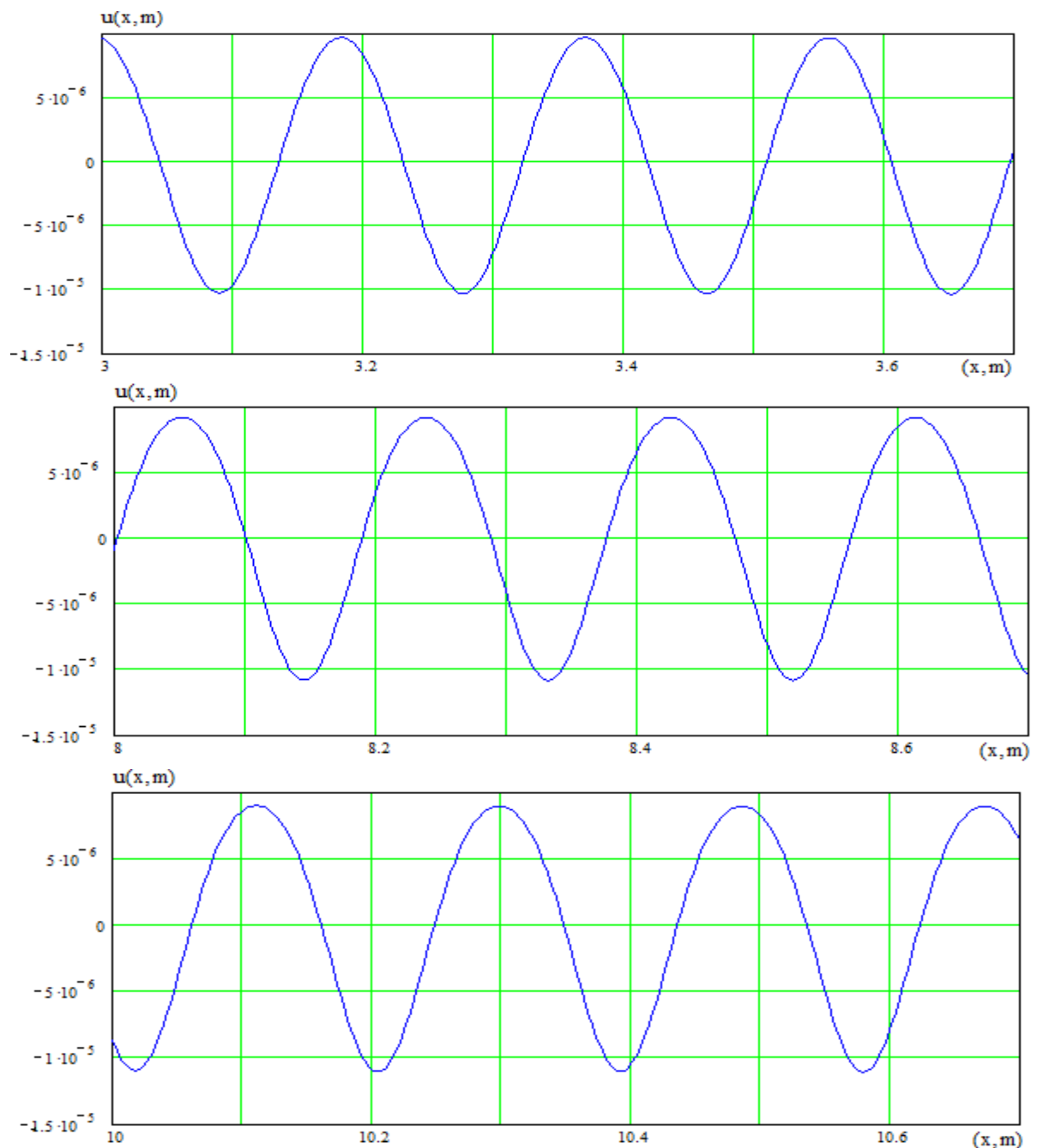


Рис.4.32

Рис. 4.32 відповідає початковій фазі еволюції хвилі більш аналогічному попередньому випадку. Порівняння графіків 4.32 і 4.28 свідчать про близькість результатів, отриманих різними методами але з різною відстаню, що пройшла хвиля.

На рис.4.33 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля для плоскої хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $\omega = 1.6 \cdot 10^5$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .

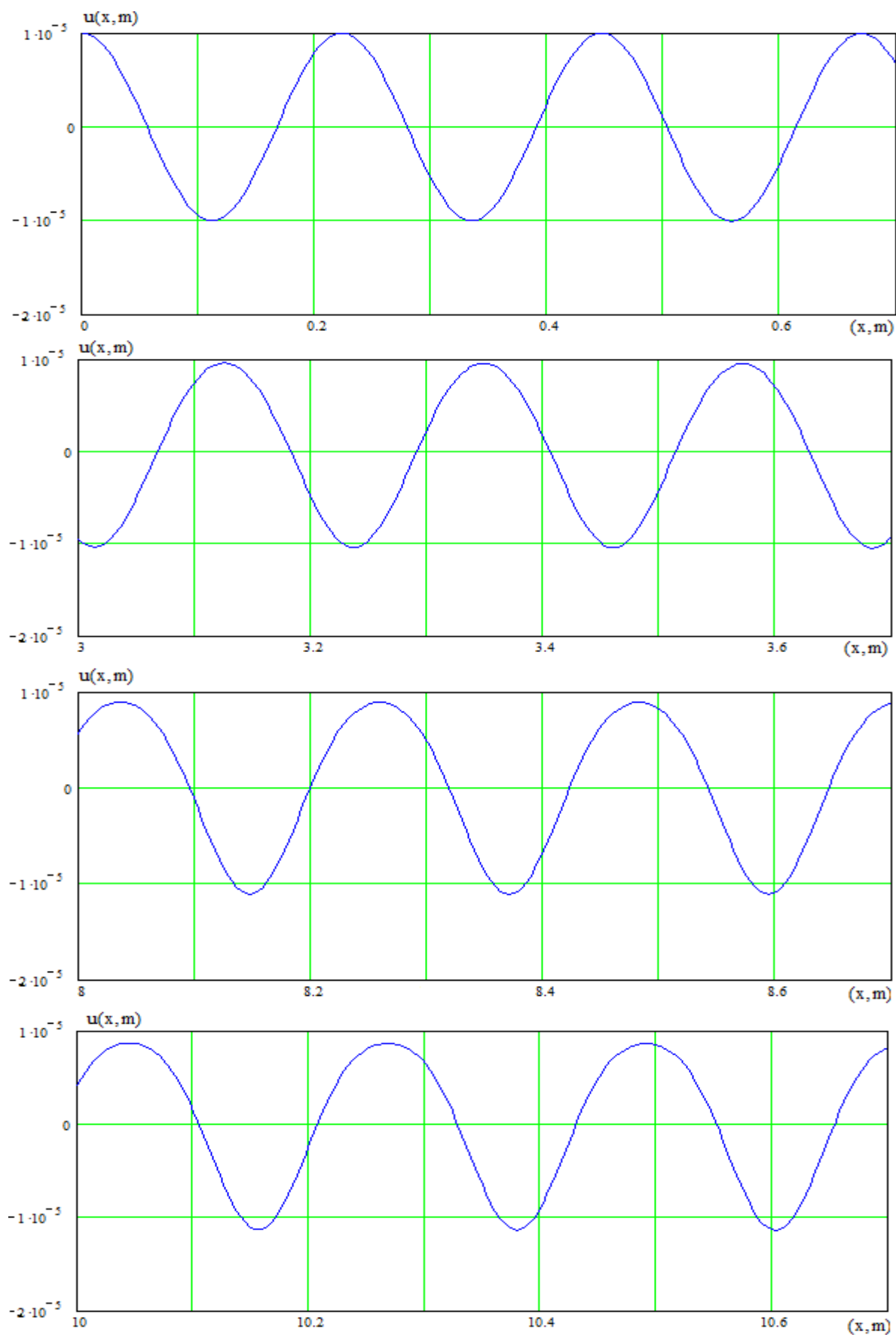


Рис.4.33

Рис. 4.33 відповідає початковій фазі еволюції хвилі. Порівняння графіків 4.33 і 4.29 свідчать про близькість результатів, отриманих двома методами—



методом послідовних наближень та методом обмеження на градієт переміщення.

Якщо порівняти графіки які отримані двома методами, то можна сказати, що еволюція початкового профілю відбувається за однаковим сценарієм але з різною швидкістю. Швидкість поширення хвилі для двох підходів різна.

З отриманих наборів графіків для двох підходів розв'язку хвильового рівняння при однакових характеристиках (матеріал, частота, максимальна амплітуда). Видно, що при методі який ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні градієнта зміщення, швидкість спотворення початкового профілю суттєво вища ніж за методом послідовних наближень. Цей результат дає підстави говорити, що спотворення залежить від вибору методу аналізу хвильового рівняння.

Тут доречно звернути увагу на відмінності в обмеженнях, які формулюються для цих двох методів. Метод послідовних наближень включає у своєму математичному формулюванні лише одне обмеження: ряд, складений з послідовних наближень  $\sum_n u^n$ , повинен бути збіжним. Як відомо, необхідною умовою збіжності ряду є прямування до нуля загального члену ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . В інженерних розрахунках при малому числі обмежень вимагають, щоб кожне наближення було значно меншим попереднього. В теорії нелінійних хвиль [20, 26, 27, 29, 35, 36,] при аналізі лише двох перших наближень вважають, що амплітуда другого наближення (другої гармоніки) не повинна перевищувати 1/2 амплітуди першого наближення (першої гармоніки).

Метод застосований у даній роботі описаний у п. 4.1.3 і оснований на обмеженні величини градієнта зміщення (деформації) (4.22)  $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$  (4.26')  $|-(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t| \ll 1$ .

Отже, обмеження, прийняті в обох методах, є відмінними. Тому і графіки еволюції гармонічної хвилі, отримані вище, є відмінними в певних параметрах.

У той же час вони є якісно близькими, оскільки враховують лише друге наближення.

З графіків випливає, що еволюція початкового профілю хвилі відбувається несиметрично додатня частина профілю як-би залишається у вигляді профілю першої гармоніки, тоді як відємна частина показує тенденцію до перетворення в профіль другої гармоніки.

### 4.3. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокій хвилі з дзвіно-подібним профілем з врахуванням нелінійності деформування на основі отриманих автором наближених розв'язків

#### 4.3.1. Квадратично нелінійна хвиля з дзвіноподібним профілем. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули.

Основним нелінійним хвильовим рівнянням у цій задачі є рівняння (4.18)

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad \text{або} \quad u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}.$$

Вказаними в заголовку методом буде розглядатися задача про хвилю здзвіноподібним профілем

$$u_1^{(0)}(x_1, t) = u_{1(0)} e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}. \quad (4.31)$$

Виходимо з того, що початковий профіль хвилі є описується функцією

$F(x_1) = e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$ . Тоді формула (4.27) приймає конкретний вигляд

$$u_1(x_1, t) = A^0 e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]} - (1/2) t \alpha c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^0)^2 e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}; \quad (4.32)$$

Проведем теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокій хвилі з дзвіноподібним профілем з врахуванням нелінійності деформування.

#### 4.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три металічні конструкційні матеріали з такими параметрами в рамках моделі Мернагана (система СІ) [18]:

Алюміній –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3; \alpha = -16,81;$$

Мідь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Параметри дзвіноподібної хвилі вибирались такими:

Для одиночної хвилі з профілем у вигляді функцій Гаусса (яка є функцією кінцеві ваги) приймемо припущення, що довжиною підосви хвилі є інтервал (відстань), для якої площа під графіком початкового профілю хвилі поза цим інтервалом є малою.

Тоді для функції Гаусса (дзвіноподібної функції)  $e^{-x^2/2\sigma^2} = e^{-[(x/\sigma)^2/2]}$  по правилу « $3\sigma$ » довжина підосви профілю дорівнює  $6\sigma$ . Тому для профілю у вигляді  $F(x_1) = e^{-((ax_1)^2/2)}$  параметр  $a$  визначає довжину підосви за формулою  $\sigma = (1/a)$ . Для всіх трьох матеріалів початкова підосва обрана однаковою і варіантів вибору три:  $L = \{0,3; 0,2; 0,12\}$  ( $a = \{20; 30; 50\}$ ).

#### 4.3.3. Аналіз впливу величини підосви хвилі на спотворення початкової форми профілю

Початковий профіль дзвіноподібної хвилі приймається у вигляді  $F(x_1) = e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$ . Далі чисельно аналізуються формула (4.32) для хвилі в довільний момент часу, отримана методом, що ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення.

За цією формулою далі показані двовимірні графіки з координатами "зміщення  $u_1$  - пройдена хвилею відстань  $x_1$ ". Всього розглянуто 27 наборів параметрів:

3 метали – алюміній, мідь, сталь;

3 варіанти довжини хвилі –  $L = 0,3; 0,2; 0,12$ ; що відповідають наступним

довжинам підошви хвилі  $a = 20; 30; 50$ .

3 варіанти максимальної амплітуди –  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}; 4 \cdot 10^{-3}; 6 \cdot 10^{-3}$ ;

В залежності від параметрів конкретного набору графіки відрізняються діапазоном амплітуди хвилі і відстані яку пройшла хвиля.

Вказані перші чотири графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно. На п'ятому графіку зображення двох графіків першого і четвертого тобто початковий профіль та профіль з найбільш розвиненою еволюцією.

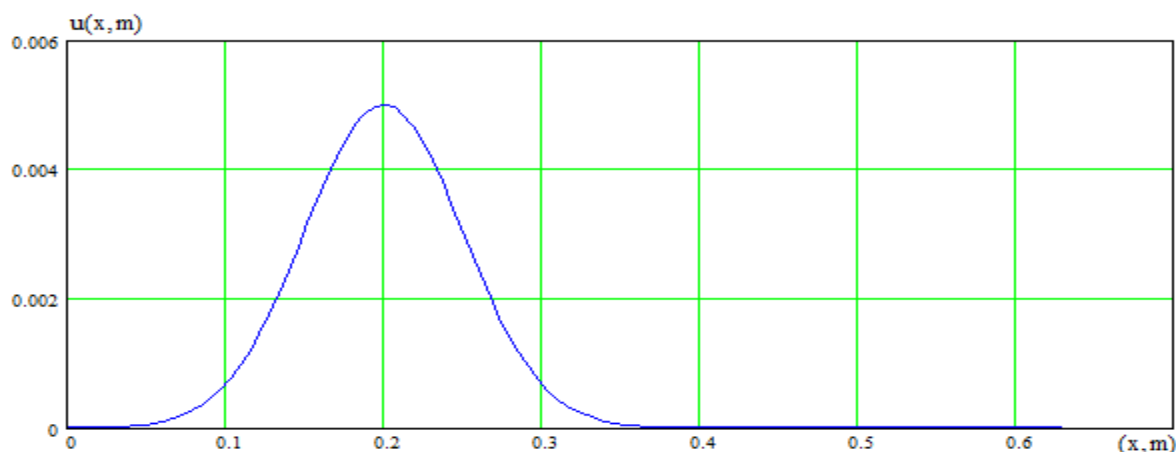
Параметри для тривимірних графіків підібрані таким чином, щоб наглядніше продемонструвати еволюцію хвилі.

На рис. 4.34 - 4.39 графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, мідь; фіксована довжина підошви та три значення частоти.

На рис. 4.34 - 4.36 графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (4.32) для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811, a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та три значення довжини підошви хвилі  $a = 20; 30; 50$ .

Рис. 4.34 відповідає довжині підошви  $a = 20$ ; Рис. 4.35 відповідає довжині підошви  $a = 30$ ; Рис. 4.36 відповідає довжині підошви  $a = 50$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.35 і 4.36.



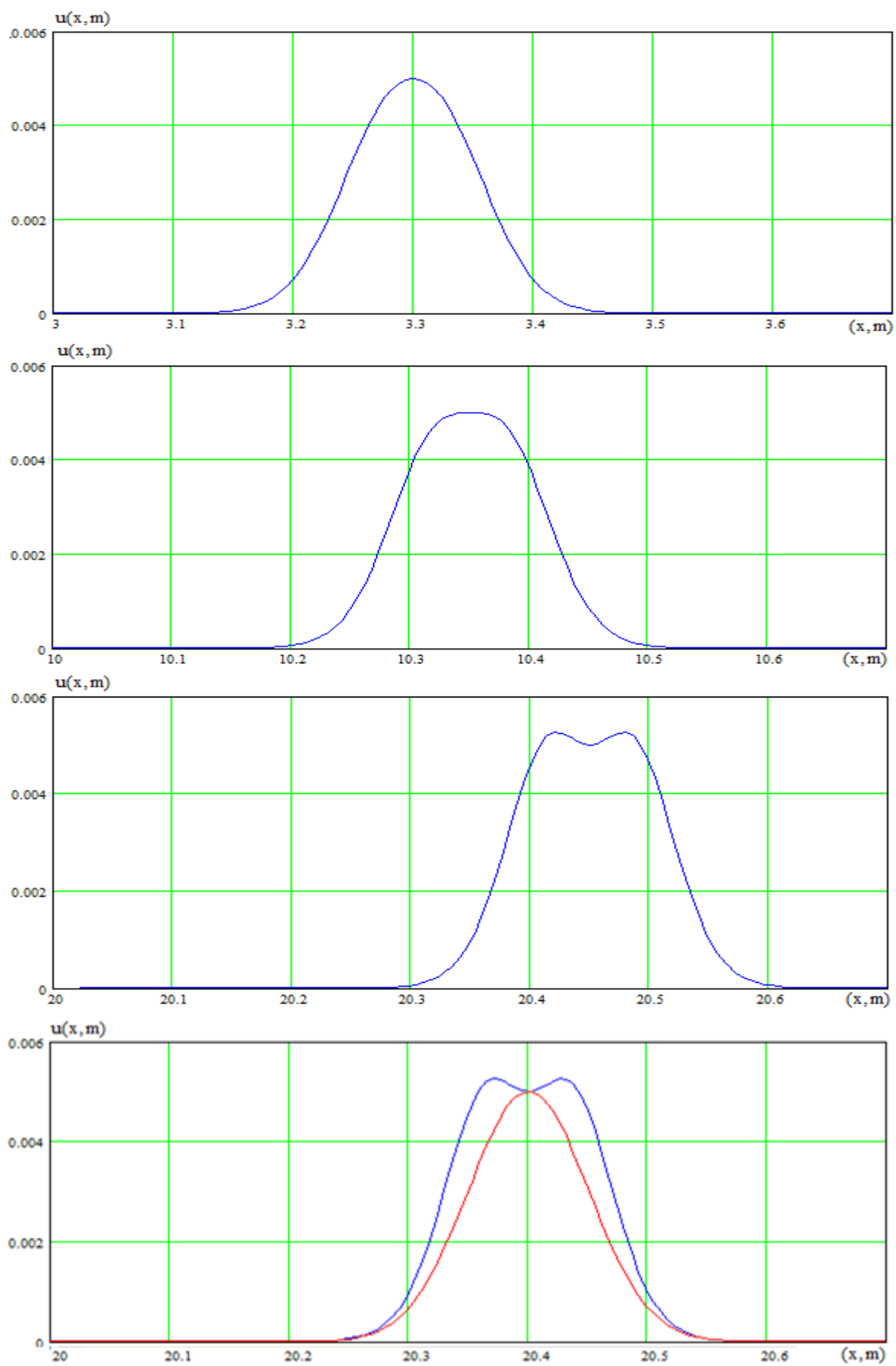


Рис. 4.34

На графіках рис. 4.34 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли на верхній частині горба починає формуватися плато.

Аналогічно, на графіках рис. 4.35 як і на графіку 4.34 виявляється лише початкова фаза еволюції.

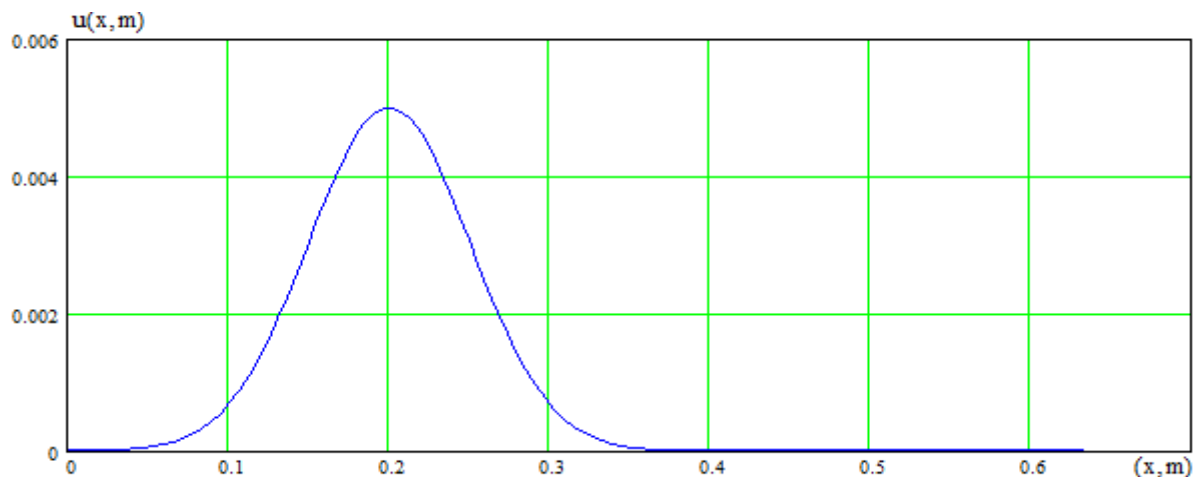
На графіках рис. 4.36 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному верхньому горбі починає формуватися плато, яке потім переростає у два горби.

З графіків 4.34- 4.36 видно, що при зміні довжини підошви (яка вибиралась  $a = 20; 30; 50$ ) не змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється однаково для всіх трьох випадках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається приблизно однаково для всіх трьох значеннях довжини підошви, не рахуючи зміну ширини самого горба.

На рис. 4.37 - 4.39 графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (4.32) для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та три значення довжини підошви хвилі  $a = 20; 30; 50$ .

Рис. 4.37 відповідає довжині підошви  $a = 20$ ; Рис. 4.38 відповідає довжині підошви  $a = 30$ ; Рис. 4.39 відповідає довжині підошви  $a = 50$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.38 і 4.39.



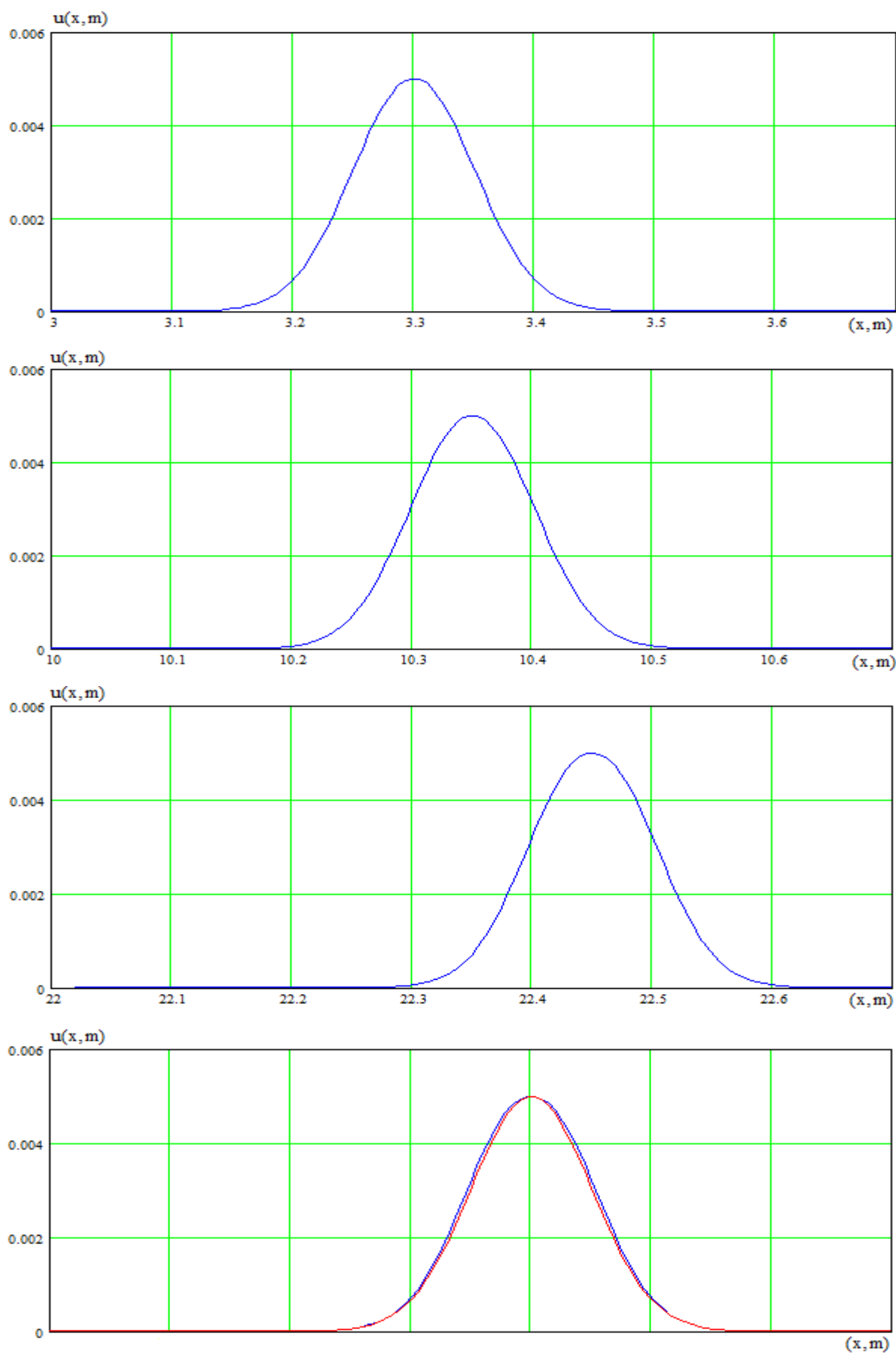


Рис. 4.37

На графіках рис. 4.37 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли змінюється лише амплітуда та ширина горба. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Аналогічно, на графіках рис. 4.38 як і на графіку 4.37 проявляється лише початкова фаза еволюції. Коли спотворення початкового профілю ледь помітно.

Таким чином, на графіках рис. 4.39 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному графіку змінюється тільки амплітуда та ширина горба в залежності від пройденого хвилею шляху.

З графіків 4.37- 4.39 видно, що при зміні довжини підошви (яка вибиралась  $a = 20; 30; 50$ ) не змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється однаково для всіх трьох випадках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається приблизно однаково для всіх трьох значень довжини підошви.

Якщо розглянути графіки для двох матеріалів, то процес еволюції початкового профіля хвилі різний: він нелінійно залежить від довжини підошви, тобто іншого матеріалу. Порівняння графіків для двох матеріалів (алюміній та мідь) для одних і тих же частот, показує, що дисторсія хвилі проявляється з різною швидкістю в залежності від виду матеріалу, але тут залежність амплітуди хвилі від властивостей матеріалу вже є нелінійною. Тому відмінність не є такою великою.

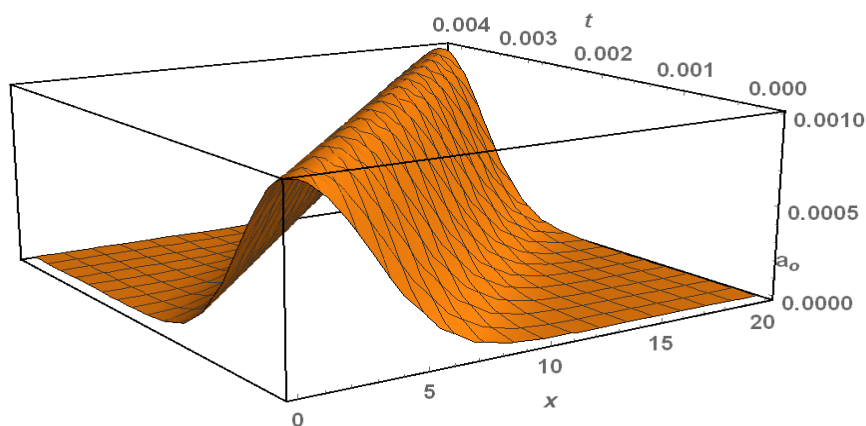


Рис. 4.40



Рис. 4.40 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  та довжина підосви хвилі  $a = 1/3$ . Він показує більш наглядно еволюцію початкового профілю.

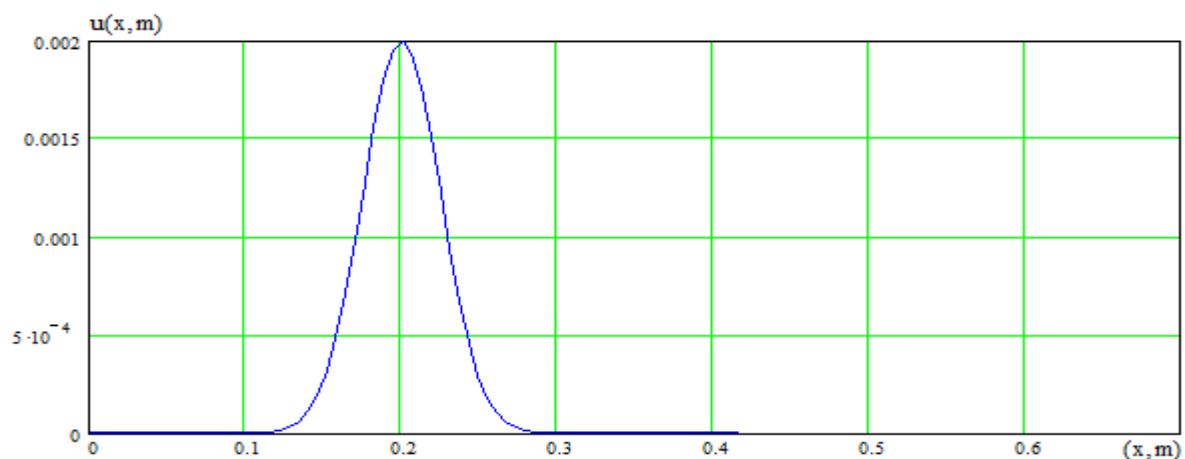
#### 4.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю

На рис. 4.41 - 4.46 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, сталь; фіксована довжина підосви та три значення максимальної амплітуди.

На рис. 4.41-4.43 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.881$ ,  $a = 40$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $4 \cdot 10^{-3}$ ,  $6 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 4.41 відповідає амплітуді  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 4.42 відповідає амплітуді  $a_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 4.43 відповідає амплітуді  $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.42 і 4.43.



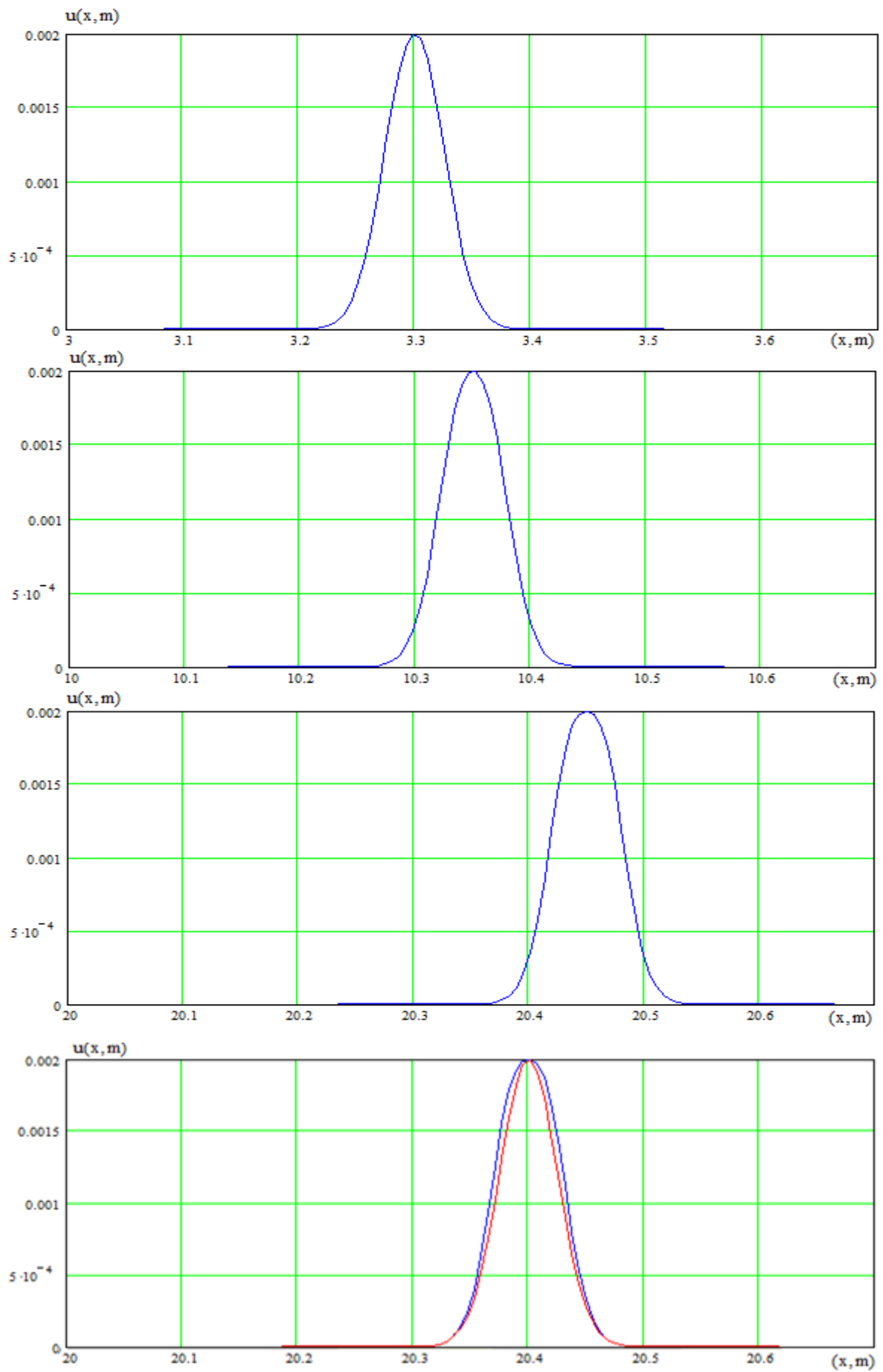


Рис. 4.41

На графіках рис. 4.41 виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному графіку змінюється тільки амплітуда та ширина горба в залежності від пройденого хвилею шляху.

На графіках рис. 4.42 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли на верхній частині горба починає формуватися плато. В порівнянні з попередніми графіками тут еволюція початкового профілю відбувається швидше.

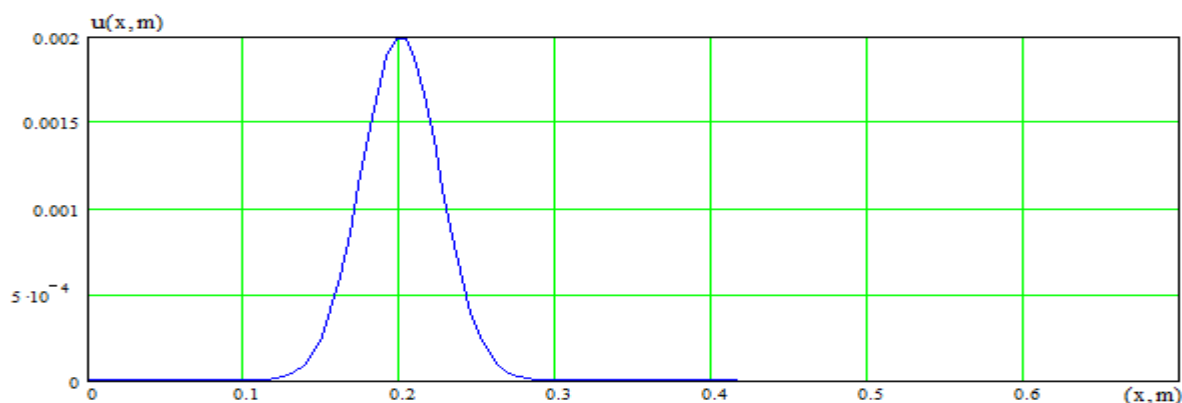
Графіки Рис. 4.43 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового дзвіноподібного профіля: розширення профіля, утворення плато, западання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного. Дисторсія яка спостерігається подібна тій, що спостерігалася коли змінювалась довжина хвилі, для однакових матеріалів.

З графіків 4.41- 4.43 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}$ ) змінюється швидкість спотворення профілю хвилі.

На рис. 4.44 - 4.46 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 40$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 4.44 відповідає амплітуді  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 4.45 відповідає амплітуді  $a_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 4.46 відповідає амплітуді  $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема, у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.45 і 4.46.



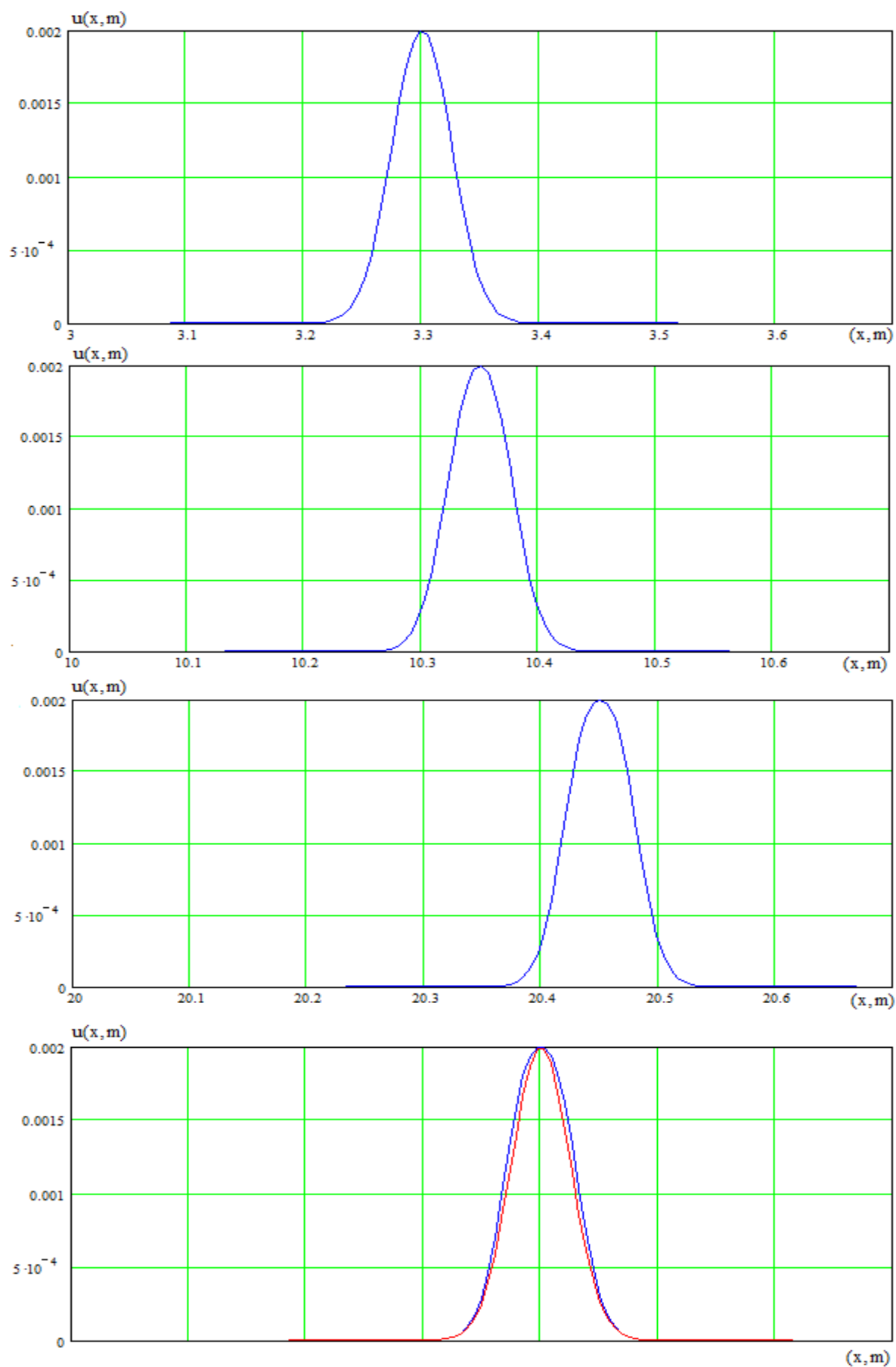


Рис. 4.44

З графіків рис. 4.44 спостерігається, що еволюція початкового профілю хвилі тільки починає відбуватися, змінюється у верхній частині горба його ширина.

Отже, на графіках рис. 4.45 поступово починає проявлятися початкова фаза еволюції, коли на верхній частині горба починає формуватися плато. Еволюція спотворення початкового профілю при однакових параметрах хвилі в порівнянні з попередніми графіками, коли розглядається матеріал алюміній є менш швидшою. Топто, хвилі треба пройти різні відстані, щоб дисторсія відповідала всім чотирьом етапам еволюції.

Графіки Рис.4.46 демонструють більш розвинену еволюцію початкового дзвіноподібного профіля хвилі. Тут вже більш чітко формується плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби. Порівняння з відповідними графіками для алюмінія показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

З графіків рис. 4.44 - 4.46 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 6 \cdot 10^{-3}$ ) змінюється швидкість спотворення початкового профілю хвилі.

Зміна амплітуди для вибраних двох матеріалів (алюміній та сталь) дає наочний вигляд спотворення профіля хвилі. Чим більша амплітуда, тим більше швидкість спотворення; адже вона нелінійно впливає на швидкість еволюції. Характеристика матеріалу також впливає на швидкість дисторсії.

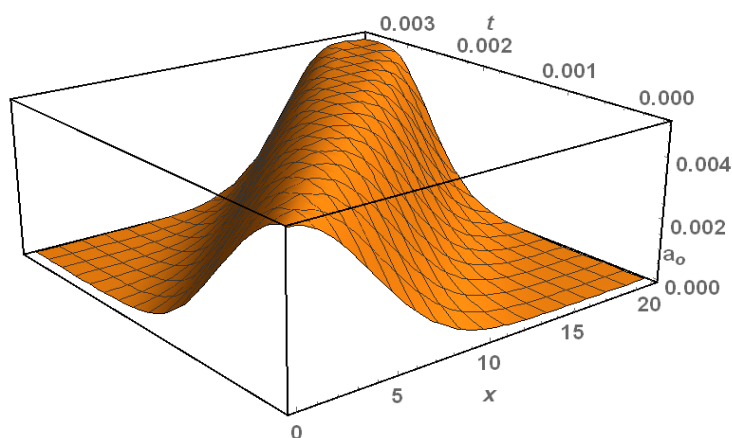


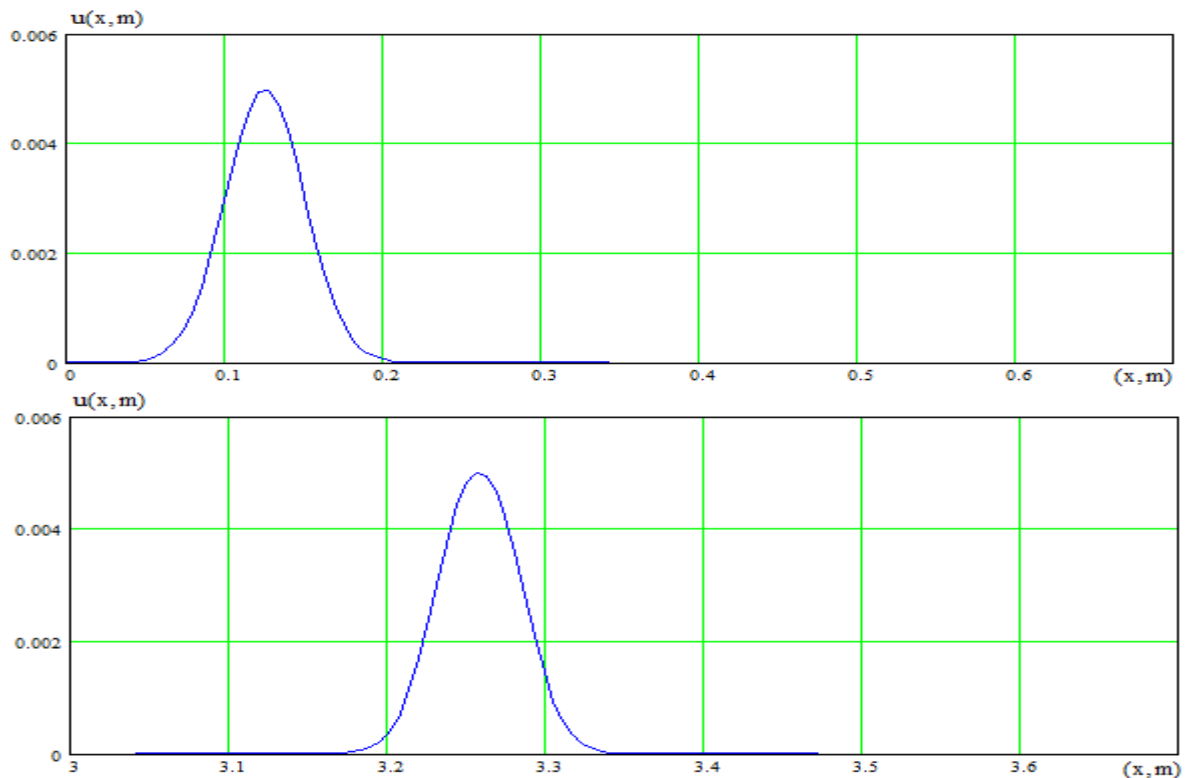
Рис. 4.47

Рис. 4.47 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 1/4$  та значення максимальної амплітуди  $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

#### 4.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю

Розглядаються три набори графіків рис. 4.48- 4.50, які показують вплив матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі. Кожний набір характеризується наступними характеристиками: алюміній,  $\alpha = -16.811$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 4.48; мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 4.49; сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 4.50.

На рис. 4.48 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .



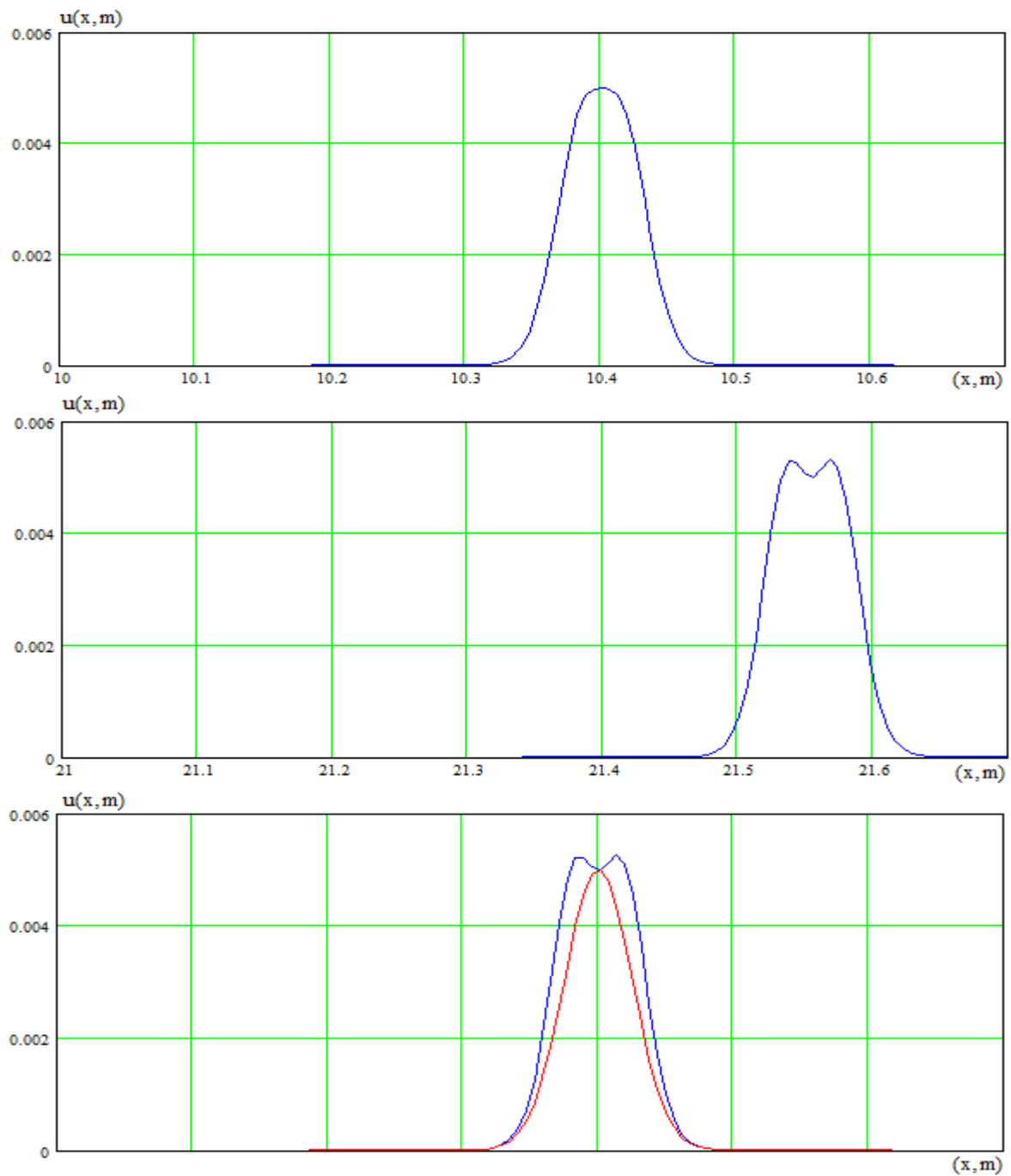
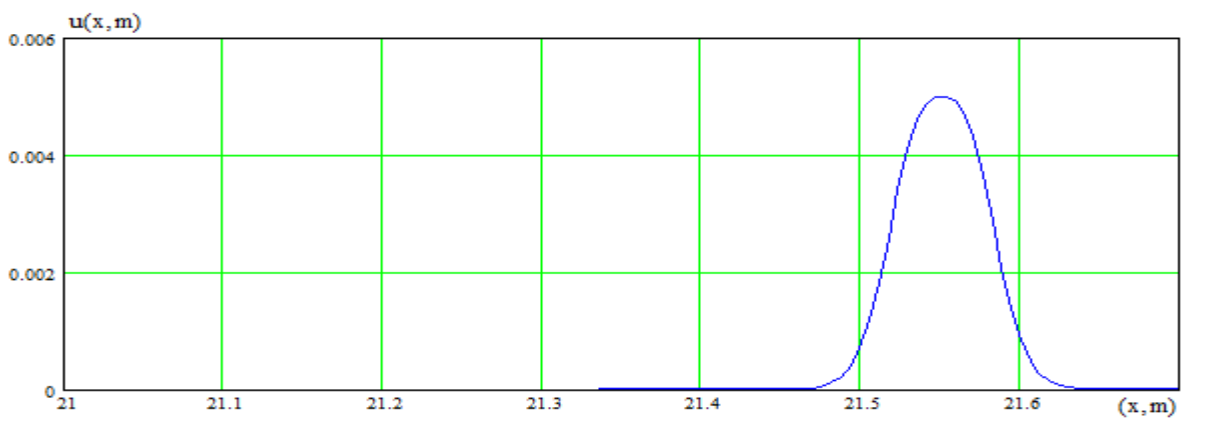
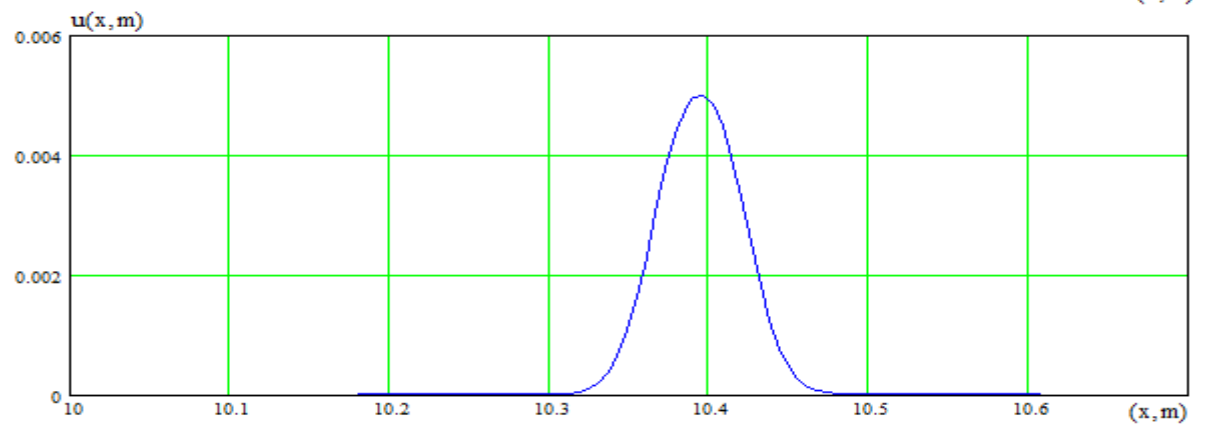
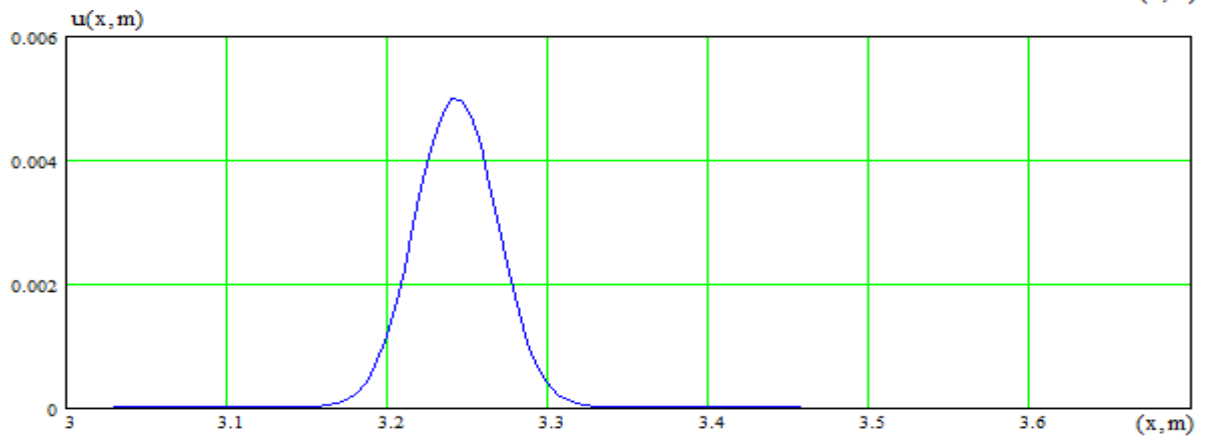
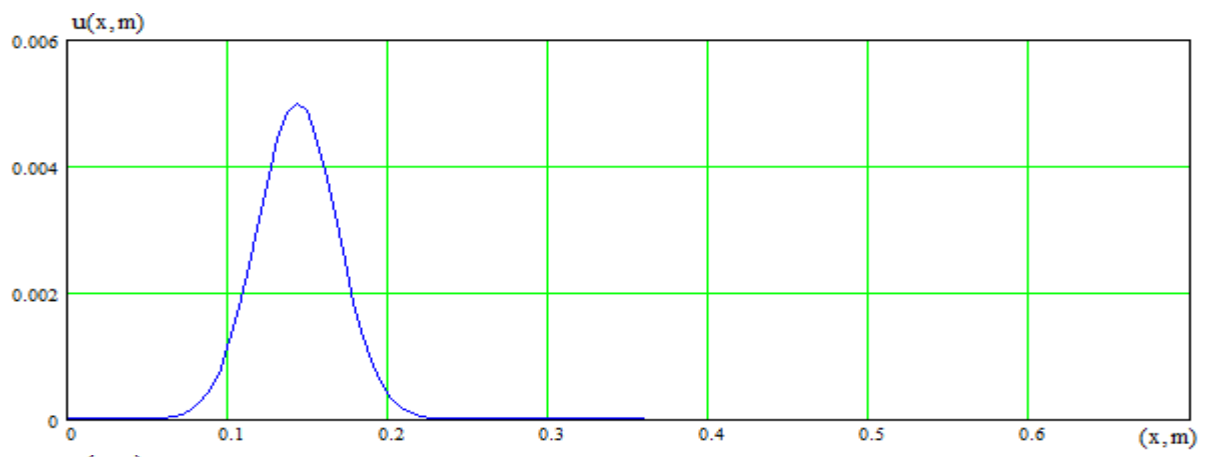


Рис. 4.48

Графіки рис.4.48 демонструють розвинену еволюцію початкового дзвіно-подібного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, яке далі западається вниз, уворюючи два горби.

На рис. 4.49 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .





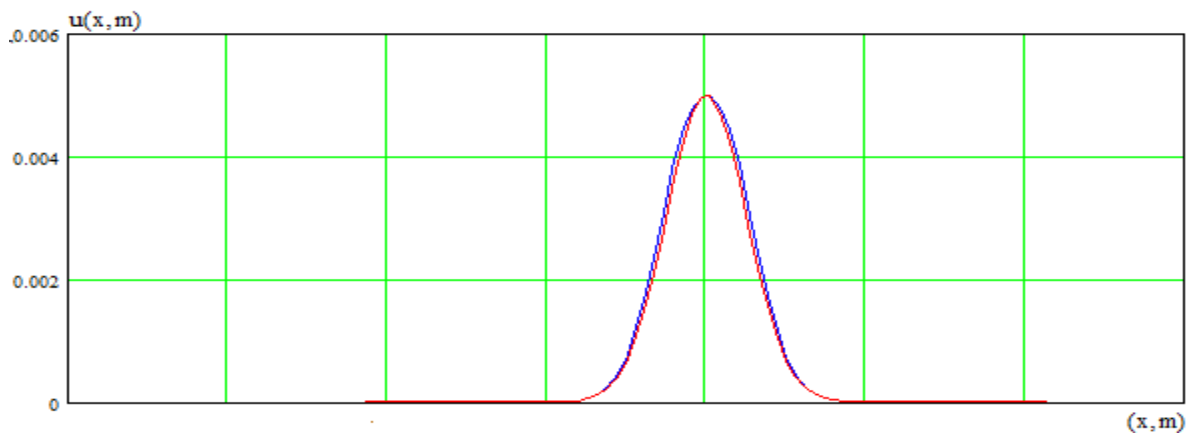
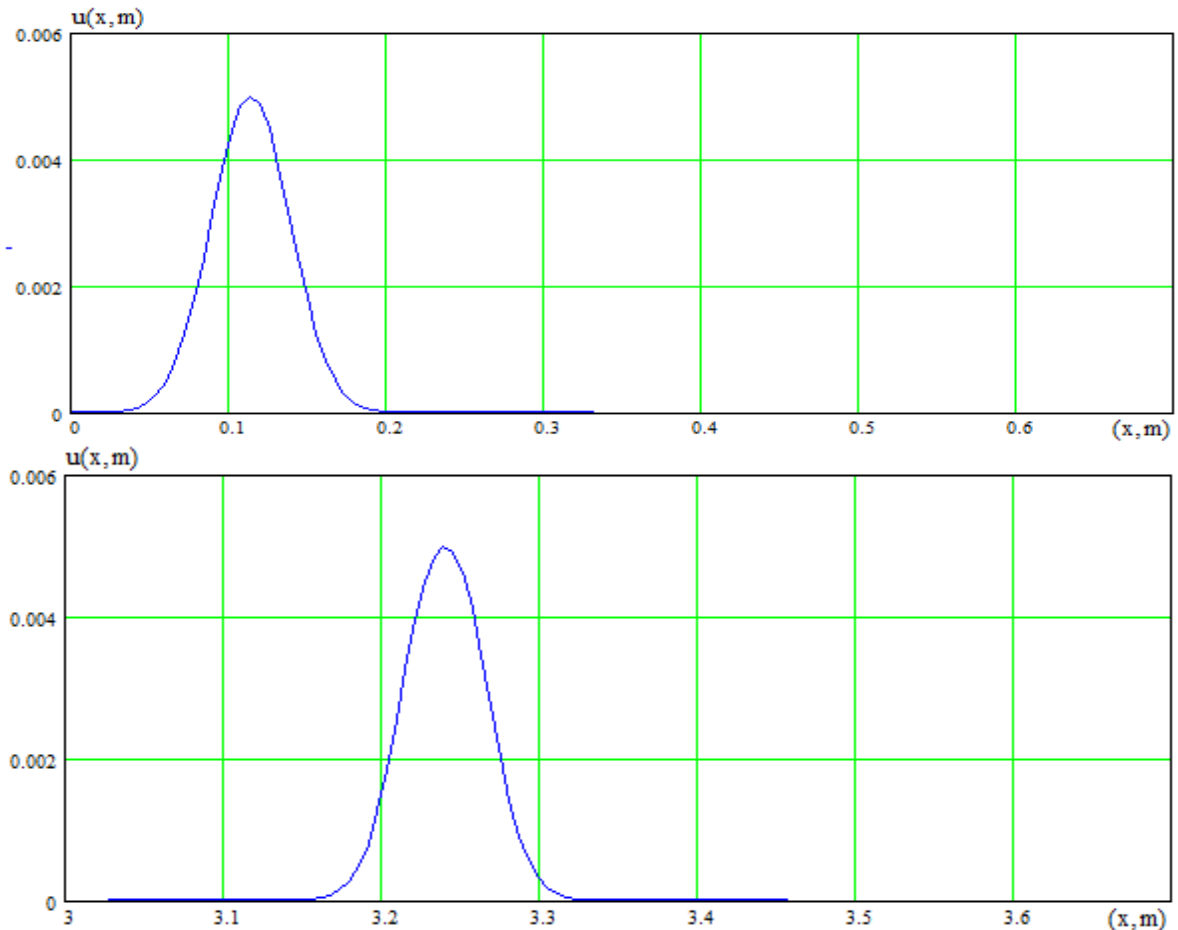


Рис. 4.49

Графіки рис. 4.49 демонструють перший етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки змінюватися, тобто розширюватись у верхній частині. В порівнянні з графіками рис. 4.48 дисторсія тут відбувається повільніше.

На рис. 4.48 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .



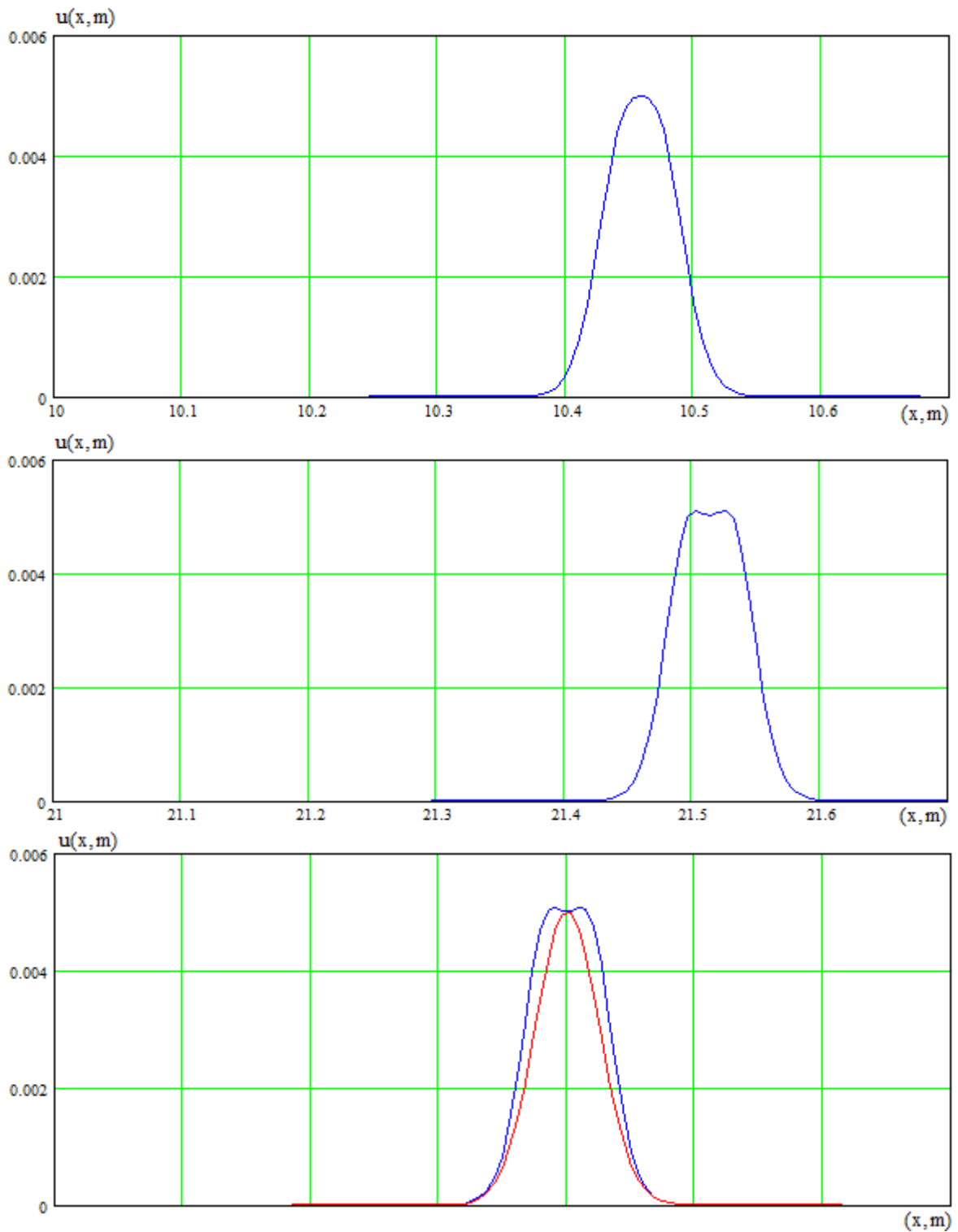


Рис. 4.50

Графіки рис. 4.50 демонструють другий етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки западатися, топто утворювати плато. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію та міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки рис. 4.48-4.50 відповідають всім чотирьом етапам дисторсії (спотворення) початкового дзвіноподібного профіля: розширення горба, утворення плато, запланання центральної частини плато вниз, формування двох горбів замість одного.

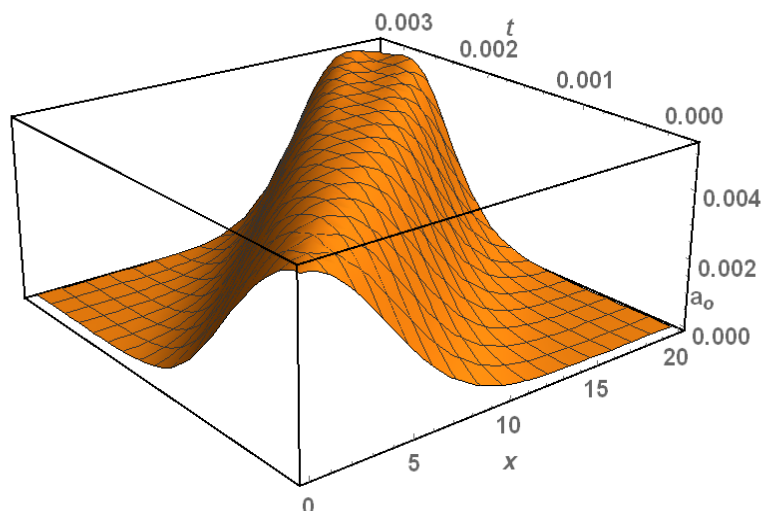


Рис. 4.51

Рис. 4.51 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a = 1/4$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядно еволюцію початкового профілю.

Отже, всі рисунки свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі. Порівняння зі зміною профіля гармонічної хвилі показує, що дзвіноподібна хвиля змінює свій профіль дещо по-іншому. “Друга гармоніка” завжди дає від’ємну добавку. Отже “дзвін” в своїй верхній частині стає тоншим, тобто схили “дзвона” стають крутішими. Верхня частина “дзвона” западається і утворюється два “дзвони”. Оскільки хвиля пружна і втрат енергії не може бути, то зміна профіля узгоджується з законом про збереження енергії хвилі при її поширенні.

#### 4.4. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера з врахуванням нелінійності деформування на основі отриманих автором наближених розв'язків

4.4.1. Квадратично нелінійна хвиля з профілем у вигляді функції Уіттекера. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули

Нехай початковий профіль хвилі має наступний вигляд  $F(x) = W_{1/4;1/4}(x)$ .

Тоді формула (4.27) набуває конкретну форму

$$u(x, t) = a_0 W_{1/4;1/4}(x) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a_0)^2 (W'_{1/4;1/4}(x))^2. \quad (4.43)$$

Оскільки для функції  $W_{\lambda,\mu}(x)$  похідна обчислюється за наступним рекурентним співвідношенням:

$$\frac{d}{dx} W_{\lambda,\mu}(x) = \left( \frac{\lambda}{x} - \frac{1}{2} \right) W_{\lambda,\mu}(x) - \frac{1}{x} \left[ \mu^2 - \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{\lambda-1,\mu}(x),$$

і перша похідна для  $W_{1/4;1/4}(x)$  має вигляд

$$(W_{1/4;1/4}(x))' = \left( \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} \right) W_{1/4;1/4}(x),$$

то розв'язок (17) записується у наступному вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 W_{1/4;1/4}(a(x - c_L t)) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a_0)^2 (W'_{1/4;1/4}(x))^2 \\ u(x, t) &= a_0 W_{1/4;1/4}(a(x - c_L t)) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a_0)^2 \times \\ &\times \left( \left( \frac{1}{4a(x - c_L t)} - \frac{1}{2} \right) W_{1/4;1/4}(a(x - c_L t)) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

З вигляду розв'язку (4.44) випливають дві особливості: він описує зміну початкового профілю одиничної хвилі (внаслідок прямої залежності нелінійної складової від часу) і «розпливання» початкового профілю (внаслідок присутності нелінійної складової).

Далі продиться теоретичний та числовий аналіз плоскої поодинокі хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера з врахуванням нелінійності деформування.

#### 4.4.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три металічні конструкційні матеріали з такими параметрами в рамках моделі Мернагана (система СІ) [18]:

Алюміній –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3; \alpha = -16,81;$$

Мідь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Параметри хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера вибирались такими: для поодинокі хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера (яка є функцією скінченної ваги) приймемо припущення, що довжиною підосви хвилі є інтервал (відстань), для якої площа під графіком початкового профілю хвилі поза цим інтервалом є малою.

Припускається, що для функції Уіттекера  $F(ax) = W_{1/4;1/4}(ax)$  довжина підосви профілю дорівнює  $6\sigma$ ,  $\sigma = (1/a)$ . Тому для профілю у вигляді  $F(x) = W_{1/4;1/4}(ax)$  параметр  $a$  визначає довжину підосви за формулою. Для всіх трьох матеріалів початкова підосва вибрана однаковою і варіантів вибору три:  $L = \{0,2; 0,12; 0,1\}$  ( $a = \{30; 50; 60\}$ ).

#### 4.4.3. Аналіз впливу величини підосви хвилі на спотворення початкової форми профілю

Початковий профіль хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера приймається у наближеному вигляді  $F(x) = W_{1/4;1/4}(a(x - c_L t)) = [a(x - c_L t)]^{3/4} e^{\frac{-a(x - c_L t)}{2}} \times \left(1 + \frac{3}{4} a(x - c_L t)\right)$ . Далі чисельно аналізується формула (4.44) для хвилі в дові-

льний момент часу, отримана методом, що ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення. За цією формулою далі побудовані двовимірні графіки з координатами "зміщення  $u_1$  - пройдена хвилею відстань  $x_1$ ".

Всього розглянуто 27 наборів параметрів:

3 метали – алюміній, мідь, сталь;

3 варіанти довжини хвилі –  $L = 0,3; 0,12; 0,1$ ; що відповідають наступним довжинам підошви хвилі  $a = 30; 50; 60$ .

3 варіанти максимальної амплітуди –  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}; 6 \cdot 10^{-5}; 9 \cdot 10^{-5}$ ;

В залежності від параметрів конкретного набору графіки відрізняються діапазоном амплітуди хвилі і відстанню, яку пройшла хвиля.

Вказані перші чотири графіки відрізняються таким чином: еволюція хвилі повинна спостережуватись досить наглядно. На п'ятому графіку зображені два графіки першого і четвертого тобто початковий профіль та профіль з найбільш розвиненою еволюцією.

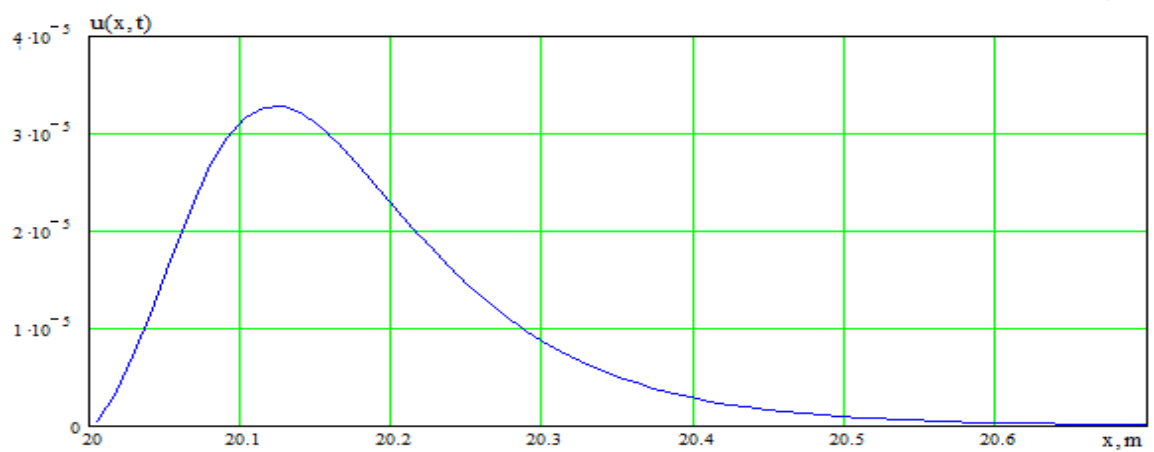
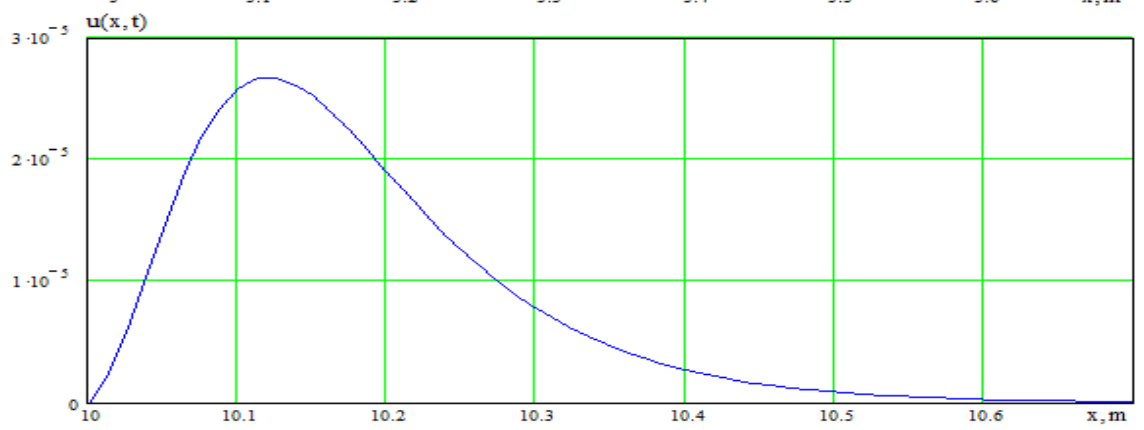
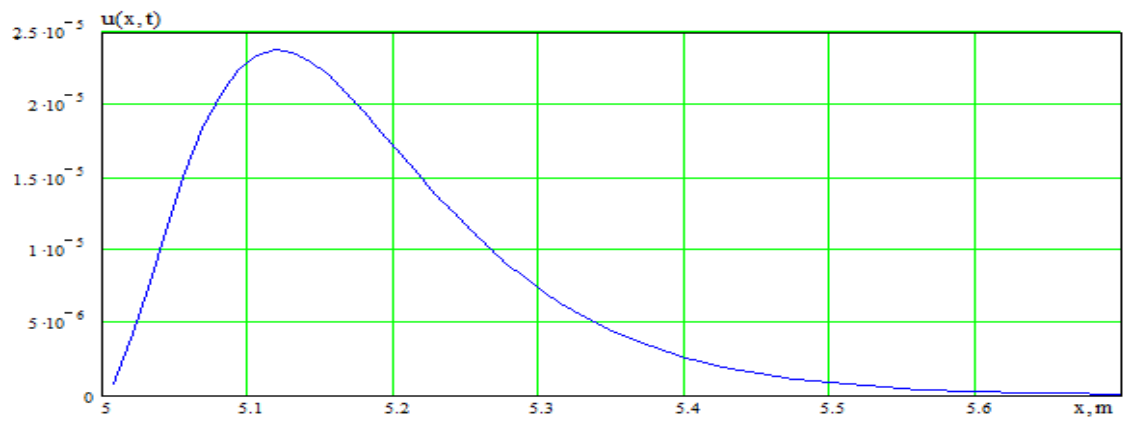
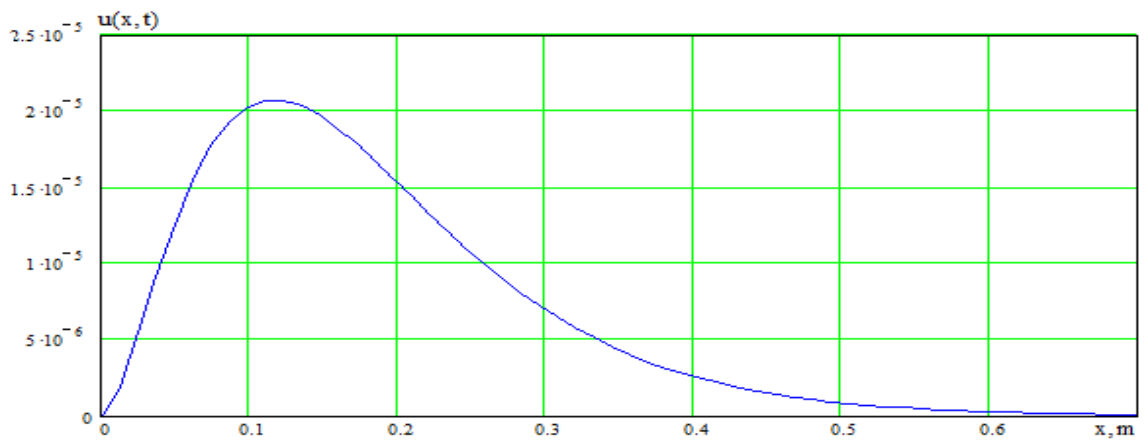
Параметри для тривимірних графіків підібрані таким чином, щоб наглядніше продемонструвати еволюцію хвилі.

На рис. 4.52 - 4.57 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, мідь; фіксована довжина підошви та три значення частоти.

На рис. 4.52 - 4.54 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (4.44) для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уїттекера для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та три значення довжини підошви хвилі  $a = 30; 50; 60$ .

Рис. 4.52 відповідає довжині підошви  $a = 30$ ; Рис. 4.53 відповідає довжині підошви  $a = 50$ ; Рис. 4.54 відповідає довжині підошви  $a = 60$ .

Далі частина рисунків поміщена у "Додаток Б", з номерами рисунків розділу 4. Тому у "Додатку" введена своя схема і рисунки "Розділу 4" поміщені у "Додаток до розділу 4". Зокрема у цьому "Додатку Б" внесені Рис. 4.53 і 4.54.



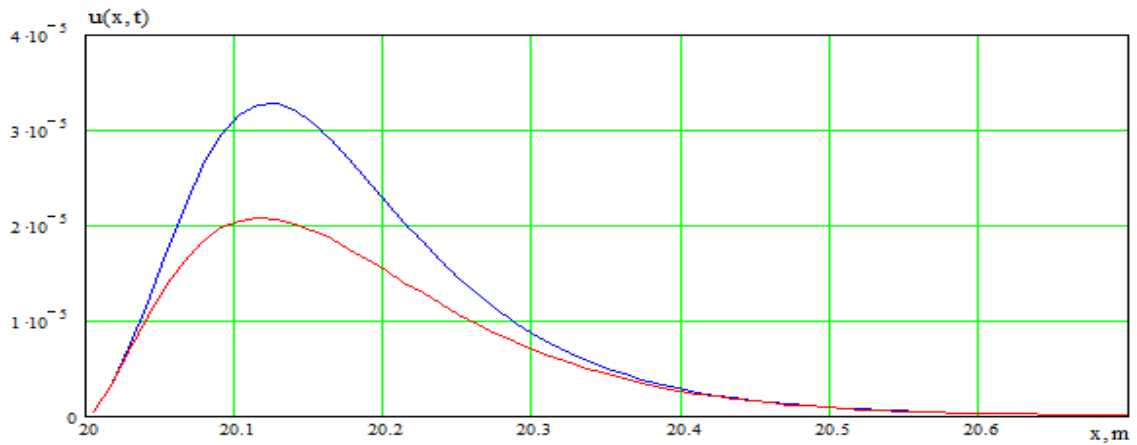


Рис. 4.52

На графіках рис. 4.52 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли ліва частина горба починає бути менш пологою а права практично не змінна але при цьому максимальне значення амплітуди зменшується .

Аналогічно, на графіках рис. 4.53, як і на графіку 4.52, виявляється лише початкова фаза еволюції зі зміною товщини профілю та амплітуди.

Таким чином, на графіках рис. 4.54 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли кожний профіль горба починає худіти, і зменшується максимальне значення амплітуди.

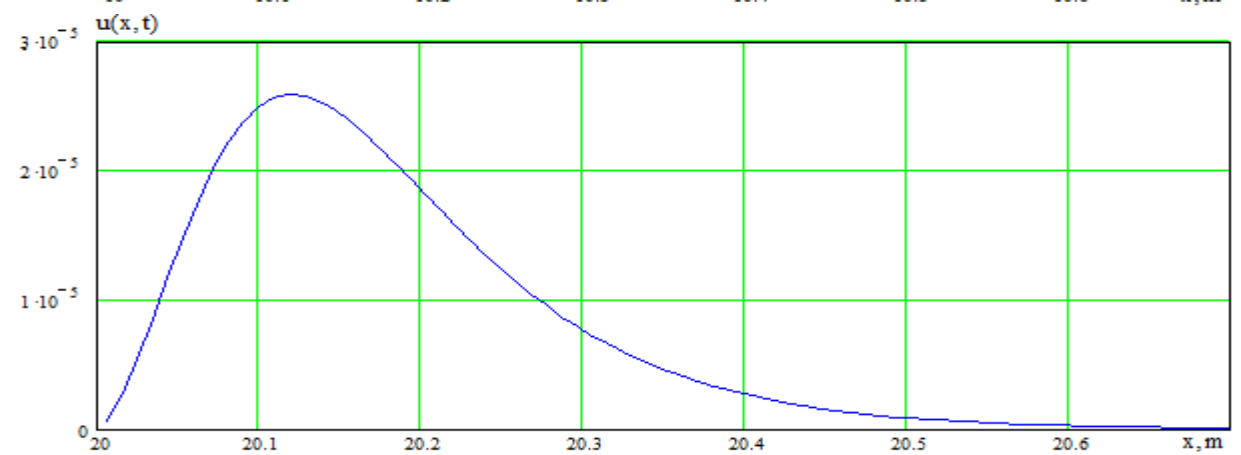
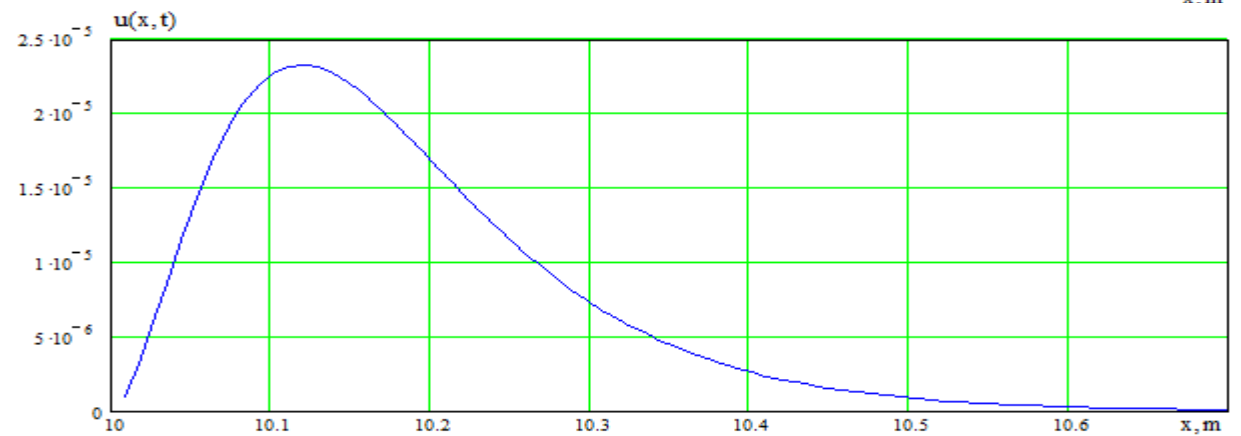
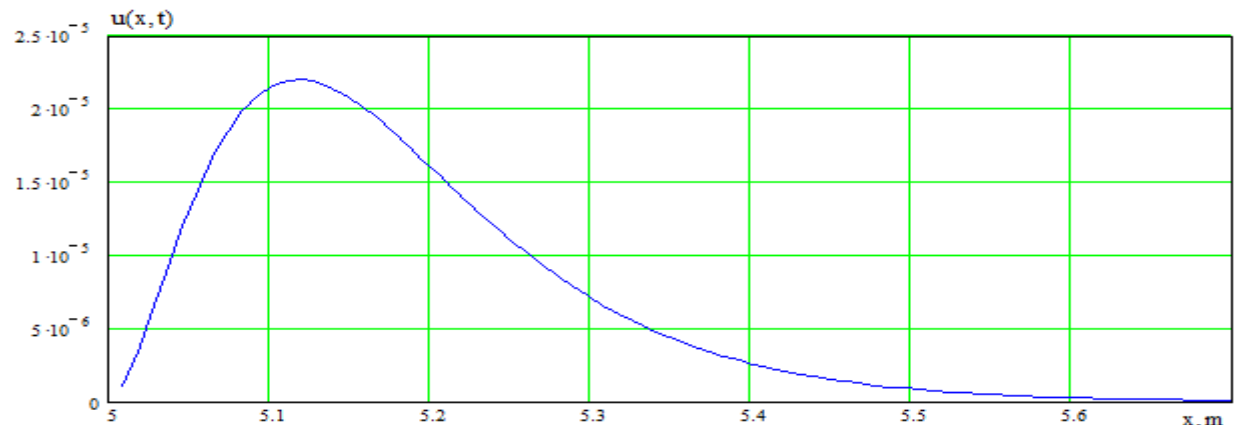
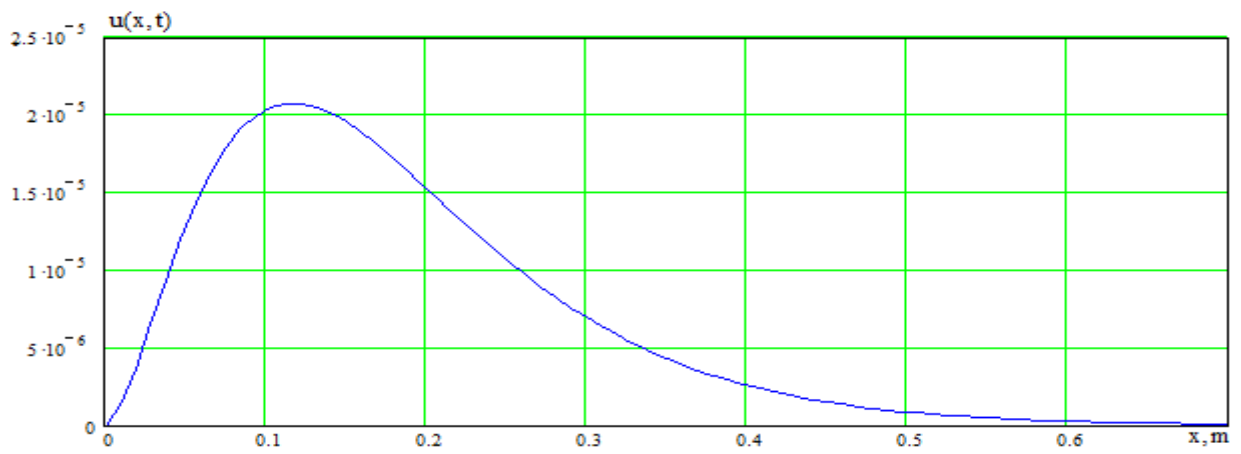
З графіків 4.52- 4.54 видно, що при зміні довжини підшви (яка вибиралась  $a = 30; 50; 60$ ) не змінюється відстань, яку проходить хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється однаково для всіх трьох випадків. Тобто процес еволюції початкового профілю відбувається приблизно однаково для всіх трьох значеннях довжини підшви, змінюючи ширину самого горба.

На рис. 4.55 - 4.57 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку 4.44 для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уїттекера для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та три значення довжини підшви хвилі  $a = 30; 50; 60$ .

Рис. 4.55 відповідає довжині підшви  $a = 30$ ; Рис. 4.56 відповідає довжині підшви  $a = 50$ ; Рис. 4.57 відповідає довжині підшви  $a = 60$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщенні у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.56 і 4.57.





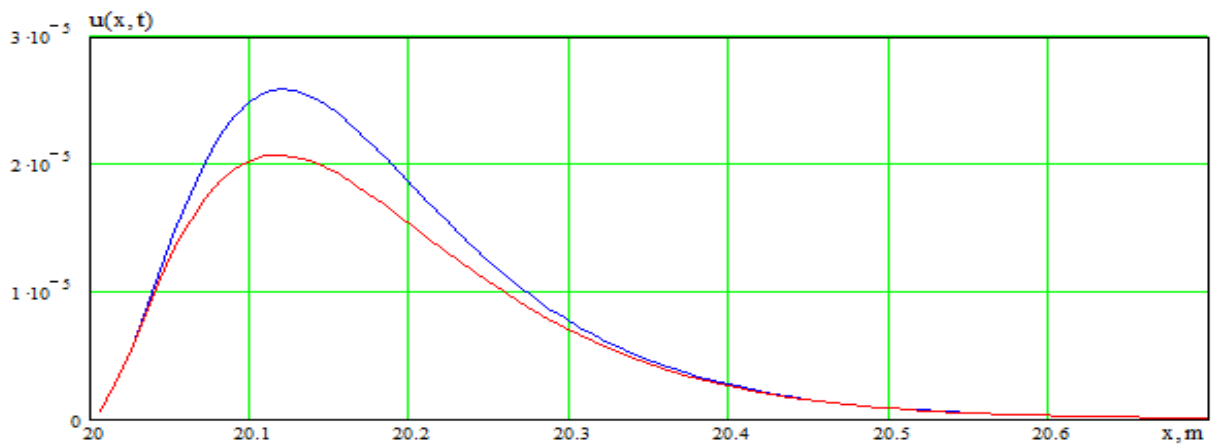


Рис. 4.55

На графіках рис. 4.55 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли змінюється лише амплітуда та ширина горба. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Аналогічно, на графіках рис. 4.56 як і на графіку 4.55 проявляється лише початкова фаза еволюції. Коли спотворення початкового профілю ледь помітно.

Таким чином, на графіках рис. 4.57 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному графіку змінюється тільки амплітуда та ширина горба в залежності від пройденого хвилею шляху дисторсія проявляється в трьох напрямках.

З графіків 4.55- 4.57 видно, що при зміні довжини підшви (яка вибиралась  $a = 30; 50; 60$ ) не змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється приблизно однаково для всіх трьох значеннях довжини підшви. Але підшва для кожного випадку при еволюції самого профіля залишається не змінною тільки змінюється ширина горба

Якщо розглянути графіки для двох матеріалів, то процес еволюції початкового профіля хвилі: різний він нелінійно залежить від довжини підшви, тобто для іншого матеріалу і тих же значень.

Порівняння графіків для двох матеріалів (алюміній та мідь) для одних і тих же частот, показує, що дисторсія хвилі проявляється з різною швидкістю в за-

лежності від виду матеріалу, але тут залежність амплітуди хвилі від властивостей матеріалу вже є нелінійною. Тому відмінність не є такою великою.

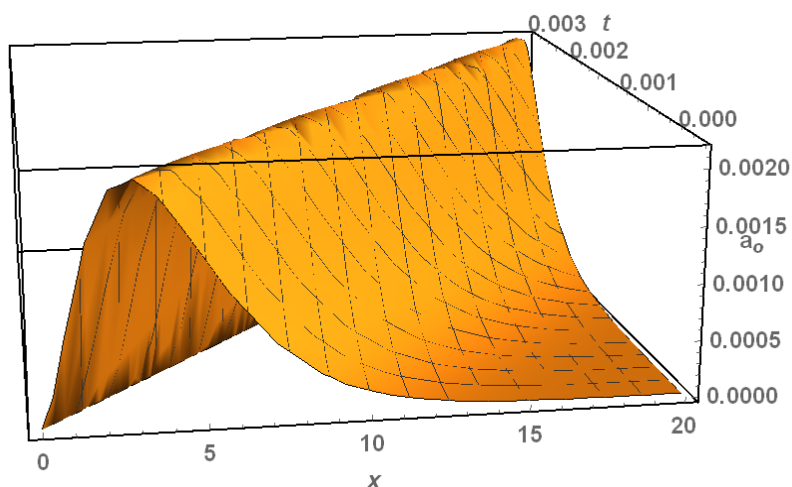


Рис. 4.58

Рис. 4.58 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-5}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  та довжина підшви хвилі  $a = 1.3$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

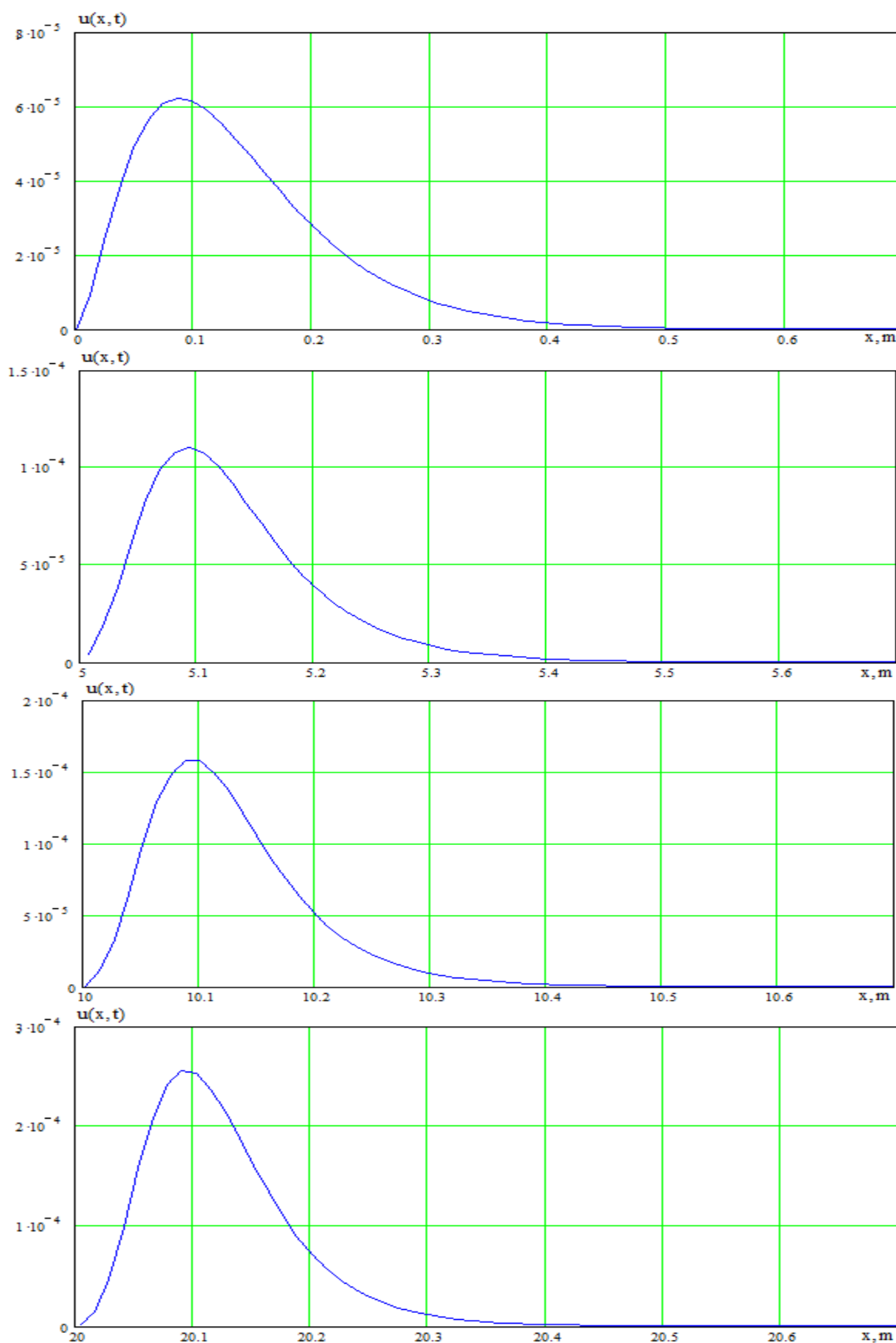
#### 4.4.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю

На рис. 4.59 - 4.64 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, сталь; фіксована довжина підшви та три значення максимальної амплітуди.

На рис. 4.59-4.61 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уїттекера для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.881$ ,  $a = 40$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $6 \cdot 10^{-5}$ ,  $9 \cdot 10^{-5}$ .

Рис. 4.59 відповідає амплітуді  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.60 відповідає амплітуді  $a_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.61 відповідає амплітуді  $a_0 = 9 \cdot 10^{-5}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.60 і 4.61.



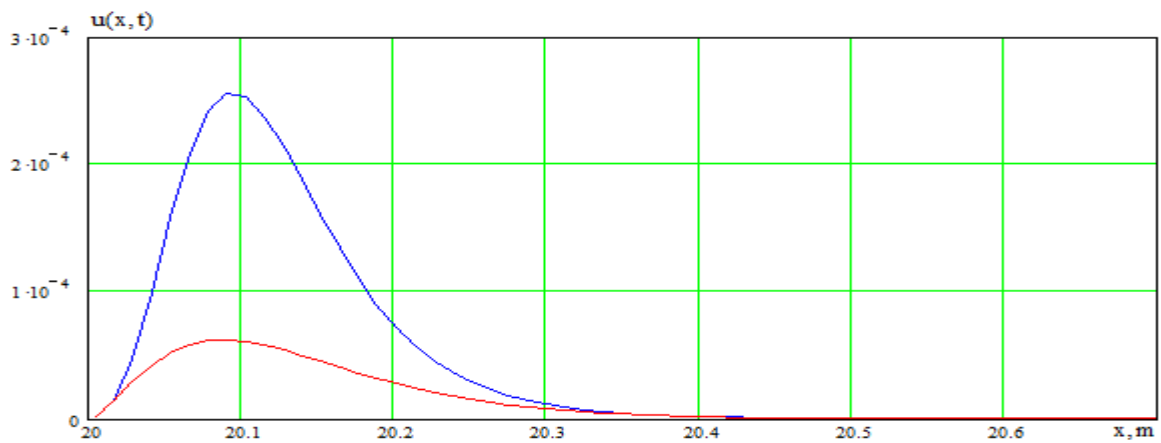


Рис. 4.59

На графіках рис. 4.59 виявляється лише початкова фаза еволюції, дисторсія проявляється в трьох напрямках: максимальне значення амплітуди зменшується, ліва та права частина профіля стає більш крутою. Профіль стає більш худим.

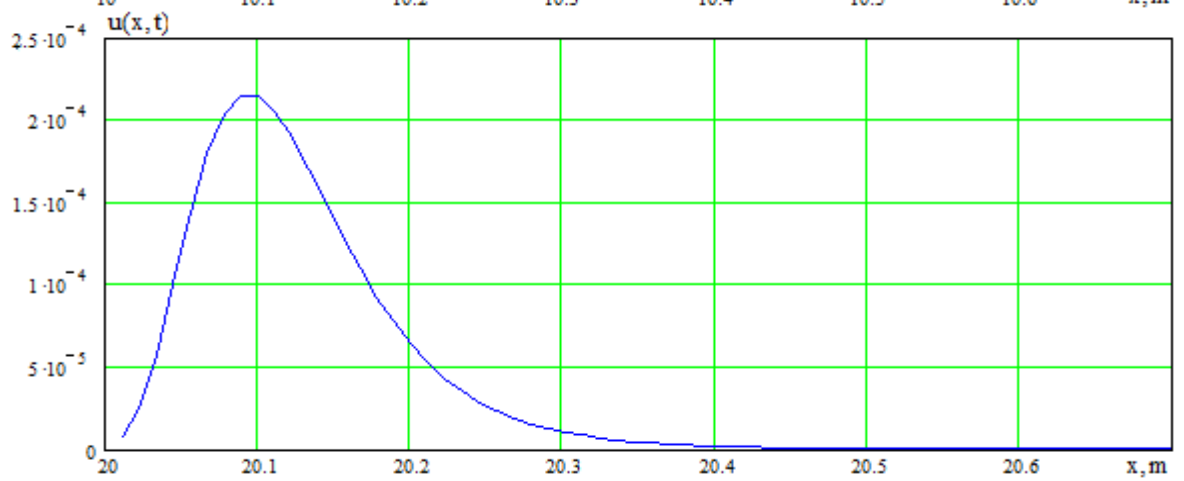
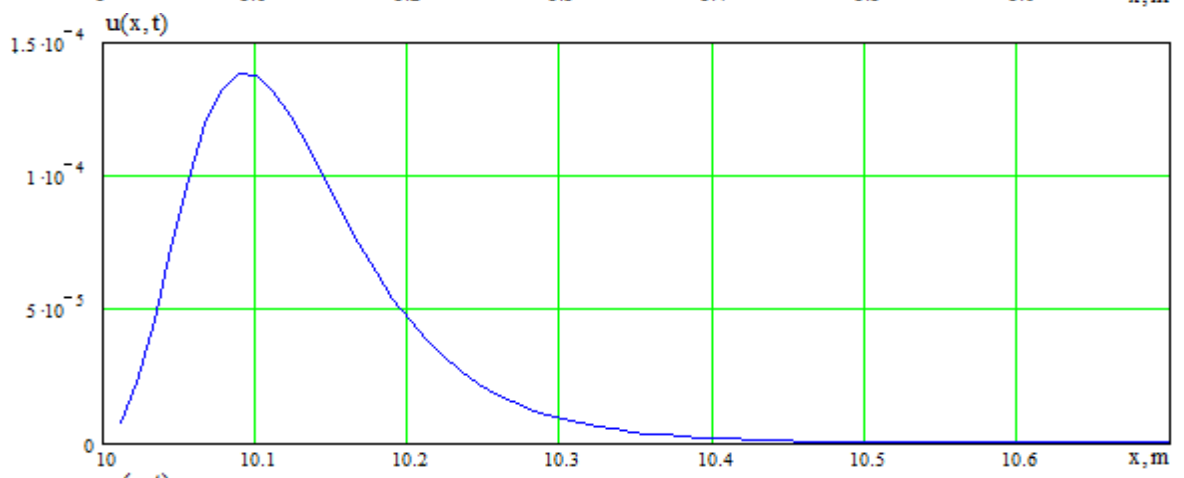
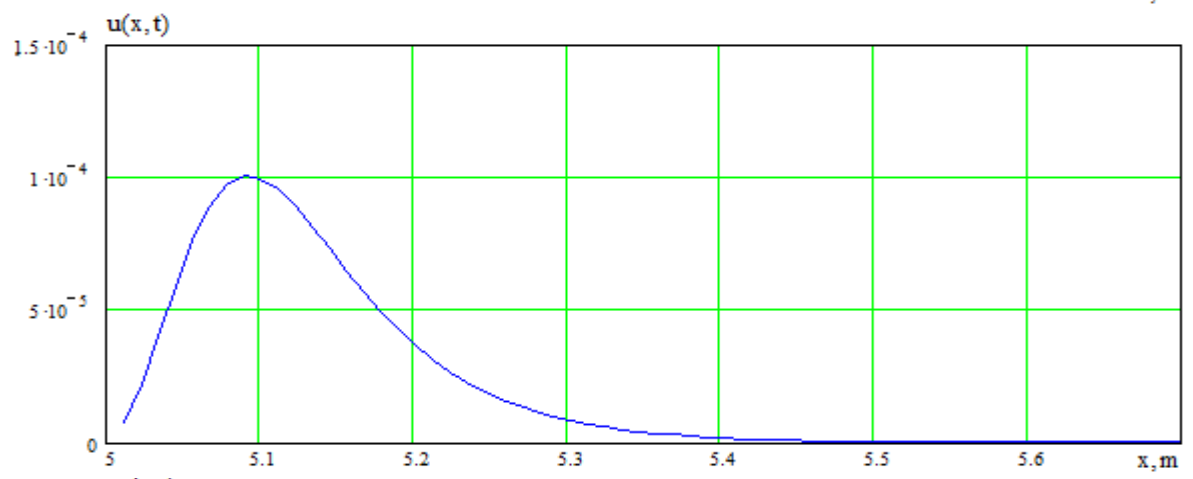
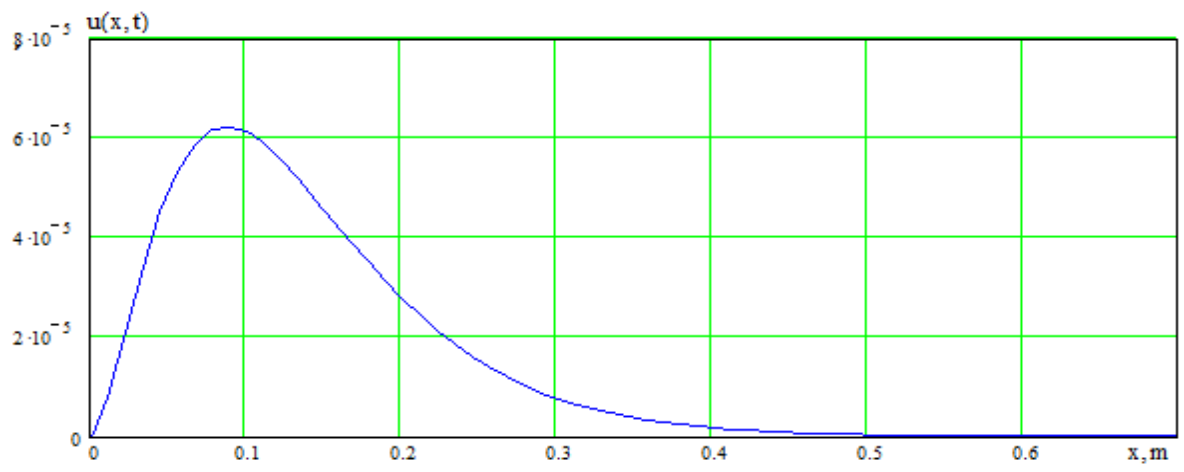
На графіках рис. 4.60 спостерігається така фаза еволюції, коли ліва і права частини стають більш крутішими, амплітуда потрохи зростає та профіль хвилі починає нагадувати дзвіноподібний профіль. В порівнянні з попередніми графіками тут еволюція початкового профілю відбувається швидше.

З рис. 4.61 видно, що еволюція відбувається подібно до попередніх випадків. Дисторсія відбувається в трьох напрямках звужуючи при цьому початковий профіль хвилі. Спостерігається тенденція, що профіль починає нагадувати профіль дзвіноподібної хвилі.

На рис. 4.62 – 4. 64 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уїттекера для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 40$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $6 \cdot 10^{-5}$ ,  $9 \cdot 10^{-5}$ .

Рис. 4.62 відповідає амплітуді  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.63 відповідає амплітуді  $a_0 = 6 \cdot 10^{-5}$ ; Рис. 4.64 відповідає амплітуді  $a_0 = 9 \cdot 10^{-5}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Б”, з номерами рисунків розділу 4. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 4” поміщені у “Додаток до розділу 4”. Зокрема у цьому “Додатку Б” внесені Рис. 4.63 і 4.64.



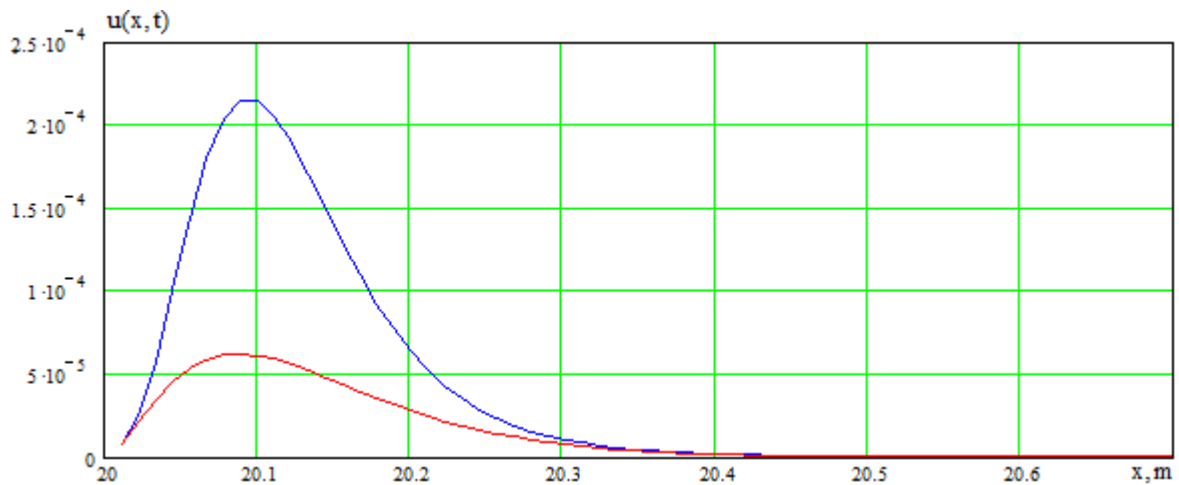


Рис. 4.62

На графіках рис. 4.62 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли ліва та права частина горба починають бути більш крутими але при цьому максимальне значення амплітуди зменшується.

З рис. 4.63 видно що аналогічна ситуація із спотворенням початкового профіля відбувається і для рис.4.62.

Графіки рис.4.64 демонструють більш розвинену еволюцію початкового профіля функції Уіттекера хвилі. Тут вже більш чітко видно дисторсію: спотворення початкового профілю до вигляду дзвіноподібного профіля. Порівняння з відповідними графіками для алюмінія показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

З графіків рис. 4.62- 4.64 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-5}, 9 \cdot 10^{-5}$ ) змінюється швидкість спотворення початкового профілю хвилі.

Зміна амплітуди для вибраних двох матеріалів (алюміній та сталь) дає наочний вигляд спотворення початкового профіля хвилі. Чим більша амплітуда тим швидкість спотворення зростає адже вона нелінійно впливає на швидкість еволюції. Характеристика матеріалу також впливає на швидкість дисторсії, якщо сталь то швидкість меча, а якщо алюміній то більша.

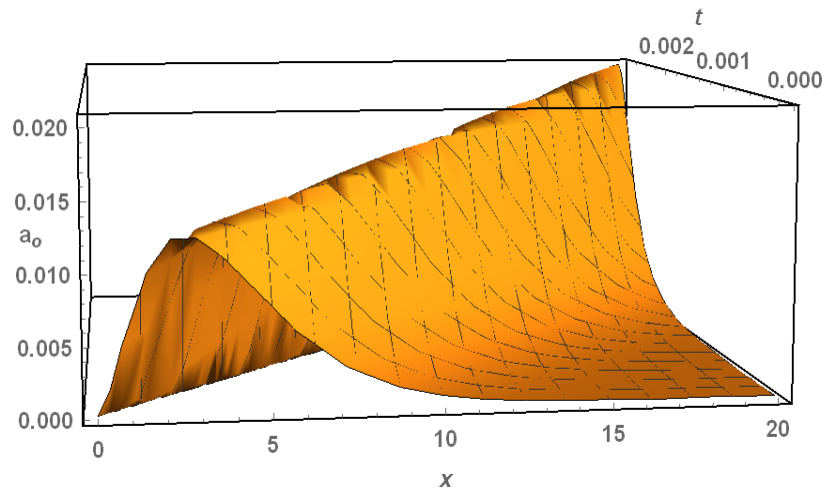


Рис. 4.65

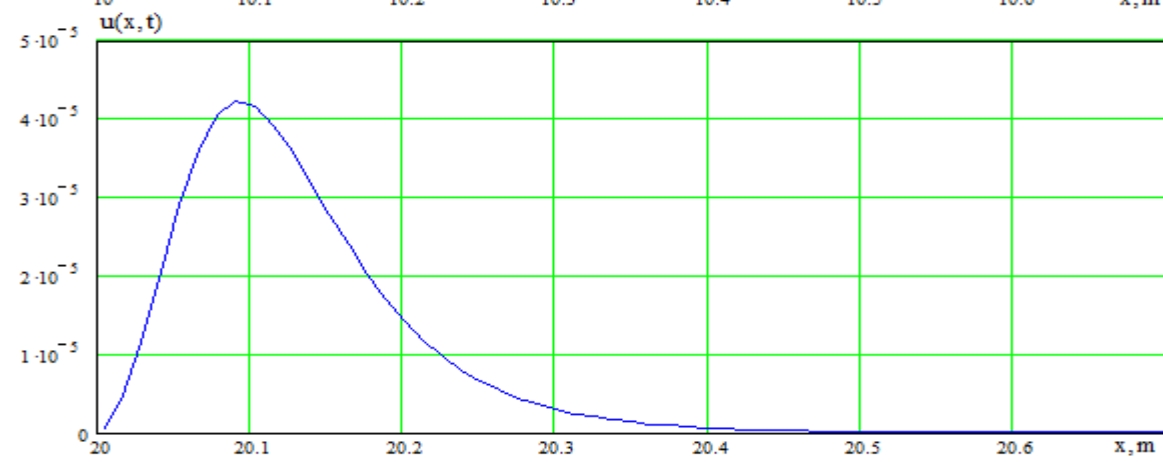
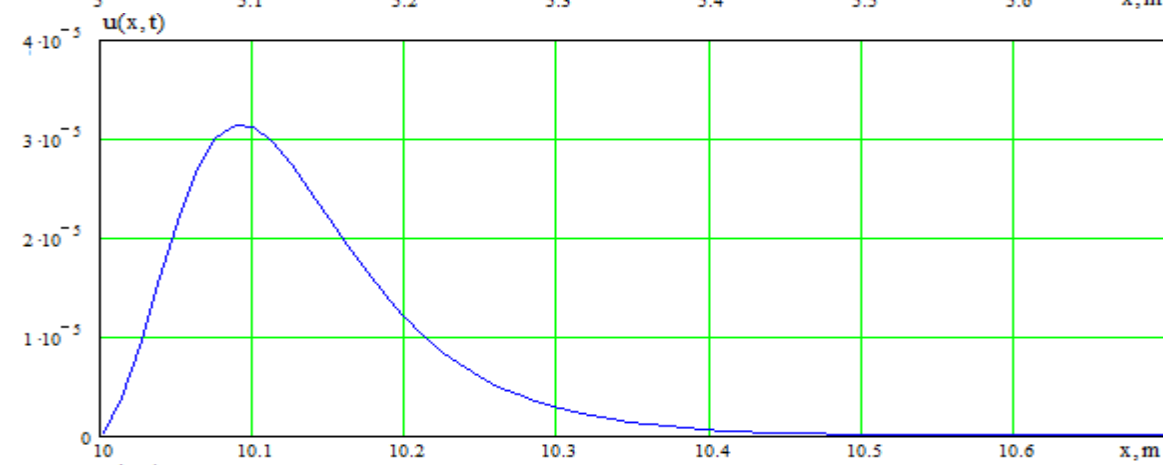
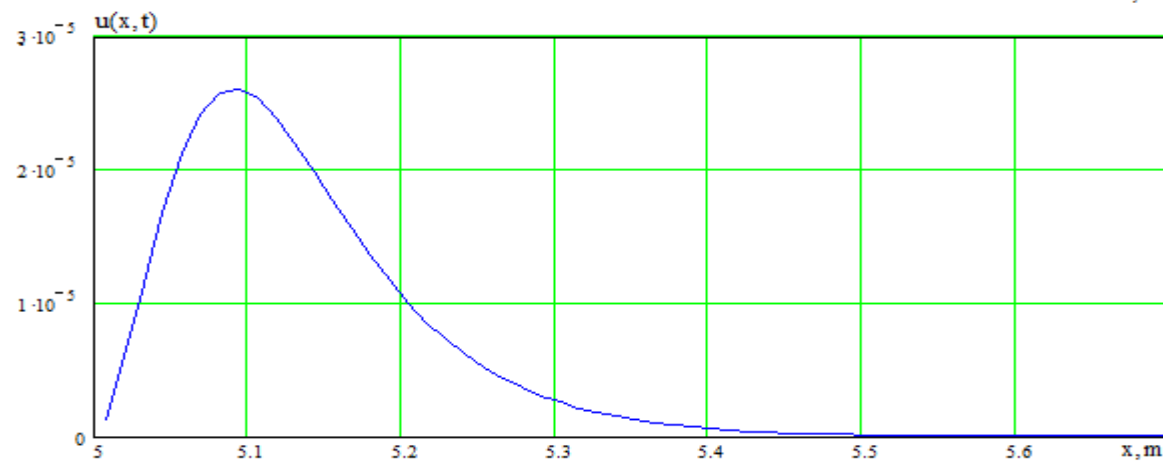
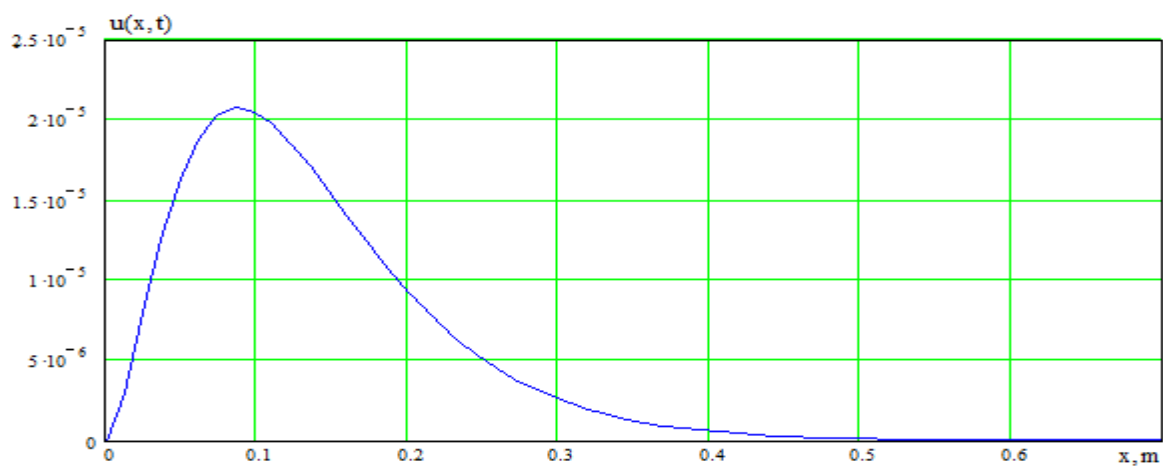
Рис. 4.65 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-5}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811, a = 1.4$  та максимальна амплітуда  $a_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

#### 4.4.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю

Розглядаються три набори графіків рис. 4.66- 4.68, які показують вплив матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі. Кожний набір характеризується наступними характеристиками: алюміній,  $\alpha = -16.811, a = 40, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.66; мідь  $\alpha = -7.207, a = 40, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.67; сталь  $\alpha = -13.31, a = 40, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  рис. 4.68.

На рис. 4.66 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уїттекера для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811, a = 40, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .





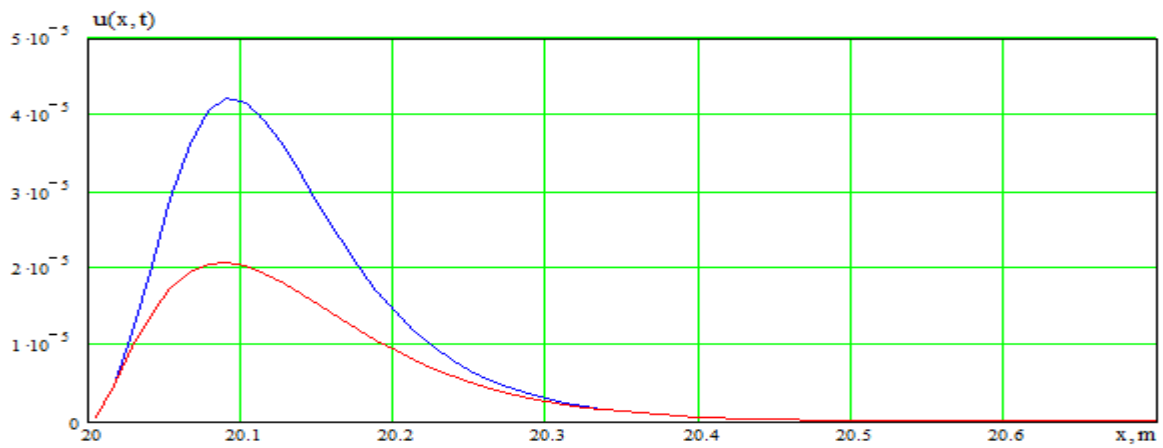
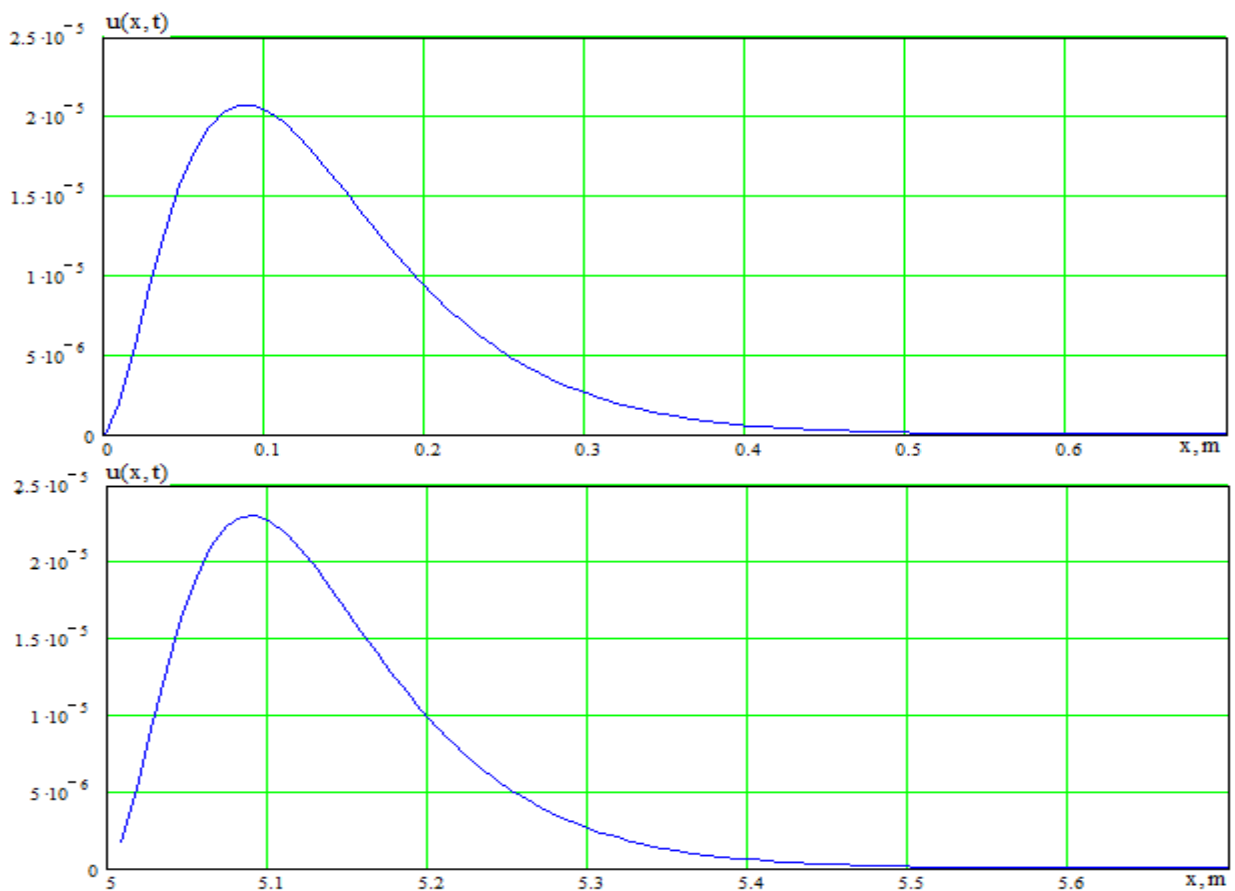


Рис. 4.66

Графіки рис.4.66 демонструють еволюцію початкового профіля хвилі у вигляді функції Уіттекера. Тут вже чітко спостерігається зміна амплітуди та звуження самого профіля, також є тенденція до сотворення профіля до вигляд, що нагадує дзвіноподібну функцію

На рис. 4.67 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha = -7.207$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .



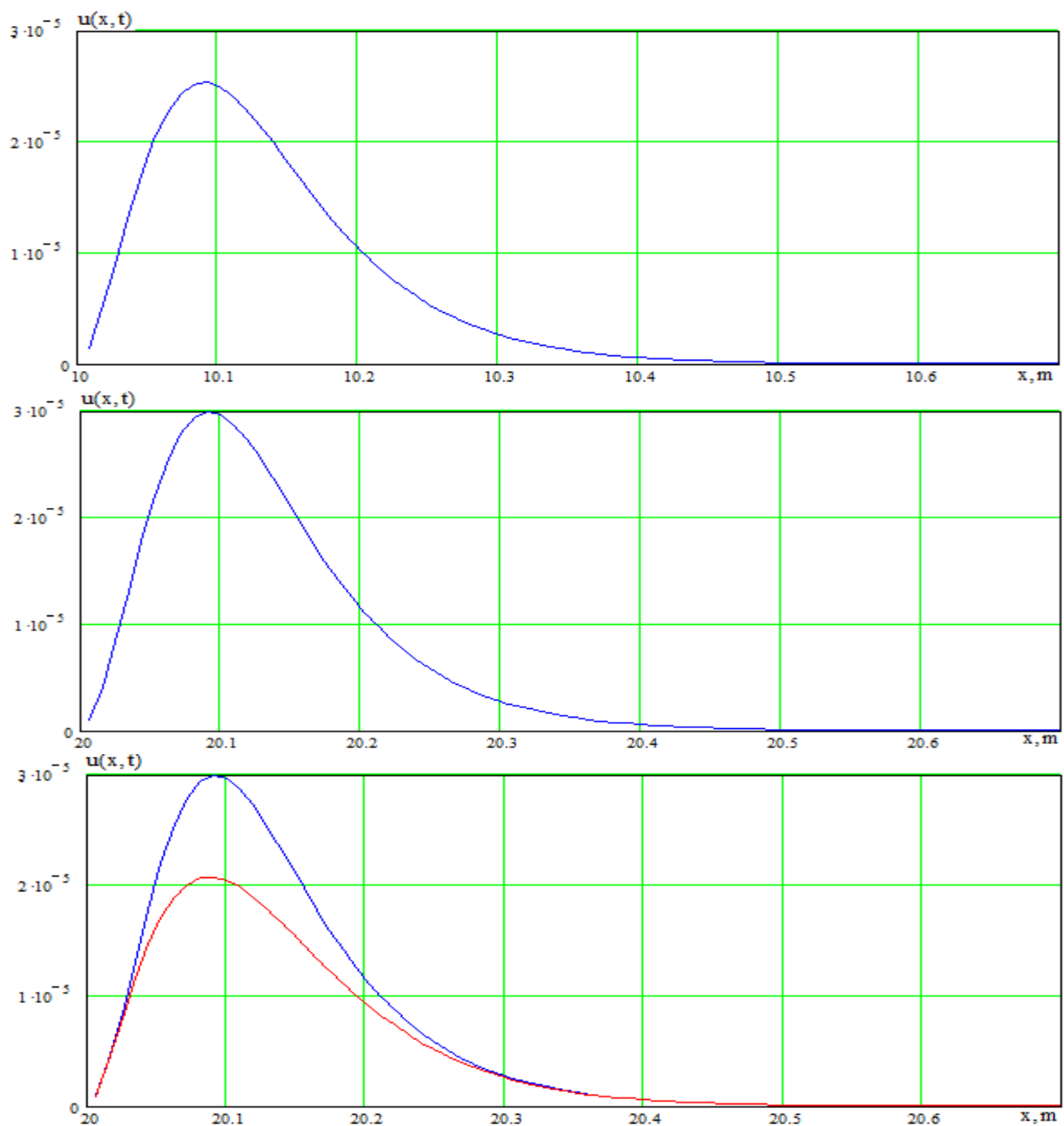
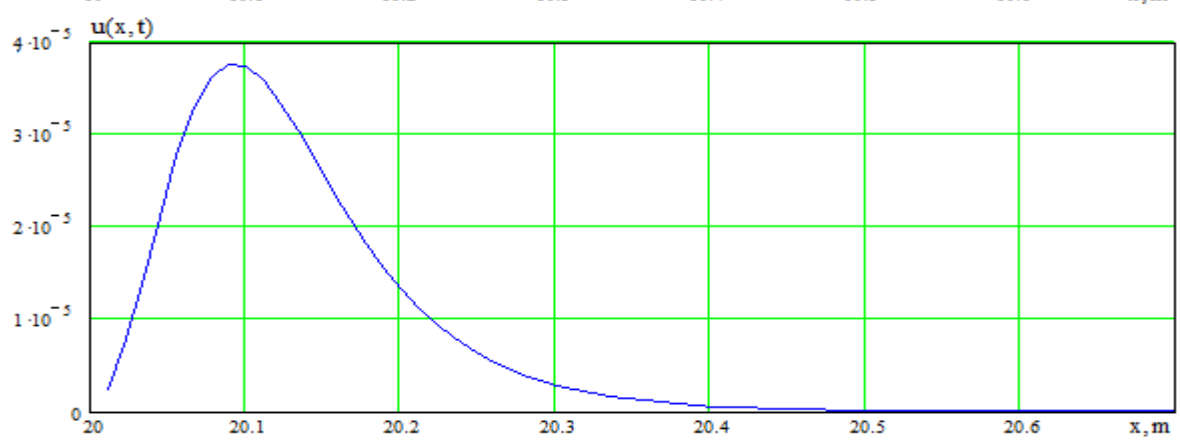
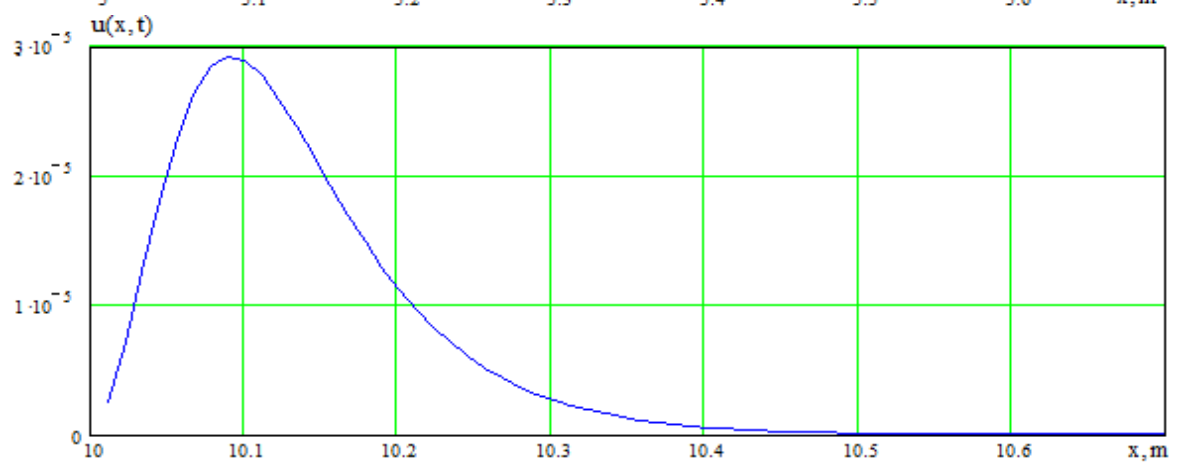
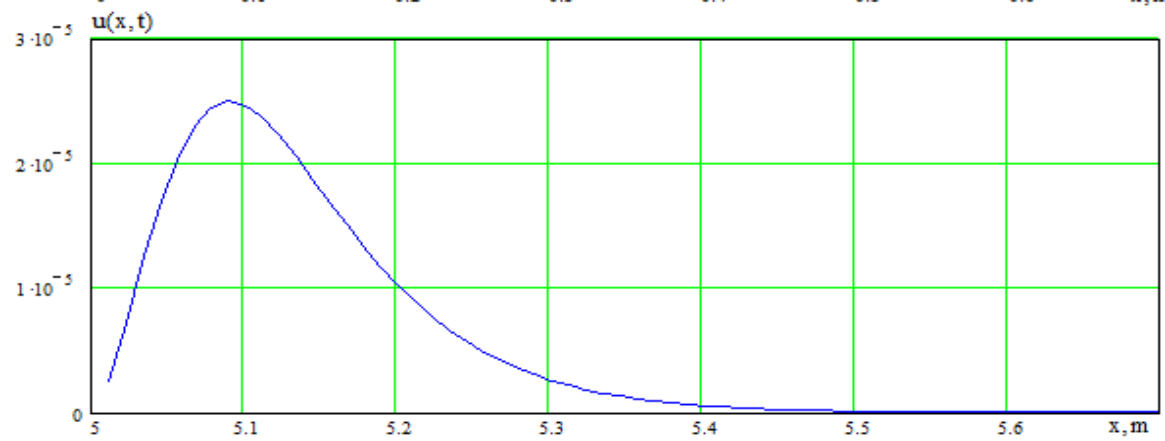
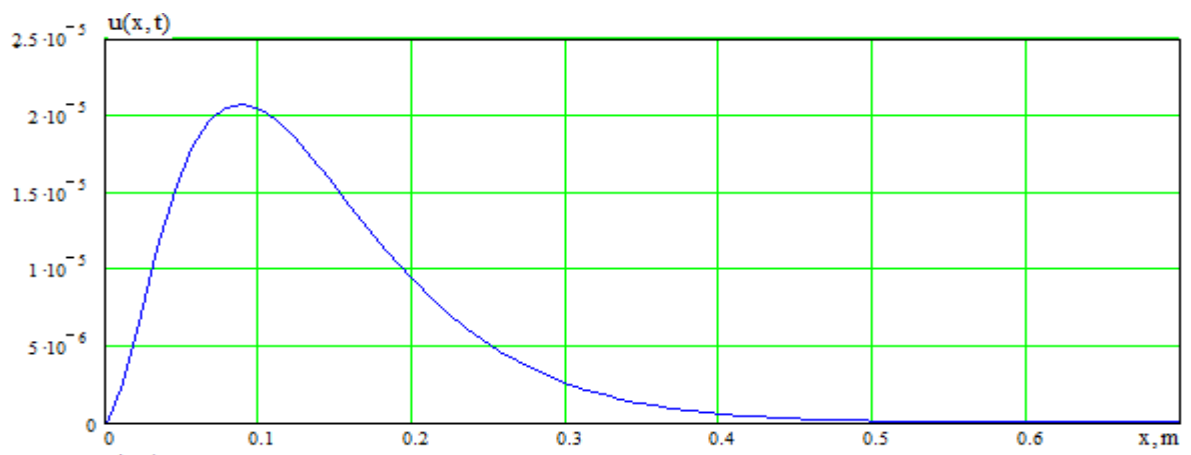


Рис. 4.67

Графіки рис.4.67 демонструють початкову еволюцію початкового профіля хвилі у вигляді функції Уіттекера. Тут спостерігається зменшення початкової амплітуди та звуження самого профіля.

На рис. 4.68 показано графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha = -13.31$ ,  $a = 40$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ .



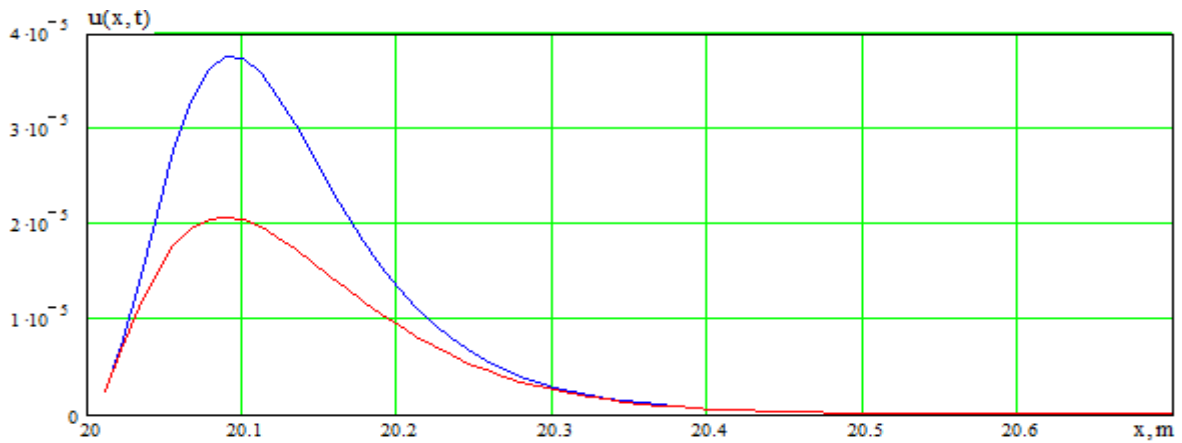


Рис. 4.68

Графіки рис. 4.68 демонструють другий етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки звужуватись. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію та міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки рис. 4.66-4.68 відповідають розвиненим етапам дисторсії (спотворення) початкового профіля хвилі у вигляді функції Уіттекера. Спотворення полягає у тому, що початковий профіль перероджується у профіль, що нагадує дзвіноподібну функцію.

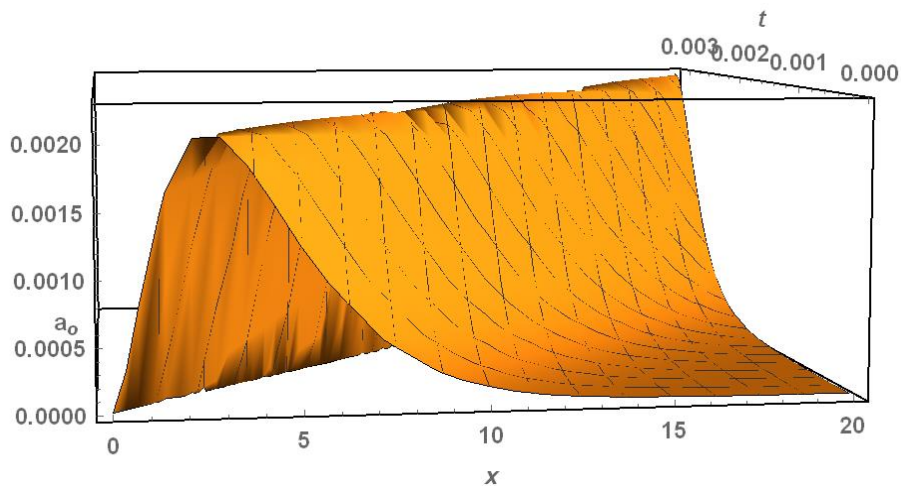


Рис. 4.69

Рис. 4.69 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $2.1 \cdot 10^1$  метрів, максимальне значення амплітуди  $10^{-5}$ . Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: сталь

$\alpha = -13.31, a_0 = 1 \cdot 10^{-3}, a = 1.4$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю.

Одинична хвиля з несиметричним профілем у вигляді функції Уіттекера еволюціонує у трьох напрямках: зменшується початкова амплітуда, ліва частина горба та права поступово стають крутішими, сам профіль поступово зміщується в праву частину, що нагадує двіноподібний профіль. Підшва хвилі у всіх випадках залишається не змінною.

Таким чином, урахування нелінійності в аналізі розповсюдження одиничної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера дозволяє описати таке хвильове явище як дисторсія профіля.

**РОЗДІЛ 5**  
**ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ**  
**НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПООДИНОКОЇ**  
**ПОПЕРЕЧНОЇ ХВИЛІ**

**5.1. Постановка задачі, нелінійне хвильове рівняння**

Розглянемо плоску поперечну вертикально поляризовану хвилю (SV-хвилю), яка поширюється в нелінійно пружному матеріалі, деформування якого описується моделлю Мернагана [1,2,3]. Рух цієї хвилі задається нелінійним хвильовим рівнянням, у якому враховані квадратична і кубічна нелінійності [3,4]

$$\begin{aligned} \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{3,1}) + \\ + N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11} (u_{2,1})^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

з такими позначеннями механічних постійних

$$\begin{aligned} N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B, \quad N_4 = \lambda + 2\mu + (1/2)(5A + 14B + 4C), \\ N_5 = (3/2)(\lambda + 2\mu + A + 2B), \quad N_6 = 3A + 10B + 4C. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Оскільки в праву частину рівняння (5.1) входять всі три компоненти вектора зміщення, то розв'язувати рівняння (5.1) потрібно разом з двома іншими нелінійними хвильовими рівняннями

$$\begin{aligned} \rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}) + \\ + N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2 + N_4 (u_{2,11} u_{2,1} u_{1,1} + u_{3,11} u_{3,1} u_{1,1}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{2,1}) + \\ + N_4 u_{2,11} (u_{2,1})^2 + N_5 u_{2,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{2,11} (u_{3,1})^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тут додатково використовується ще одна механічна постійна

$$N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)].$$

Рівняння (5.1) досліджувалося досить докладно для випадку гармонічної хвилі. Розглядалися випадки як квадратичної так і кубічної нелінійностей.

Для випадку лише квадратичної нелінійності рівняння (5.1) має вигляд

$$\rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{3,1}), \quad (5.5)$$

а для випадку лише кубічної нелінійності – дещо інший

$$\rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11} (u_{2,1})^2. \quad (5.6)$$

Звичайно, систему рівнянь (5.1), (5.3), (5.4) розв'язують в рамках так званої другої стандартної задачі, коли початково в матеріалі збуджується лише SV-хвиля (тобто, Р-хвиля і SH-хвиля початково не збуджуються). Тоді система спрощується до одного рівняння. Це рівняння у випадку врахування лише квадратичної нелінійності є лінійним

$$\rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = 0, \quad (5.7)$$

тоді як у випадку врахування кубічної нелінійності є нелінійним

$$\rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2. \quad (5.8)$$

Це коментується як факт, що в рамках врахування квадратичної нелінійності SV-хвиля не генерує саму себе (несамозбуджується) і еволюція початкового профіля хвилі не може бути описана, тоді як в рамках врахування кубічної нелінійності самозбудження хвилі і еволюція її початкового профіля описуються.

Далі саме рівняння (5.8) і буде розв'язуватися.

Нагадаємо, що випадки відмінних від гармонічного профілів розглядалися тільки для Р-хвилі [2,3,5,6,7].

## 5.2. Про три підходи до аналізу нелінійного хвильового рівняння

### 5.2.1. Метод послідовних наближень в знаходженні розв'язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поперечної гармонічної хвилі

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння (5.8), для якого лінійна задача описується хвильовим рівнянням (5.7)

Далі треба ввести в нелінійне рівняння (5.8)

$$u_{3,t} - (v_T)^2 u_{3,11} = (N_4/\rho) u_{3,11} (u_{3,1})^2$$



параметр збурення (малий параметр)  $\varepsilon$  таким чином: при  $\varepsilon = 1$  рівняння повинно співпадати з рівнянням (5.8) і при  $\varepsilon = 0$  – з лінійним рівнянням (5.7).

Наступна процедура методу описана в п.4.1.1.

Відмінність виявляється в аналізі рекурентного рівняння (4.4)

$$u_{3,tt}^{(n)} - (v_T)^2 u_{3,11}^{(n)} = (N_4/\rho) u_{3,11}^{(n-1)} (u_{3,1}^{(n-1)})^2. \quad (5.9)$$

З врахуванням (5.9) розв'язок в рамках перших двох наближень представляється у вигляді

$$u_3(x_1, t) = u_3^{(0)}(x_1, t) + u_3^{(1)}(x_1, t). \quad (5.10)$$

Розв'язок у нульовій апроксимації є лінійним і для гармонічних плоских хвиль при заданій початковій амплітуді  $u_{3o}$  і частоті  $\omega$  має вигляд

$$u_3^{(0)}(x, t) = u_{3o} e^{i(k_T x - \omega t)} \quad ((\omega/k_T) = v_T). \quad (5.11)$$

Основний хвильовий ефект полягає в тому, що хвиля є лінійною гармонічною у вигляді першої гармоніки, яка поширюється без зміни профіля (не спотворюється) і не взаємодіє сама з собою.

Для отримання першого наближення слід розв'язувати наступне рівняння

$$\ddot{u}_3^{(1)} - v_T^2 u_{3,11}^{(1)} = -i(N_4/\rho)(u_{3o})^3 k_T^3 e^{3i(k_T x_1 - \omega t)}.$$

Тут права частина включає третю гармоніку, яка є розв'язком однорідного рівняння. Тому розв'язок слід шукати подібно випадку параметричного резонанса і він є таким

$$u_3^{(1)}(x_1, t) = [N_4/6\mu](u_{1o})^3 k_T^2 x_1 e^{3i(k_T x_1 - \omega t)}. \quad (5.12)$$

Розв'язок у вигляді перших двох наближень має вигляд

$$u_3(x, t) = u_{1o} e^{i(k_T x_1 - \omega t)} + x_1 \left[ (N_1/6\mu)(u_{1o})^3 k_T^2 \right] e^{3i(k_T x_1 - \omega t)}. \quad (5.13)$$

Розв'язок (5.13) звичайно коментують таким чином: він підтверджує теоретично генерацію третьої гармоніки. Цей головний хвильовий ефект формується

у три етапи. Спочатку хвиля слабо відрізняється від лінійної гармонічної хвилі. Далі зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи часу її поширення перша гармоніка сумується з третьою гармонікою, амплітуда якої повільно зростає, і вони утворюють модульовану хвилю. Крок за кроком, вплив третьої гармоніки зростає і вона стає домінантною.

### 5.2.2. Метод повільно змінних амплітуд в знаходженні розв'язку хвильового рівняння для нелінійно пружної плоскої поперечної хвилі

Цей метод описаний раніше в п. 4.1.2.

Розглянемо кубічно нелінійне рівняння (5.8), для якого нелінійний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u_3(x, t) = A_3(x_1)e^{i(k_T x_1 - \omega t)} \quad (5.14)$$

Розглянемо взаємодію трьох хвиль і тоді розв'язок рівняння (5.8) має вигляд суми хвиль зі змінною амплітудою

$$u_3(x_1, t) = A_{31}(x_1)e^{i\sigma_1} + A_{32}(x_1)e^{i\sigma_2} + A_{33}(x_1)e^{i\sigma_3}, \quad \sigma_m = k_{Tm}x - \omega_m t. \quad (5.15)$$

В результаті стандартних для методу процедур отримуються наступні рівняння – три взаємопов'язані звичайні кубічні нелінійні диференціальні рівняння першого порядку щодо амплітуд

$$\sum_{m=1}^3 k_{Tm} (A_{3m})_{,1} e^{i\sigma_m} = -(N_4/\mu) \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \left\{ k_{Tn} (k_{Tp})^2 k_{Tq} A_{1n} A_{1p} A_{1q} e^{i(\sigma_n + 2\sigma_p + \sigma_q)} + \right. \\ \left. + k_{Tn} k_{Tp} (k_{Tq})^2 A_{1n} A_{1p} A_{1q} e^{i(\sigma_n + \sigma_p + 2\sigma_q)} \right\}. \quad (5.16)$$

Введемо умови частотного синхронізму  $\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3 = 0$ ,  $2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ . Тоді вкорочені рівняння перетворюються на три взаємозв'язані еволюційні рівняння

$$(A_{31})_{,1} = \sigma_1 (\bar{A}_{32})^2 A_{33} e^{i(k_{T3} - 2k_{T2} - k_{T1})x}, \quad (A_{32})_{,1} = \sigma_2 (\bar{A}_{31})^2 A_{33} e^{i(k_{13} - k_{12} - 2k_{11})x}, \\ (A_{33})_{,1} = \sigma_3 (A_{31})^2 A_{32} e^{i(k_{T3} - k_{T2} - 2k_{T1})x}, \quad (5.17)$$

$$\sigma_\alpha = -\frac{N_4 k_{T\delta} k_{T3} (k_{T\delta} + k_{T3})}{\mu k_{T\alpha}}; \quad \sigma_\alpha = -\frac{N_4 (k_{T1})^2 k_{T2}}{\mu}; \quad (\alpha + \delta = 3).$$

Додатково введемо припущення  $k_{T3} - k_{T2} - 2k_{T1} = 0$ ,  $k_{T3} - 2k_{T2} - 2k_{T1} = 0$  про синхронізацію хвильових чисел. Ці умови уможливають аналіз різних задач про взаємодію хвиль.

Найпростішою є задача про генерацію третьої гармоніки. Тут припускається, що третя хвиля початково не збуджується, тобто,  $A_{33}(0) = 0$ . Також вважається, що перша і друга хвилі ідентичні (рівні за амплітудою, хвильовим числом і частотою). Також допускається з метою узгодження з класичним експериментом про генерацію другої гармоніки, що амплітуда першої хвилі постійна  $A_{31} = const$ .

Як наслідок, розв'язувати треба лише третє рівняння системи (5.17)

$$(dA_{33}/dx_1) = \sigma_3 (A_{31})^3. \quad (5.18)$$

Відповідний розв'язок має вигляд

$$A_{33}(x_1) = -(N_1/\mu)(k_{T1})^3 (A_{31})^3 x_1. \quad (5.19)$$

Таким чином, при прийнятих спрощеннях третя хвиля має на виході з середовища частоту  $3\omega_1$  і хвильове число  $3k_{L1}$ , тобто, вона є третьою гармонікою для першої хвилі. Але при цьому амплітуда третьої хвилі зростає прямо пропорційно шляху  $x_1$ , який пройшла хвиля. Також вона залежить від куба амплітуди  $A_{31}$  і куба хвильового числа  $k_{T1}$  першої хвилі. Для отримання необхідних параметрів третьої хвилі на виході з середовища цими трьома величинами можна керувати. При цьому слід мати на увазі, що величина  $N_4/\mu$  характеризує пружний матеріал і її зміна має вузькі рамки.

Отже, описана теоретично така задача: генерується гармонічна хвиля на вході в середовище з кубічно нелінійними механічними властивостями, яка при поширенні в середовищі взаємодіє сама з собою (самогенерується); на виході з середовища хвиля фіксується у вигляді третьої гармоніки первинної хвилі.

### 5.2.3 Наближений метод знаходження розв'язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення

Розглянемо цей метод стосовно нелінійного хвильового (5.8)

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 \quad \text{або} \quad u_{3,tt} - (v_T)^2 u_{3,11} = (N_4/\rho) u_{3,11} (u_{3,1})^2. \quad (5.20)$$

Перша особливість методу полягає у тому, що нелінійне хвильове рівняння, до якого він застосовується, повинно мати особливу структуру. Рівняння (5.20) таку структуру має: права нелінійна частина може бути перенесена у лінійну ліву частину з метою формального запису лінійного хвильового рівняння зі змінною швидкістю хвилі

$$u_{3,tt} - \left\{ (v_T)^2 + (N_4/\rho)(u_{3,1})^2 \right\} u_{3,11} = 0 \rightarrow u_{3,tt} - \left\{ 1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2 \right\} (v_T)^2 u_{3,11} = 0, \quad (5.21)$$

де  $\alpha_3 = (N_4/\mu)$ .

Далі припустимо, що початковий профіль хвилі задається функцією, яка може описувати поодинокую хвилю (для цього вона повинна бути фінітною чи мати фінітну вагу)

$$u_3(x_1, t=0) = F_3(ax_1), \quad (5.22)$$

де зразу введено довільний параметр  $a$ , який дозволить змінювати підосхву поодинокій хвилі. Зазначимо тут, що підосхва поодинокій хвилі є параметром, який відповідає у гармонічній хвилі довжині хвилі.

Наступне припущення є таким: поодинокую хвилю з початковим профілем у вигляді  $F_3(ax_1)$  поширюється у такому ж вигляді, але функція  $F_3$  вже залежить від фазової змінної  $\sigma = a(x_1 - vt)$

$$u_3(x_1, t) = F_3[a(x_1 - vt)], \quad (5.23)$$

куди входить змінна швидкість хвилі

$$v = \sqrt{1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2} v_T. \quad (5.24)$$

Як і в п.4.3, швидкість  $v$  можна трактувати як локальну швидкість хвилі в точці  $x$  і в момент часу  $t$ . Це нагадує трактування Лайтхілла простих хвиль Ріманна, які описані в розділі 2. Оскільки з формули (5.24) випливає, що швидкість  $v$  залежить нелінійно від градієнту зміщення  $u_{3,1}$ , тобто, від розв'язку хвильового рівняння (5.21) чи, іншими словами, від профіля хвилі в точці  $x$  і в момент часу  $t$ , то поодинокую хвилю (5.23) можна теж розуміти як просту хвилю.

Приймемо обмеження в представленні швидкості хвилі (5.24)

$$\left| \alpha_3 (u_{3,1})^2 \right| \ll 1, \quad (5.25)$$

з метою записати корінь у формулі (5.24) у вигляді ряду

$$\sqrt{1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2} = \left( 1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2 \right)^{1/2} = 1 + (1/2) \alpha_3 (u_{3,1})^2 - (1/8) \alpha_3^2 (u_{3,1})^4 + \dots \quad (5.26)$$

Тоді умова (5.26) дає право наближено представити швидкість (5.24) першими двома членами ряду і записати розв'язок теж наближено у вигляді

$$u_3(x_1, t) \cong F_3 \left[ a \left( x_1 - v_T t - (1/2) \alpha_3 (u_{3,1})^2 t \right) \right]. \quad (5.27)$$

Точність наближення (5.27) залежить від точності виконання умови (5.25), яка включає обмеження на два параметри:

$$\text{параметр } \alpha_3 = (\lambda + 2\mu) / \mu + (5A + 14B + 4C) / 2\mu$$

$$\text{і квадрат градієнта зміщення } (u_{3,1})^2.$$

*Про значення параметра  $\alpha_3$*

Обмеження (5.25) на параметри бажано прив'язати до класу конструктивних матеріалів, які далі використовуються в числових розрахунках і для яких модель Мернагана достатньо прийнятна. Ці матеріали вказані в п.4.1.3: алюміній, мідь, сталь. Тоді для параметра  $\alpha$  можуть бути наближено знайдені значення:

$$\alpha_3 \approx -58 (Al); -46 (Cu); -113 (Fe).$$

Далі достатньо прийняти класичне в теорії пружного деформування матеріалів обмеження малості деформації, яке звичайно записують як

$$|u_{3,1}| \ll 1 \quad (5.28)$$

(тобто, вважається, що градієнт зміщення є малим). Це обмеження зберігає можливість нелінійного деформування, але нелінійність має бути слабкою.

Зазначимо, що вказані в п.4.1.3 уточнення і коментарі зберігаються і в цьому випадку.

Розглянемо тепер фазу хвилі  $\sigma = a(x_1 - vt) = a \left[ x_1 - \sqrt{1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2} v_T t \right]$  і врахуємо наближене представлення кореня (5.26). Тоді фазу можна наближено представити так:

$$\sigma \approx \left[ a(x_1 - v_T t) - (1/2) \alpha_3 a v_T (u_{3,1})^2 t \right]. \quad (5.29)$$

Як випливає з формули (5.29), фаза складена з двох частин – класичної фази з постійною фазовою швидкістю  $\sigma_{clas} = a(x_1 - v_T t)$  і можливо малого додаткового параметра

$$\delta = -(1/2) \alpha_3 a v_T (u_{3,1})^2 t. \quad (5.30)$$

При достатньо малих проміжках часу і малих підшовах параметр дійсно малий.

Тоді розв'язок (5.27) можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром  $\delta$  в околі класичного постійного значення фази  $\sigma_{clas}$

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma_{clas} + \delta) \approx F_3(\sigma_{clas}) + F_3'(\sigma_{clas})\delta + (1/2)F_3''(\sigma_{clas})\delta^2 + \dots. \quad (5.31)$$

У цьому розкладі збережемо перші два доданки

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma_{clas} + \delta) \approx F_3(\sigma_{clas}) + F_3'(\sigma_{clas})\delta. \quad (5.32)$$

враховуючи малість параметра  $\delta$ , тобто умову

$$|\delta| = \left| -(1/2) \alpha_3 a v_T (u_{3,1})^2 t \right| \ll 1. \quad (5.33)$$

Оскільки малість  $\left| \alpha (u_{3,1})^2 \right|$  вже припущена в (5.25), то це фактично умова на  $av_T t$  - пройденому хвилею відстань.

Якщо обмежитись класом конструкційних матеріалів, то пройдена хвилею відстань повинна бути приблизно 1 -10 м і характерний розмір хвилі відстань

повинна бути приблизно 1 -10 м і характерний розмір хвилі (довжина підошви)  $a$  повинна бути значно меншою цієї відстані).

Вирахуємо наближено похідну через функцію  $F_3$  і напишемо далі позначення  $\sigma$  замість  $\sigma_{clas}$

$$u_{3,1}(x_1, t) \approx F'_{3,\sigma}(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} = F'_{3,\sigma}(\sigma)a + F''_{\sigma\sigma}(\sigma)(-(1/2)\alpha a^2 v_T(u_{3,1})t) \approx F'_{3,\sigma}(\sigma).$$

Тоді формулі (5.32) можна надати інший вигляд

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma) + F'_3(\sigma) \left[ \delta = -(1/2)\alpha_3 v_T(u_{3,1})^2 t \right] = F_3(\sigma) - (1/2)\alpha_3 v_T t \left[ F'_3(\sigma) \right]^3 \quad (5.34)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (5.34) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) третьої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

### **5.3. Числовий аналіз поперечної поодинокі хвилі з дзвіноподібним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі отриманих автором наближених розв'язків**

#### **5.3.1. Теоретичний аналіз поперечної поодинокі хвилі з дзвіноподібним профілем з урахуванням нелінійності деформування на основі двох наближених розв'язків**

Задамо початковий профіль у вигляді дзвіноподібної функції

$$u_3(x_1, 0) = u_3^o e^{-(x_1^2/2)}, \quad (5.35)$$

(функція  $e^{-(x^2/2)}$  є теж функцією Чебишова-Ерміта нульового індекса  $\psi_0(x)$ ).

Припустимо, що початковий неперіодичний профіль (5.35) формує поодинокі (неперіодичну) хвилю у вигляді

$$u_3(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)}, \quad (5.36)$$

де через  $\sigma = \sigma^o (x_1 - v_3 t)$  позначена фазова змінна хвилі і  $v_3 = \sqrt{\mu/\rho}$  є постійною фазовою швидкістю SV-хвилі. Параметр  $\sigma^o$  в поодинокій хвилі відповідає хвильовому числу  $k$  в гармонічній хвилі: зміна хвильового числа має наслідком зміну довжини хвилі, тоді як зміна параметра  $\sigma^o$  має наслідком зміну підосви поодинокій хвилі.

Очевидно, що хвиля (5.36) являє собою конкретне представлення простої хвилі Д'Алямбера [31,32,33] і задовольняє рівняння, яке є лінійною частиною рівняння (5.5).

Застосуємо далі до аналізу нелінійного хвильового рівняння (5.5) описані вище два методи наближеного розв'язування. *Метод 1* - метод послідовних наближень. *Метод 2* - метод наближеного розкладу змінної швидкості хвилі.

*Метод 1.* Приймемо розв'язок лінійного аналогу рівняння (5.5) за перше наближення розв'язку нелінійного рівняння (5.5)

$$u_3^{(1)}(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)}. \quad (5.37)$$

Друге наближення  $u_3^{(2)}(x, t)$  знаходимо як розв'язок неоднорідного рівняння

$$\rho u_{3,tt}^{(2)} - \mu u_{3,11}^{(2)} = N_4 u_{3,11}^{(1)} (u_{3,1}^{(1)})^2 \rightarrow \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \rho u_{3,tt}^{(2)} - \mu u_{3,11}^{(2)} &= N_4 \left( -u_3^o (1 - \sigma^2) e^{-(\sigma^2/2)} \right) \left( -u_3^o \sigma e^{-(\sigma^2/2)} \right)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow u_{3,tt}^{(2)} - c_3^2 u_{3,11}^{(2)} = -(N_4/\rho) (u_3^o)^3 \sigma^2 (1 - \sigma^2) e^{-3(\sigma^2/2)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Оскільки присутня справа в (5.39) "третья гармоніка"  $e^{-3(\sigma^2/2)}$  є розв'язком однорідного аналогу рівняння (5.39), то розв'язок неоднорідного рівняння (5.39) буде розв'язком резонансного типу

$$u_3(x_1, t) = u_3^{(1)}(x_1, t) + u_3^{(2)}(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)} + x_1 (N_4/\rho) (u_3^o)^3 \frac{\sigma^2 (1 - \sigma^2)}{3(1 + \sigma - 3\sigma^2)} e^{-3(\sigma^2/2)}$$

або



$$u_3(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2} + x_1 \alpha_3 (c_3)^2 (u_3^o)^3 \frac{(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 \left[ 1 - (\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 \right]}{3 \left( 1 + \sigma^o (x_1 - c_3 t) - 3 (\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 \right)} e^{-3(\sigma^o)^2 (x_1 - c_3 t)^2 / 2}. \quad (5.40)$$

*Коментар розв'язку (5.40).* Цей розв'язок суттєво залежить від фази  $\sigma$ : в різних точках профіля його зміна відбувається по-різному. При  $\sigma = 0$  (вершина дзвона) зміна відсутня, тобто, максимальна амплітуда профіля незмінна. Також зміна відсутня в точці  $\sigma = 1$ , у якій нелінійна добавка змінює знак з плюс на мінус. Це можна коментувати так: центральна частина профіля ( $\sigma \in [-1; 1]$ ) розширюється ("повніє"), тоді як хвостова частина профіля стискається ("худне"). При цьому, "хвіст худне" зліва і справа по-різному.

*Коментар 2 розв'язку (5.40).* Розв'язок складається з двох доданків, один з яких відповідає класичній поодинокій дзвіноподібній хвилі (умовно, "першій гармоніці хвилі") з постійними параметрами, а другий відповідає умовно "третьій гармоніці хвилі" зі змінною амплітудою. Ця амплітуда заслуговує особливої уваги: вона вже нелінійно залежить від відстані, пройденої хвилею, і властивостей матеріалу. Така залежність є характерною для прийнятого підходу і спостерігалася раніше для інших типів хвиль, але там вона була лінійною. Саме змінна амплітуда другого доданку відповідальна за еволюцію початкового профіля при русі хвилі.

*Метод 2.* Тут теж аналізується наближений розв'язок рівняння (5.5) і далі вважається, що хвиля дзвіноподібна. Однак застосовується підхід, описаний вище в п. 5.2.3. Знайдена там формула (5.34) для розв'язку в рамках двох перших наближень приймає більш конкретний вигляд

$$u_3(x_1, t) \approx u_3^o e^{-(\sigma^o)^2 (x_1 - v_T t)^2 / 2} + (1/2) t \alpha_3 v_T (\sigma^o)^3 (x_1 - v_T t)^3 (u_3^o)^3 e^{-3(\sigma^o)^2 (x_1 - v_T t)^2 / 2}. \quad (5.41)$$

*Коментар розв'язку (5.41).* Цей розв'язок суттєво залежить від класичної фази (фази з постійною фазовою швидкістю  $v_T$ )  $\sigma = \sigma^o (x_1 - v_T t)$ : в різних точках профіля його зміна відбувається по-різному, але нелінійна добавка завжди антисиметрична. При  $\sigma = 0$  (вершина дзвона) зміна відсутня, тобто, максимальна амплітуда

літуда профіля незмінна. Однак в інших симетричних щодо вершини точках профіля останній змінюється несиметрично: права частина профіля розширюється (“повніє”), тоді як ліва частина профіля звужується (“худне”).

Порівняння формул (5.22) і (5.34), які описують наближено еволюцію хвилі, показує, що вони описують еволюцію хвилі по-різному, але і отримані вони при відмінних між собою обмеженнях. Більш наглядно відмінність повинна виявитися при числовому аналізі, чому і присвячена наступна частина цього розділу.

### 5.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три металічні конструкційні матеріали з такими параметрами в рамках моделі Мернагана (система СІ) [18]:

Алюміній –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; \nu_T = 3,162 \cdot 10^3; \alpha_3 = -82,648;$$

Мідь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; \nu_T = 2,318 \cdot 10^3; \alpha_3 = -45,438;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; \nu_T = 3,182 \cdot 10^3; \alpha_3 = -54,816.$$

Параметри дзвіноподібної хвилі вибирались такими:

Для одиночної хвилі з профілем у вигляді функцій Гаусса (яка є функцією кінцеві ваги) приймемо припущення, що довжиною підосви хвилі є інтервал (відстань), для якої площа під графіком початкового профілю хвилі поза цим інтервалом є малою.

Для функції Гаусса (дзвіноподібної функції)  $e^{-(x^2/2\sigma^2)} = e^{-[(x/\sigma)^2/2]}$  довжина підосви профілю дорівнює  $6\sigma$ . Тому для профілю у вигляді  $F(x_1) = e^{-((ax_1)^2/2)}$  параметр  $\sigma^o$  визначає довжину підосви за формулою  $\sigma^o = (1/a)$ . Для всіх

трьох матеріалів початкова підосва обрана однаковою і варіантів вибору три:  
 $L = \{7,5; 5; 4,3\}$  ( $\sigma^o = \{0,8; 1,2; 1,4\}$ ).

### 5.3.3. Аналіз впливу величини підосви хвилі на спотворення початкової форми профілю

Початковий профіль дзвіноподібної хвилі приймається у вигляді  $F(x_1) = e^{-\left[\frac{(\sigma^o)^2(x_1 - v_T t)^2}{2}\right]}$ . Далі чисельно аналізуються формула (5.41) для хвилі в довільний момент часу, отримана методом, що ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення.

За цією формулою далі показані двовимірні графіки з координатами "зміщення  $u_1$  - пройдена хвилею відстань  $x_1$ ". Всього розглянуто 27 наборів параметрів:

3 метали – алюміній, мідь, сталь;

3 варіанти довжини хвилі –  $L = 7,5; 5; 4,3$ ; що відповідають наступним довжинам підосви хвилі  $\sigma^o = 0,8; 1,2; 1,4$ .

3 варіанти максимальної амплітуди –  $u_0 = 6 \cdot 10^{-3}; 7 \cdot 10^{-3}; 9 \cdot 10^{-3}$ ;

В залежності від параметрів конкретного набору графіки відрізняються діапазоном амплітуди хвилі і відстані яку пройшла хвиля.

Вказані чотири графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно.

Довжина хвилі вибиралась так, щоб після відстані яку пройшла хвиля, що відповідає десяти довжинам хвилі уже починає проявлятися дисторсія початкового профілю хвилі.

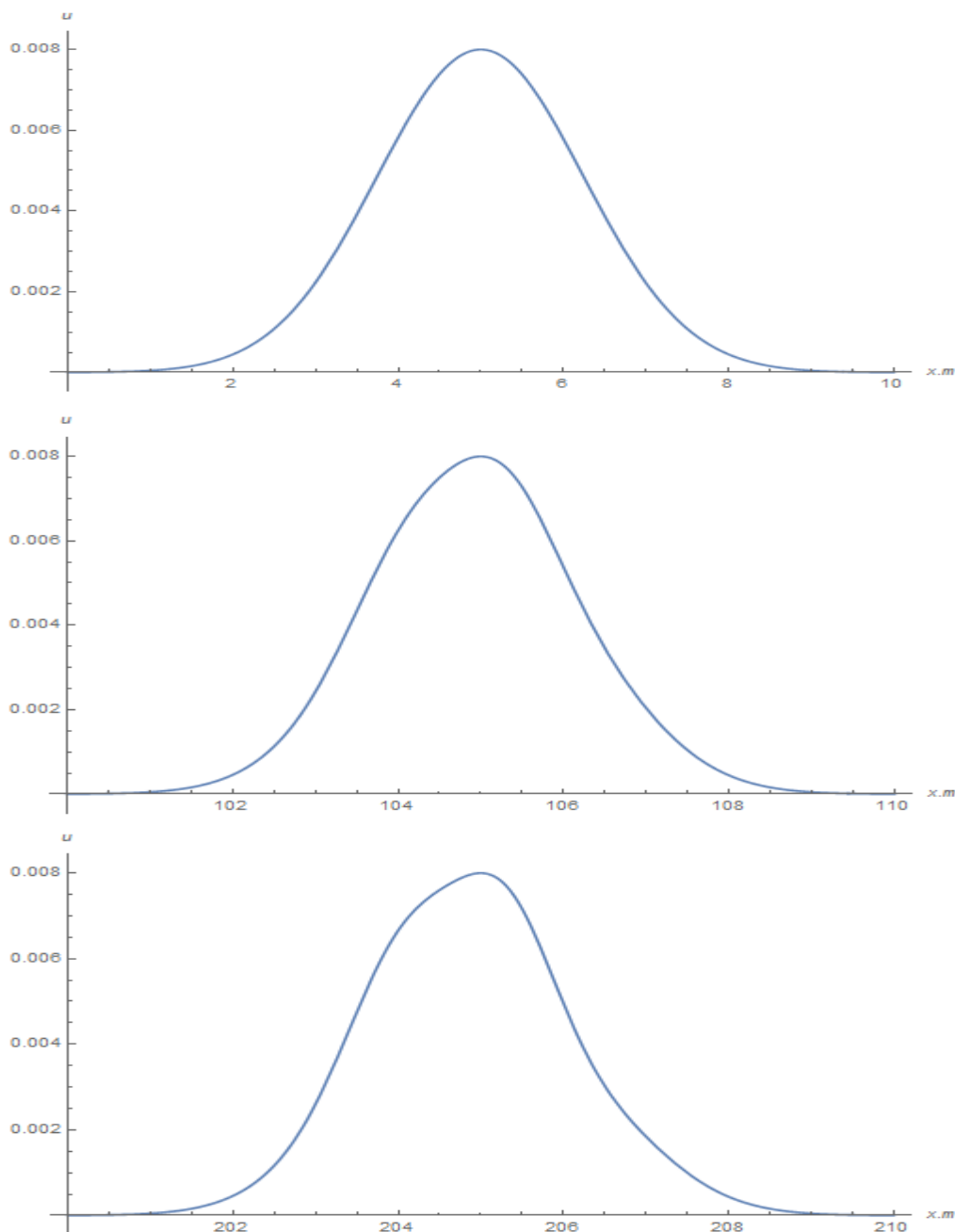
Параметри для тривимірних графіків підібрані таким чином, щоб наглядніше продемонструвати еволюцію хвилі.

На рис. 5.1 - 5.6 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, мідь; фіксована довжина підосви та три значення частоти.

На рис. 5.1 - 5.3 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (5.41) для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha_3 = -82,648$ ;  $u_3^o = 8 \cdot 10^{-3}$  та три значення довжини підошви хвилі  $\sigma^o = 0,8; 1,2; 1,4$ .

Рис. 5.1 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 0,8$ ; Рис. 5.2 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 1,2$ ; Рис. 5.3 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 1,4$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток В”, з номерами рисунків розділу 5. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 5” поміщені у “Додаток до розділу 5”. Зокрема, першими у цьому “Додатку В” є Рис. 5.2 і 5.3.



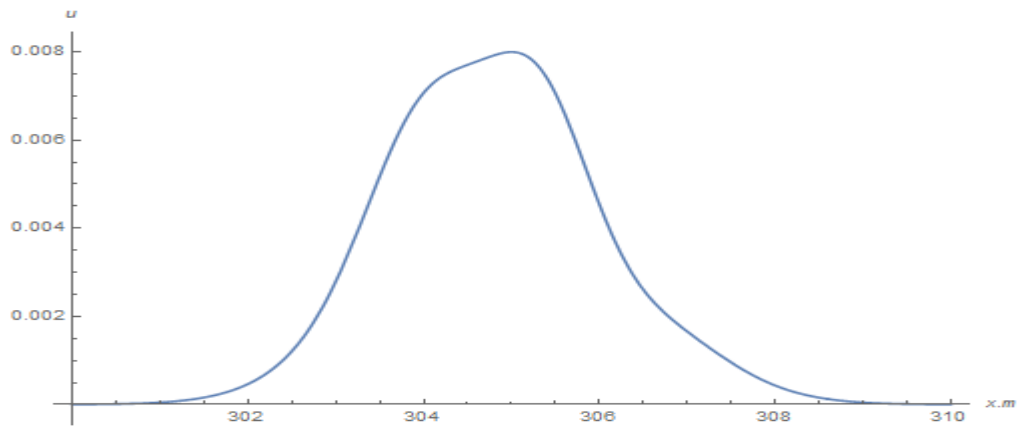


Рис. 5.1

На графіках рис. 5.1 спостерігається фаза еволюції, коли на верхній частині горба починає формуватися плато, права частина горба піднімається тоді як з часом ліва опускається .

Аналогічно, на графіках рис. 5.1 як і на графіку 5.2 виявляється лише подібна фаза еволюції, ширина горба не змінюється.

Таким чином, на графіках рис. 5.3 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному верхньому горбі починає формуватися плато, яке потім переростає у два горби, при чому з лівої частини горба формується другий горб у відємній частині графіка.

З графіків 5.1- 5.3 видно, що при зміні довжини підошви (яка вибиралась  $\sigma^o = 0,8; 1,2; 1,4.$ ) не змінюється відстань яку проходить поперечна хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється однаково для всіх трьох випадках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається приблизно однаково для всіх трьох значеннях довжини підошви, не рахуючи зміну ширини самого горба.

На рис. 5.4 - 5.6 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку 5.41 для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha_3 = -45,438; u_3^o = 8 \cdot 10^{-3}$  та три значення довжини підошви хвилі  $\sigma^o = 0,8; 1,2; 1,4.$

Рис. 5.4 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 0,8$ ; Рис. 5.5 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 1,2$ ; Рис. 5.6 відповідає довжині підошви  $\sigma^o = 1,4$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток В”, з номерами рисунків розділу 5. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 5” поміщені у “Додаток до розділу 5”. Зокрема, першими у цьому “Додатку В” є Рис. 5.5 і 5.6.

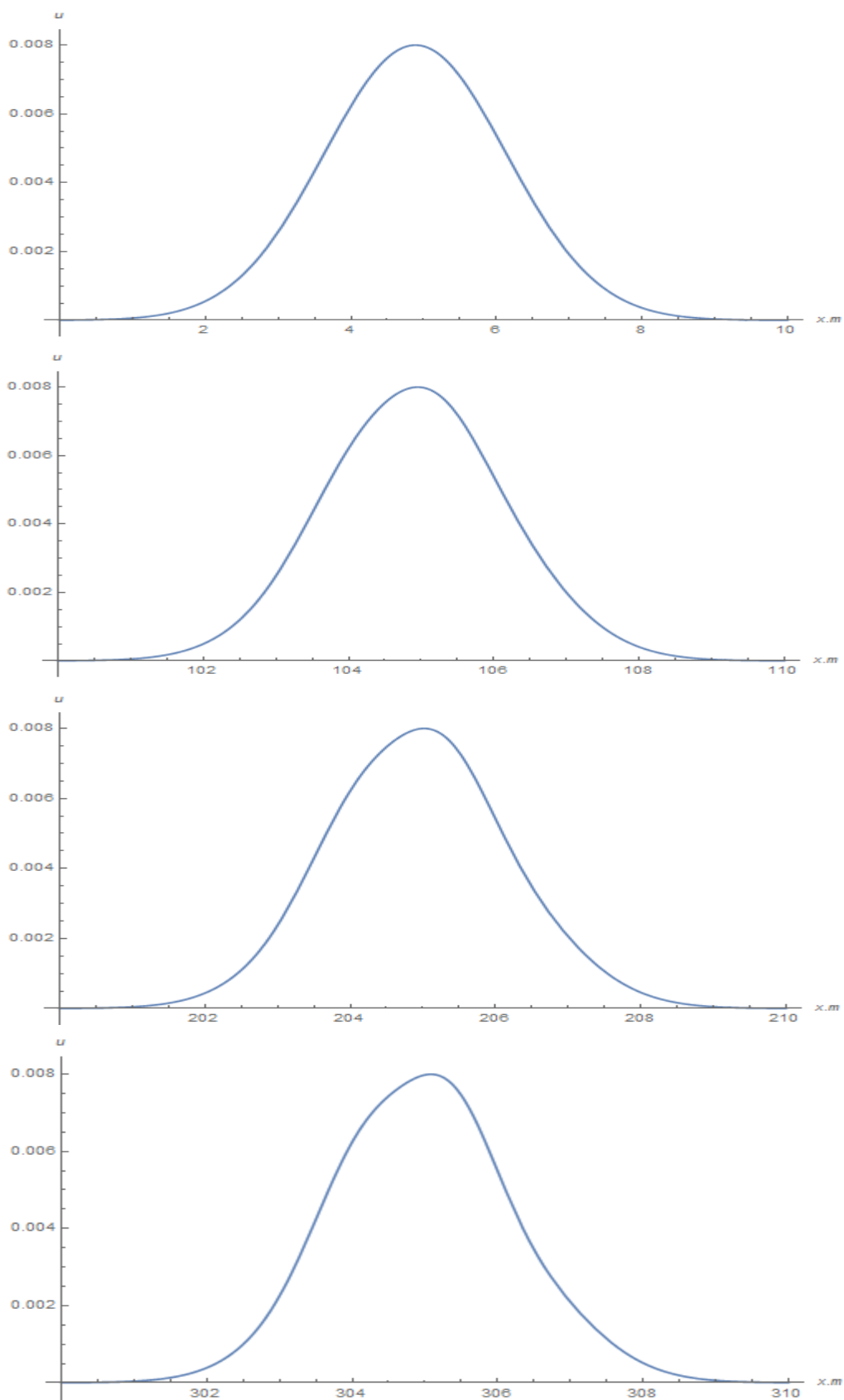


Рис. 5.4

На графіках рис. 5.4 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли починає тільки формуватися плато, амплітуда при цьому не змінна. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Аналогічно, на графіках рис. 5.5 як і на графіку 5.4 проявляється лише початкова фаза еволюції. Коли спотворення початкового профілю ледь помітно.

Таким чином, на графіках рис. 5.6 як і на всіх попередніх виявляється лише початкова фаза еволюції, коли на кожному графіку права частина горба піднімається а ліва починає западати, при цьому не змінюється амплітуда та ширина горба в залежності від пройденого хвилею шляху.

З графіків 5.4- 5.6 видно, що при зміні довжини підошви (яка вибиралась  $\sigma^o = 0,8; 1,2; 1,4.$ ) не змінюється відстань яку проходить хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється однаково для всіх трьох випадках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається приблизно однаково для всіх трьох значеннях довжини підошви.

Порівняння графіків для двох матеріалів (алюміній та мідь) для одних і тих же частот, показує - що дисторсія хвилі проявляється з різною швидкістю в залежності від виду матеріалу, але тут залежність амплітуди хвилі від властивостей матеріалу вже є нелінійною. Тому відмінність не є такою великою.

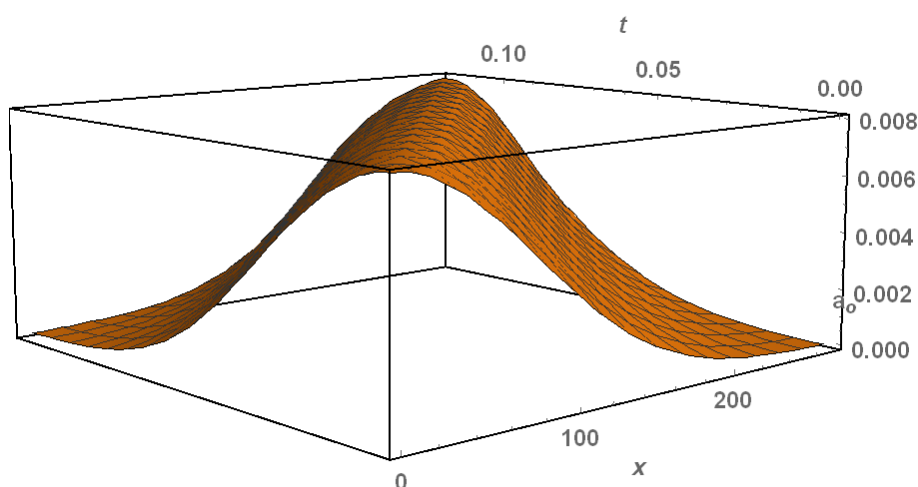


Рис. 5.7

Рис. 5.7 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-3}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $3 \cdot 10^2$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  м. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: мідь  $\alpha_3 = -45,438$ ;  $u_3^o = 8 \cdot 10^{-3}$  та довжина підошви хвилі  $\sigma^o = 0,0105$  Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю поодинокі поперечної хвилі.

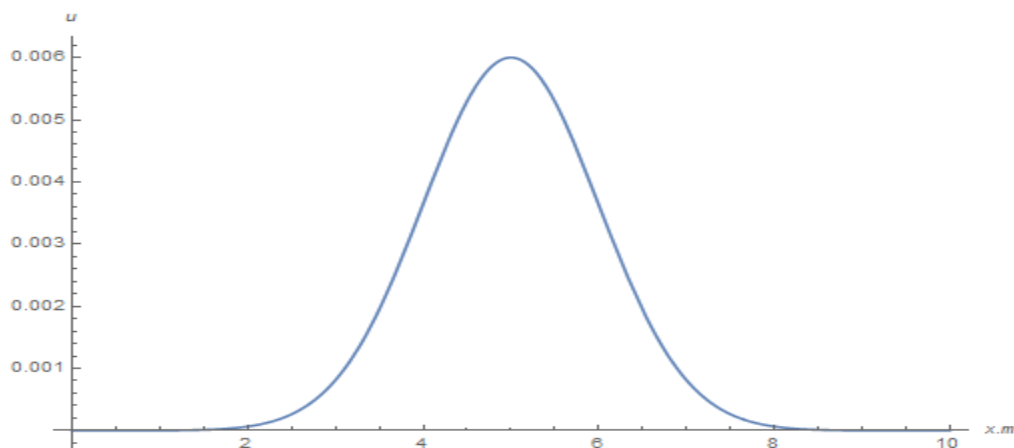
#### 5.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю

На рис. 5.8 - 5.13 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, сталь; фіксована довжина підошви та три значення максимальної амплітуди.

На рис. 5.8-5.13 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha_3 = -82,648$ ;  $\sigma^o = 1$  та три значення максимальної амплітуди  $u_3^o = 6 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 9 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 5.8 відповідає амплітуді  $u_3^o = 6 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 5.9 відповідає амплітуді  $u_3^o = 7 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 5.10 відповідає амплітуді  $u_3^o = 9 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток В”, з номерами рисунків розділу 5. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 5” поміщені у “Додаток до розділу 5”. Зокрема, першими у цьому “ДодаткуВ” є Рис. 5.9 і 5.10.





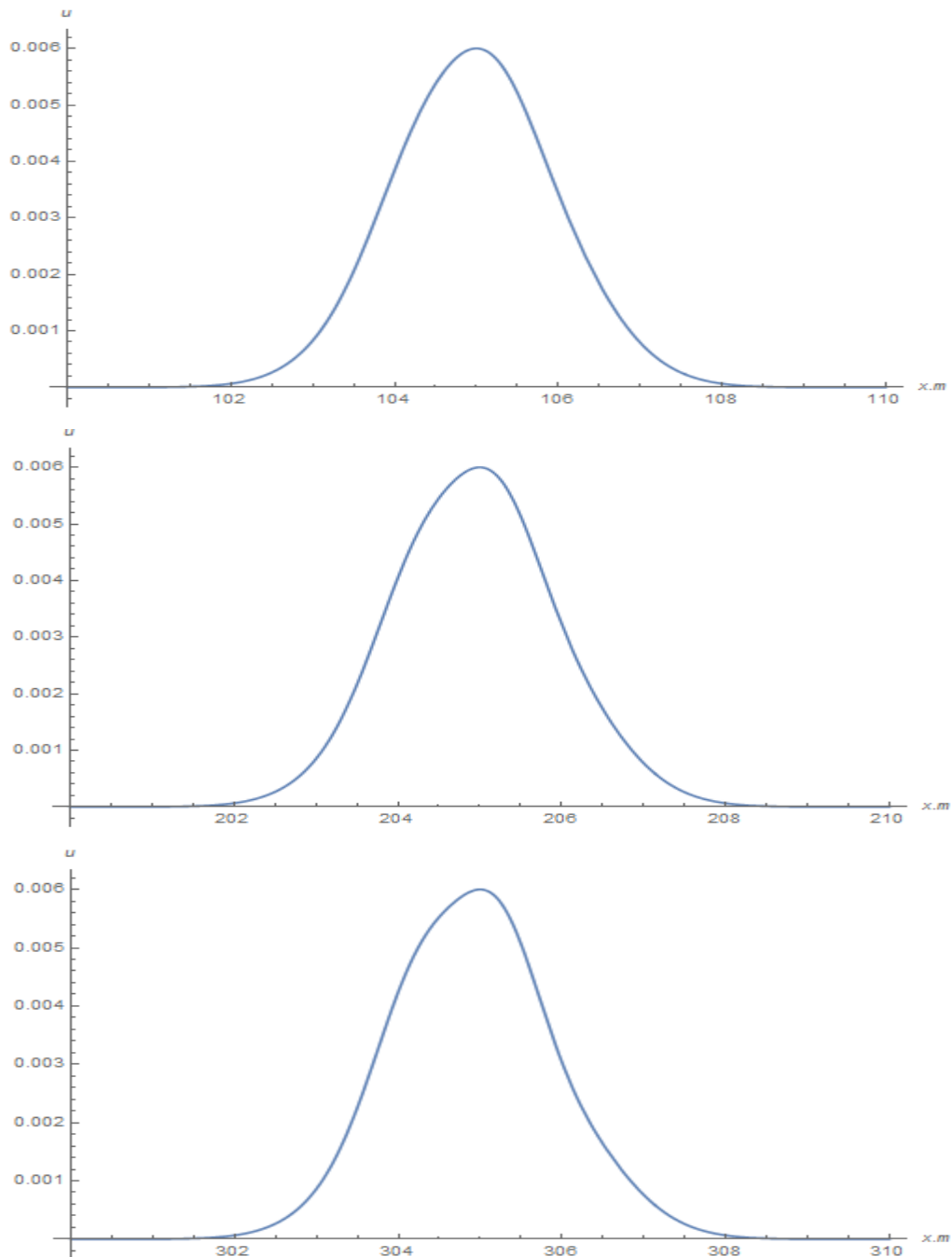


Рис. 5.8

На графіках рис. 5.8 виявляється лише початкова фаза еволюції, коли тільки права частина починає підніматися а ліва западати при цьому на кожному графіку спостерігається стала амплітуда та ширина горба.

На графіках рис. 5.9 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли на верхній частині горба починає формуватися плато. В порівнянні з попередніми графіками тут еволюція початкового профілю відбувається швидше.

Графіки рис. 5.10 відповідають більш швидшій дисторсії початкового профілю чим два попередні. На рис. 5.10 уже спостерігається плато після якого

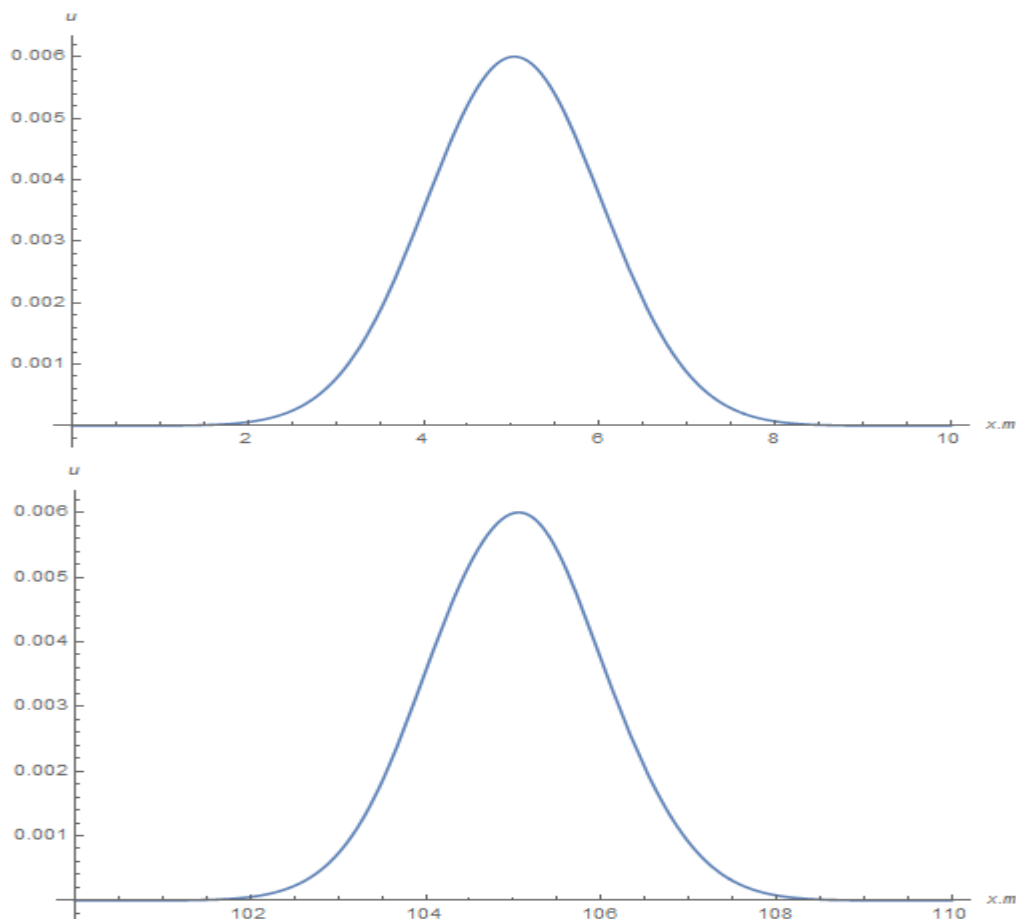
продовжується западати ліва частина та утворювати горб у відємній частині графіка симетричний додатній. Дисторсія яка спостерігається подібна тій, що спостерігалася коли змінювалась довжина хвилі, для однакових матеріалів.

З графіків 5.8- 5.10 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $u_3^o = 6 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 9 \cdot 10^{-3}$ ) змінюється швидкість спотворення профілю хвилі.

Графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha_3 = -54,816; \sigma^0 = 1$  та три значення максимальної амплітуди  $u_3^o = 6 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 9 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 5.11 відповідає амплітуді  $u_3^o = 6 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 5.12 відповідає амплітуді  $u_3^o = 7 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 5.13 відповідає амплітуді  $u_3^o = 9 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток В”, з номерами рисунків розділу 5. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 5” поміщені у “Додаток до розділу 5”. Зокрема, першими у “Додатку В” є Рис. 5.12 і 5.13.



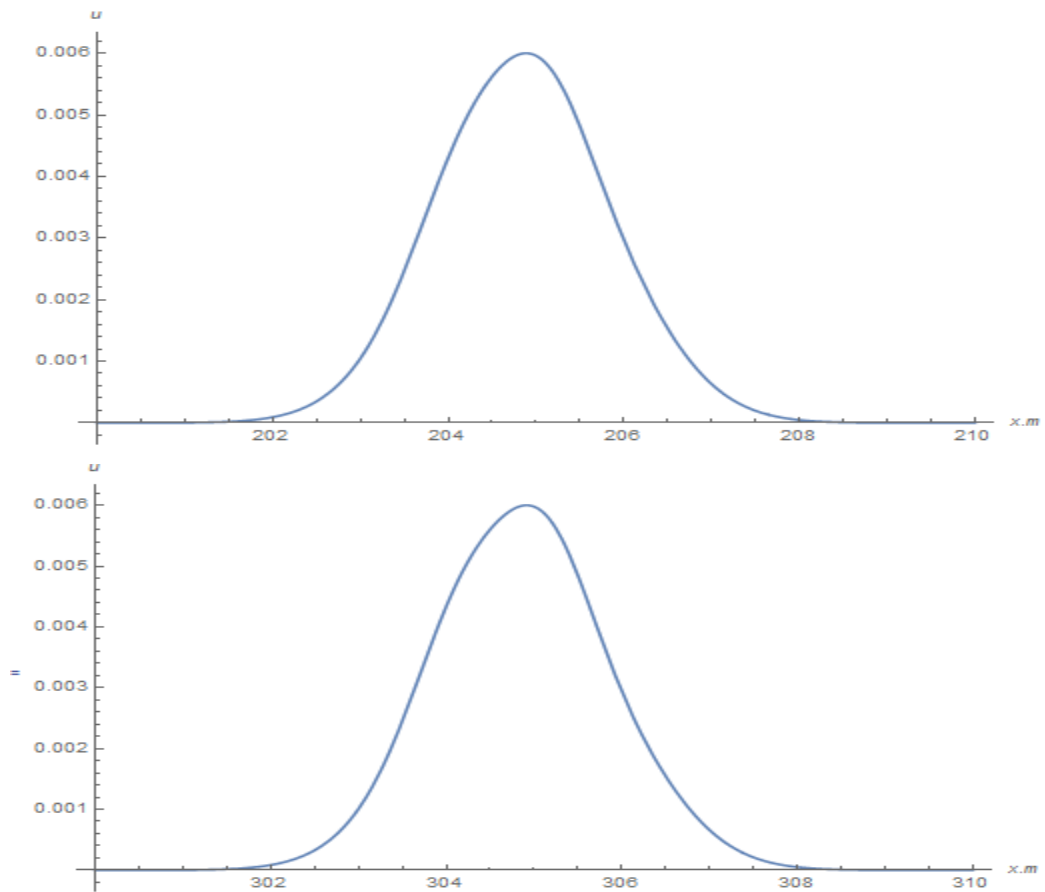


Рис. 5.11

З графіків рис. 5.11 спостерігається, що еволюція початкового профілю хвилі тільки починає відбуватися.

Отже на вище зазначених графіках рис. 5.12 поступово починає проявлятися початкова фаза еволюції, коли права частина горба починає поступово підніматися. Еволюція спотворення початкового профілю при однакових параметрах хвилі в порівнянні з попередніми графіками, коли розглядається матеріал алюміній є менш швидшою. Топто хвилі треба пройти різні відстані щоб дисторсія була однаковою.

Графіки Рис.5.13 демонструють більш розвинену еволюцію початкового дзвіноподібного профіля хвилі. Тут вже більш чітко формується плато, з якого далі уворються два симетричні горби але у діаметрально протилежних частинах графіка. Порівняння з відповідними графіками для алюмінія показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

З графіків рис. 5.11- 5.13 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $u_3^0 = 6 \cdot 10^{-3}, 7 \cdot 10^{-3}, 9 \cdot 10^{-3}$ ) змінюється швидкість спотворення початкового профілю хвилі.

Зміна амплітуди для вибраних двох матеріалів (алюміній та сталь) дає наочний вигляд спотворення початкового профілю хвилі. Чим більша амплітуда тим швидкість спотворення зростає адже вона нелінійно впливає на швидкість еволюції. Характеристика матеріалу також впливає на швидкість дисторсії, якщо сталь то швидкість спотворення меча, а якщо алюміній то більша.

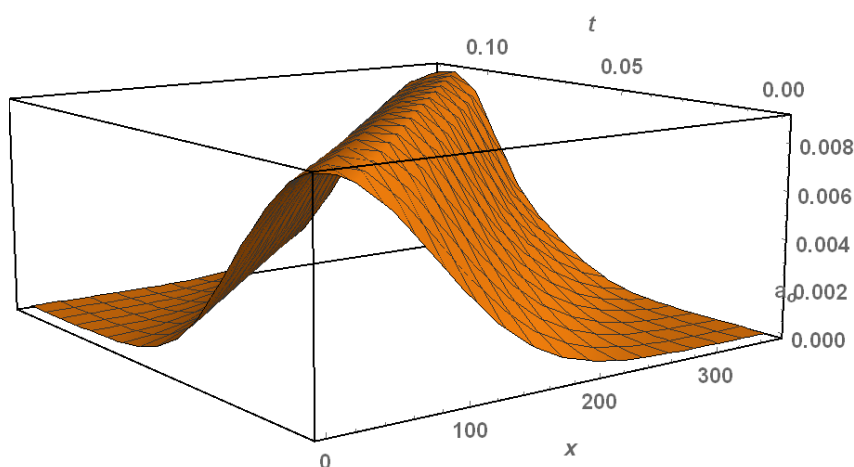


Рис. 5.14

Рис. 5.14 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-3}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $3 \cdot 10^2$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: сталь  $\alpha_3 = -54,816; \sigma^0 = 0.0125$  та значення максимальної амплітуди  $u_3^0 = 9 \cdot 10^{-3}$  Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю поперечної поперечної хвилі.

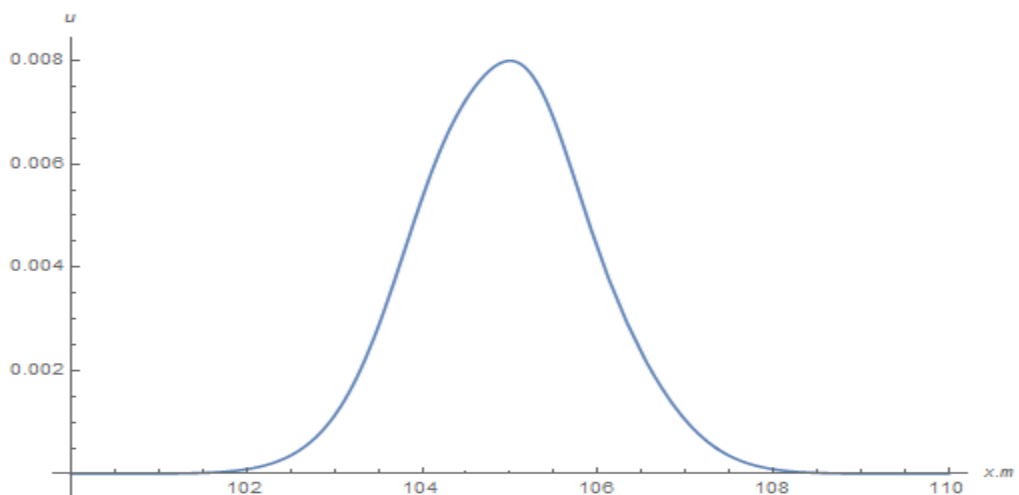
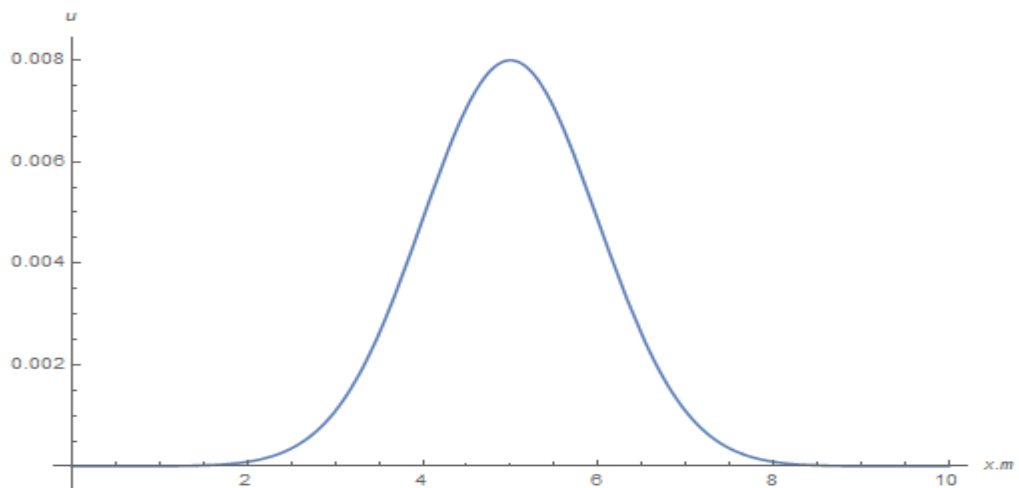
### 5.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю

Розглядаються три набори графіків рис. 5.15- 5.17, які показують вплив матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі. Кожний набір характе-

резується наступними характеристиками: алюміній,  $\alpha_3 = -82,648$ ,  $\sigma^0 = 1$ ,  $u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$  рис. 5.15; мідь  $\alpha_3 = -45,438$ ,  $\sigma^0 = 1$ ,  $u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$  рис. 5.16; сталь  $\alpha_3 = -54,816$ ,  $\sigma^0 = 1$ ,  $u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$  рис. 5.17.

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток В”, з номерами рисунків розділу 5. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 5” поміщенні у “Додаток до розділу 5”. Зокрема, першими у “Додатку В” є Рис. 5.16 і 5.17.

Графіки зміни параметрів матеріалу, що пройшла хвиля, для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha_3 = -82,648$ ,  $\sigma^0 = 1$ ,  $u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$ .



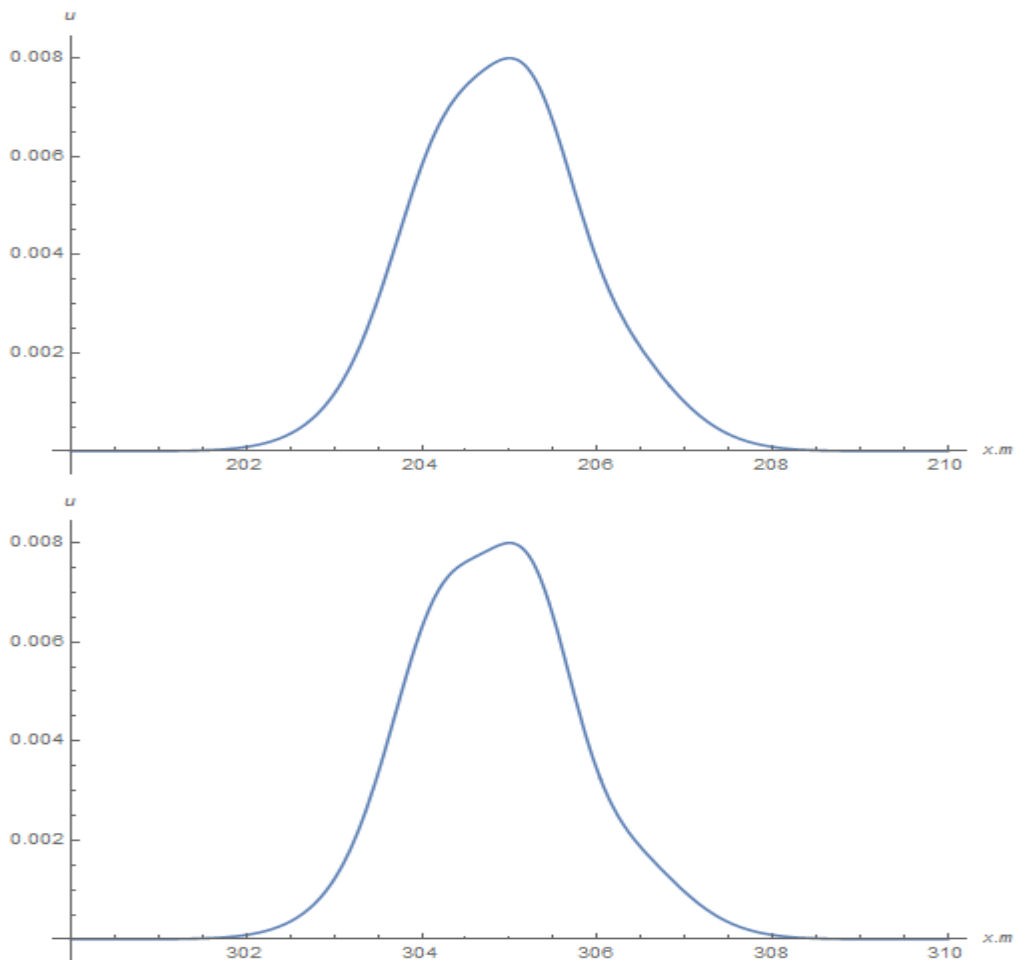


Рис. 5.15

Графіки рис. 5.15 демонструють розвинену еволюцію початкового дзвіно-подібного профіля хвилі. Тут вже чітко сформоване плато, з якого утворюються, два протилежно-симетричні горби.

Графіки зміни параметрів матеріалу з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: мідь  $\alpha_3 = -45,438$ ,  $\sigma^0 = 1, u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$ .

Графіки рис. 5.16 демонструють перший етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки змінюватися, тобто права частина горба починає тільки підніматися. В порівнянні з графіками рис. 5.15 дисторсія тут відбувається повільніше.

Графіки зміни параметрів матеріалу з шляхом, що пройшла хвиля, для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: сталь  $\alpha_3 = -54,816$ ,  $\sigma^0 = 1, u_3^0 = 8 \cdot 10^{-3}$ .

Графіки рис. 5.17 демонструють другий етап спотворення початкового профілю хвилі, коли ліва частина профілю починає тільки западатися, тобто утворювати плато. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію та міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки рис. 5.15-5.17 відповідають розширеним етапам дисторсії (спотворення) початкового дзвіноподібного профіля: підняття лівої частини горба, утворення плато, западання правої частини горба вниз.

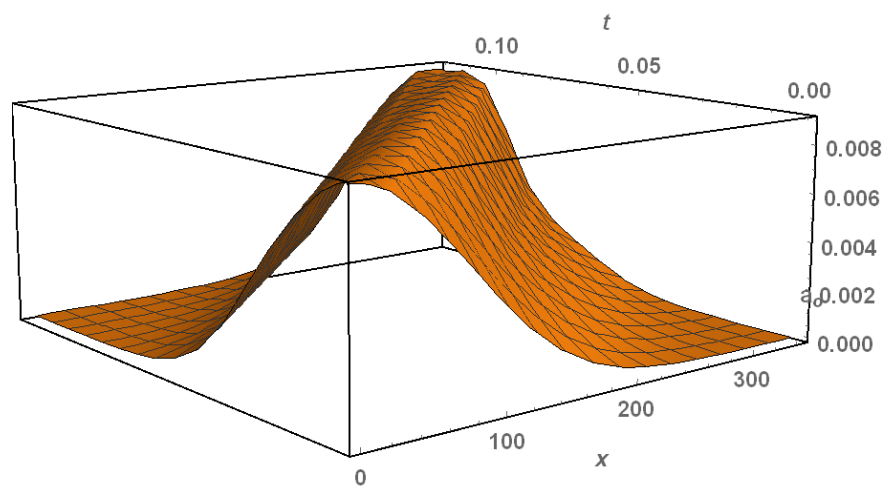


Рис. 5.18

Рис. 5.18 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t = 10^{-3}$  с, відстань, яку пройшла хвиля  $3 \cdot 10^2$  метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: алюміній  $\alpha_3 = -82,648$ ;  $\sigma^0 = 0.0125$  та значення максимальної амплітуди  $u_3^o = 9 \cdot 10^{-3}$ . Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю поодинокій поперечної хвилі.

Отже, всі рисунки свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі, хоча ширина горба та значення максимальної амплітуди залишаються не змінними. Порівняння зі зміною профіля дзвіноподібної поодинокій повздовжної хвилі показує, що дзвіноподібна поперечна хвиля змінює свій профіль дещо по-іншому. “Друга гармоніка” в загальному рівнянні (5.41)

для поперечної хвилі в третій степені ніж для повздожної хвилі, в загальному рівнянні (4.32), яка в другій степені. Така відмінність задає різну швидкість прояви дисторсії початкового профіля. Для поперечної хвилі швидкість менша ніж для повздожної хвилі. Також для повздожної хвилі “дзвін” в своїй верхній частині стає тоншим, тобто схили “дзвона” стають крутішими, верхня частина “дзвона” западається і утворюється два “дзвона”, для повздожної хвилі права частина “дзвона” піднімається, тоді як ліва опускається в діаметральну протилежну сторону у творюючи другий “дзвін”, але у відємній частині графіка.



**РОЗДІЛ 6**  
**ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ**  
**ПООДИНОКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ РАДІАЛЬНОЇ ХВИЛІ**  
**ЗМІЩЕННЯ**

**6.1. Постановка задачі, нелінійне хвильове рівняння**

Циліндричною радіальною хвилею зміщення називають в класичній лінійній теорії пружності хвилю, яка розповсюджується в безкінечному просторі з циліндричною круговою поверхнею, до граничної поверхні якої додається імпульс, що збуджує рух в радіальному напрямку. У найпростішому випадку імпульс рівномірний в просторі і гармонічний в часі. Циліндрична система координат  $Or\vartheta z$  вибирається таким чином, щоб вісь  $Oz$  збігалася з віссю порожнини і завдання про рух хвилі стає осесиметричним і залежним лише від радіуса  $r$  і часу  $t$ . Ненульовими є тільки радіальний зсув  $u_r$ , три компонента тензора напружень  $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}$ . Рівняння руху має вигляд [3,20]

$$\mu \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[ \frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right]_{,r} - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (6.1)$$

Зазвичай вводиться потенціал  $\Phi(r, t)$

$$u_r = \Phi_{,r} \quad (6.2)$$

і тоді рівняння (6.1) перетворюється в більш просте

$$\Phi_{,tt} - (c_L)^2 \left( \Phi_{,rr} + \frac{1}{r} \Phi_{,r} \right) = 0. \quad (6.3)$$

Основа на моделі Мурнагана нелінійне рівняння, що відповідає лінійному рівнянню (6.1), має вигляд [20]

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}), \quad (6.4)$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2 \quad (6.5)$$

$$\tilde{N}_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}, \quad \tilde{N}_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \tilde{N}_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu},$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \tilde{N}_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}.$$

Іншою задачею про гармонічну хвилю зміщення, яка розповсюджується від циліндричної порожнини радіуса  $r_o$  в наслідок прикладених гармонічним за часом навантажень  $\sigma^{rr}(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$  або гармонійного у часі зміщення  $u_r(r_o, t) = u_{r_o} e^{i\omega t}$  описана в [20] для рівняння (6.5) в рамках методу послідовних наближень з застосуванням лише перших двох апроксимацій.

Перша (лінійна) апроксимація описується аналітично через функцію Ханкеля першого роду і першого порядку

$$u_r^{(1)}(r, t) = u_r^o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \quad (6.6)$$

де  $u_r^o$  - заданий в умові на поверхні порожнини амплітудний множник

$$u_r^o = - \frac{p_o k_L}{k_L (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)},$$

$k_L = (\omega/v_L)$ ,  $v_L = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]}$  - хвильове число і фазова швидкість лінійної плоскої поздовжньої хвилі.

*Примітка 1.* Розв'язок (6.6) свідчить, що хвиля гармонічна в часі, а по просторовій координаті гармонічна лише асимптотично. Інтенсивність лінійної радіальної циліндричної хвилі зменшується з часом поширення внаслідок властивостей функції Ханкеля  $H_1^{(1)}$ .

Нелінійна хвиля в рамках перших двох апроксимацій аналітично представляється у вигляді [20]

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t). \quad (6.7)$$

Друге наближення визначається двома способами. Перший спосіб оснований на припущенні, що чотири з п'яти нелінійних складових в (6.5) включають множники  $r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}$  і тому зі збільшенням відстані від порожнини мало впли-

вають на остаточний результат. Іншими словами, рівняння (6.4) аналізується за умови

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r}. \quad (6.8)$$

Далі використовується наближене представлення функцій Ханкеля [10,16]

$$H_p^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left[z - \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)\right]} \left\{ 1 + i \frac{4p^2 - 1}{8z} - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots \right\}. \quad (6.9)$$

У підсумку, нелінійний розв'язок має вигляд

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_r^o e^{i\left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{k_L r}} \left( 1 - \frac{1}{8} \frac{i}{k_L r} - \frac{9}{128 (k_L r)^2} \right) + \frac{r (u_r^o)^2}{\pi k_L} (k_L)^2 N_1 e^{i2\left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \left[ -\frac{2}{3} \frac{1}{k_L r} + \frac{5}{18} \frac{i}{(k_L r)^2} + \frac{151}{288} \frac{1}{(k_L r)^3} \right]. \quad (6.10)$$

Другий спосіб враховує всі нелінійні складові в рівнянні (6.4) і використовує рекурентні формули для похідних функцій Ханкеля і факт, що добутки  $(H_0^{(1)}(k_L r))^2, (H_1^{(1)}(k_L r))^2, H_0^{(1)}(k_L r)H_1^{(1)}(k_L r)$  не являються розв'язком лінійного аналога рівняння (6.4). Відповідно за другим підходом розв'язок має вигляд

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = u_{r0} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \left\{ B_{00} [H_0^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{11} [H_1^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t}. \quad (6.11)$$

Отже показано, що починаючи з досить близької до порожнини відстані розв'язки (6.10) и (6.11) практично ідентичні. Це дає підстави для наступної зміни початкового нелінійного рівняння (6.4): проігноруємо тільки дві з п'яти нелінійних складових і збережемо справа в (6.4) вираз

$$-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2; \quad (6.12)$$

представимо рівняння (6.4) у вигляді

$$u_{r,rr} \left( 1 - \tilde{N}_1 u_{r,r} \right) + \frac{1}{r} u_{r,r} \left( 1 - \tilde{N}_4 u_{r,r} \right) - \frac{u_r}{r^2} \left( 1 - \tilde{N}_3 u_{r,r} \right) - \frac{1}{(c_L)^2} u_{r,tt} = 0;$$

прийmemo наближено, що  $\tilde{N}_1 \approx \tilde{N}_3 \approx \tilde{N}_4$  (в дійсності,  $\tilde{N}_1 > \tilde{N}_4 \square \tilde{N}_3$ ), і отримаємо остаточний вираз для нелінійного хвильового рівняння

$$(c_L)^2 (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (6.13)$$

Рівняння для циліндричної радіальної хвилі (6.13) має таку ж структуру, як рівняння для плоскої поздовжньої хвилі.

## 6.2. Про один підхід до аналізу нелінійного хвильового рівняння

### 6.2.1. Наближений метод знаходження розв'язку хвильового рівняння, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення

Припустимо, що початковий профіль хвилі описується наступною функцією  $u_r(r, t=0) = F(r)$  і одинична хвиля поширюється у вигляді

$$u_r(r, t) = F(a(r - vt)), \quad (6.14)$$

де швидкість хвилі визначається виразом

$$v = \sqrt{1 + \tilde{N}_1 u_{r,r}} c_L. \quad (6.15)$$

*Примітка 2.* Параметр  $a$  введений в представленні (6.14) з метою вибору довжини підосви одиночної хвилі - в залежності від значення цього параметра підосва хвилі може або звужуватися або розширюватися. У гармонічній хвилі такий параметр називають довжиною хвилі  $\lambda = (2\pi/k)$ .

Прийmemo обмеження в представленні (6.15)

$$\tilde{N}_1 u_{r,r} \square 1, \quad (6.16)$$

і представимо наближено розв'язок рівняння (6.13) у вигляді

$$u_r(r, t) \cong F \left[ a(r - c_L t) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right]. \quad (6.17)$$

Точність наближення (6.17) залежить від точності виконання умови (6.16), яке включає обмеження на два параметри: параметр  $\tilde{N}_1$  і градієнт зміщення  $u_{r,r}$ . Обмежимо аналіз класом конструкційних матеріалів, для яких модель Мурна-

гана досить прийнятна. При точності 0,1% обмеження (6.12) і (6.14) можна уточнити:  $|\alpha u_{1,1}| \leq 0,001$ ,  $|u_{1,1}| \leq 0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ .

Позначимо фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю наступним чином  $\sigma = a(r - c_L t)$  і додатковий малий параметр через  $\delta = -(1/2)\tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t$ , представимо розв'язок (6.17) (одиночну хвилю) у вигляді ряду Тейлора і обмежимо розгляд першими двома членами ряду через малість  $\delta$ . Тоді беручи до уваги рівність

$$u_{r,r}(r,t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_r = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \left(1 - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t\right) \approx F'_\sigma$$

розв'язку (6.17) можна надати вигляд

$$u_r(r,t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) \left[ \delta = -(1/2)\tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right] = F(\sigma) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t \left[ F'(\sigma) \right]^2. \quad (6.18)$$

Наближене представлення розв'язку (6.18) для одиночної циліндричної радіальної хвилі має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій  $F$  буде описувати виникнення (крім «першої гармоніки») «другої гармоніки» або подібних їй нових складових і збільшення амплітуди «другої гармоніки» з часом поширення хвилі.

Однак в даному випадку функція  $F(r)$  повинна бути розв'язком лінійного аналога нелінійного хвильового рівняння (6.13). Оскільки рух одиночної хвилі не передбачається гармонічним в часі, то циліндрична функція дійсного аргументу - функція Ханкеля  $H_\lambda(r)$  [10,12] – вже не є розв'язком рівняння

$$(c_L)^2 \left( u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0. \quad (6.19)$$

### **6.3. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної поодинокій хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда на основі отриманих автором наближених розв'язків**

6.3.1. Квадратично нелінійна хвиля з профілем у вигляді функції Макдональда. Аналіз на основі методу послідовних наближень і методу обмеження на градієнт зміщення. Основні формули.

Розв'язком рівняння (6.19), що має вигляд (6.14), є циліндрична функція

увного аргументу - функція Макдональда  $K_\lambda(r)$  [2,3].

Виберемо форму початкового профілю хвилі у вигляді функції  $K_0(r)$  і підставимо отриманий вираз в формулу (6.18)

$$u_r(r,t) \approx K_0(\sigma) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t [K_0'(\sigma)]^2. \quad (6.20)$$

Використавши відому формулу  $K_0'(\sigma) = -K_1(\sigma)$ , розв'язок (6.20) можна представити до наступного вигляду

$$u_r(r,t) \approx K_0(a(r - c_L t)) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t [K_1(a(r - c_L t))]^2. \quad (6.21)$$

Розв'язок (6.21) підтверджує основне припущення про поступову зміну профілю хвилі при її поширенні і також дозволяє зробити більш конкретний висновок про механізм зміни - для кожного конкретного значення часу і фази (конкретної точки на профілі хвилі), співвідношення лінійної і нелінійної донавок буде своїм.

Розглянемо формулу (6.21) і підставимо обрану початкову амплітуду  $a_0$ , яка для всіх випадків (матеріалу, довжини (підосви) хвилі) буде однакою. Тоді формула (6.21) при підстановці набуває наступного вигляду

$$u_r(r,t) \approx a^0 K_0(a(r - c_L t)) - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t (a^0)^2 [K_1(a(r - c_L t))]^2. \quad (6.22)$$

Підставляючи в (6.22) функції  $K_0$  і  $K_1$  отримаємо розв'язок:

$$u_r(r,t) \approx a^0 \sqrt{\frac{2}{\pi a(r - c_L t)}} e^{-a(r - c_L t)} - (1/2)\tilde{N}_1 a c_L t (a^0)^2 \times \left[ \left( \frac{1}{2\sqrt{(a(r - c_L t))^3}} + \frac{1}{\sqrt{a(r - c_L t)}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a(r - c_L t)} \right]^2 \quad (6.23)$$

З вигляду розв'язку (6.23) випливають дві особливості: воно описує зміну початкового профілю одиночної хвилі (внаслідок прямої залежності нелінійної складової від часу) і «розпливання» початкового профілю (внаслідок присутності нелінійної складової).

При побудові графіка хвилі зсуву, яка поширюється від циліндричної порожнини радіуса  $r_0$ , врахований факт, що повинна виконуватися умова  $r \geq r_0$ .

### 6.3.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три металічні конструкційні матеріали з такими параметрами в рамках моделі Мурнагана (система CI) [18]:

Алюміній –  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 5,2 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 2,7 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -0,65 \cdot 10^{10}, B = -2,05 \cdot 10^{11}, C = -3,7 \cdot 10^{11}; c_L = 6,27 \cdot 10^3;$$

$$\alpha = -16,81;$$

Мідь –  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 10,7 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 4,8 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -2,8 \cdot 10^{11}, B = -1,72 \cdot 10^{11}, C = -2,4 \cdot 10^{11}; c_L = 4,77 \cdot 10^3; \alpha = -7,207;$$

Сталь –  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $\lambda = 9,4 \cdot 10^{10}$ ,  $\mu = 7,9 \cdot 10^{10}$ ,

$$A = -3,25 \cdot 10^{11}, B = -3,1 \cdot 10^{11}, C = -8,0 \cdot 10^{11}; c_L = 5,68 \cdot 10^3; \alpha = -13,31.$$

Для одиночної хвилі з профілем у вигляді функцій Макдональда (яка є функцією кінцеві ваги) приймемо припущення, що довжиною підшви хвилі є інтервал (відстань), для якої площа під графіком початкового профілю хвилі поза цим інтервалом є малою.

При представленні профілю функції Макдональда у вигляді  $u_r(ar) = K_0(ra)$  параметр  $a$  визначає довжину підшви. Для всіх трьох матеріалів початкова підшва обрана однаковою і варіантів вибору три:  $a = \{5; 15; 30\}$ .

Початкова амплітуда вибиралася для кожного матеріалу і для кожної початкової довжини (підшви) хвилі також в трьох варіантах.

### 6.3.3. Аналіз впливу величини підшви хвилі на спотворення початкової форми профілю

Початковий профіль поодинокі хвилі приймається у вигляді  $u_r(r, t) =$

$$= a^o \sqrt{\frac{2}{\pi a(r - c_L t)}} e^{-a(r - c_L t)}. \text{ Далі чисельно аналізуються формула (6.23) для хвилі в}$$

довільний момент часу, отримана методом, що ґрунтується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення.

При побудові графіка хвилі зсуву, повинна виконуватися умова  $r \geq r_o$ , де  $r = 0.01$ . Дане значення вибиралось як найбільш відповідне для теоретичного обчислення.

За цією формулою далі показані двовимірні графіки з координатами "зміщення  $u_r$  - пройдена хвилею відстань  $r$ ". Всього взято 27 наборів параметрів:

3 метали – алюміній, мідь, сталь;

3 варіанти параметра хвилі  $a = 5; 15; 30$ , що визначає довжину подошви хвилі

3 варіанти максимальної амплітуди –  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}$ ;

В залежності від параметрів конкретного набору графіки відрізняються діапазоном амплітуди хвилі і відстані яку пройшла хвиля.

Вказані перші два графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно. На третьому графіку зображення двох графіків першого і другого тобто початковий профіль та профіль з найбільш розвиненою еволюцією.

Довжина хвилі вибиралась так, щоб після відстані яку пройшла хвиля, що відповідає десяти довжинам хвилі уже починає проявлятися дисторсія початкового профілю хвилі.

Параметри для тривимірних графіків підібрані таким чином, щоб наглядніше продемонструвати еволюцію хвилі.

На рис. 6.1 - 6.6 графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній, мідь; фіксована довжина подошви та три значення частоти.

На рис. 6.1 - 6.3 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (6.23) для циліндричної радіальної хвилі



профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: алюміній  $\tilde{N}_1 = -16,811$ ;  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та три значення параметрів що відповідають довжині підошви хвилі  $a = 5$ ; 15; 30.

Рис. 6.1 відповідає довжині підошви  $a = 5$ ; Рис. 6.2 відповідає довжині підошви  $a = 15$ ; Рис. 6.3 відповідає довжині підошви  $a = 30$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Г”, з номерами рисунків розділу 6. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 6” поміщені у “Додаток до розділу 6”. Зокрема, у цьому “Додатку Г” внесені Рис. 6.2 і 6.3.

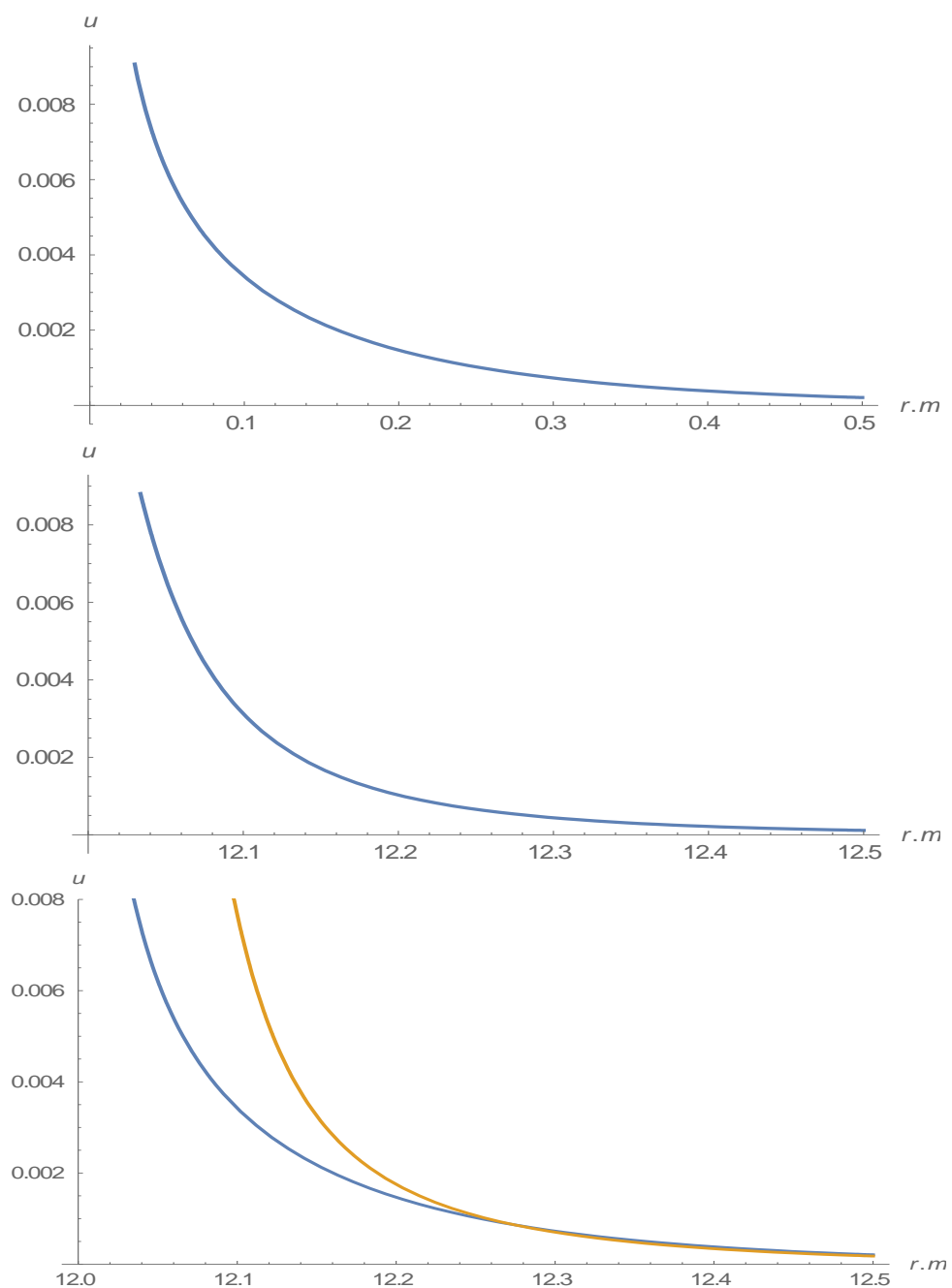


Рис. 6.1

На графіках рис. 6.1 спостерігається фаза еволюції, коли вітка відхиляється від початкового стану на значну відстань.

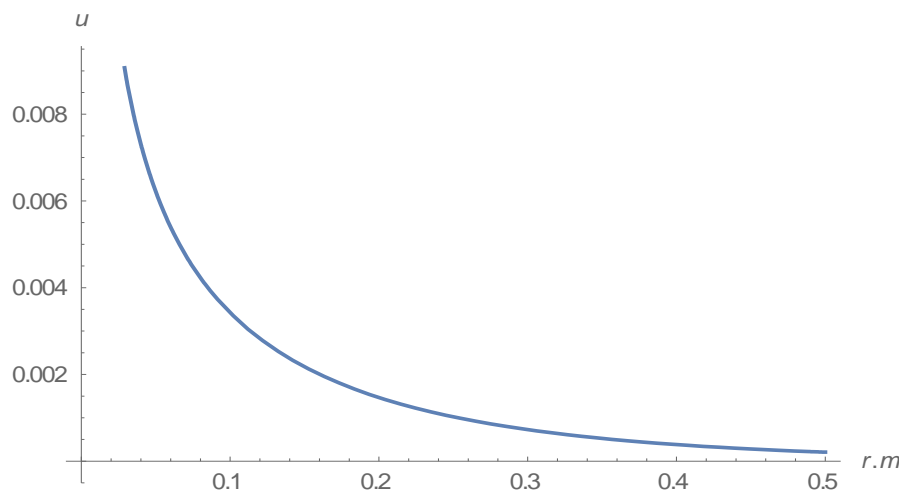
Аналогічно, на графіках рис. 6.1 як і на графіку рис. 6.2 виявляється подібна фаза еволюції, тільки на рис. 6.2 величина зміни зміщення віток (відстань яку пройшла хвиля) відповідно менша.

На рис. 6.3 відхилення відбувається не так швидко як на двох попередніх рисунках. Тут спостерігається початкова фаза еволюції, коли вітка відхиляється від початкового стану на незначну відстань.

З графіків 6.1- 6.3 видно, що при зміні довжини підошви (яка вибиралась  $a = 5; 15; 30.$ ) наглядно змінюється відстань яку проходить циліндрична радіальна хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється для всіх трьох випадках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається з різною швидкістю для всіх трьох значеннях довжини підошви.

На рис. 6.4 - 6.6 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку 6.23 для циліндричної радіальної поодинокій хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: мідь  $\tilde{N}_1 = -7,207$ ;  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та три значення параметрів що відповідають довжині підошви хвилі  $a = 5; 15; 30$ . Рис. 6.4 відповідає довжині підошви  $a = 5$ ; Рис. 6.5 відповідає довжині підошви  $a = 15$ ; Рис. 6.6 відповідає підошви  $a = 30$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Г”, з номерами рисунків розділу 6. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 6” поміщені у “Додаток до розділу 6”. Зокрема, у цьому “Додатку Г” внесені Рис. 6.5 і 6.6.



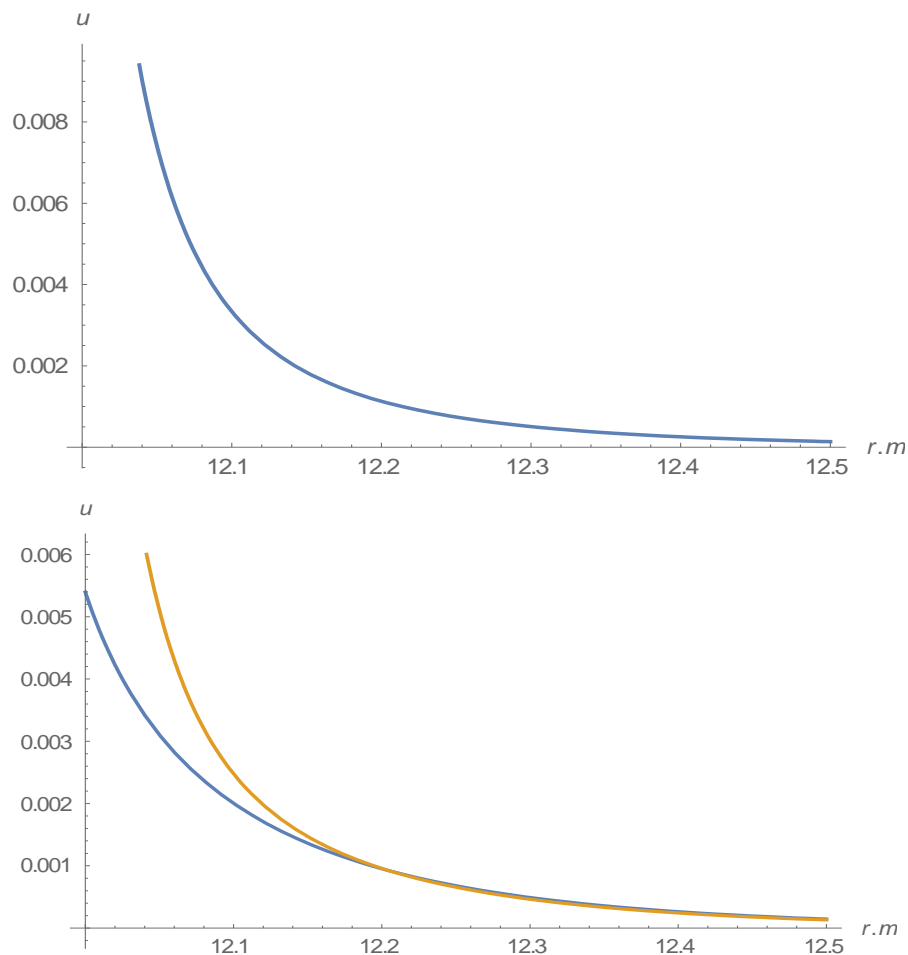


Рис. 6.4

На графіках рис. 6.4 спостерігається фаза еволюції, коли відхилення достатньо велике в порівнянні з початковим станом, амплітуда при цьому змінюється. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею.

На графіках рис. 6.5 як і на графіку 6.4 проявляється дисторсія але фаза еволюції різна.

На рис. 6.6 відхилення відбувається не так швидко як на двох попередніх рисунках. Тут спостерігається початкова фаза еволюції, коли вітка відхиляється від початкового стану на незначну відстань.

З графіків 6.4- 6.6 видно, що при зміні довжини підшви (яка вибиралась  $a = 5; 15; 30.$ ) наглядно змінюється відстань яку проходить циліндрична радіальна хвиля за однаковий час. Дисторсія проявляється для всіх трьох ви-

падках, тобто процес еволюції початкового профілю відбувається з різною швидкістю для всіх трьох значеннях довжини підошви. Чим більша підошва тим відхилення менше.

Порівняння графіків для двох матеріалів (алюміній та мідь) для одних і тих же частот, показує - що дисторсія хвилі проявляється з різною швидкістю в залежності від виду матеріалу, але тут залежність амплітуди хвилі від властивостей матеріалу вже є нелінійною. Тому відмінність не є такою великою.

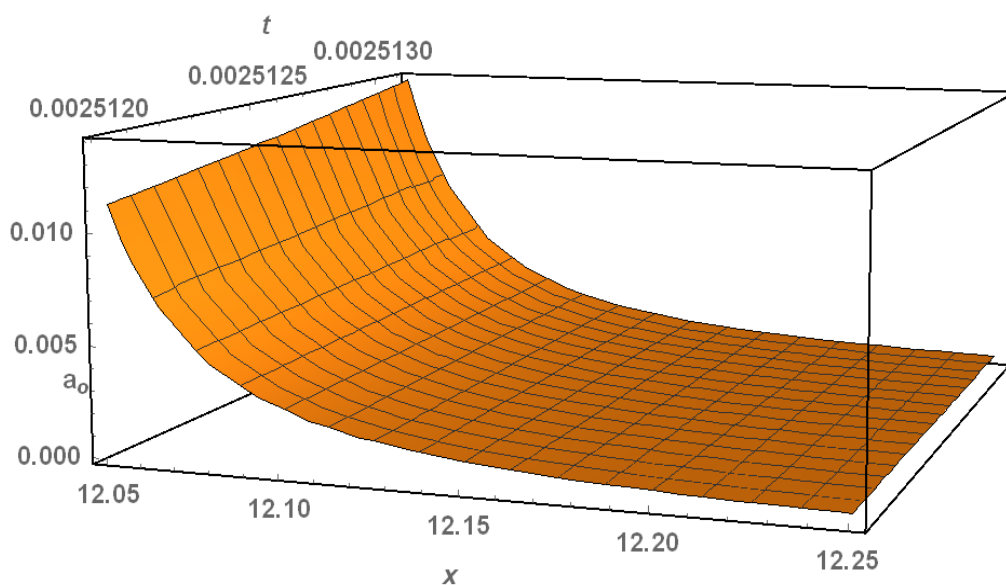


Рис. 6.7

Рис. 6.7 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля 12 метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: алюміній  $\tilde{N}_1 = -16,811$ ;  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та довжина підошви хвилі  $a = 15$  Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю циліндричної радіальної хвилі зміщення.

#### 6.3.4. Аналіз впливу величини початкової максимальної амплітуди на спотворення початкової форми профілю

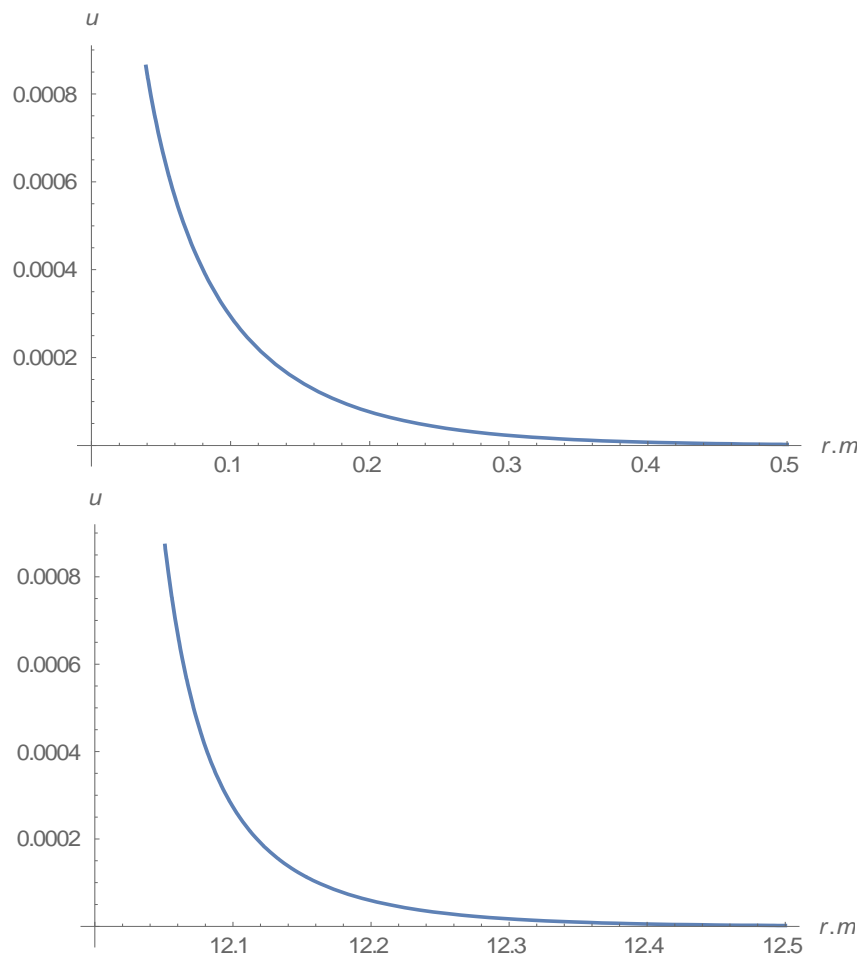
На рис. 6.8 - 6.13 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають наступним значенням параметрів: матеріал алюміній,

сталь; фіксована довжина підошви та три значення максимальної амплітуди.

На рис. 6.8-6.13 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: алюміній  $\tilde{N}_1 = -16,811; a = 10$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 6.8 відповідає амплітуді  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 6.9 відповідає амплітуді  $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 6.10 відповідає амплітуді  $a_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Г”, з номерами рисунків розділу 6. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 6” поміщенні у “Додаток до розділу 6”. Зокрема, у цьому “Додатку Г” внесені Рис. 6.9 і 6.10.



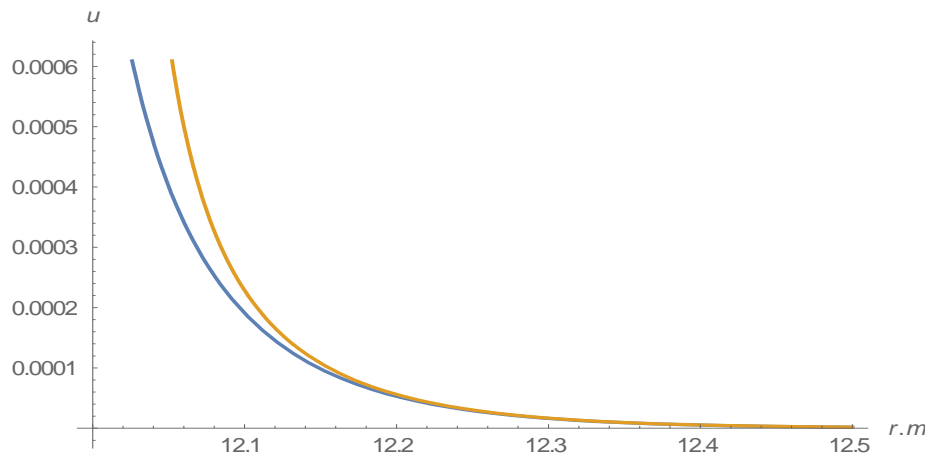


Рис. 6.8

На графіках рис. 6.8 виявляється лише незначне відхилення вітки від початкового стану.

На графіках рис. 6.9 аналогічно як і на графіках рис. 6.8 спостерігається лише початкова фаза еволюції, коли відхилення вітки від початкового стану незначне.

Графіки рис. 6.10 відповідають більш швидшій дисторсії початкового профілю чим два попередні. Дисторсія яка спостерігається подібна тій, що спостерігалася коли змінювалася довжина хвилі, для однакових матеріалів.

З графіків 6.8- 6.10 видно,що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}$ ) змінюється швидкість спотворення профілю хвилі. Чим більша амплітуда тим більш наглядно проявляється дисторсія початкового профілю циліндричної радіальної хвилі.

Графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: сталь  $\tilde{N}_1 = -13,31; a = 10$  та три значення максимальної амплітуди  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}$ .

Рис. 6.11 відповідає амплітуді  $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 6.12 відповідає амплітуді  $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ ; Рис. 6.13 відповідає амплітуді  $a_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ .

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Г”, з номерами рисунків розділу 6. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 6” поміщенні у

“Додаток до розділу 6”. Зокрема, у цьому “Додатку Г” внесені Рис. 6.12 і 6.13.

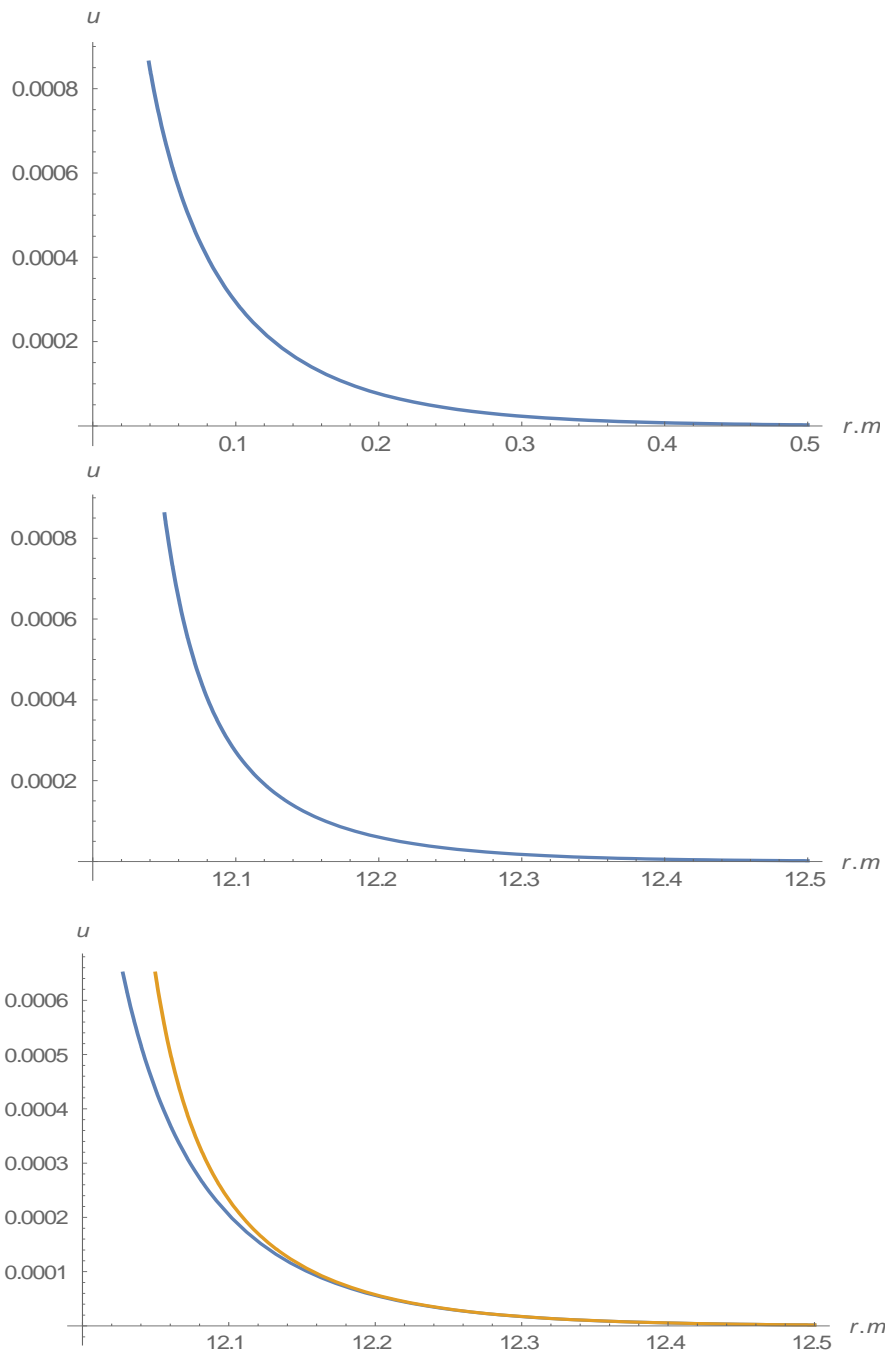


Рис. 6.11

З графіків рис. 6.11 спостерігається, що еволюція початкового профілю хвилі тільки починає відбуватися.

Отже на вище зазначених графіках рис. 6.12 поступово починає проявлятися початкова фаза еволюції, коли відхилення початкового профілю хвилі вже більш помітніше ніж на попередніх графіках. Еволюція спотворення початкового профілю при однакових параметрах хвилі в порівнянні з попередніми графіками, коли розглядається матеріал алюміній є менш швидшою. Тобто

хвилі треба пройти різні відстані щоб дисторсія була однаковою. При цьому відбувається зміна максимального значення амплітуди.

Графіки Рис.6.13 демонструють більш розвинену еволюцію початкового профіля хвилі у вигляді функції Макдональда. Порівняння з відповідними графіками для алюмінія показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

З графіків рис. 6.11- 6.13 видно, що при зміні максимальної амплітуди (яка вибиралась ( $a_0 = 1 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3}; 8 \cdot 10^{-3}$ )) змінюється швидкість спотворення початкового профілю хвилі.

Зміна амплітуди для вибраних двох матеріалів (алюміній та сталь) дає наочний вигляд спотворення початкового профіля хвилі. Чим більша амплітуда тим швидкість спотворення зростає адже вона нелінійно впливає на швидкість еволюції. Характеристика матеріалу теж впливає на швидкість дисторсії, якщо сталь то швидкість спотворення меча, а якщо алюміній то більша.

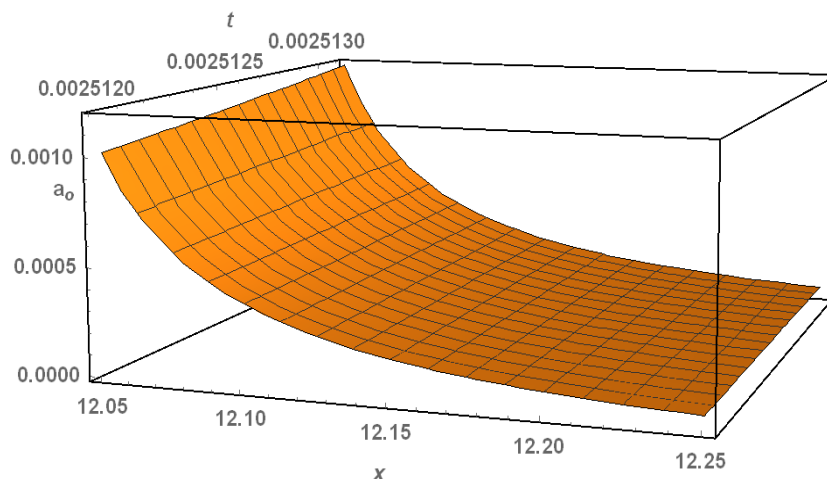


Рис. 6.14

Рис. 6.14 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля 12 метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  у метрах. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: сталь  $\tilde{N}_1 = -13,31; a_0 = 1 \cdot 10^{-3}$  та довжина підосви хвилі  $a = 10$  Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю циліндричної радіальної хвилі.

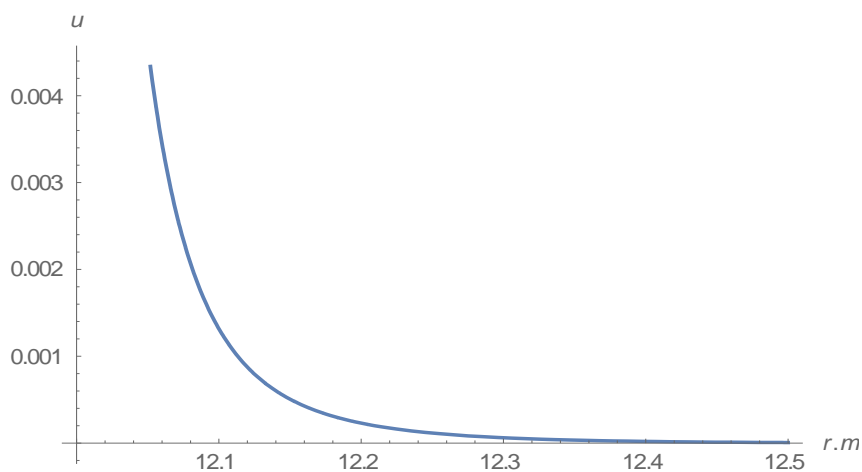
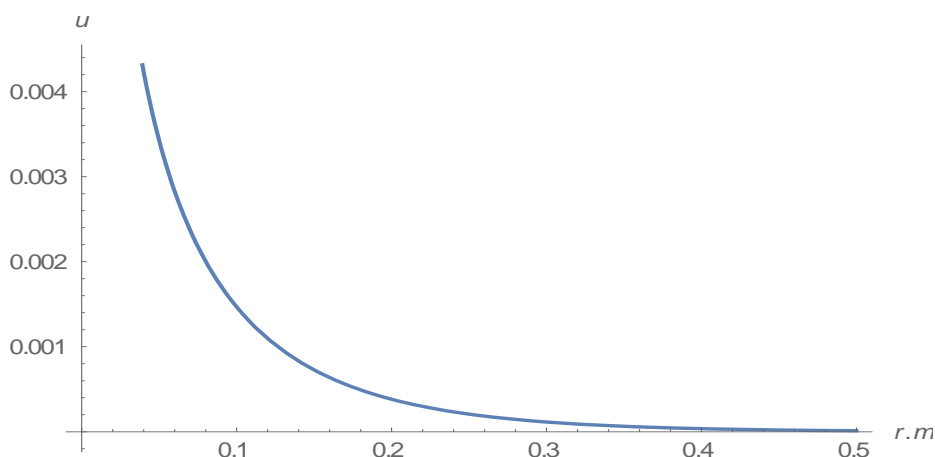


### 6.3.5. Аналіз впливу параметрів матеріалу на спотворення початкової форми профілю

Розглядаються три набори графіків рис. 6.15- 6.17, які показують вплив матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі. Кожний набір характеризується наступними характеристиками: алюміній,  $\tilde{N}_1 = -16,811$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 6.15; мідь  $\tilde{N}_1 = -7,207$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 6.16; сталь  $\tilde{N}_1 = -13,31$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  рис. 6.17.

Далі частина рисунків поміщена у “Додаток Г”, з номерами рисунків розділу 6. Тому у “Додатку” введена своя схема і рисунки “Розділу 6” поміщені у “Додаток до розділу 6”. Зокрема, у цьому “Додатку Г” внесені Рис. 6.16 і 6.17.

Графіки зміни параметрів матеріалу, що пройшла хвиля, для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: алюміній  $\tilde{N}_1 = -16,811$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .



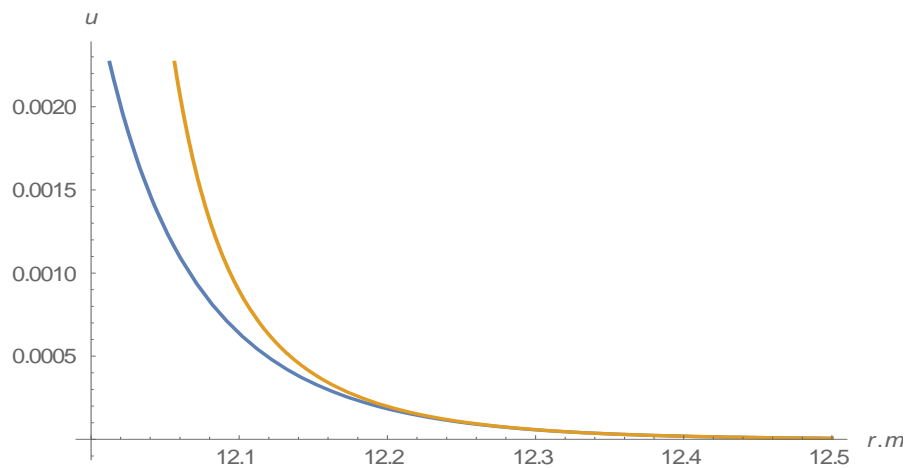


Рис. 6.15

Графіки рис. 6.15 демонструють розвинену еволюцію початкового профіля хвилі. Тут вже чітко спостерігається як значно відхиляється вітка графіка в порівнянні з початковим станом.

Графіки зміни параметрів матеріалу, що пройшла хвиля, для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: мідь  $\tilde{N}_1 = -7,207$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Графіки рис. 6.16 демонструють початковий етап спотворення початкового профілю хвилі, коли профіль починає тільки змінюватися. В порівнянні з графіками рис. 6.15 дисторсія тут відбувається повільніше.

Графіки зміни параметрів матеріалу, що пройшла хвиля, для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: сталь  $\tilde{N}_1 = -13,31$ ,  $a = 10$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Графіки рис. 6.17 відповідають більш розвинутішому етапу спотворення початкового профілю хвилі, коли відхилення вітки графіка є більш нагляднішим. Порівняння з відповідними графіками для алюмінію та міді показує, що відмінність полягає лише в тому, що одному і тому стану еволюції відповідають різні відстані, пройдені хвилею. У решті інших характеристиках хвилі подібні.

Графіки рис. 6.15-6.17 відповідають розширеним етапам дисторсії (спотворення) початкового профілю. З поданих графіків випливає, що залежність

спотворення початкового профілю безпосередньо залежить від матеріалів у якому поширюється циліндрична радіальна хвиля.

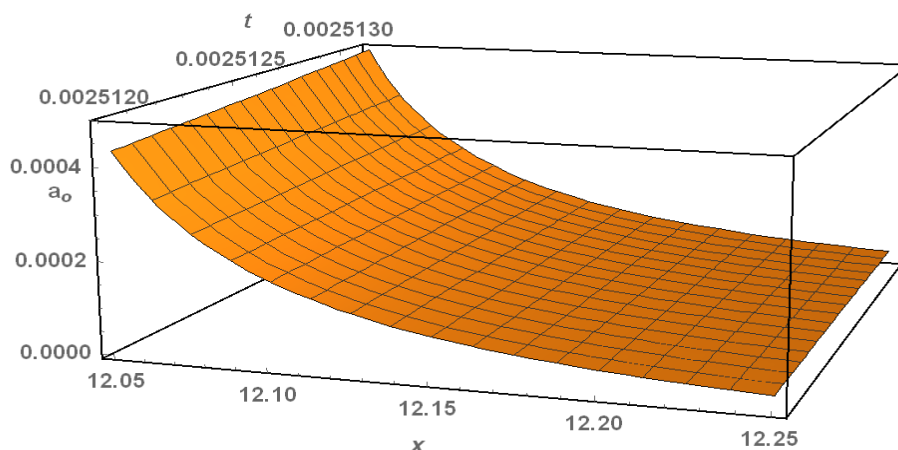


Рис. 6.18

Рис. 6.18 є тривимірний з такими значеннями основних величин: час  $t=10^{-5}$  с, відстань, яку пройшла хвиля 12 метрів, а також максимальне значення амплітуди  $10^{-3}$  м. Даний графік відповідає наступним значенням параметрів: мідь  $\tilde{N}_1 = -7,207$ ;  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та довжина підшви хвилі  $a = 10$  Він показує більш наглядну еволюцію початкового профілю циліндричної радіальної хвилі зміщення.

Отже, всі рисунки свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі, та значну зміну значення максимальної амплітуди.

З вище зазначених рисунках можна зробити наступні висновки: При проходженні радіальної циліндричної хвилі деякої відстані відбувається зміна початкового профілю, тобто наглядно спостерігається ефект дисторсії хвилі. В залежності від зміни параметрів хвилі змінюється швидкість дисторсії початкового профілю хвилі.

Отже можна зробити загальний висновок, що аналогічно що для плоскої поздовжньої хвилі, що для плоскої поперечної хвилі для різних профілів, спостерігається один і той же хвильовий ефект - дисторсія початкового профілю хвилі. Для кожної окремо вибраної хвилі швидкість дисторсії різна. Отже розв'язок (6.23) описує плоску циліндричну радіальну хвилю у повному обсязі аналогічно до двох попередніх випадках.

## ВИСНОВКИ

1. Запропоновано постановку ряду нових хвильових задач нелінійної теорії пружності, які мають в основані введення потенціалу Мурнагана, і проведено аналіз отриманих хвильових рівнянь, що дозволило виявити теоретично певні нелінійні ефекти поширення поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль.
2. Застосовано і розвинуто наближений підхід до розв'язання нелінійних хвильових рівнянь, що дало змогу чисельно проаналізувати поставлені задачі про поширення хвиль.
3. Знайдено три типи початкового профілю поодинокі хвилі, які є близькими до спостережуваних в експериментах профілів хвиль в матеріалах і які описуються аналітично функціями, відомими з математичної фізики.
4. Проведено порівняльний аналіз нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих розв'язків, який включає дослідження впливу частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю. З аналізу розв'язків, отриманих методами 1 і 2 випливає, що якісно розв'язки є близькими, а відмінності між швидкостями еволюції викликані відмінностями в обмеженнях, прийнятих в цих методах.
5. Показано, що отримані методами 1 і 2 розв'язки для поздовжніх гармонічних хвиль в рамках перших двох наближень задовільно описують початковий етап еволюції початкового профілю хвилі.
6. Показано, що вплив нелінійності на поширення поздовжніх поодиноких хвиль з початковим гармонічним профілями (у вигляді косинусоїдальної функції), дзвіноподібним профілем (у вигляді функції Гауса) та профілем у вигляді функції Уїттекера є суттєвим. Також спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється

симетрично, тоді як несиметричний профіль у вигляді функції Уіттекера деформується несиметрично.

7. Розв'язано задачу про поширення поперечної хвилі з дзвіноподібним профілем та зроблено порівняльний аналіз з задачею про поширення поздовжньої хвилі аналогічного профіля. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, де, зокрема, спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється симетрично у випадку поздовжньої хвилі і несиметрично у випадку поперечної, а відмінності в еволюції поперечної та поздовжньої хвиль викликані відмінностями моделі нелінійного деформування: вона є кубічна для поперечного та квадратична для поздовжнього.
8. Розв'язано задачу про поширення циліндричної хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, та проаналізовано еволюцію несиметричного профіля.
9. Проведено теоретичний і числовий аналіз нелінійних поздовжніх, поперечних та циліндричних поодиноких хвиль з різними початковими профілями, в межах якого вивчено вплив довжини підшви хвилі, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію профілю хвилі та показано, що вибір моделі нелінійного деформування і початкових параметрів хвилі є суттєвим в описі еволюції хвилі.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — Москва: Наука, 1979.
2. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. — М.: Высшая школа. 1976. — 272 с.
3. *Андронов А.А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука. 1981. — 568с.
4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука. 1984. — 384с.
5. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. — 320 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1974.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены Справочная математическая библиотека М. Физматгиз 1966 г. 296 с.
8. *Бреховских Л.М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн).- М.: Наука. 1982. — 335с.
9. *Викторов И. А.* Об эффектах второго приближения при распространении волн в твердых телах // Акуст. журн. — 1963. — 9.№2. — С.296 — 298.
10. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике в технике. — М.: Наука. 1996. — 168с.
11. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука. 1981. — 288с.
12. *Виленкин Н. Я.* “Многочлены Лагерра, функции Уиттекера и представления группы окаймленных матриц”, *Матем. сб.*, №3. 1968.— С. 432–444.
13. *Виноградова М. Б., Руденко О.В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука. 1990. — 432с.
14. *Гольдберг З. А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн// Акуст. журнал. — 1960.- 6.№2.— С.307–310.

15. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы, Т.2. Закономерности распространения. Наукова думка – 1986. – 376с., 536с.
16. *Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я.* Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл.механика. – 2016. – 51, N3. - С.25 -31.
17. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
18. *Заславский Г. М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука. 1988. –368 с.
19. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск.ун-та. 1990. 310с.
20. *Кабисов К.С., Камалов Т.ф., Лурье В.А.,* Колебания и волновые процессы, Теория, задачи с решениями.–КД Либроком. Москва.– 2017. 360 с.
21. *Кампе де Ферье, Ж.* Функции математической физики / *Кампе де Ферье, Ж., Кемпбелл, Р., Петьо, Г.* — М. : Физматлит, 1963.
22. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих волнах. – М.: Наука. 1973. – 154с.
23. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: «Наука», 1974. — С. 777-780.
24. *Крылов В.В., Красильников В.А.* Введение в физическую акустику. — М.: Наука. 1986. — 432 с.
25. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука. 1958. — 678 с.
26. *Лейбензон Л. С.* Краткий курс теории упругости. — М. —Л.: Гостехизд., 1912. — 304с.
27. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука. 1970. — 939 с.
28. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука. 1980. — 512 с.
29. *Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие.* — М.: Наука. 1981. — 243 с.

30. *Низул У.К., Энгельбрехт Ю.К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. — Таллин: АН ЭССР. 1972. — 172 с.
31. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции, — М.: Наука, 1978 г.
32. *Пелиновский Е. Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус. 1984. — 454 с.
33. *Рабинович М. Н., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн.- М.: Наука. 1984. — 432 с.
34. *Руденко О. В., Солюян С. П.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука. 1975. — 288 с.
35. *Руцицкий Я.Я.* Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл. механика. – 2016. — 52, N2. — С. 20 — 35.
36. *Руцицкий Я.Я.* О постоянных модели Мэрнагана нелинейного гиперупругого деформирования материалов // Прикл.механика. – 2016. — 52, N6.
37. *Руцицький Я.Я., Цурнал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
38. *Руцицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* Один приближенный метод анализа одиночных волн в нелинейно упругих материалах // Прикл. механика. – 2016. — 52, N3. — С. 83 — 94.
39. *Руцицкий Я.Я., Юрчук В.М.* Один приближенный метод анализа одиночных волн в материалах, деформирующихся нелинейно упруго // Прикл. механика. – 2016. — 52, N3. — С.38 — 46.
40. *Руцицкий Я.Я., Юрчук В.М.* Числовой анализ эволюции плоской продольной нелинейно упругой волны с разными начальными профилями // Прикл. механика. – 2017. — 52, N2. — С.88 — 96.
41. *Самогоян А. Я.* Волны напряжения в сплошных средах. — М.: Изд-во МГУ. 1985. — 445 с.
42. *Седов Л. М.* Механика сплошной среды. — В 2 томах. Т.2. — М.: Наука.1970. — 568с.



43. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — Киев: Наукова думка. 1989. — 204 с.
44. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. — Киев: Наукова думка. 1991. — 200 с.
45. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. — М.: Наука. 1988. — 232 с.
46. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963 Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.
47. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. — М.: Наука. 1965. — 388 с.
48. Хованский А. Г. Полиномы Чебышёва и их обращения // Математическое просвещение. — 2013. — Вып. 17. — С. 93—106.
49. Энгельбрехт Ю. К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. — М.: Наука. 1981. 256 с.
50. Abramowitz M. and Stegun I. A. (Eds.). "Modified Bessel Function  $I_\nu(x)$  and  $K_\nu(x)$ ". §9.6 in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*. New York: Dover, 1972. p. 374 — 377.
51. Achenbach J. D. Wave in propagation solids. — Amsterdam: North-Holland, 1973.p. 234–245.
52. Alonso M., Reguera N. Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // *Wave Motion*. – 2015. – 56. – P.137—146.
53. Arfken G. "Modified Bessel Functions,  $I_\nu(x)$  and  $K_\nu(x)$ ." §11.5 in *Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Orlando, FL: Academic Press, 1985. p. 610 — 616.
54. Berezovski A., Maugin G.A., Engelbrecht J. Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. - Singapore-London: World Scientific, 2008. – 250 p.
55. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. - Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.

56. *Courant R. and Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. In 2 Bd. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1937. (рос. Переклад – *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – В 2 томах. М.: Гостехиздат. 1951.).
57. *Crawford F.S. Jr.* Waves, Berkeley Physics Course. Vol.3. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.
58. *Davies R. M.* Stress waves in solids.- Cambridge: Cambridge University Press, 1956.
59. *Destrade M., Saccomandi G.* Finite amplitude elastic waves propagating in compressible solids // *Physical Reviews E.* – 2005 – 72, N1. – P. 016620.
60. *Dieulesaint E. et Royer D.* Ondes elastiques dans les solides. Application au traitement du signal.- Paris: Masson et C<sup>ie</sup>. – 1974.
61. *Drumheller D. S., Bedford A.* Wave propagation in elastic laminates using a second order microstructure theory // *Int. J.Solids Structures.* – 1974. – №10. – P.61–76.
62. *Erofeev V.I.* Wave Processes in Solids with Microstructure. – Singapore-London: World Scientific, 2003. – 276 p.
63. *Fu Y. B., Scott N. H.* The transition from acceleration wave to shock wave // *Int.J.Engng. Sci.* – 1991. – 29, – P.617– 624.
64. *Fu Y. B., Scott N. H.* Propagation of simple waves and shock waves in a rod of slowly varying cross-sectional area // *Int.J.Engng.Sci.* – 194. – 32.№1. – P.35–44.
65. *Golub, M.V. Fomenko, S.I. Bui, T.Q. Ch. Zhang, Y.-S. Wang* – «Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally gradedperiodic laminates».
66. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. 7<sup>th</sup> revised edition. Eds. *Jeffrey A.,Zwillinger D.* - New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
67. *Green A. E., Adkins J.E.* Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics.- London: Oxford University Press, Clarendon Press, 1960.
68. *Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Predicting the properties of micro and nanocomposites: from the micro whiskers to bristled nanocentipedes //

- Phil. Trans. Royal Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2008. – 365, N1860. – P.3233 – 3239.
69. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Theoretical description of a delamination mechanism in fibrous micro- and nano-composites // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – 40, N10. – P.1129 – 1136.
70. *Hagen N., Kupinski M., and Dereniak E. L.,* Gaussian profile estimation in one dimension // *Appl. – Opt.* – 2007. – 46, P.374–383.
71. *Hamilton M.F., Il'inskiy Yu.A., Zabolotskaya E.A.* Model equations for nonlinear surface waves // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1998. – 103, N5. – P. 2925.
72. *Hongwei Guo,* A simple algorithm for fitting a Gaussian function // *IEEE Sign. – Proc. Mag.* – 2011. – 28, N 9, P.134 – 137.
73. *Hussein M.I., Khayetourian R.* Nonlinear elastic waves in solids: Deriving simplicity from complexity // *Bulletin of the American Physical Society.* 2015. – 60, N1. P.224–248.
74. *Janke E., Emde F., Lösch F.* Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart, Teubner Verlagsgesellschaft 1960.
75. *Janno J., Seletski A.* Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equation by measuring solitary waves // *Wave Motion.* – 2015. – 52. – P.15–19.
76. *Kampe de Feriet J., Campbell R., Petiau G. Vogel T.* Fonction de la physique mathématique. Paris, Centre national de la recherche scientifique 1957.
77. *Kosky H.* Stress wave in solids. – Oxford: Oxford University Press, 1953.
78. *Lindeberg, T.,* Scale-space for discrete signals // *PAMI(12),* –1990. No. 3, P. 234 – 254.
79. *Maugin G.A.* Nonlinear Waves in Elastic Crystals. – Oxford: Oxford University Press, 1999. – 324 p.
80. *Murnaghan F.D.* Finite deformation in an elastic solid.- New York. John Wiley, 1951-140p.
81. *Narahara K.* Asymmetric solitary waves in coupled nonlinear transmission lines // *Wave Motion.* – 2015. – 58. – P.13 – 21.

82. *Nowacki W.* Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1970-769p.
83. Nonlinear waves. Edited by *S.Leibovich and A.R. Seebass-* Ithaca and London  
Cornell University Press, 1974 – 319 p.
84. *Olde Daalhuis A.B.* Confluent Hypergeometric Functions. Chapter 13. P.383–  
402. Whittaker Functions. 13.14-13.26. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert  
R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology)  
Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University  
Press, 2010. – 968 p.
85. *Olver F.W.J., Maximon L.C.* Bessel Functions. Chapter 10. P.215–286. In: Olver  
F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of  
Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge:  
Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
86. *Porubov A.V.* Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids. – Singapore-  
London: World Scientific, 2003. – 228 p.
87. *Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A.; and Vetterling, W. T.* Bessel  
Functions of Fractional Order, Airy Functions, Spherical Bessel Functions. §6.7  
in *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd*  
*ed.* Cambridge, England: Cambridge University Press,–1992. P. 234-245.
88. *Richoux O., Lombard B., Mercier J.-F.* Generation of acoustic solitary waves in a  
lattice of Helmholtz resonators // *Wave Motion.* – 2015. – 58. – P.85–99.
89. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer,  
2014.– 454p.
90. *Rushchitsky J.J.* Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publishing  
ApS, 2011.– 270p.
91. *Rushchitsky J.J.* Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and  
Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // *Int. J. Appl. Math. and Mech.* –  
2013. – 9, N12. – P. 600-643.
92. *Salupere A., Tamm K., Engelbrecht J.* Numerical simulation of solitary  
deformation waves in micro-structured solids // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2008.  
– 43. – P.201–208.

93. *Sneddon I. N., Berry D.S.* The classical theory of elasticity. Vol. VI. Flugge Encyclopedia of Physics. – Berlin: Springer Verlag, 1958.
94. *Spanier, J. and Oldham, K. B.* "The Hyperbolic Bessel Functions  $I_0(x)$  and  $I_1(x)$  " and "The General Hyperbolic Bessel Function  $I_\nu(x)$ ." Chs. 49-50 in *An Atlas of Functions*. Washington, DC: Hemisphere, pp. 479–487 and 489–497, 1987.
95. *Stroisz A.M.* Nonlinear Elastic Waves for Estimation of Rock Properties // PhD Thesis, Norges Teknisk Universitet. 2013.
96. *Structural and Residual Stress Analysis*. Ed. V.Hauk. – Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1997 (e-variant 2006). – 640 p.
97. *Truesdell C.*, A first course in rational continuum mechanics.- Baltimore: The John Hopkins University, 1972.
98. *Truesdell C., Noll W.* The nonlinear field theories of mechanics. Flugge's Handbuch der Physik. Band III/I. – Berlin: Springer Verlag. 1965. – 602 p.
99. *Whitham J.*, Linear and nonlinear waves.–New York: Wiley Interscience,1974.

## ДОДАТОК А

Необхідні для числових розрахунків таблиці властивостей матеріалів в рамках нелінійної моделі Мурнагана

Таблиці з книги Гузя О.М. [12].

Матеріал	$\rho$ г/см <sup>3</sup>	$\lambda_n$ МПа	$\mu_n$ МПа
Оргскло	3,1	$4,04 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^3$
Сталь 09Г2С	7,79	$9,44 \cdot 10^3$	$7,9 \cdot 10^4$

Таблиця 2.3

№	Матеріал	Літературне джерело	Варіант теорії	l · 10 <sup>-5</sup> МПа	m · 10 <sup>-5</sup> МПа	n · 10 <sup>-5</sup> МПа
1	Полістирол	[191]	$I_K \equiv I_{IM}$	-0,19	-0,13	-0,1
2	Армко-залізо	[191]	$I_K \equiv I_{IM}$	-0,35	-10	11
3	Нікелева сталь 535	[169]	$I_K \equiv I_{IM}$	-0,46	-5,9	-7,3
4	Сталь С1018	[219]	$I_K \equiv I_{IM}$	-	-	-5,7
5	Сталь 60С2Н2А	[132]	$I_K \equiv I_{IM}$	-3,4	-3,5	-7,6
6	Сталь 60С2Н2А	[133]	$I_K \equiv I_{IM}$	-	-	-7,6
7	Алюміній 6016-Т6	[219]	$I_K \equiv I_{IM}$	-	-	-3,1
8	Алюміній 1100	[219]	$I_K \equiv I_{IM}$	-	-	-4,8
9	Плавлений кварц	[219]	$I_K \equiv I_{IM}$	-	-	-2,3
10	Скло (пірекс)	[191]	$I_K \equiv I_{IM}$	0,14	0,9	4,2

11	Латунь Л-62	[128]	$E_K \equiv E_{IM}$	-6,3	-5,4	-5,0
12	Латунь ЛС-59-1	[128]	$E_K \equiv E_{IM}$	0,1	-1,5	-4,9
13	Бронза Броф	[128]	$E_K \equiv E_{IM}$	-0,2	-3,8	-2,4
14	Латунь Л-62	[128]	$E_K \equiv E_{IM}$	-6,1	-4,6	-3,7
15	Латунь ЛС-59-1	[128]	$E_{2M}$	-4,9	-3,7	-3,2
16	Дюралюміній Д-16	[128]	$E_{2M}$	2,0	1,0	-3,4
17	Бронза Броф	[128]	$E_{2M}$	-1,9	-0,7	4,8
18	Сталь 2	[128]	$E_K \equiv E_{IM}$	-7,0	-8,0	-8,2
19	Сталь 3	[128]	$E_{2M}$	-5,1	-5,2	-4,9
20	Латунь Л-62	[128]	$I_K \equiv I_{IM}$	-3,6	-5,6	-5,0
21	Латунь ЛС-59-1	[128]	$I_K \equiv I_{IM}$	4,1	-0,7	-4,9
22	Бронза Броф	[128]	$I_K \equiv I_{IM}$	4,8	-2,7	-2,4
23	Дюралюміній Д-16	[128]	$I_K \equiv I_{IM}$	-2,7	-3,9	-3,7
24	Сталь 3	[128]	$I_K \equiv I_{IM}$	-3,6	-6,9	-8,2

Таблиця 2.4

Варіант теорії	Органічне скло			Сталь 09Г2С		
	$a \cdot 10^{-2}$ МПа	$b \cdot 10^{-2}$ МПа	$c \cdot 10^{-2}$ МПа	$a \cdot 10^{-2}$ МПа	$b \cdot 10^{-2}$ МПа	$c \cdot 10^{-2}$ МПа
$I_K \equiv I_{IM}$	-39,9	-7,16	-14,4	-3,25	-3,09	-7,99

$I_{2M}$	2,68	-3,12	-6,77	-2,69	-2,14	-4,83
----------	------	-------	-------	-------	-------	-------

Таблиця 2.5

№	Матеріал	$\nu_1 \cdot 10^{-5}$ МПа	$\nu_2 \cdot 10^{-5}$ МПа	$\nu_3 \cdot 10^{-3}$ МПа
	Сталь			
1	Хекла 37 (0,4 % С)	-35,8	-28,2	-17,7
2	Хекла 17 (0,6 % С)	-13,4	-26,1	-16,7
3	Хекла 138А (Cr, Ni, Mg)	-32,3	-26,3	-17,7
4	Рекс 535 (пікелева)	-17,3	-24,0	-16,9
5	Хекла АТN (пустекатная)	3,4	-55,2	-10,0
	Алюмінієві сплави			
6	2 S	-22,8	-19,7	-10,2
7	B 53 SM	-24,9	-9,9	-6,9
8	B53 SP	-9,3	-15,5	-7,5
9	Д 54 S	-37,9	-19,8	-3,0
10	ТН 77 S	-32,0	-17,7	-10,9
11	Магнієвий листовий інструментальний матеріал	-6,54	-5,74	-4,21
12	Молибден спікливе	-5,1	-28,3	-19,3
13	Молибден повторно спікливе	19,4	-39,8	-22,7
14	Вольфрам спікливе	-21,5	-14,3	-12,4
15	Вольфрам повторноспікл.	-42,9	-25,8	-26,7

Таблиця 2.6



Таблиці з книги Гаука В. [16].

Матеріал	$\lambda$	$\mu$	l	m	n
Armco-Iron /2/	$110 \pm 0,4$	$82 \pm 1$	$-348 \pm 65$	$1030 \pm 70$	$+1100 \pm 1100$
Steel ferrit. / pearlitie	110	81	-270	-580	-710
Steel 0.12% C /36/	115	82	$-301 \pm 37$	$-666 \pm 6.5$	$-716 \pm 4.5$
St 42	110	81	-48	-503	-652
St E 355 /33/	109	82	-192	-565	-724
Rail Steel /6/	$116 \pm 2\%$	$80 \pm 2\%$	$-248 \pm 3\%$	$-623 \pm 4\%$	$-714 \pm 3\%$
Rail Steel /6/	$110 \pm 2\%$	$82 \pm 2\%$	$-302 \pm 3\%$	$-616 \pm 4\%$	$-724 \pm 3\%$
Rail Steel	$112 \pm 1\%$	$81 \pm 1\%$	$-358 \pm 5\%$	$-650 \pm 3\%$	$-721 \pm 3\%$
Steel Hecla 37 /34/	$111 \pm 1$	82	$-461 \pm 65$	$-636 \pm 46$	$-708 \pm 32$
Steel Hecla 17 /34/	111	82	$-328 \pm 30$	$-595 \pm 32$	$-668 \pm 24$
Steel Hecla 138A /34/	109	82	$-426 \pm 55$	$-619 \pm 50$	$-708 \pm 40$
Steel A 533 B /35/	119	79	-218	-486	-564
Steel A 471 /35/	120	79	-179	-496	-628
Steel Hecla /34/ austenite	87	72	$-535 \pm 90$	$-752 \pm 100$	$-400 \pm 40$
17 Cr Ni Mo 6	109	81	$-58 \pm 38$	$-517 \pm 14$	$-718 \pm 18$
24 Cr Mo 5V	112	83	-350	-624	
24 Cr Mo 5V	112	82	$-440 \pm 10\%$	$-600 \pm 2\%$	$-670 \pm 2\%$

30 Cr Mo Ni V 5 11	109	83	-357	-574	-670
22 Ni Mo Cr 3 7	109	82	-185	-503	-652
22 Ni Mo Cr 3 7	109±2%	82±1%	-196±10%	-520±2%	-657±2%
22 Ni Mo Cr 3 7	111±2%	82±1%	-190±10%	-555±2%	-659±2%
24 Ni Cr Mo V14 5	110	80	-90	-439	-546
Ni-Steel	109	82	-328	-578	-676
Ni-Steel S/NTV /5/	109±1	82	-56±20	-671±6	-785±7
Ni-Steel Rex 535 /5/	91	78	-46	-590	-730
Ni-Steel Rex 535 /34/	109	82	-327±75	-378±80	-676±60
15 Mn Ni 6 3	110±2%	81±2%	-270±10%	-580±2%	-710±2%
X6 Cr Ni 1811	101	75	-370	-532	-236
Roll H-Cr R 78/80	129±2%	84±2%	-573±8%	-775±3%	-996±3%
WC-Co Sintered Metal	178	256	-464	-1390	-2108
WC-Co Sintered Metal	178	257	-552	-1453	-2153

Таблица 2.7

## ДОДАТОК Б

Графіки поширення поодиноких поздовжніх хвиль з гармонічним профілем, профілем у вигляді функції Гауса та профілем у вигляді функції Уїттекера

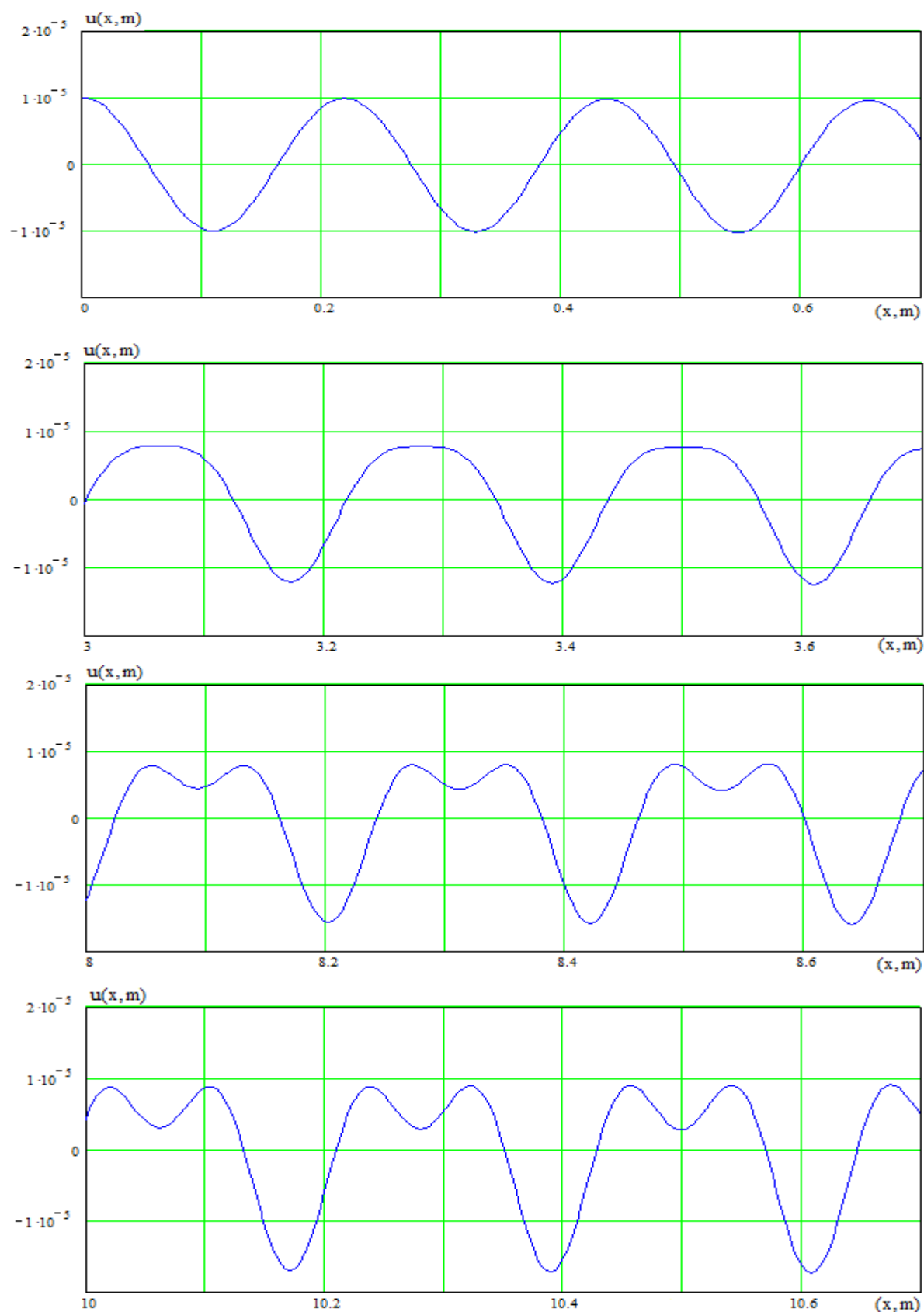


Рис. 4.8

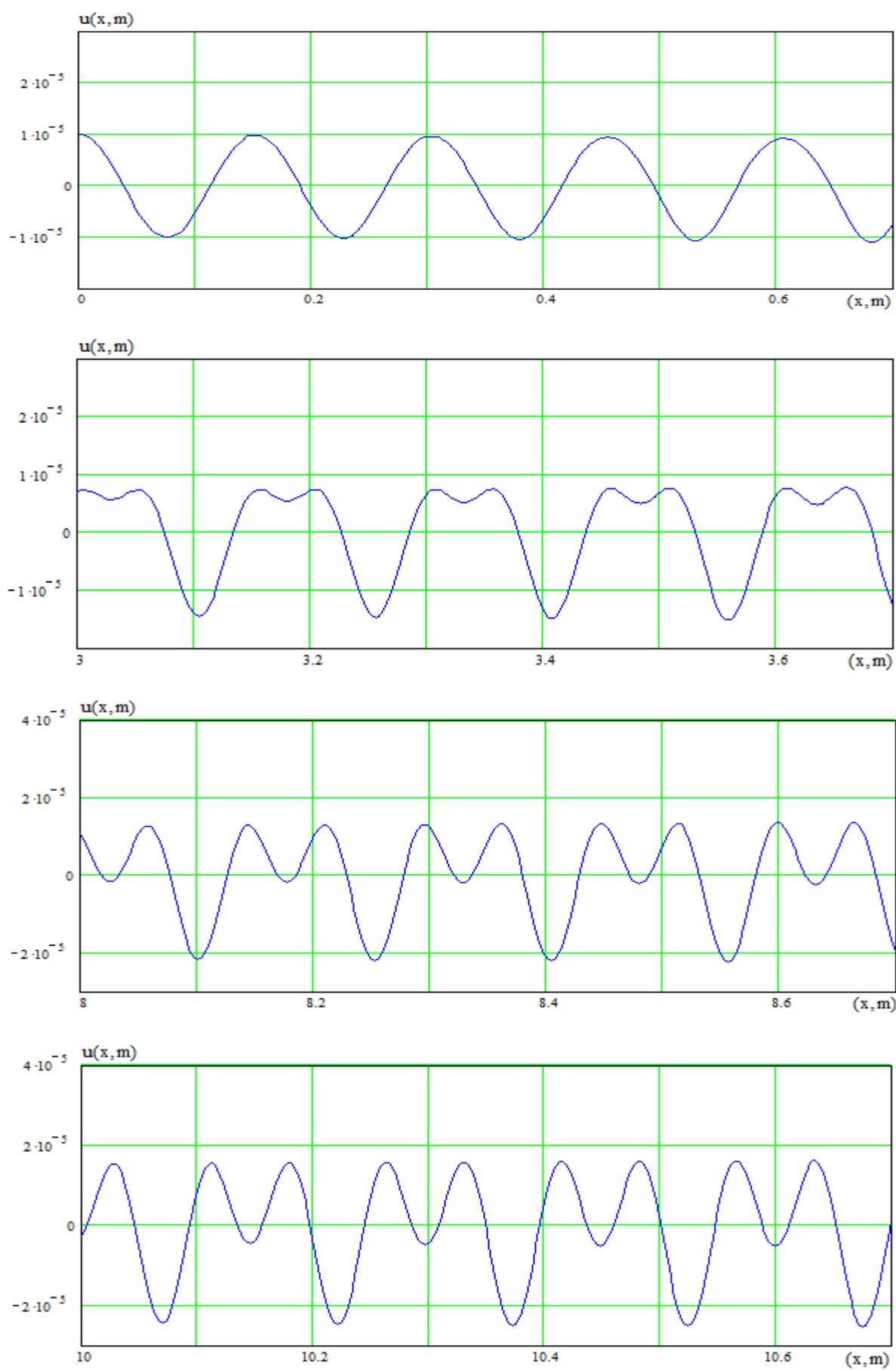


Рис. 4.9

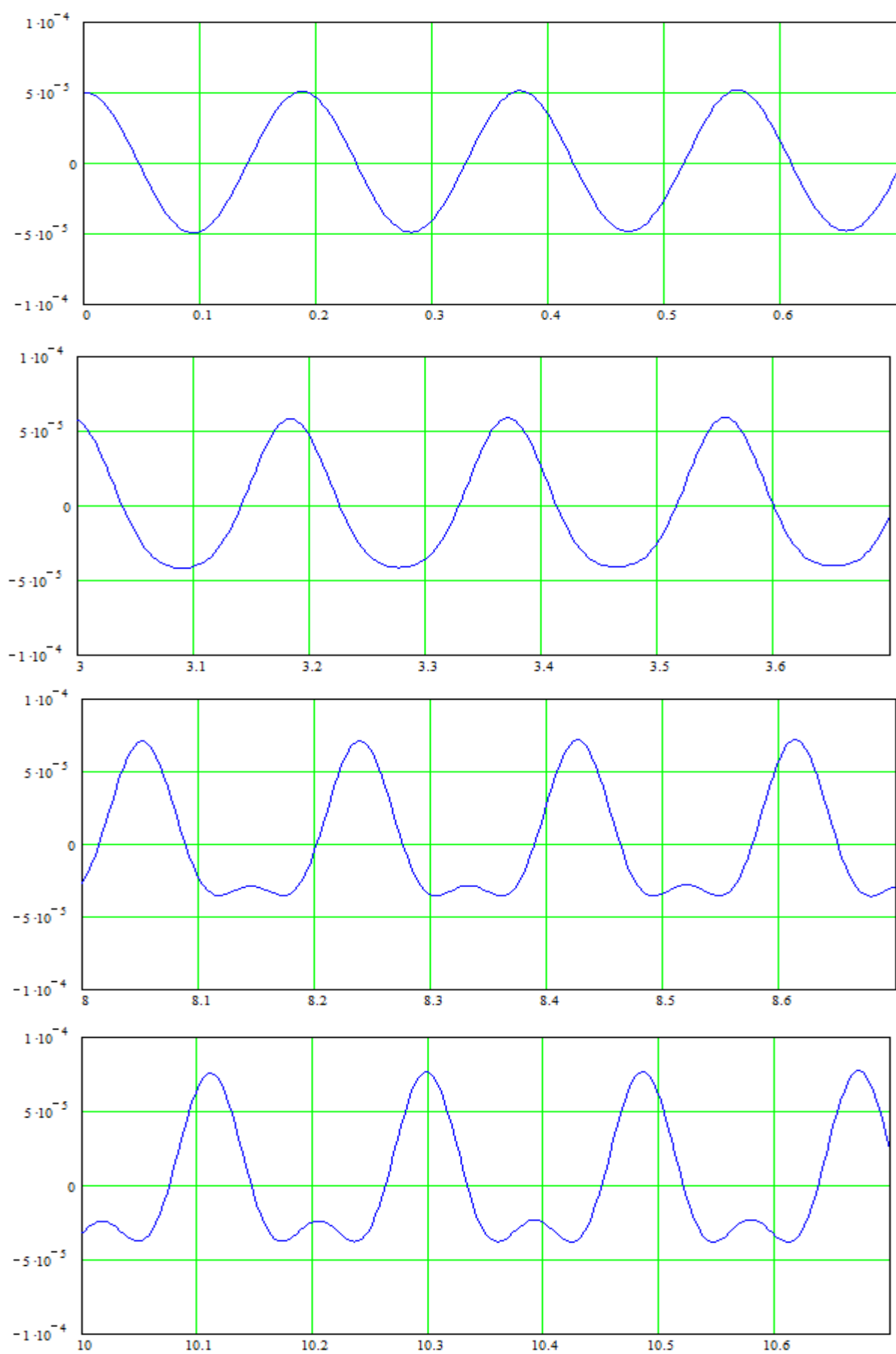


Рис. 4.11

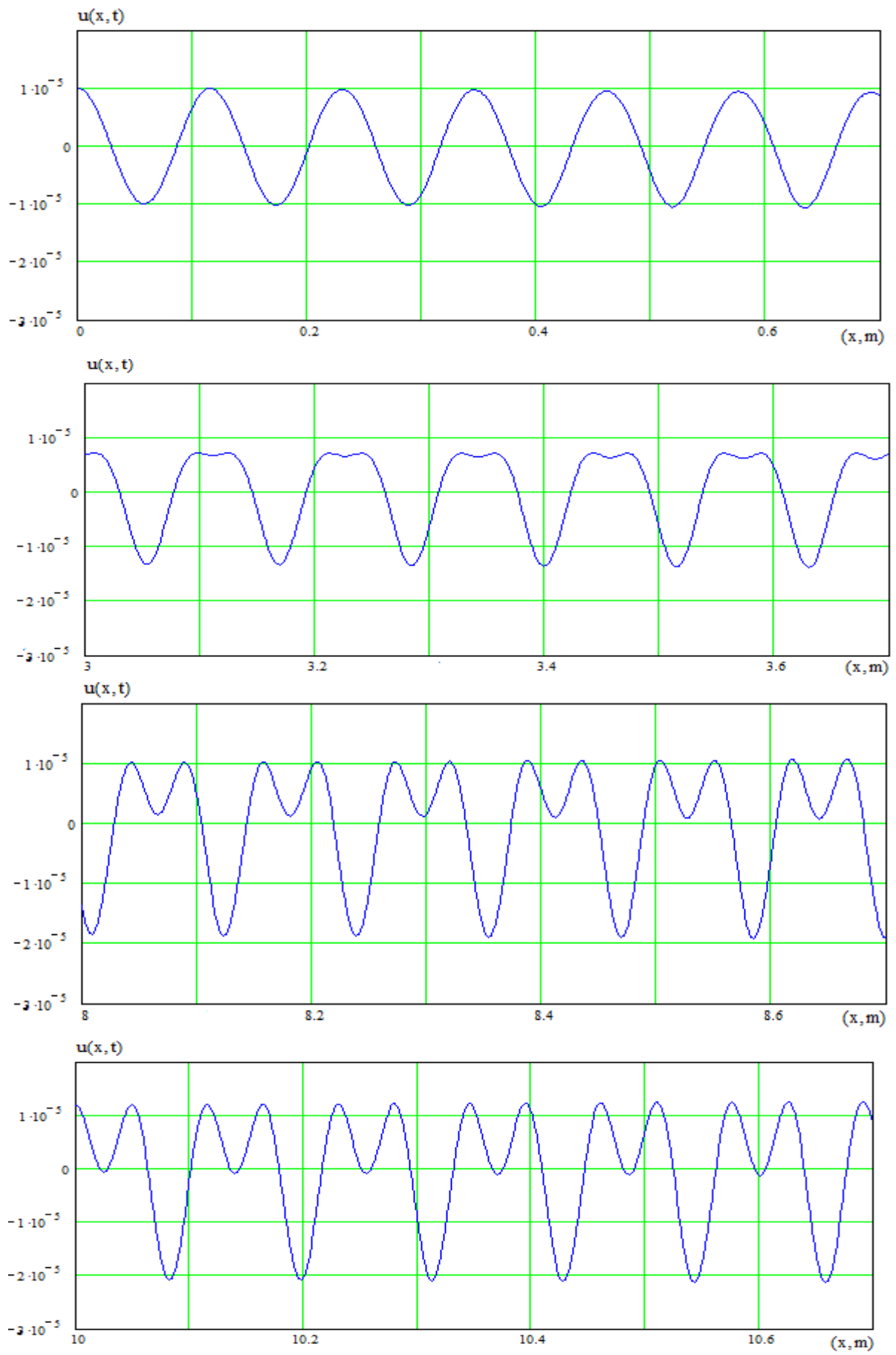


Рис.4.12

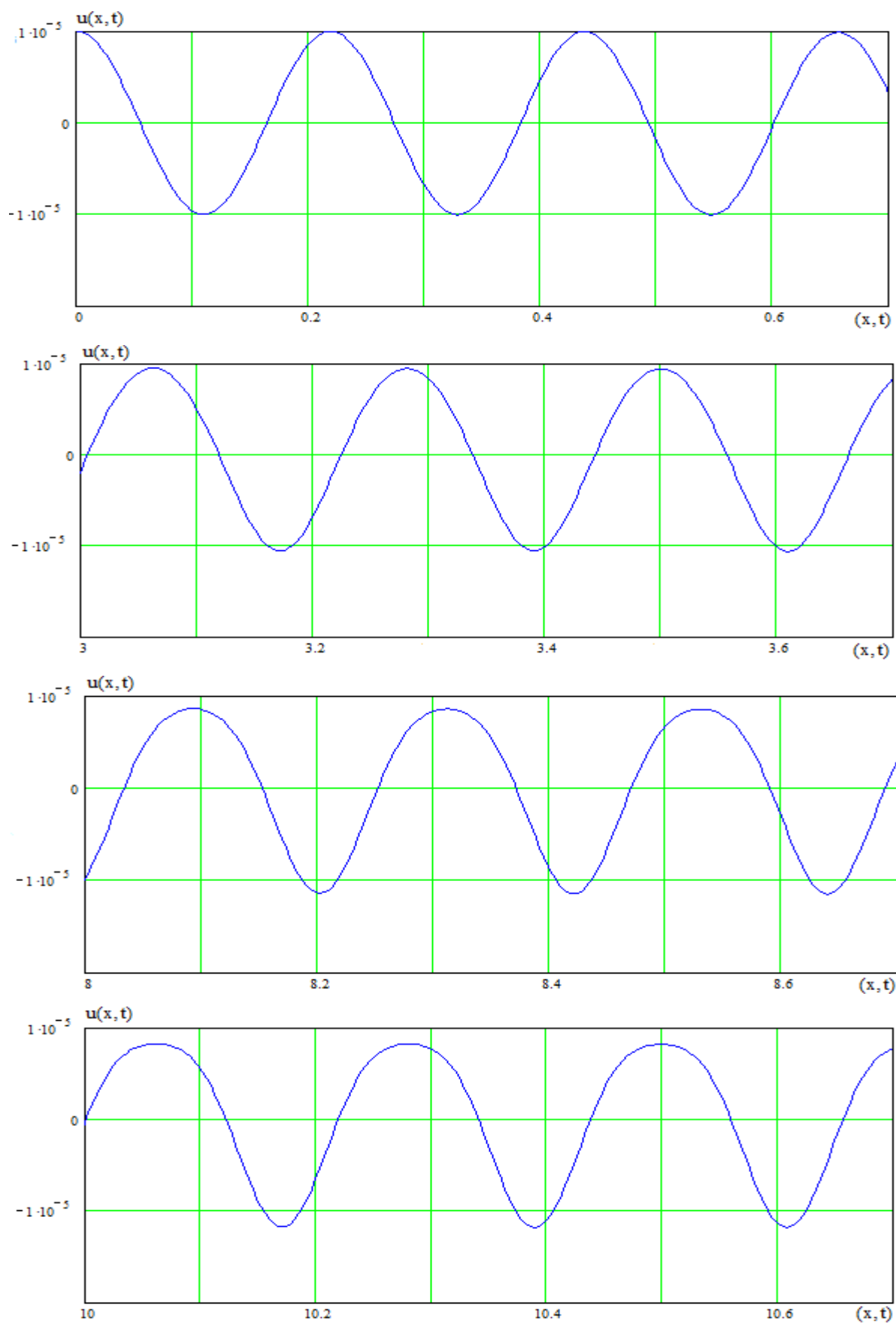


Рис. 4.15

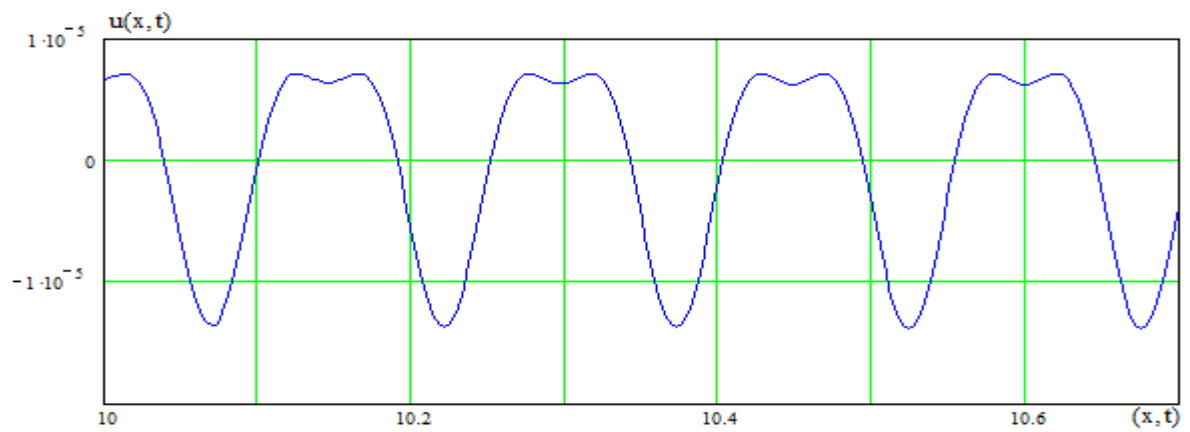
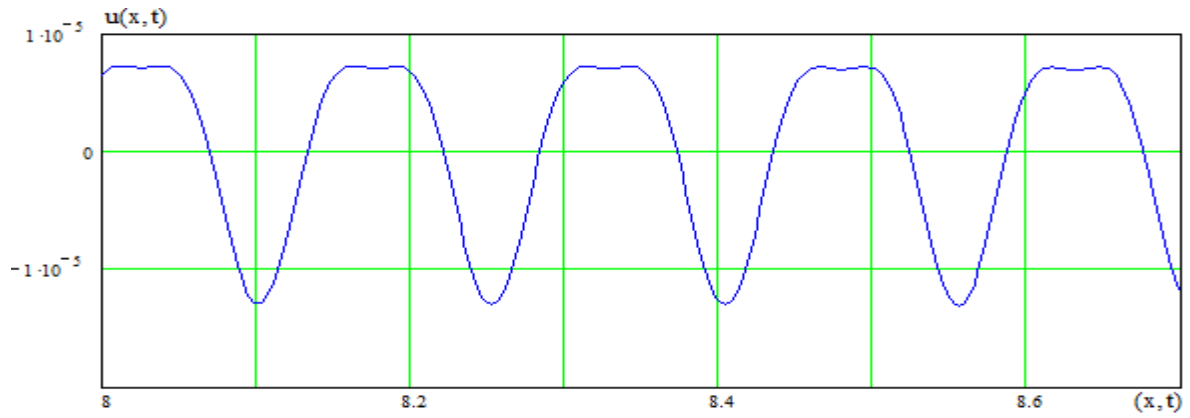
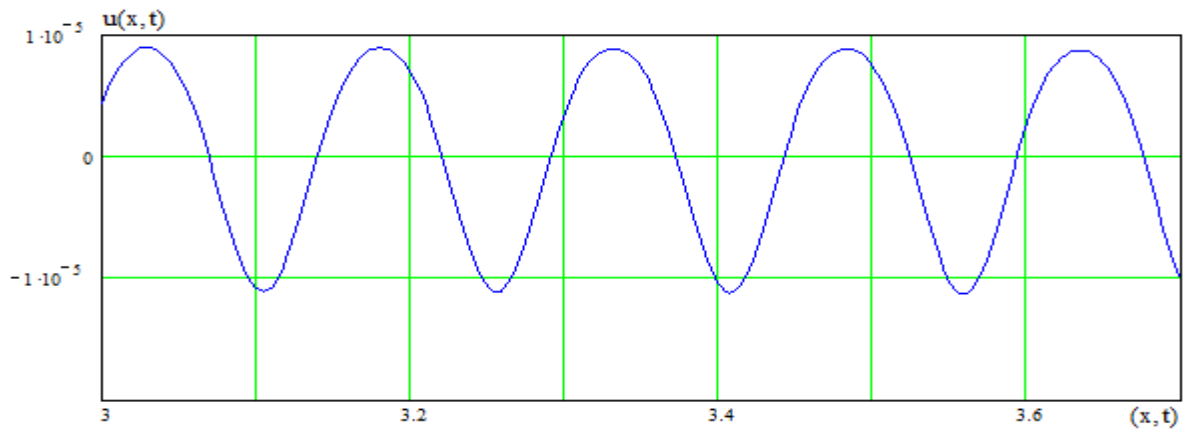
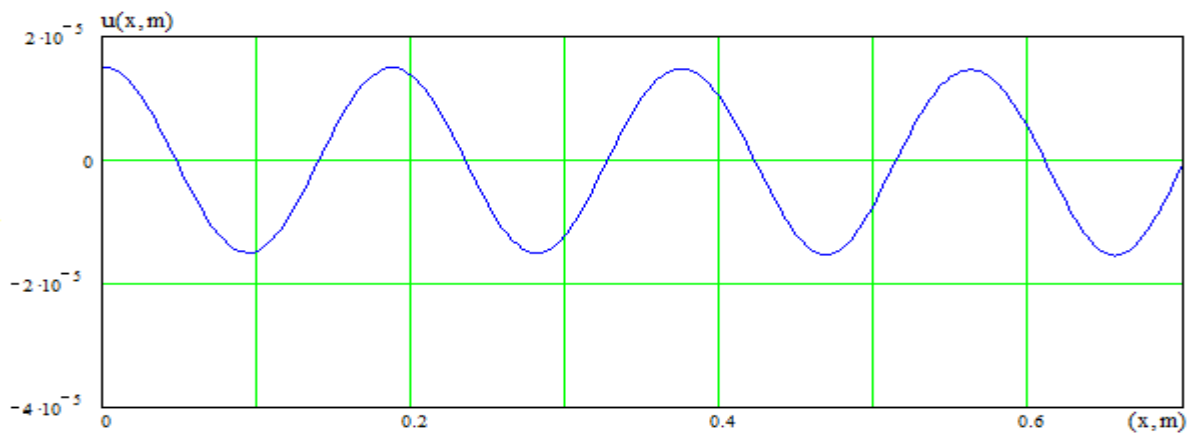


Рис. 4.16





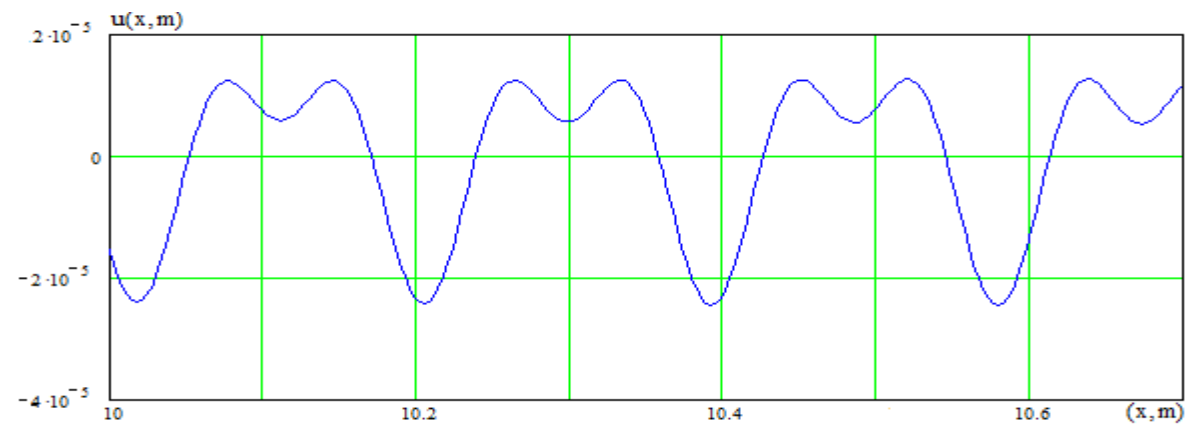
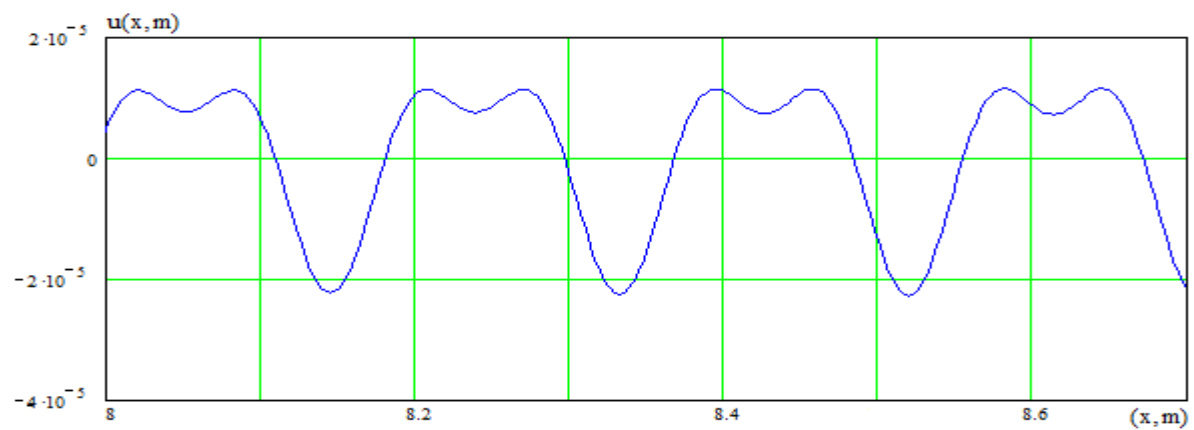
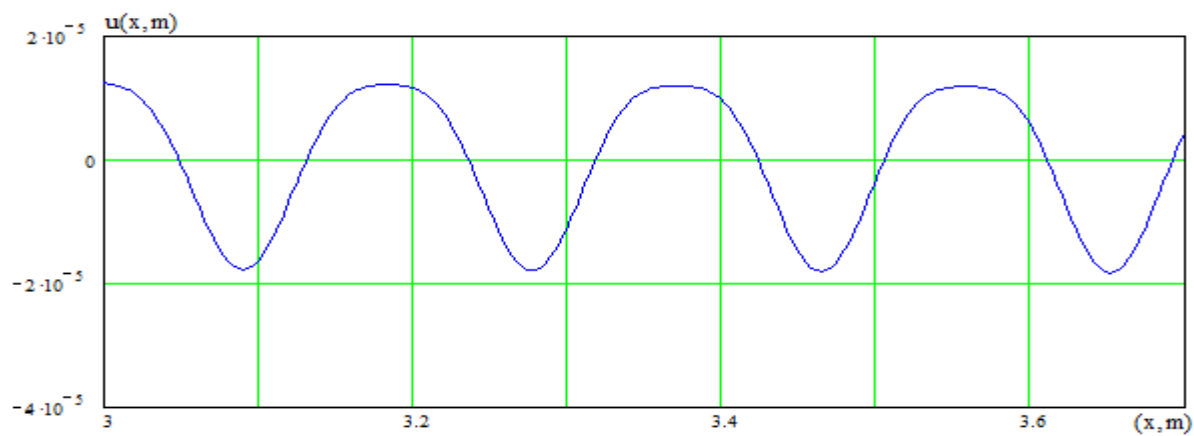
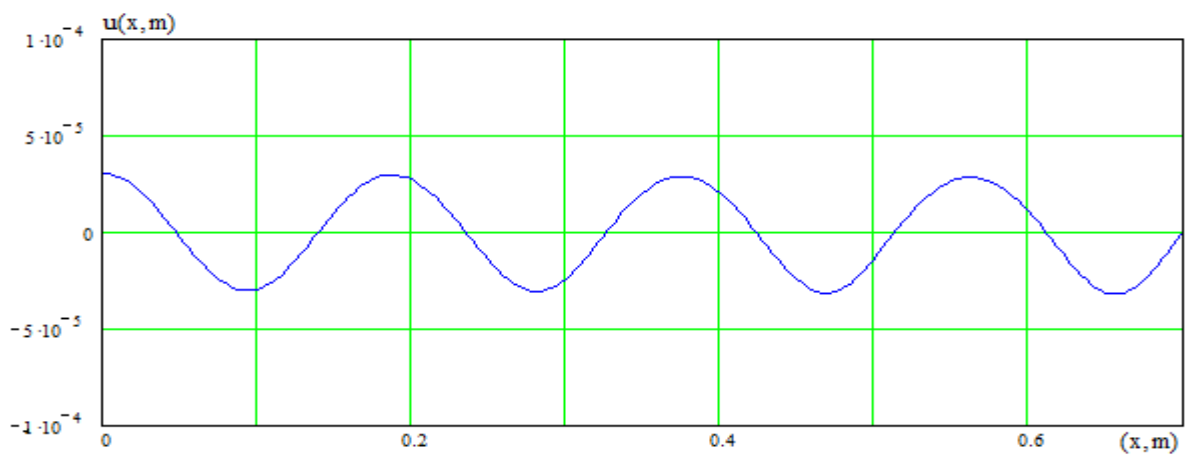


Рис. 4.18



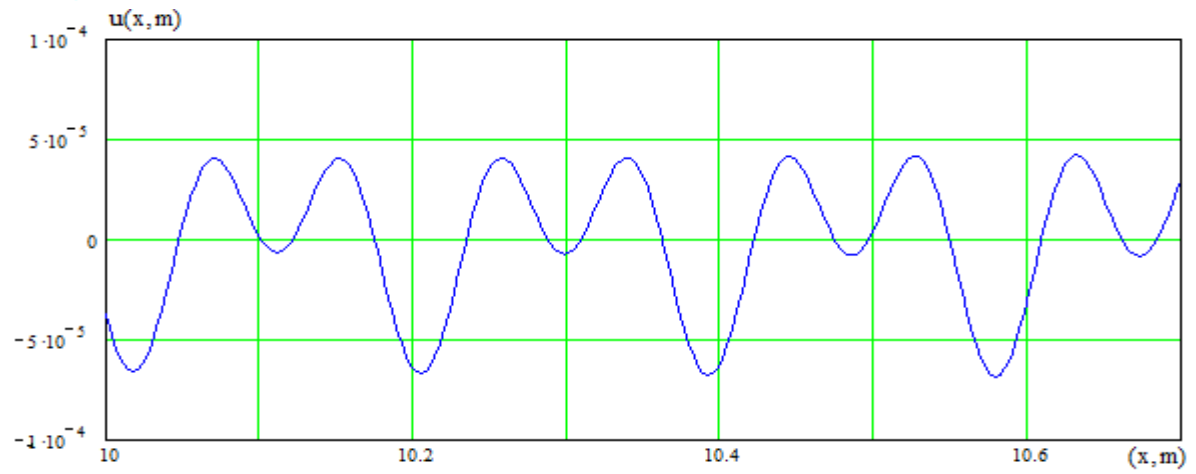
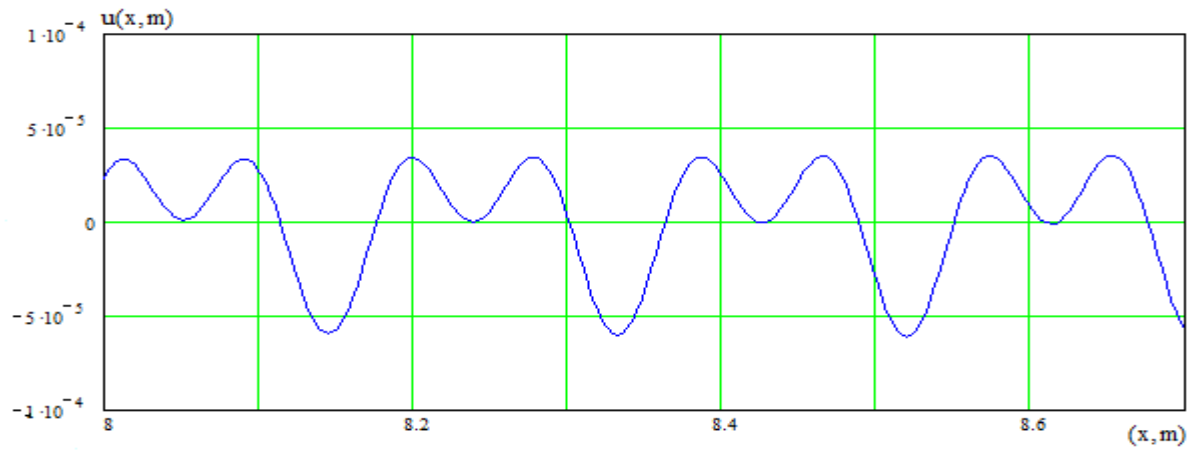
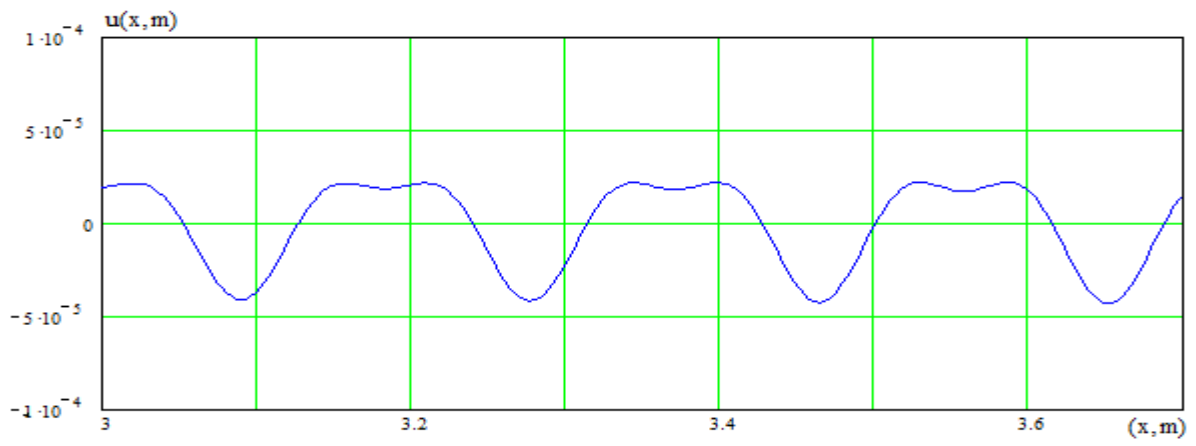
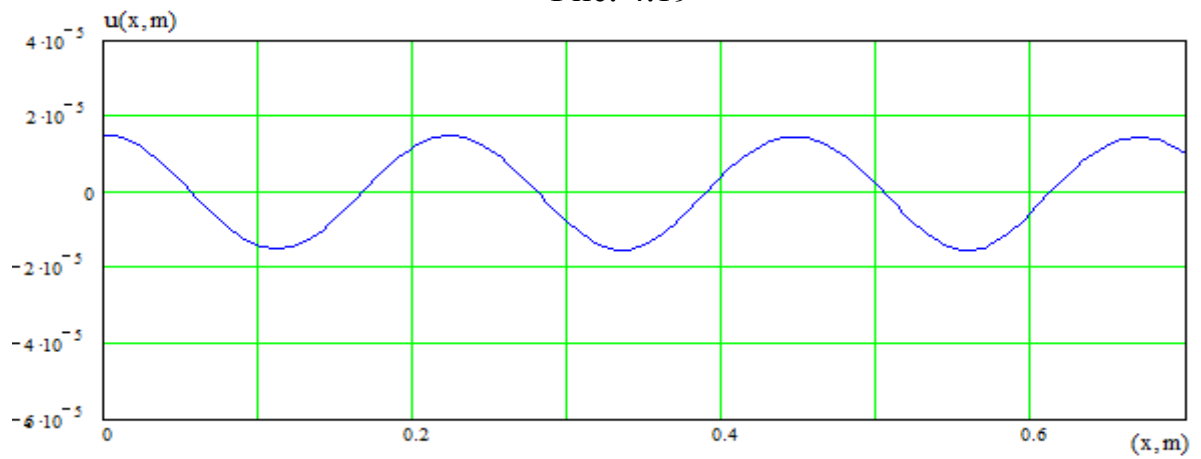


Рис. 4.19



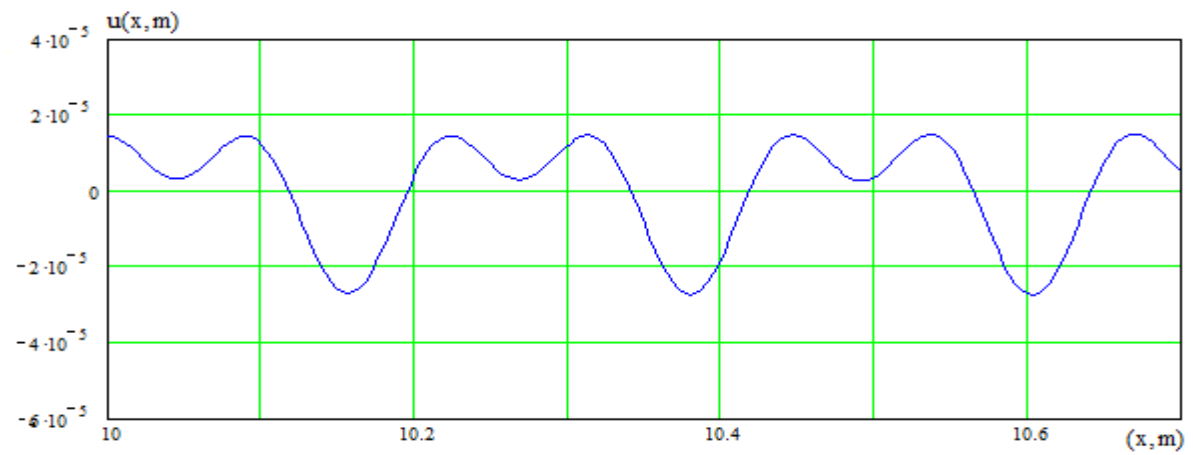
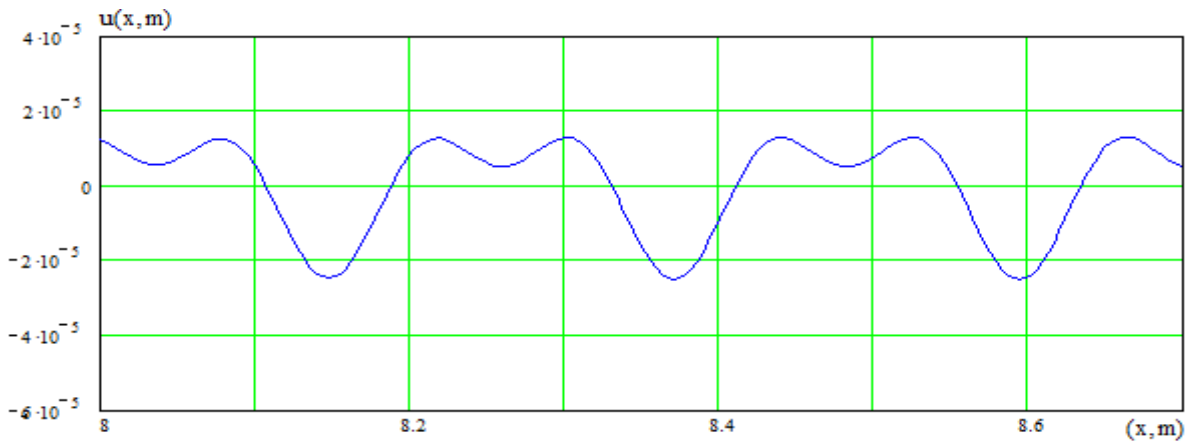
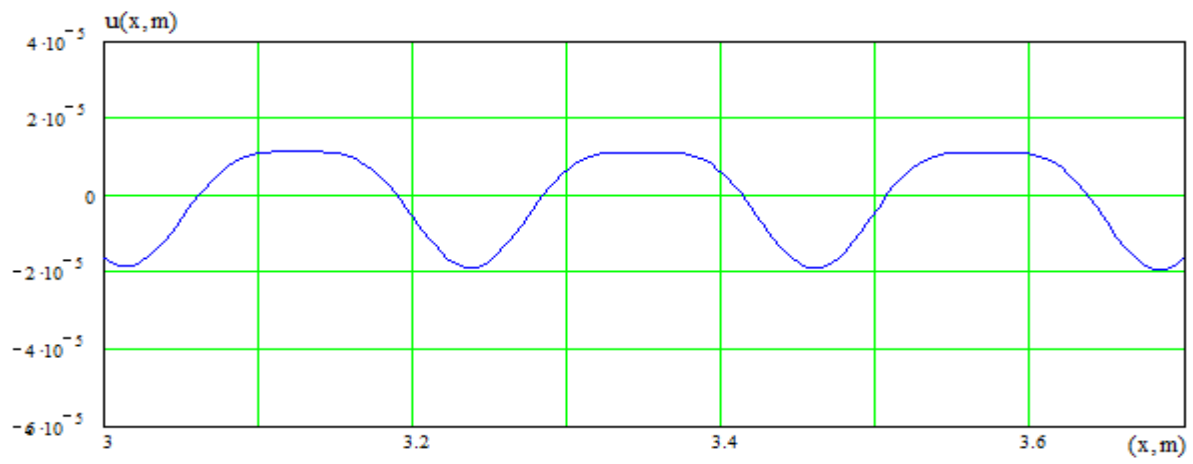
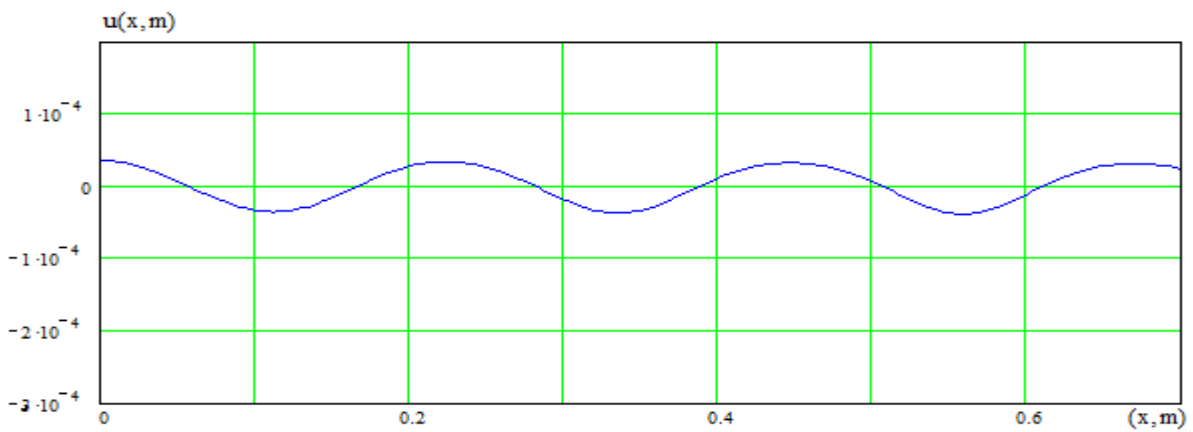


Рис. 4.21



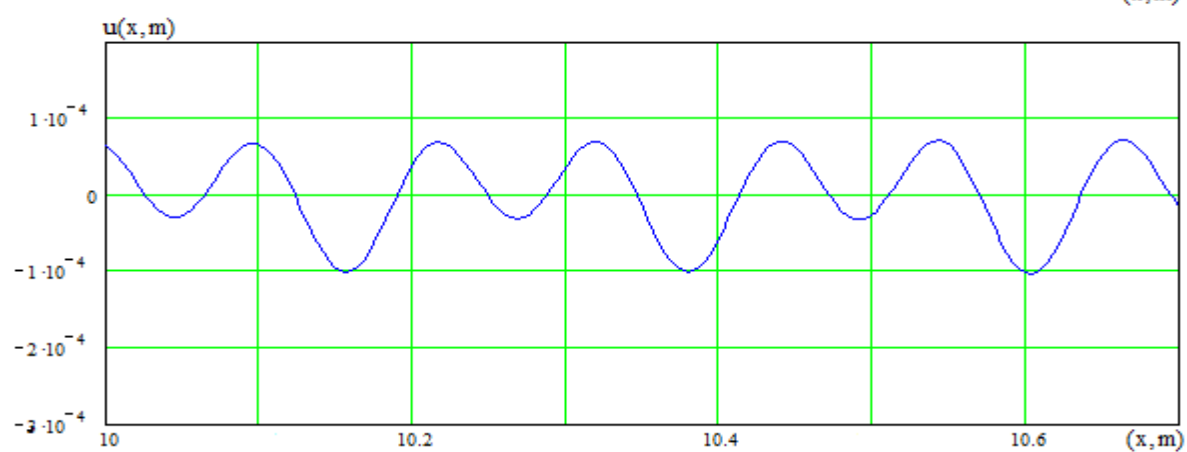
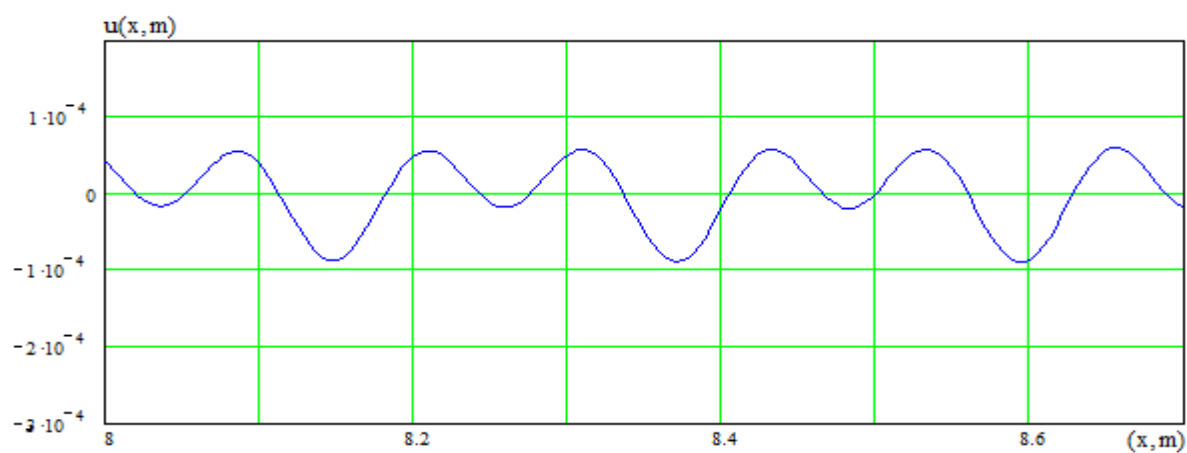
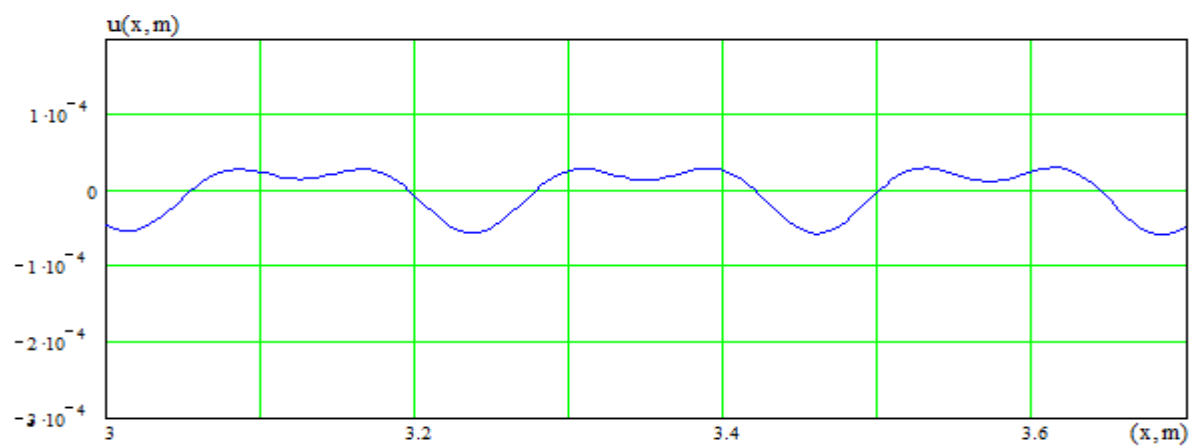
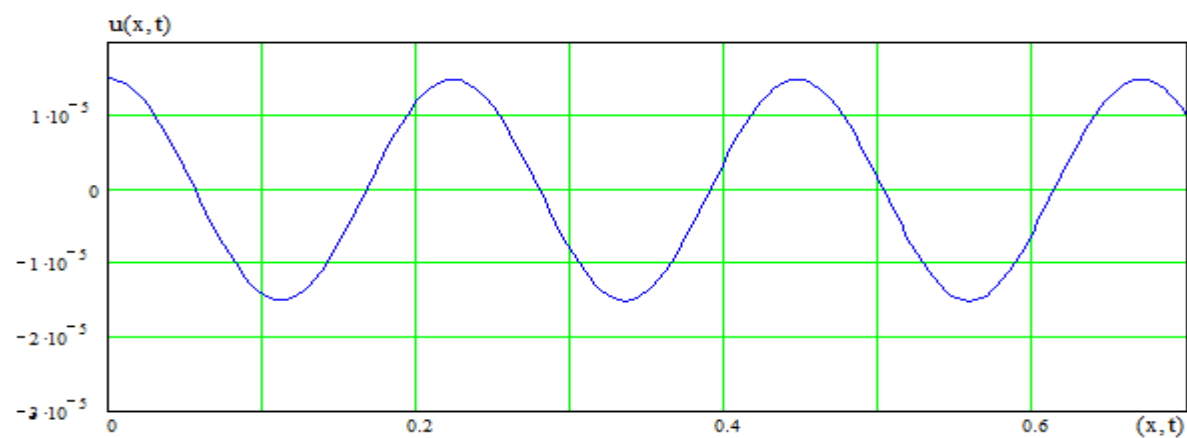


Рис. 4.22



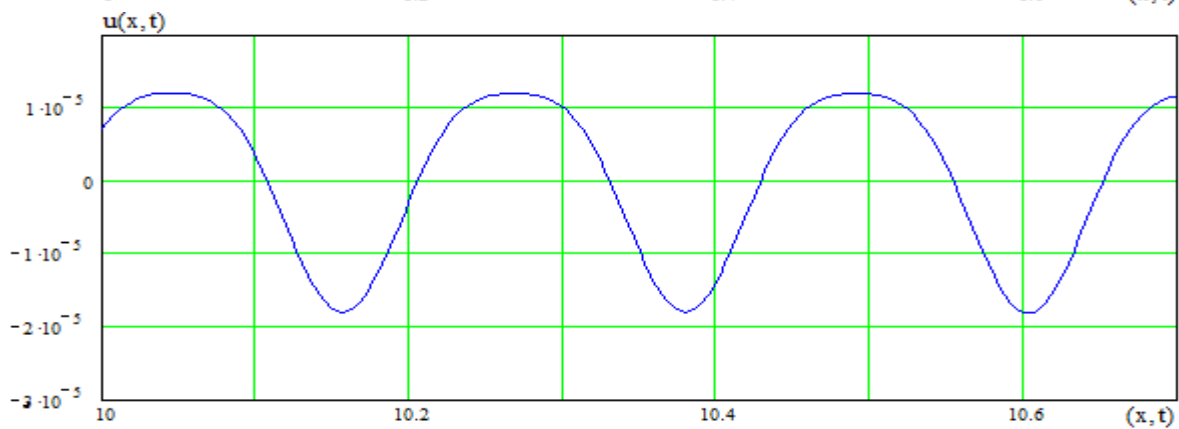
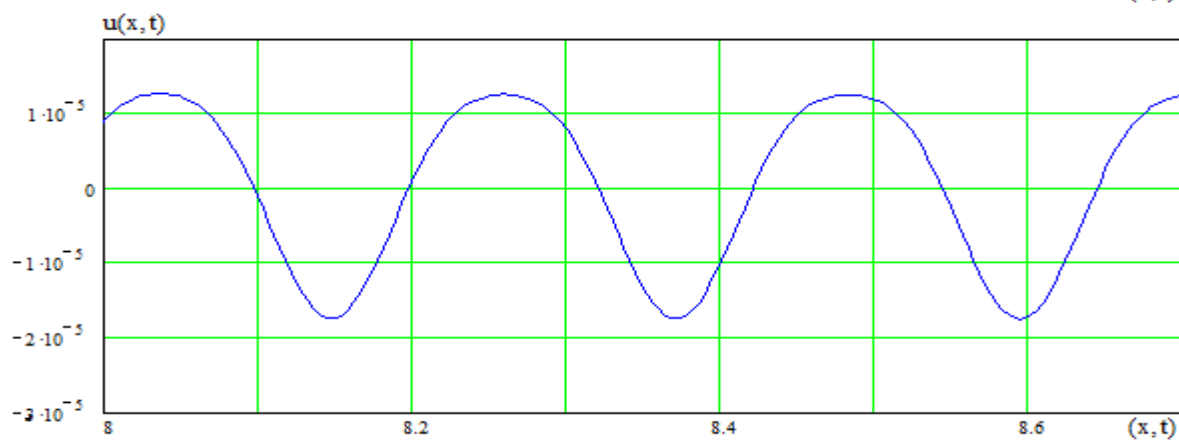
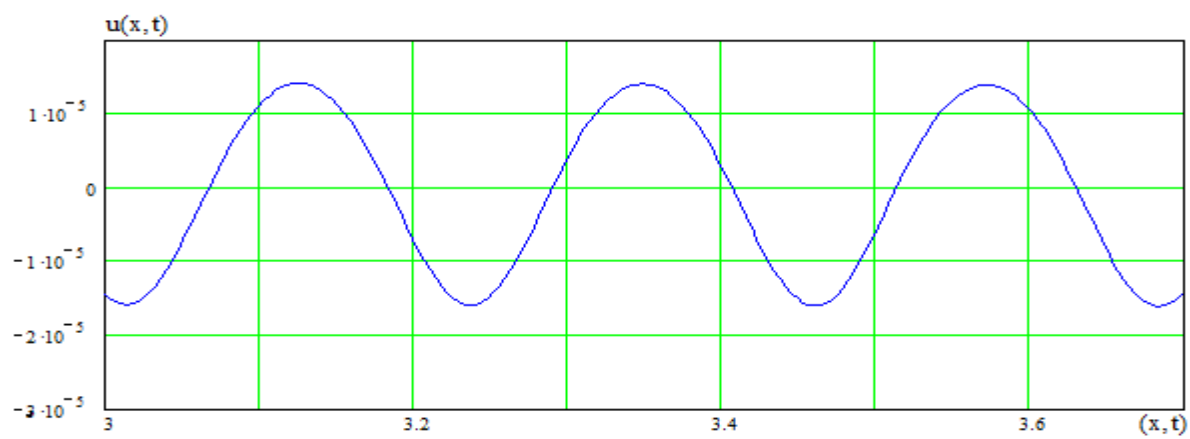
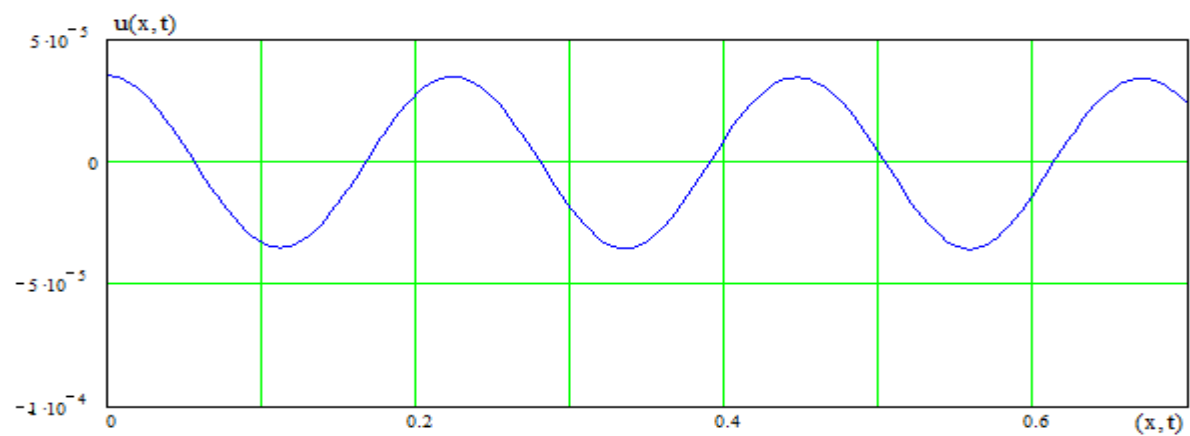


Рис. 4.25



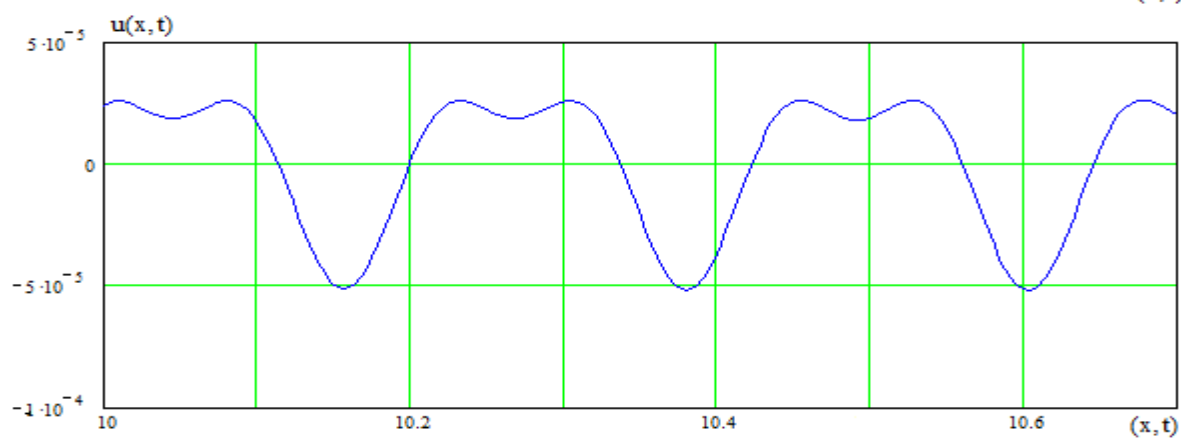
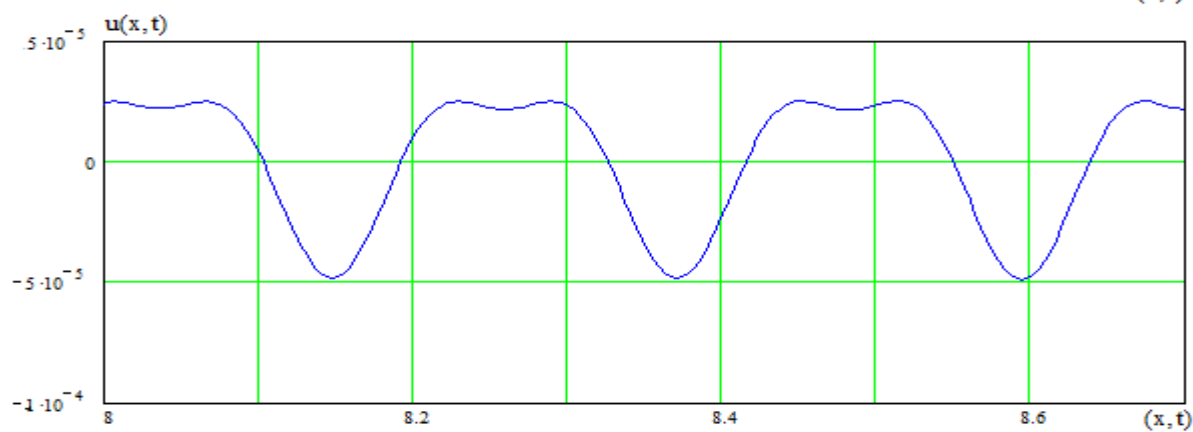
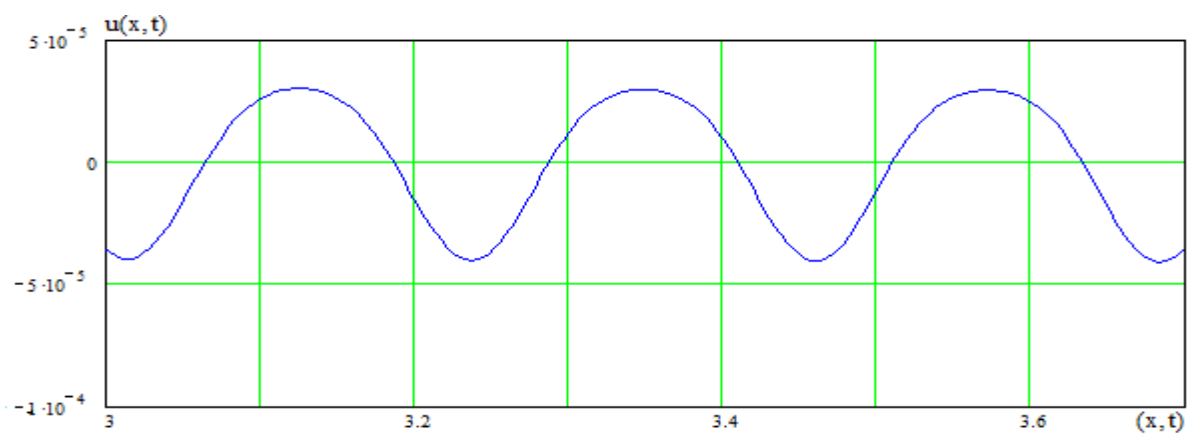
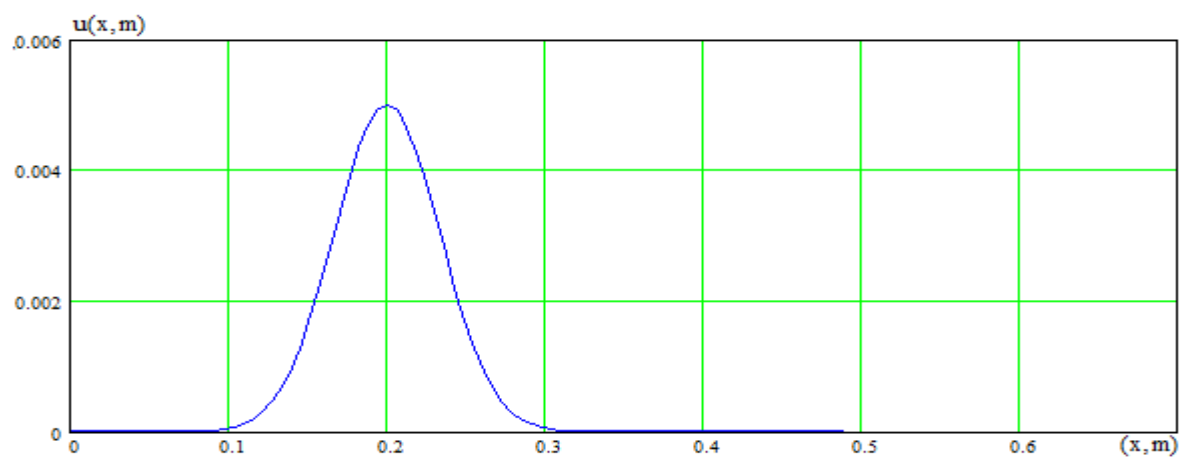


Рис. 4.26



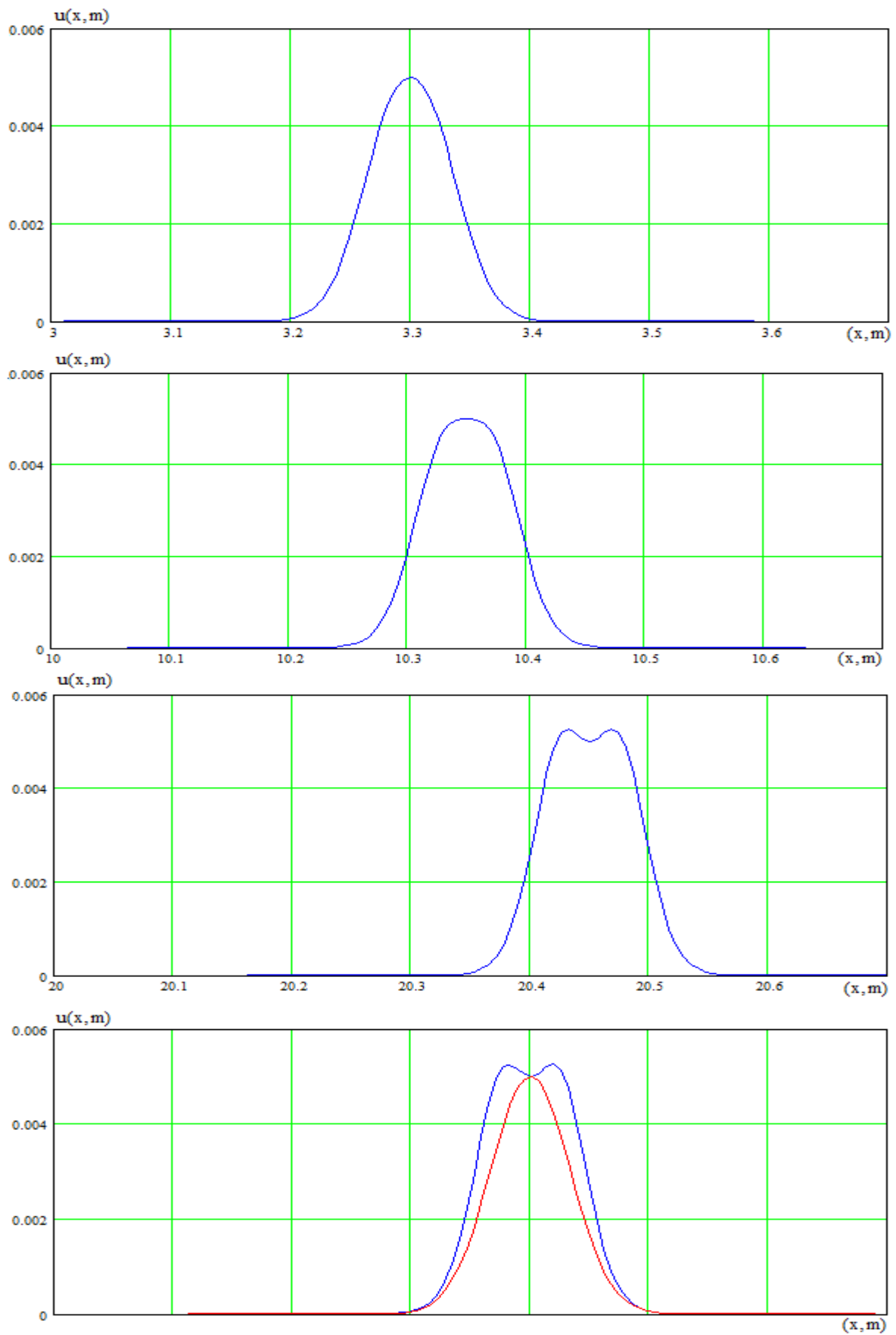
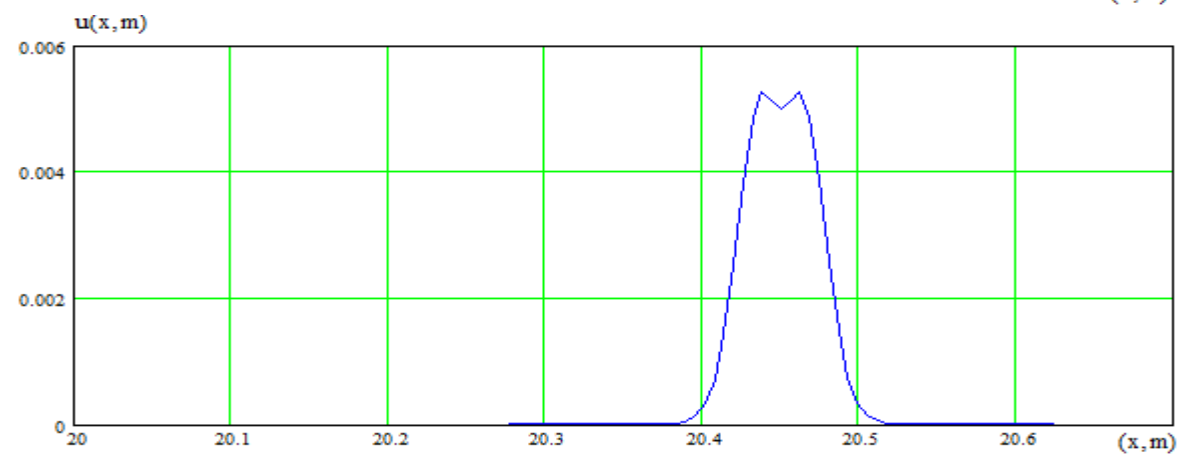
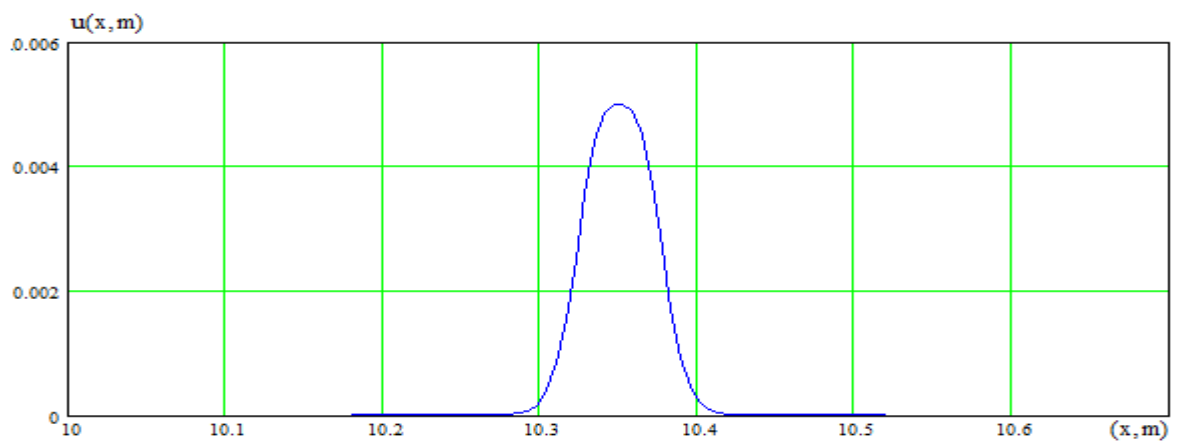
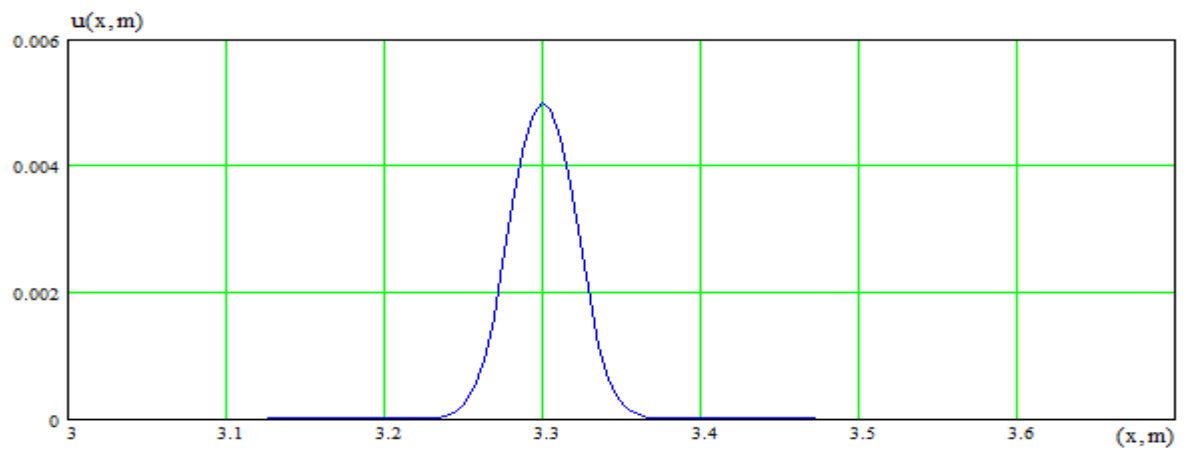
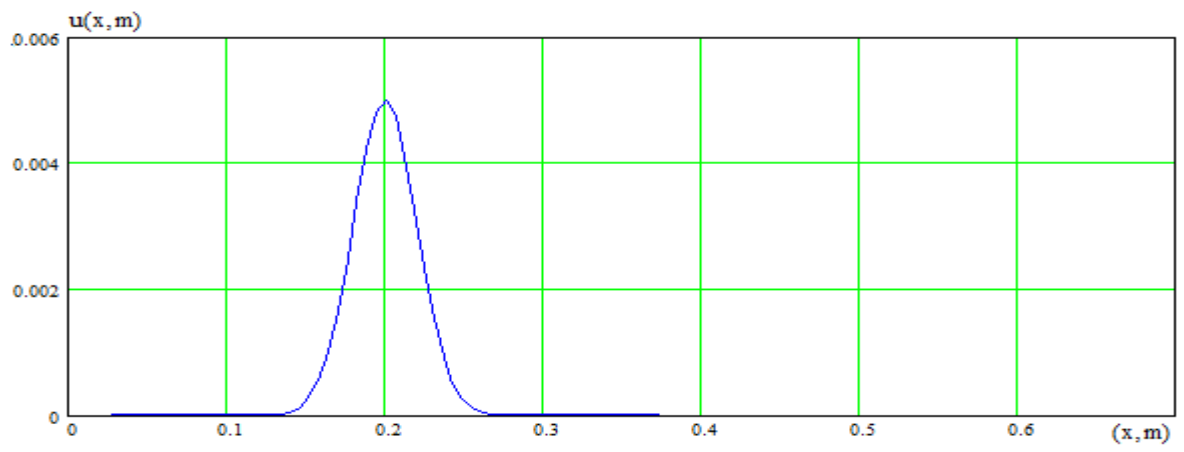


Рис. 4.35





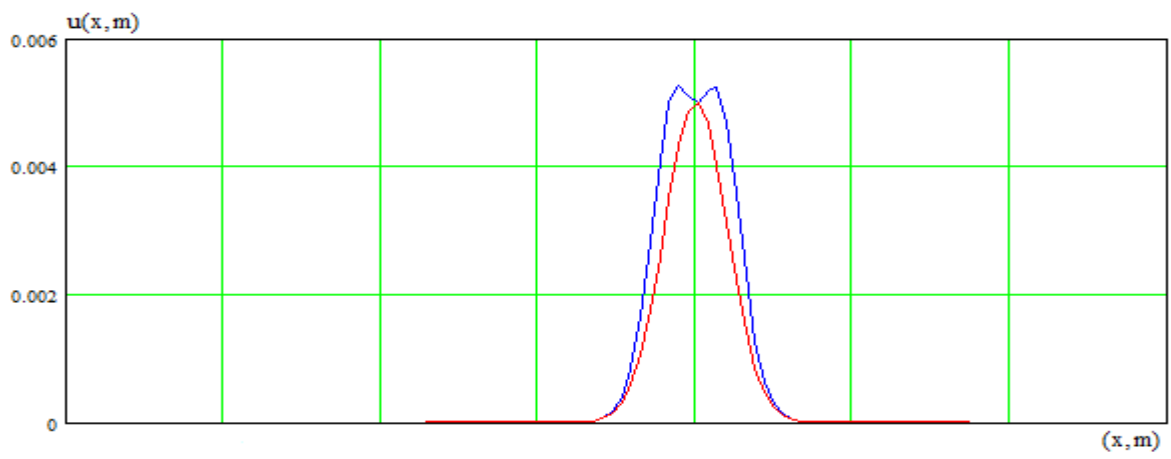
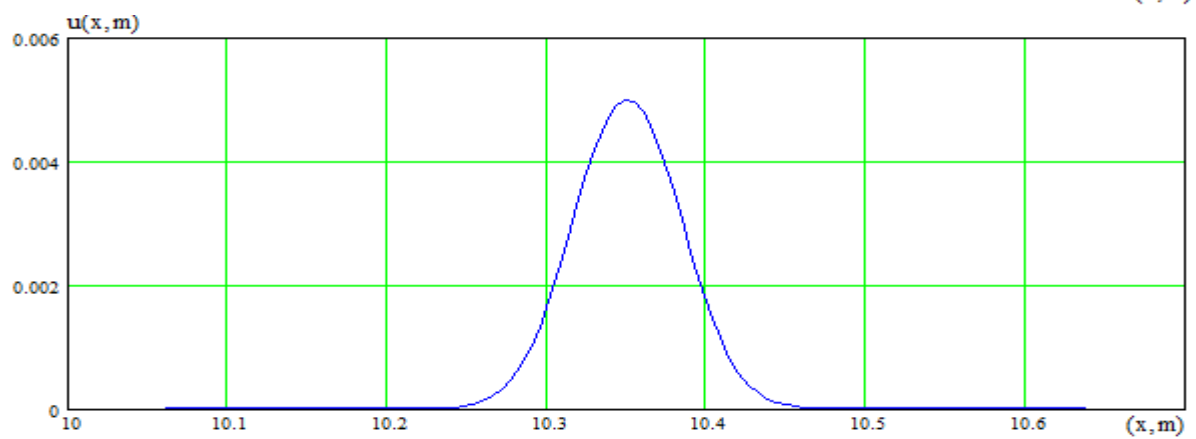
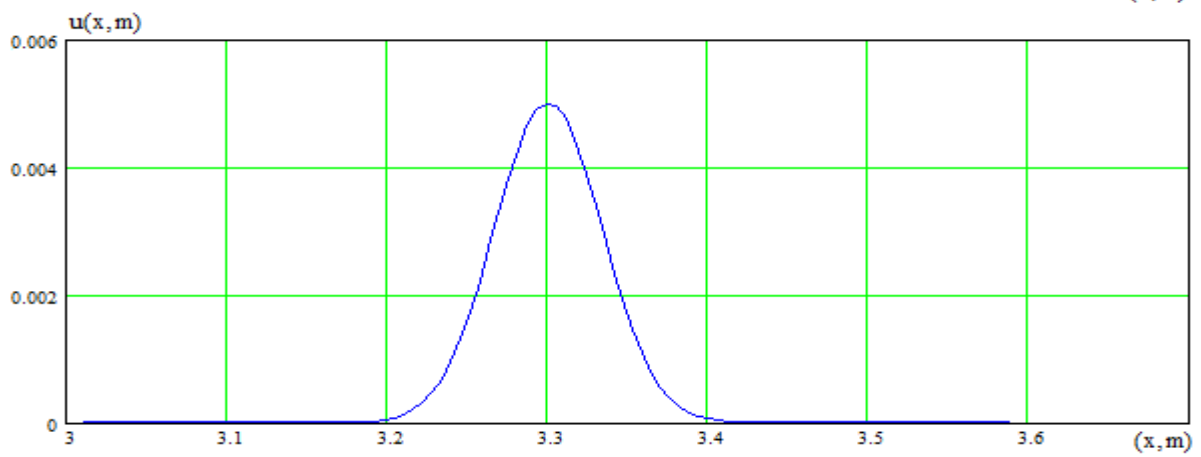
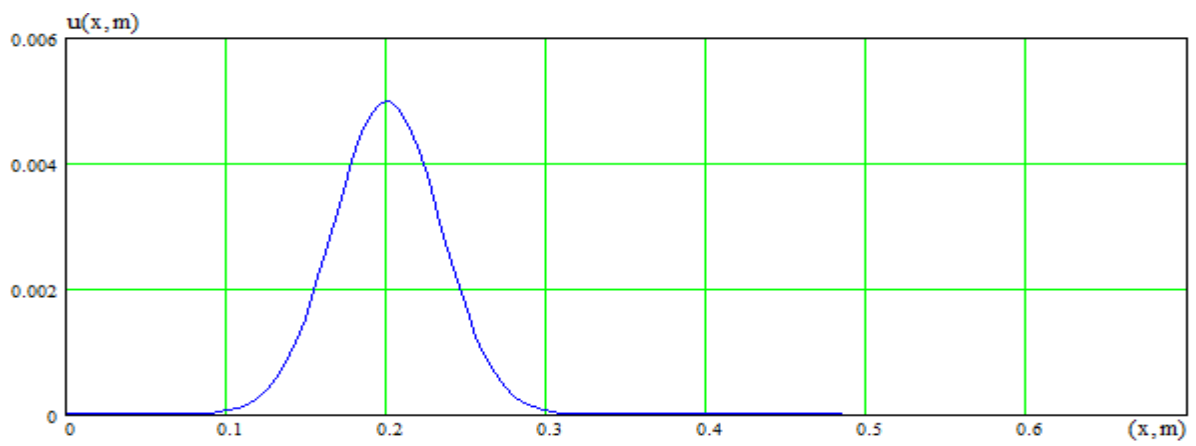


Рис. 4.36



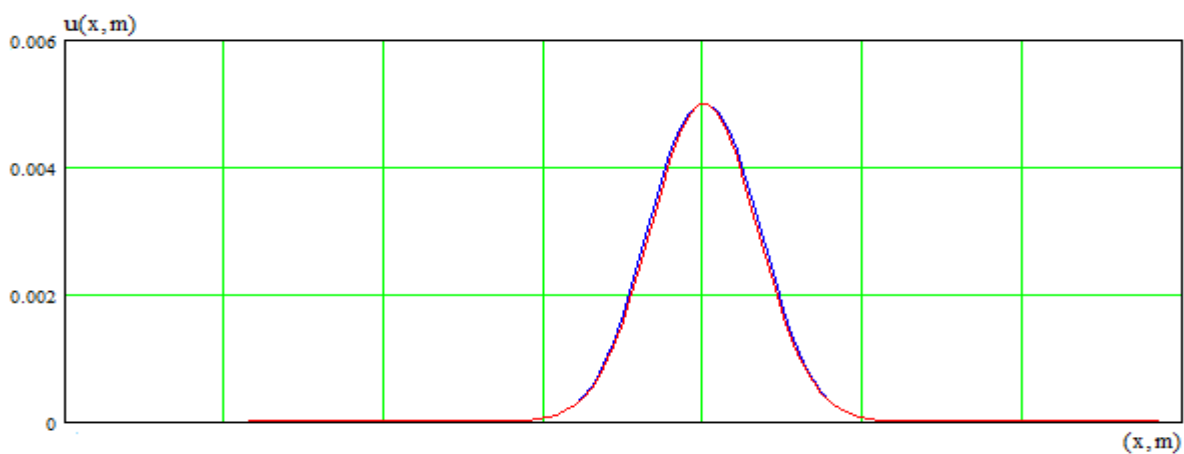
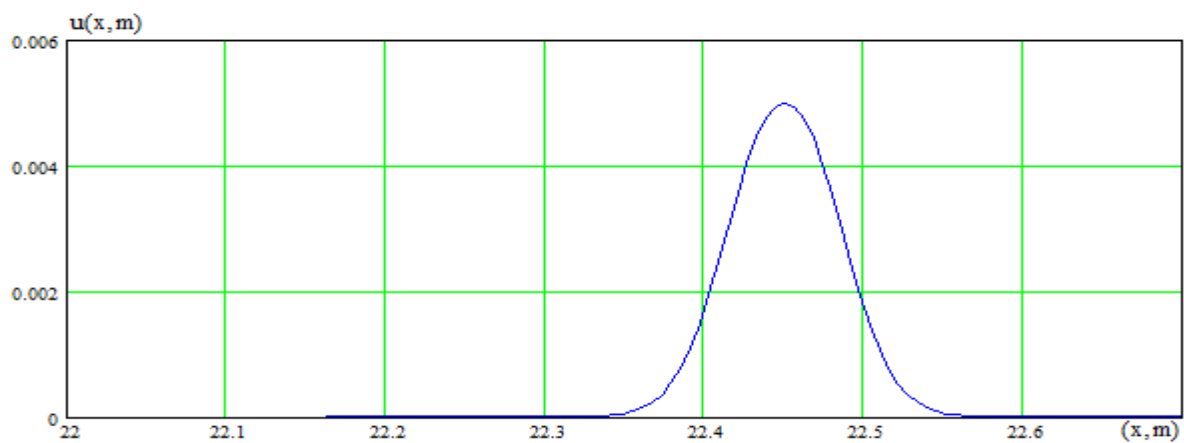
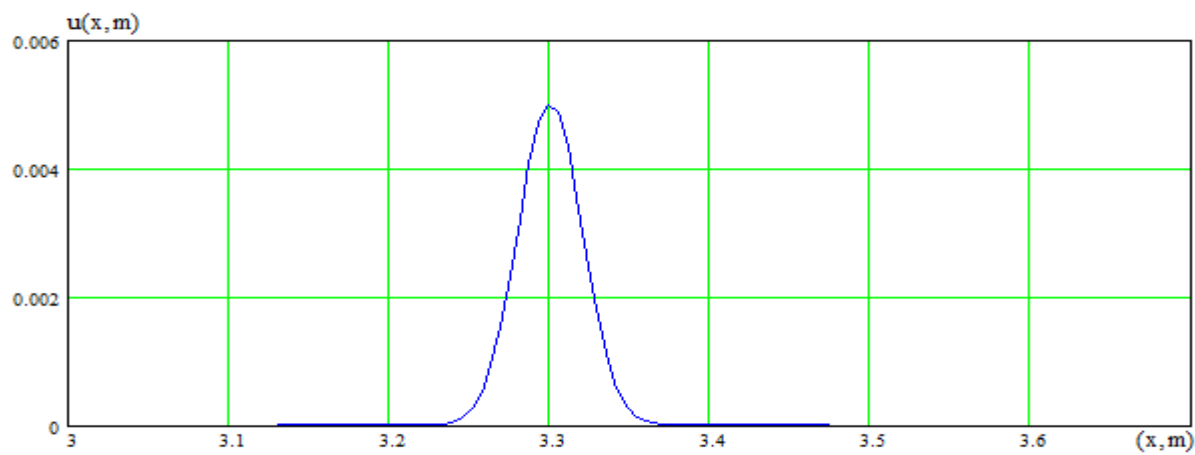
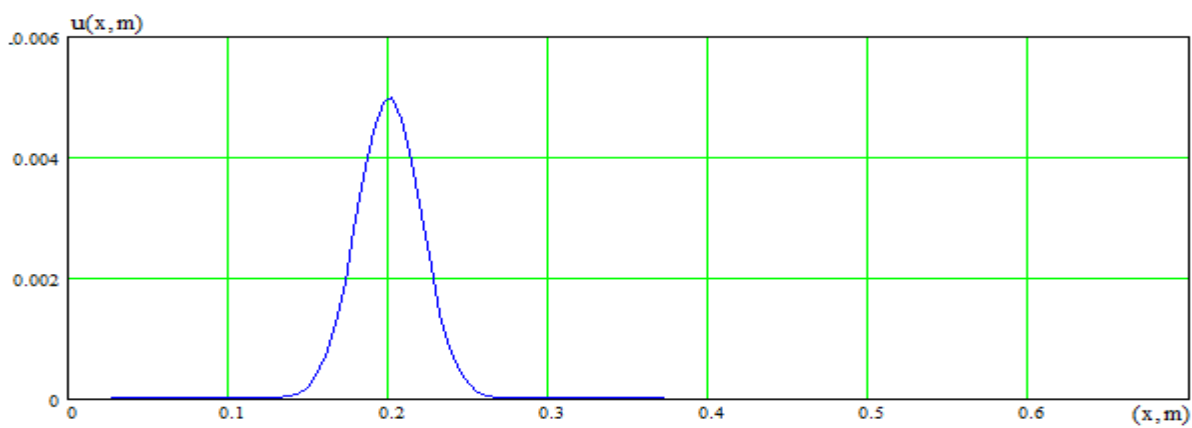
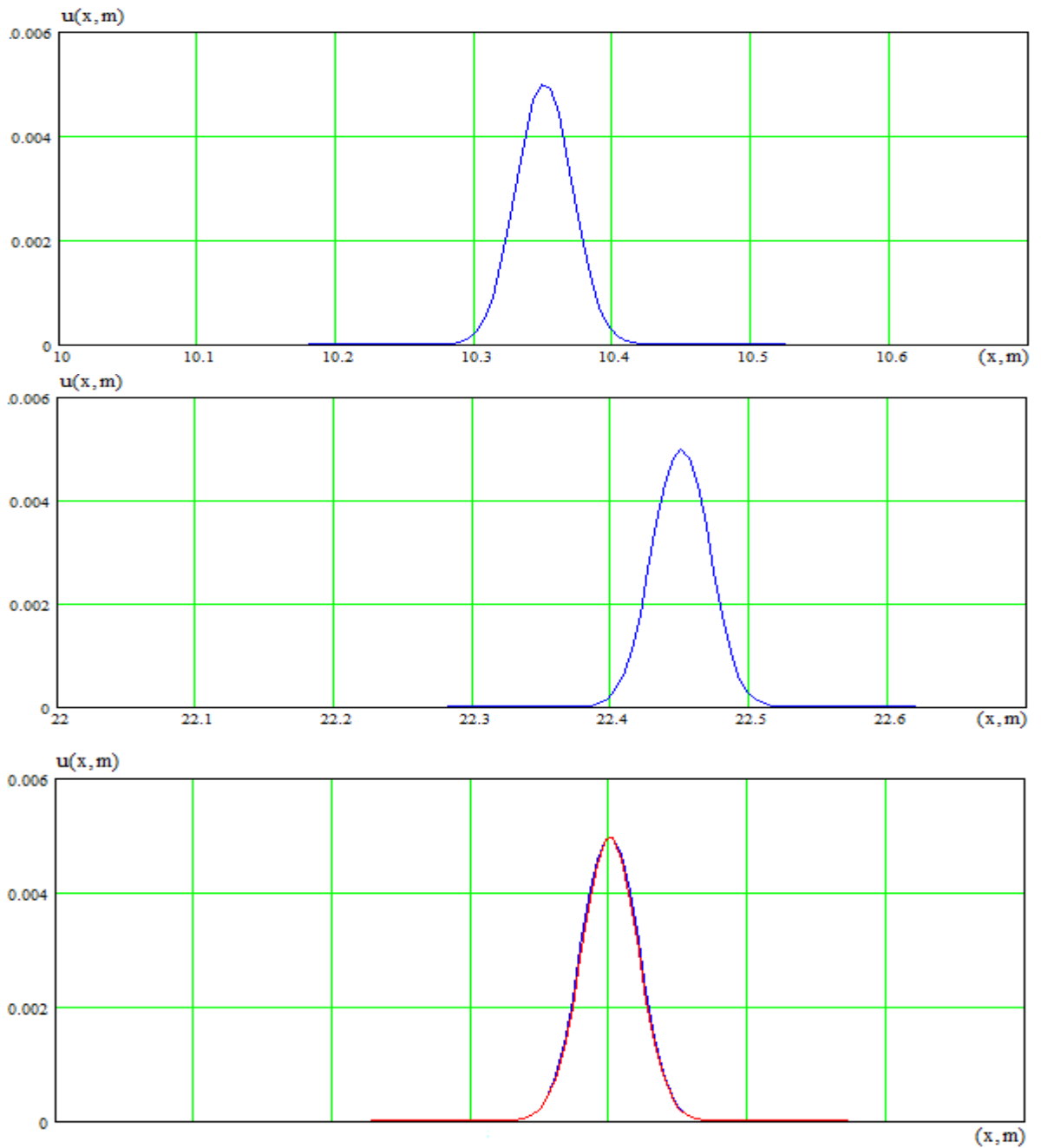


Рис. 4.38





Побудова попереднього графіка з урахуванням масштабу

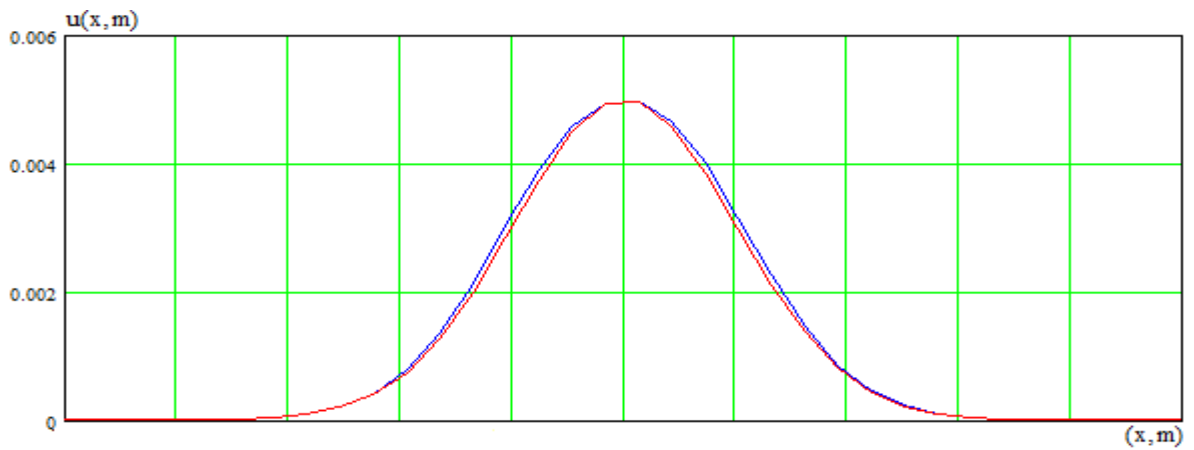
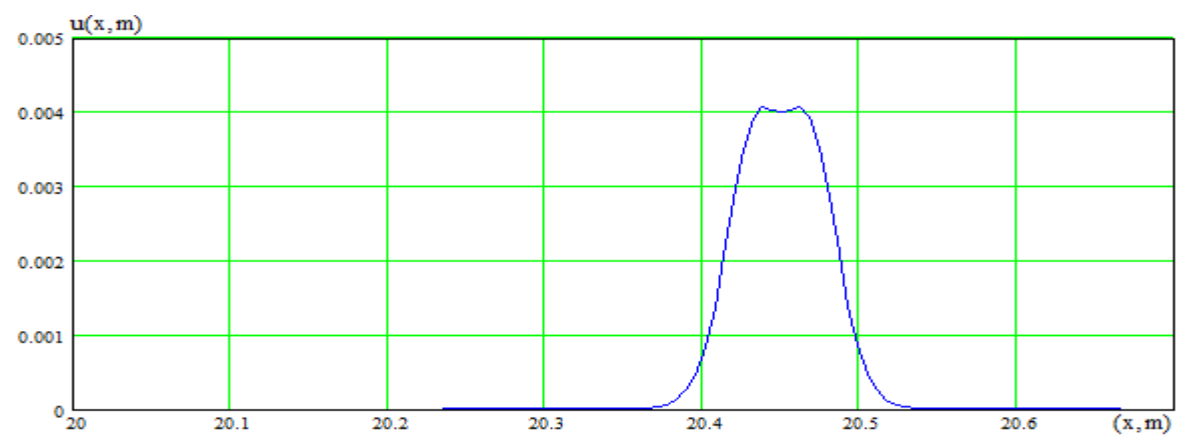
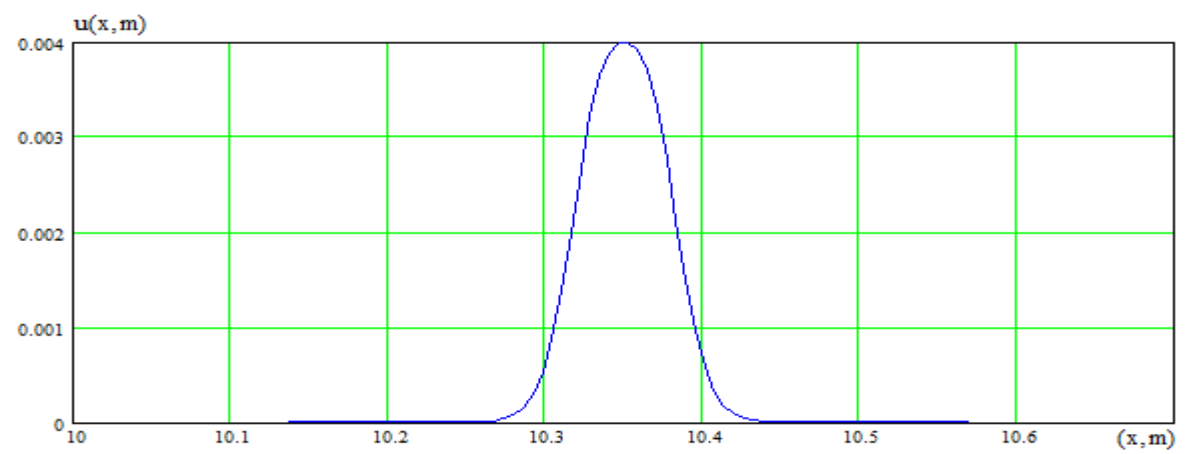
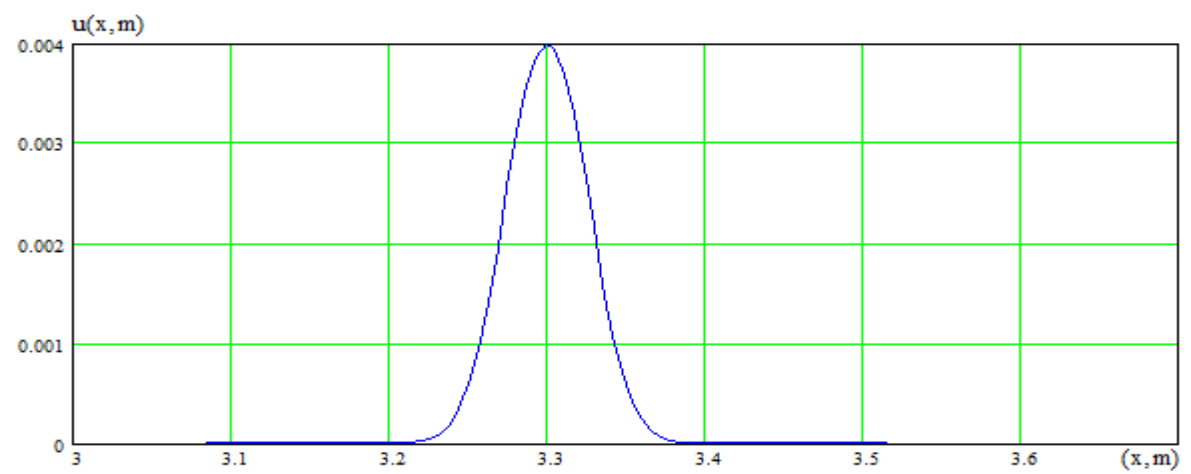
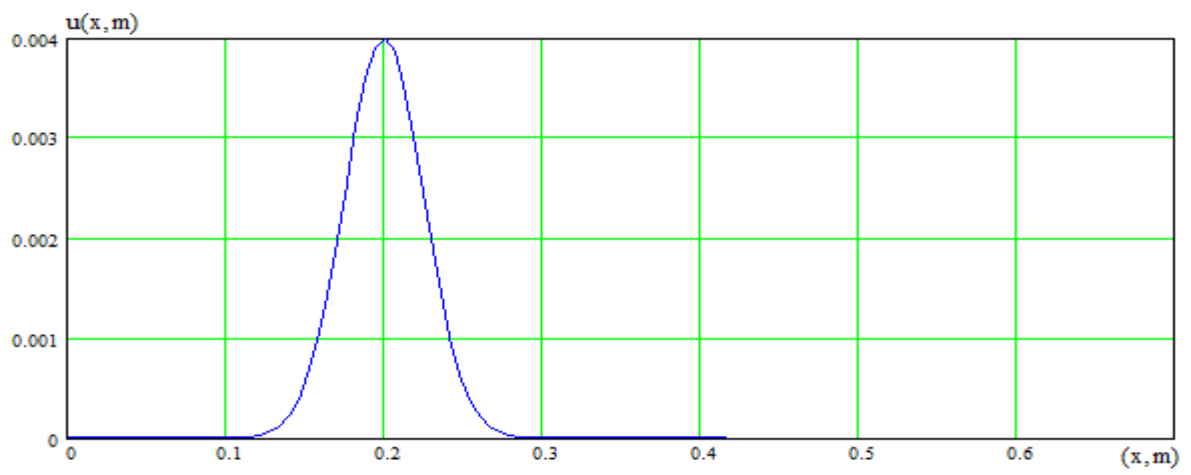


Рис. 4.39



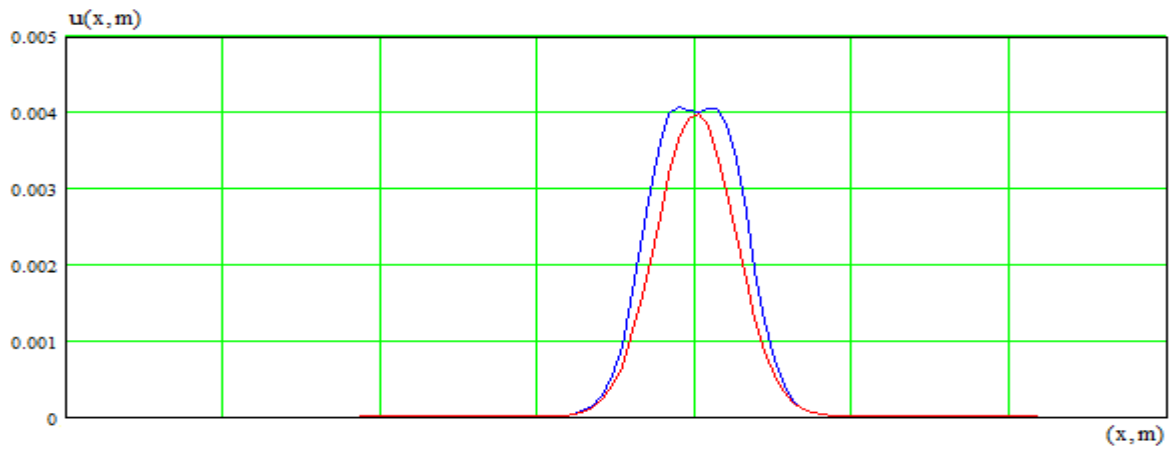
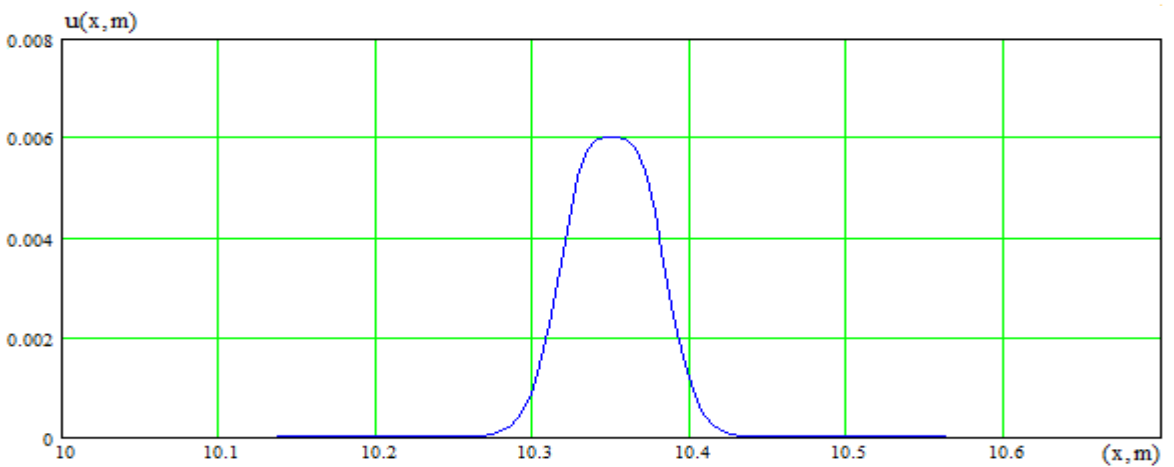
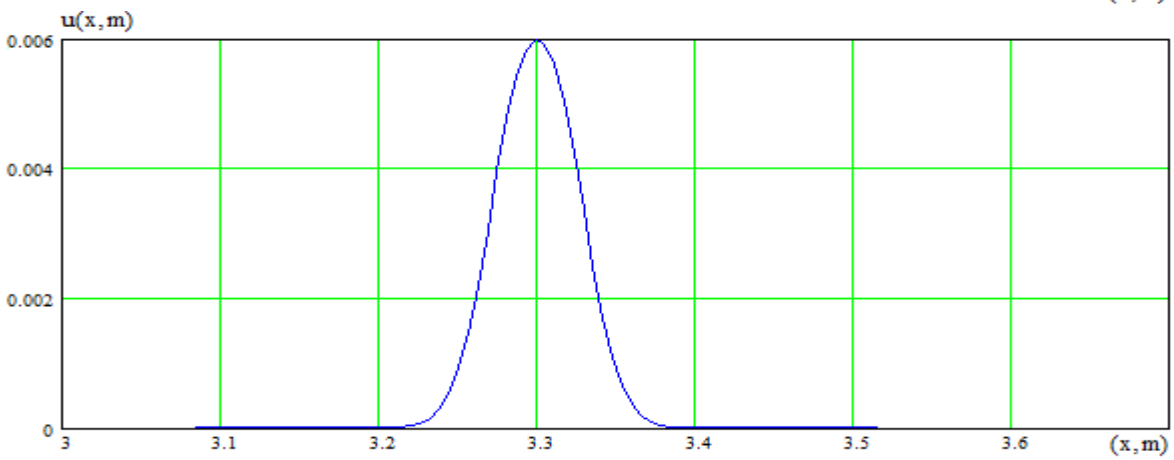
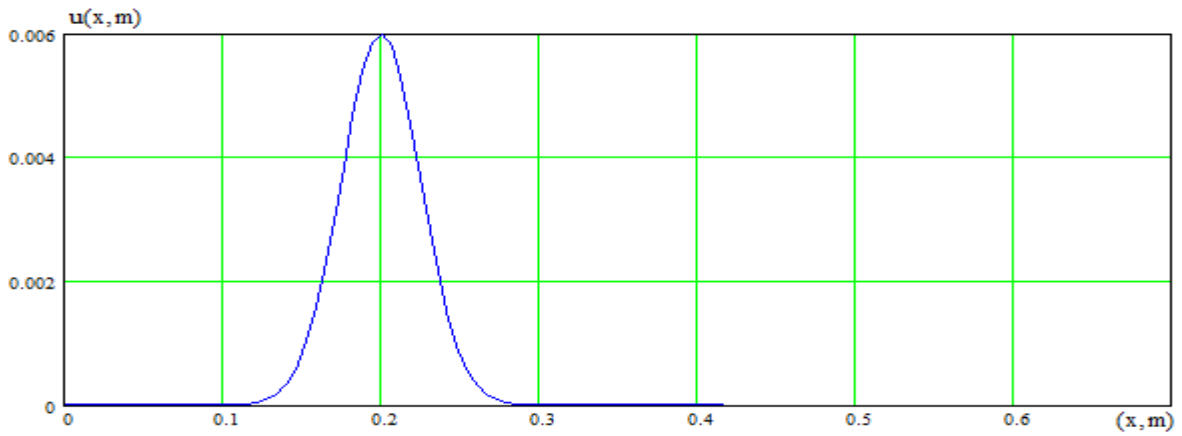


Рис. 4.42



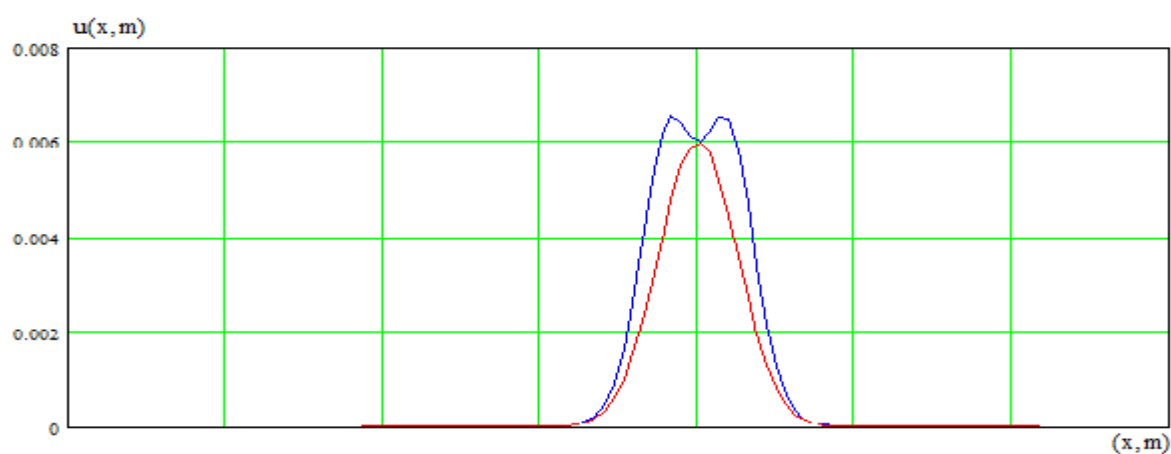
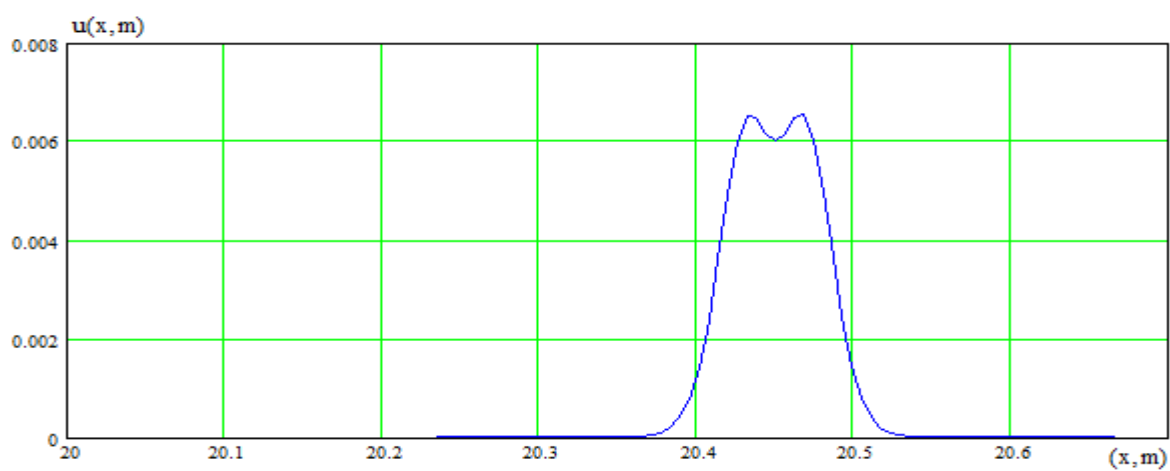
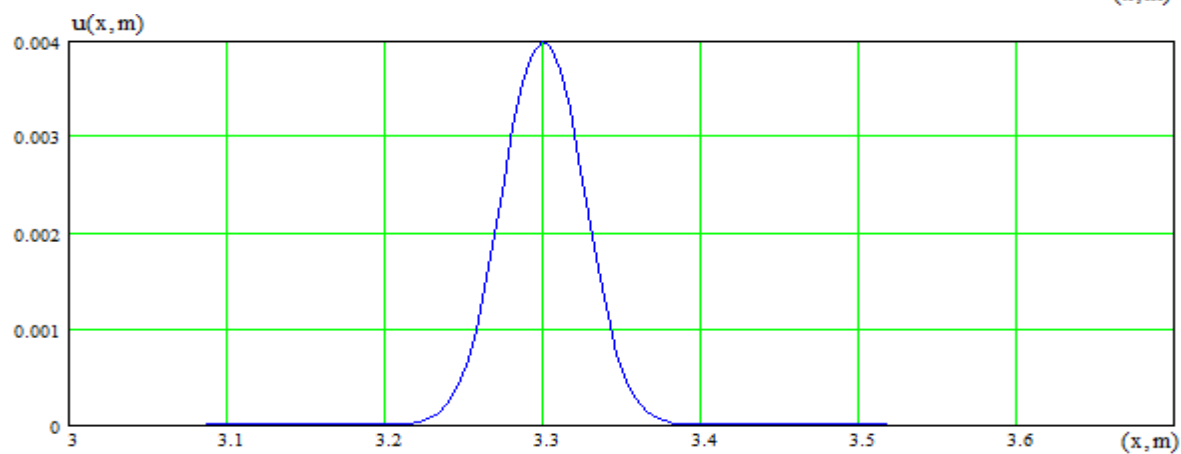
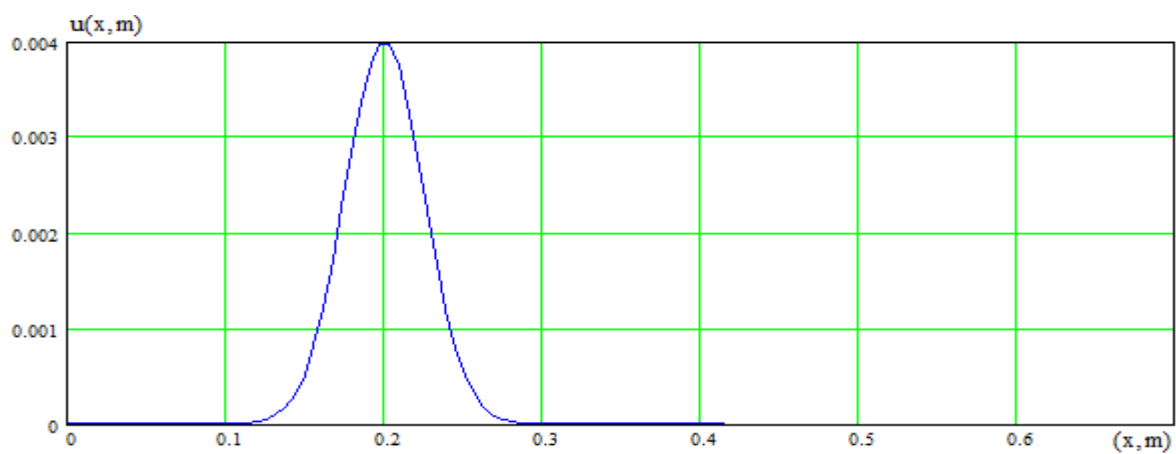


Рис. 4.43



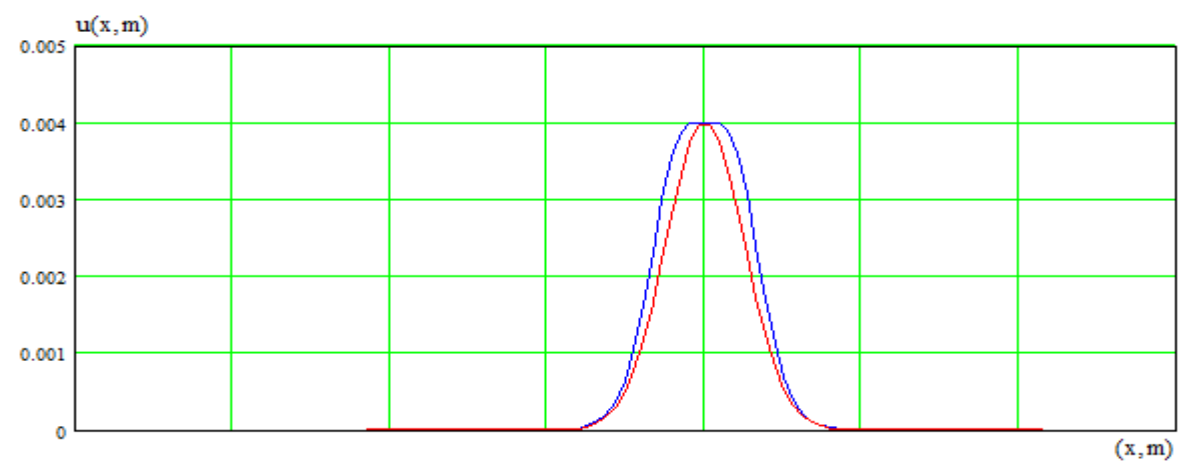
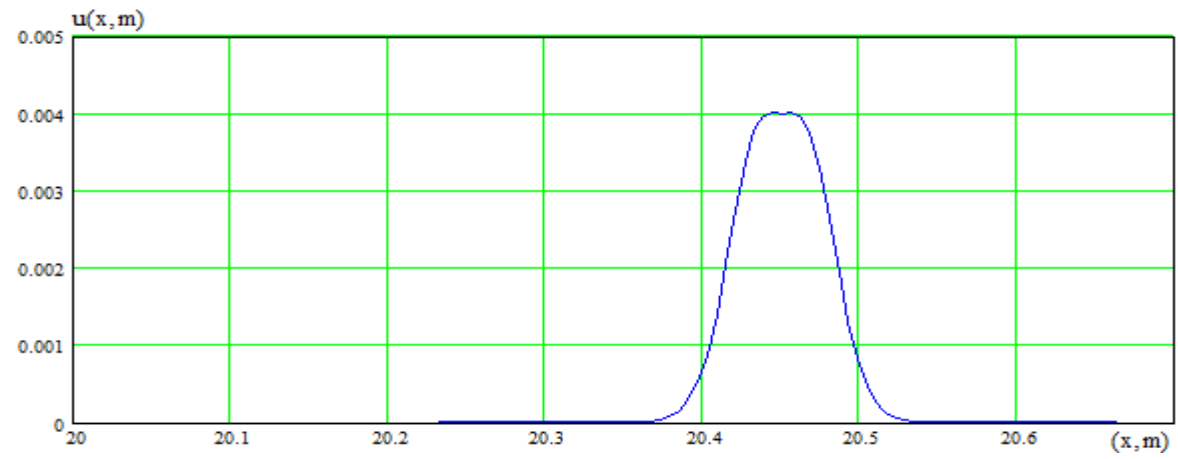
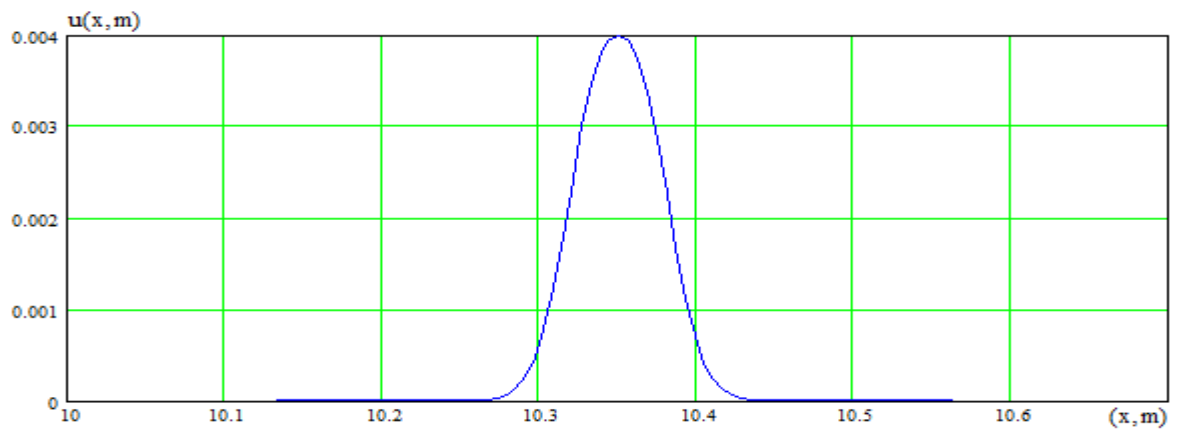
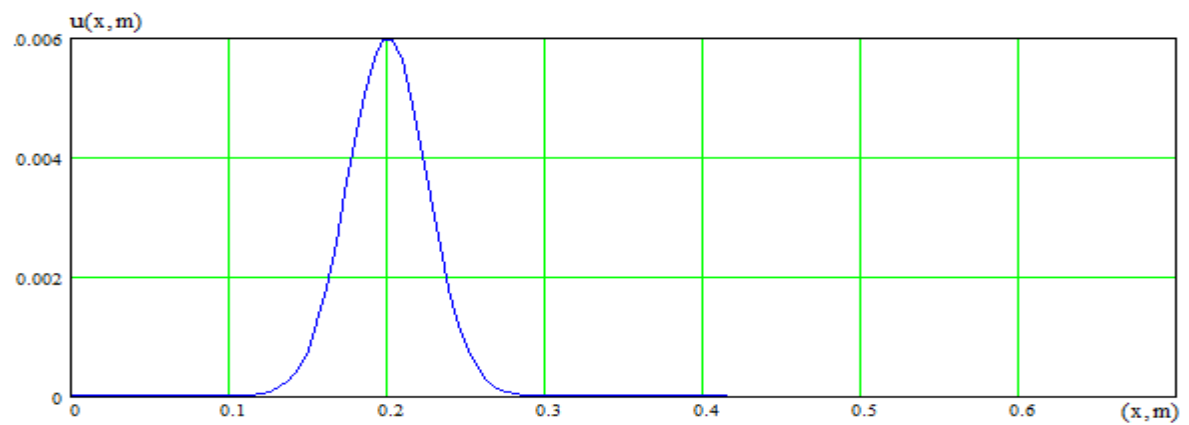


Рис. 4.45



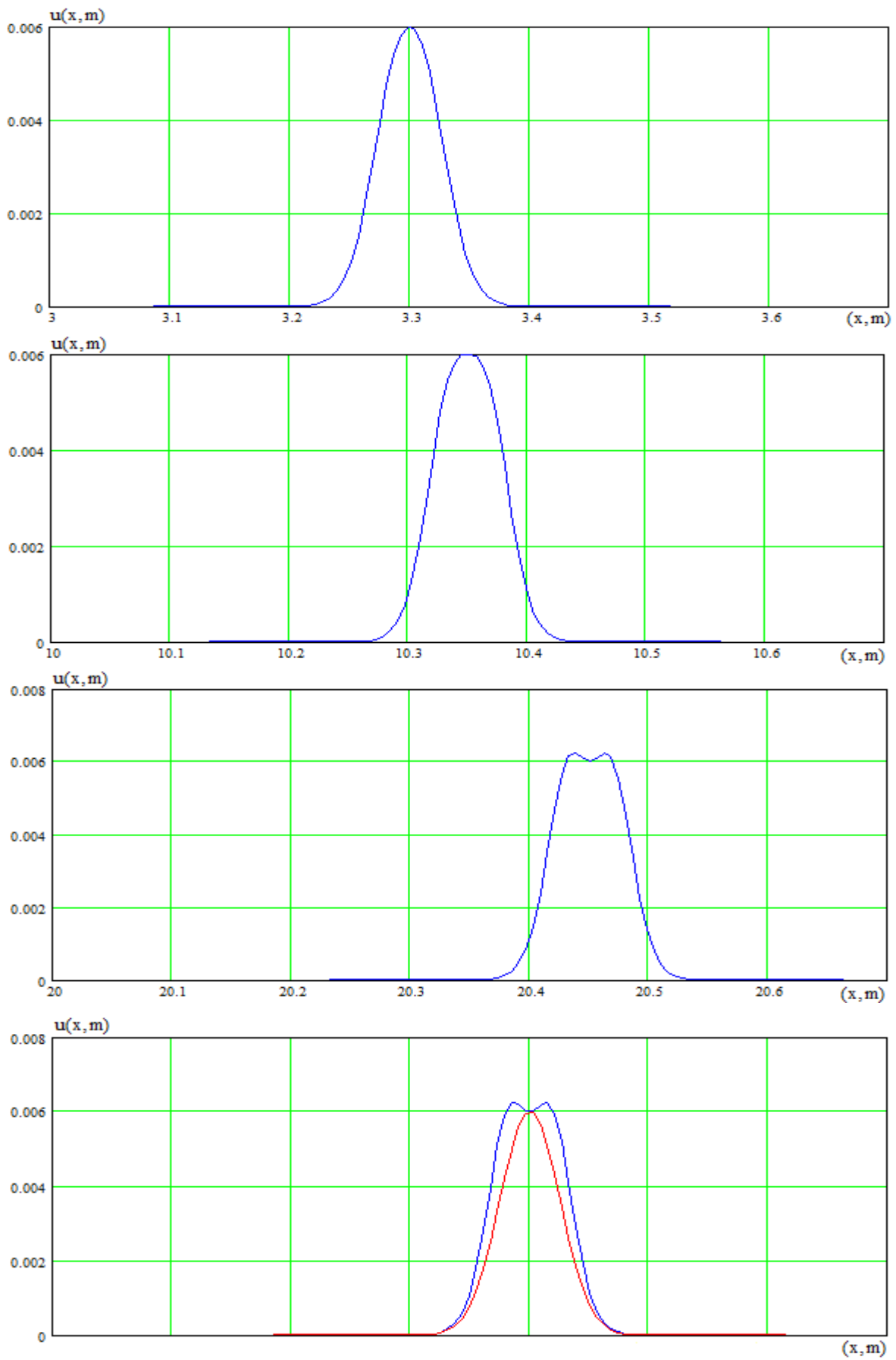
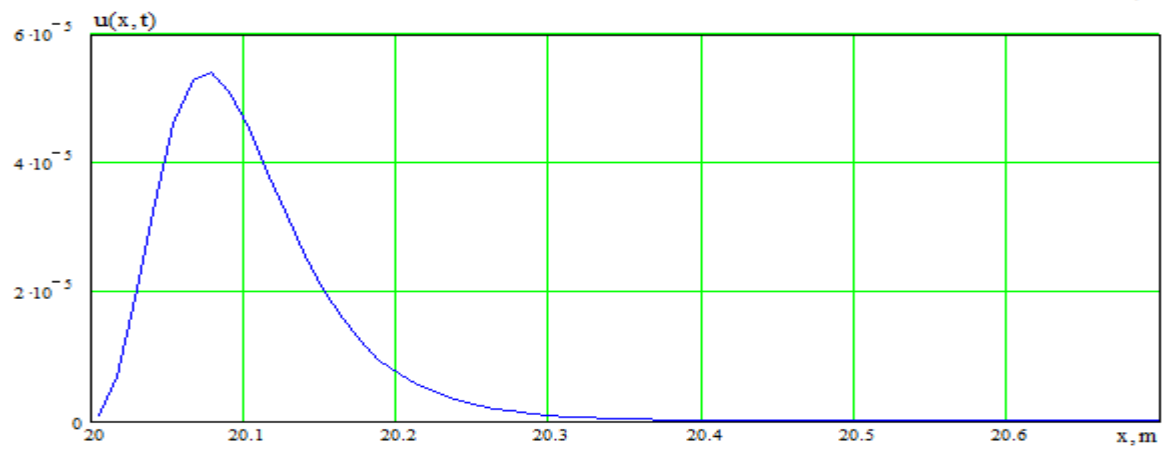
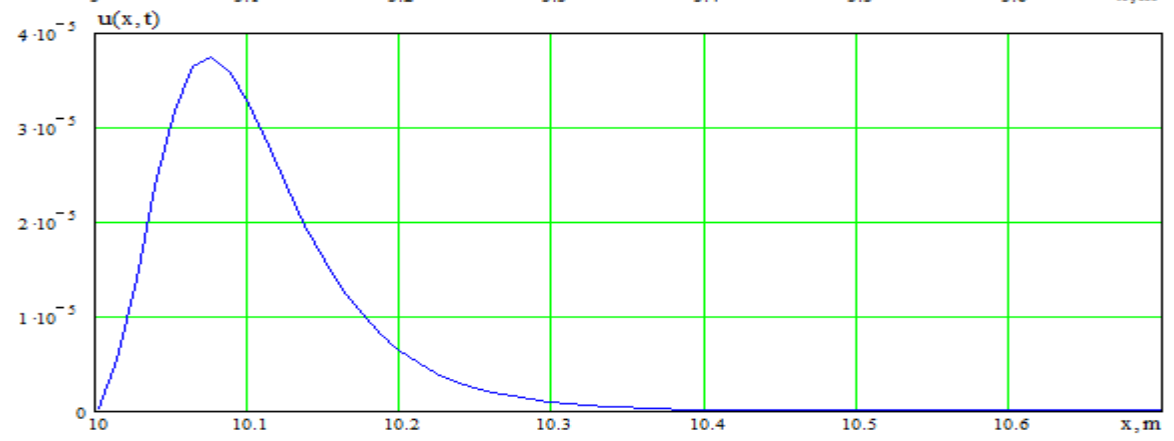
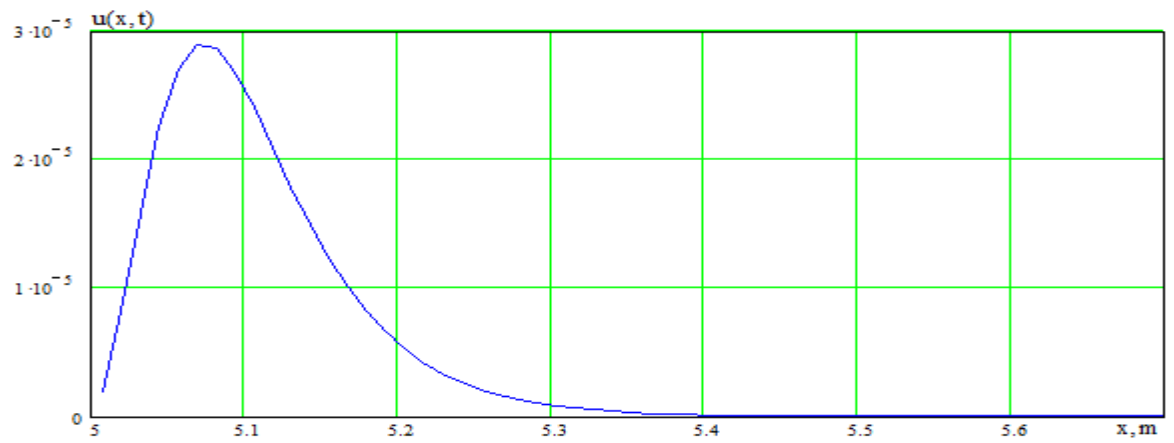
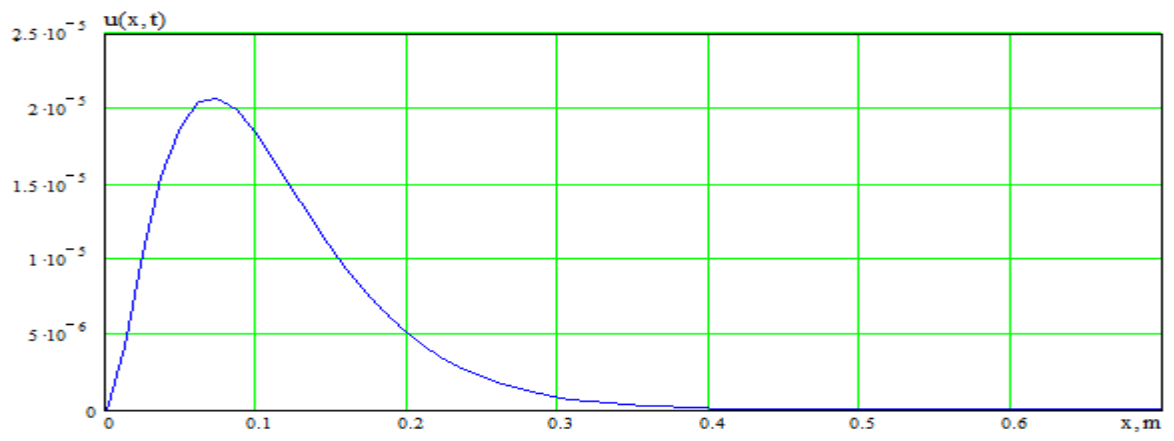


Рис. 4.46





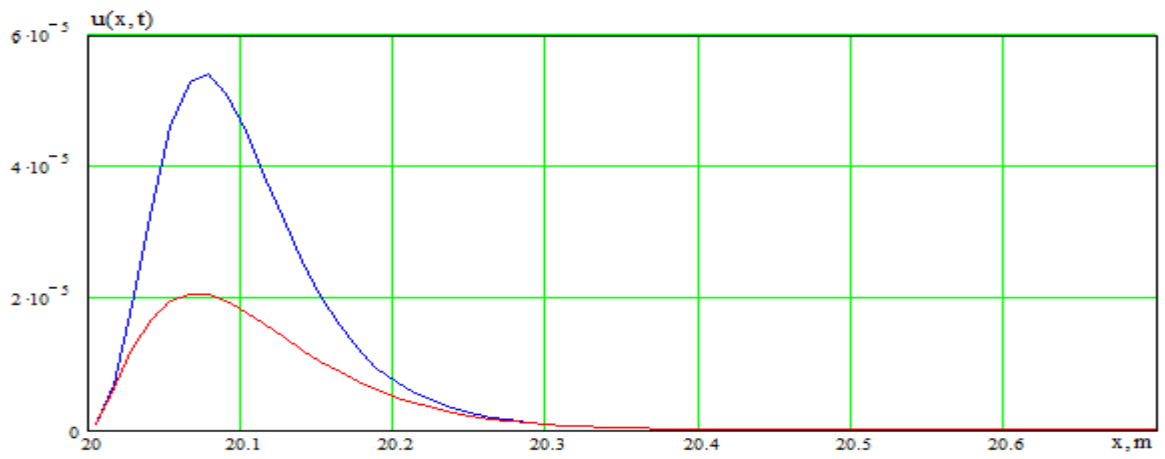
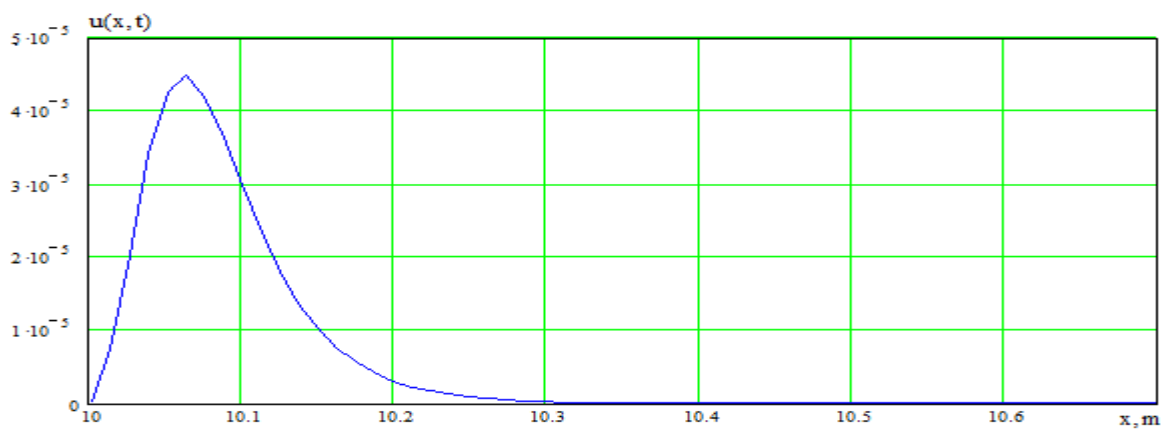
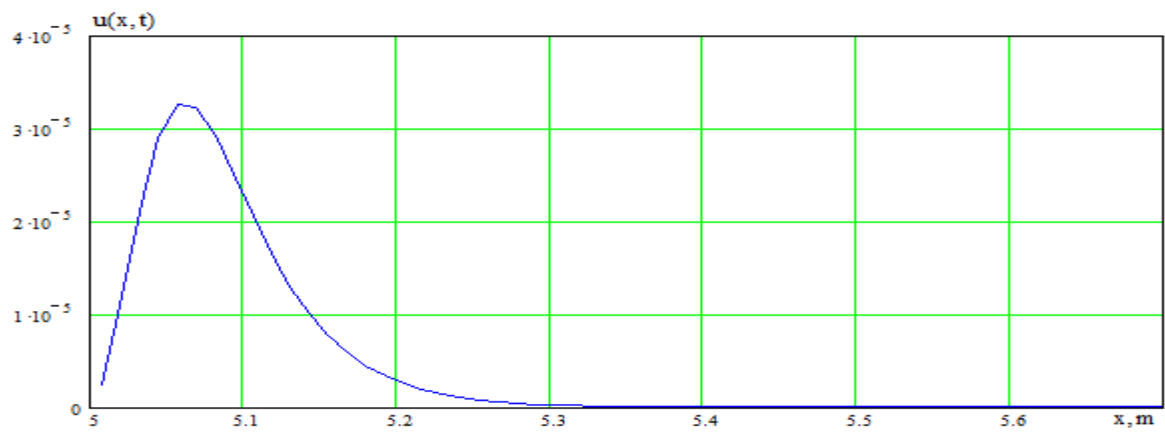
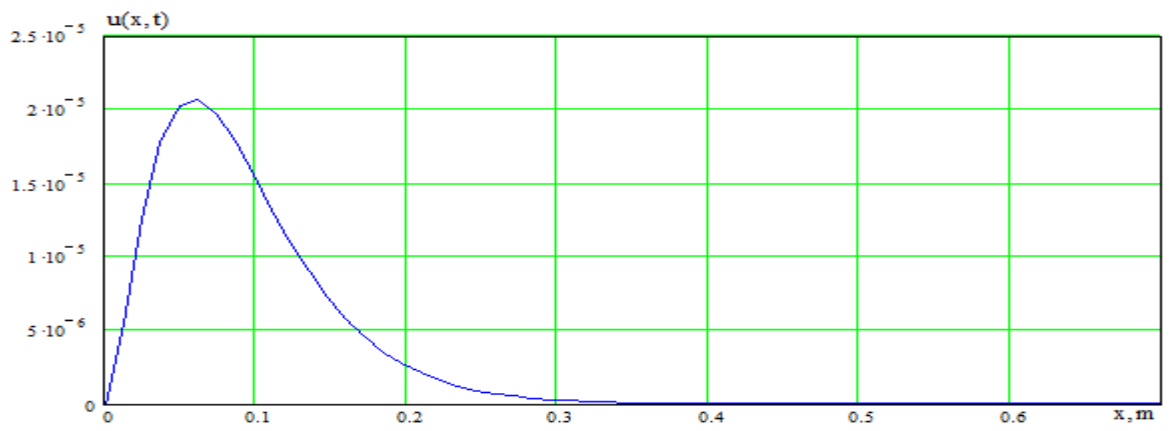


Рис. 4.53



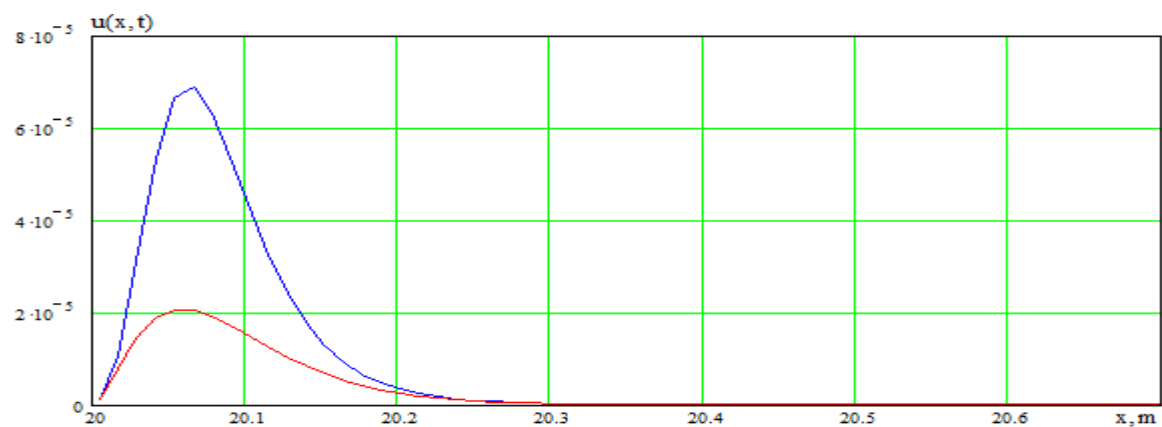
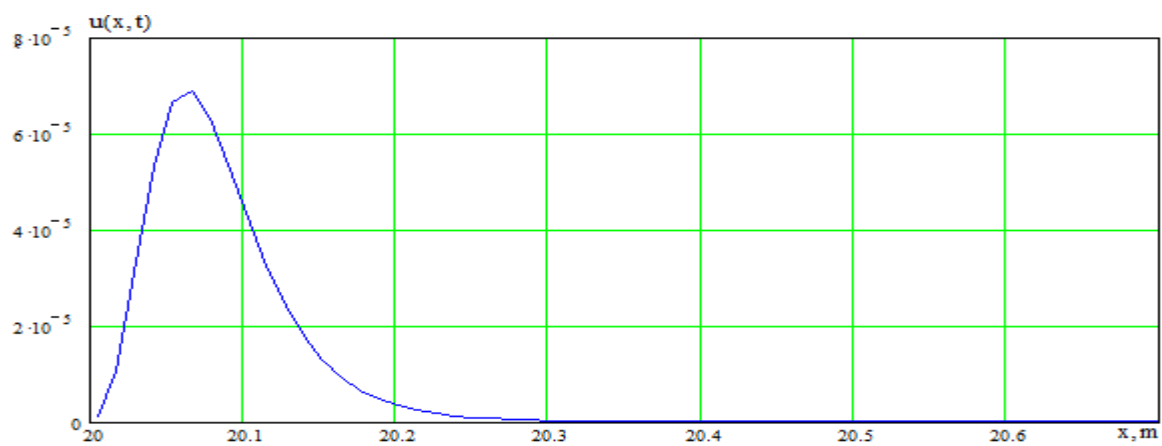
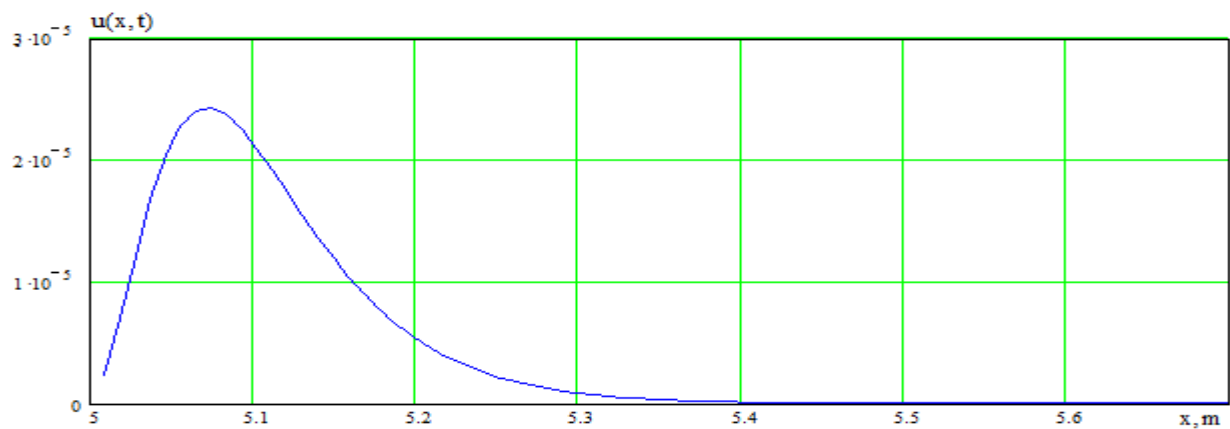
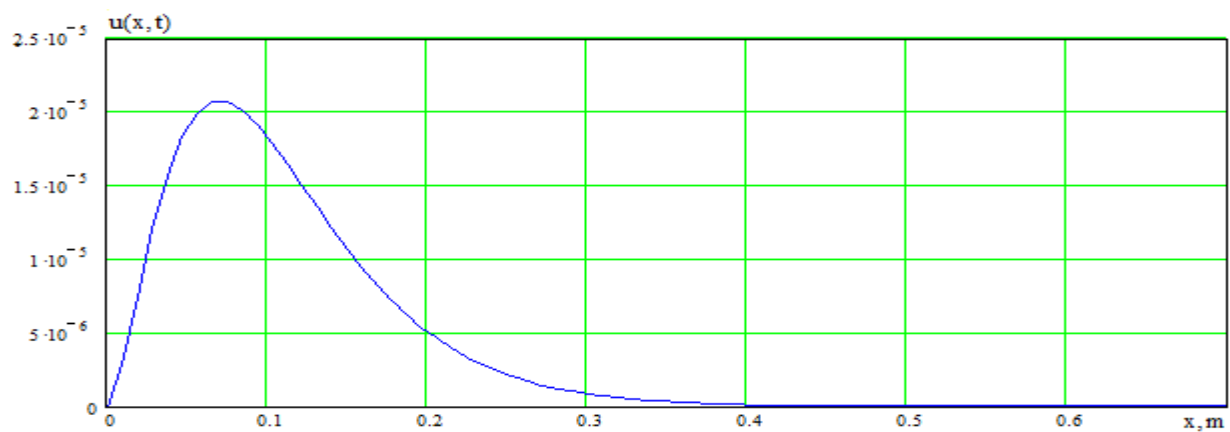


Рис. 4.54



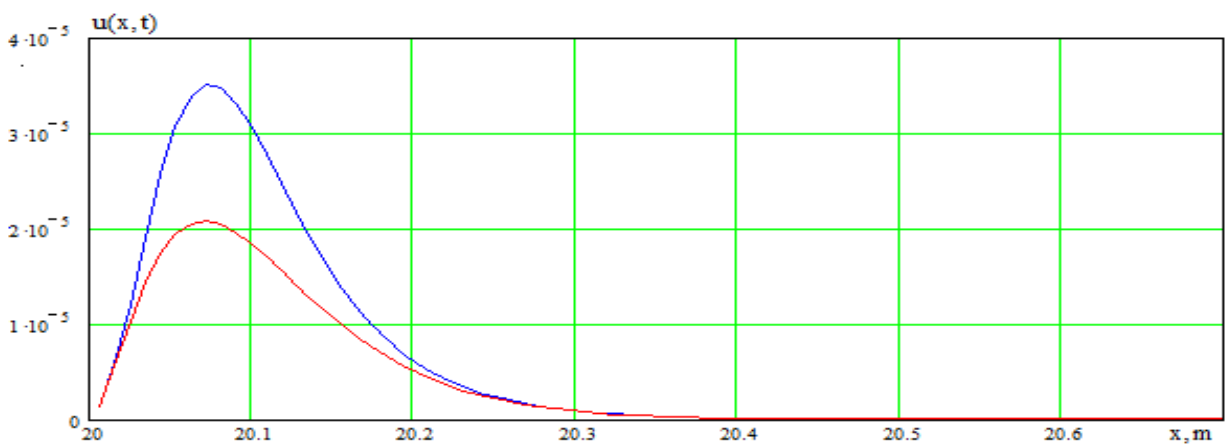
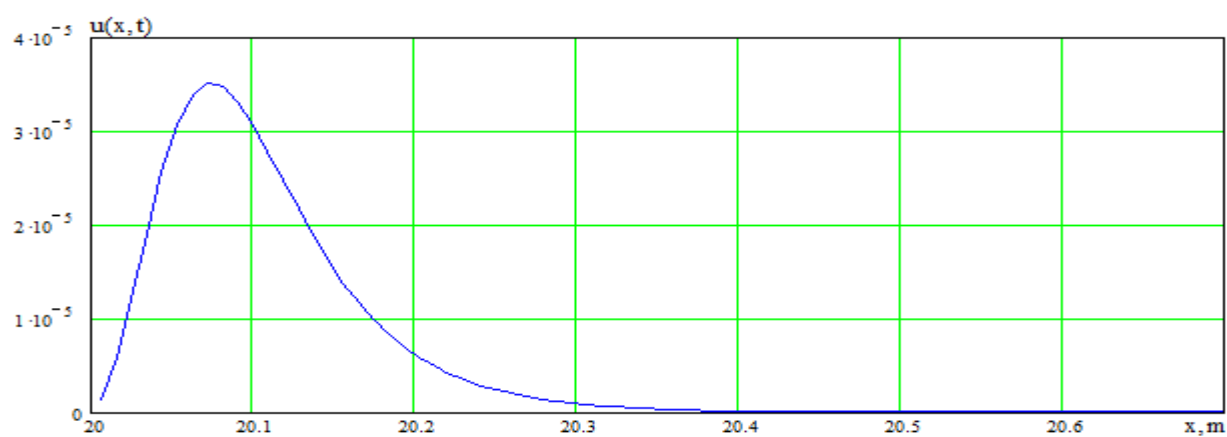
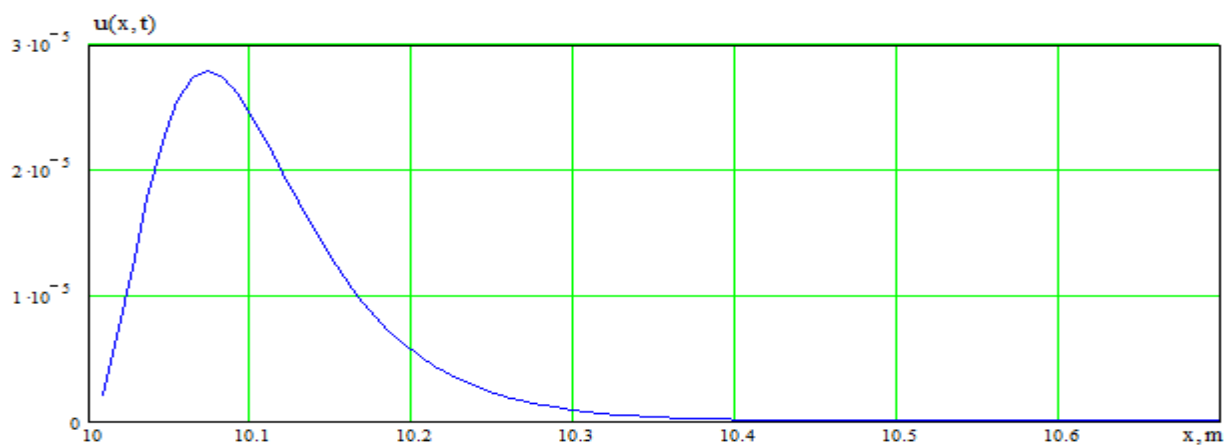
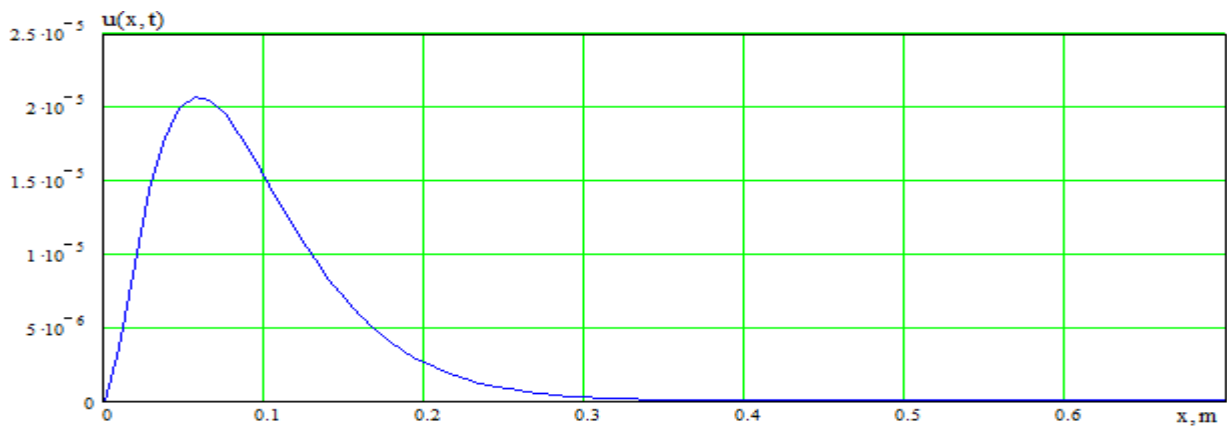


Рис. 4.56



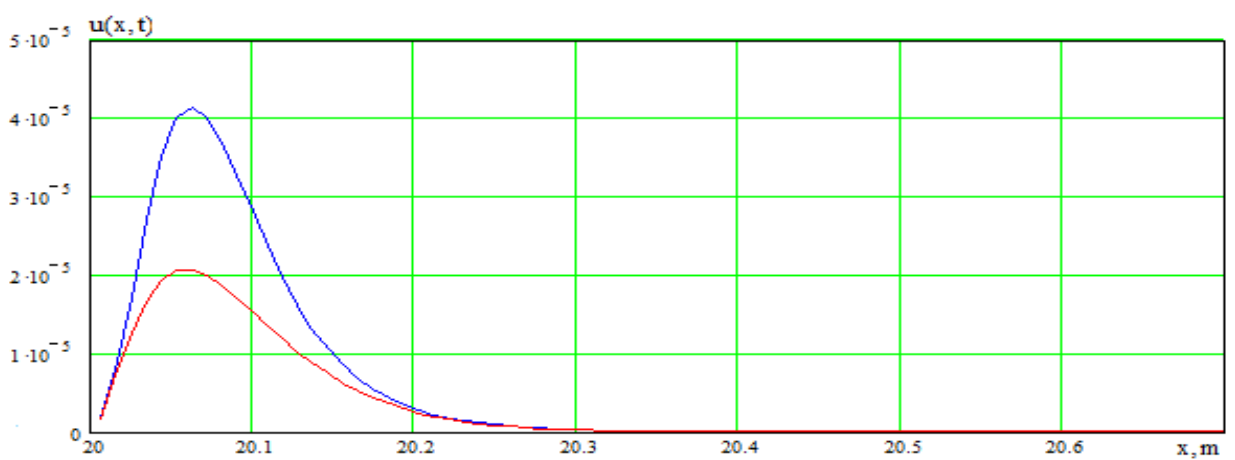
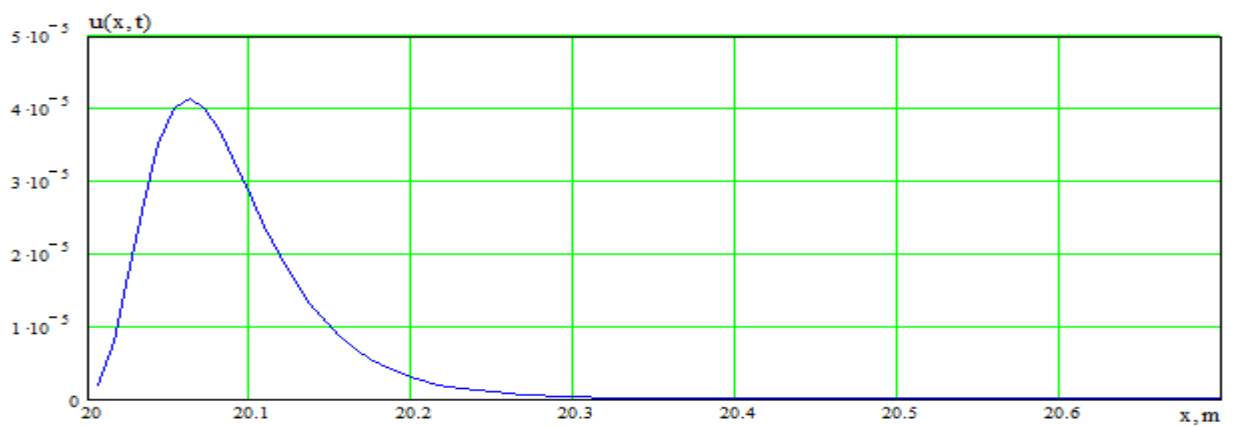
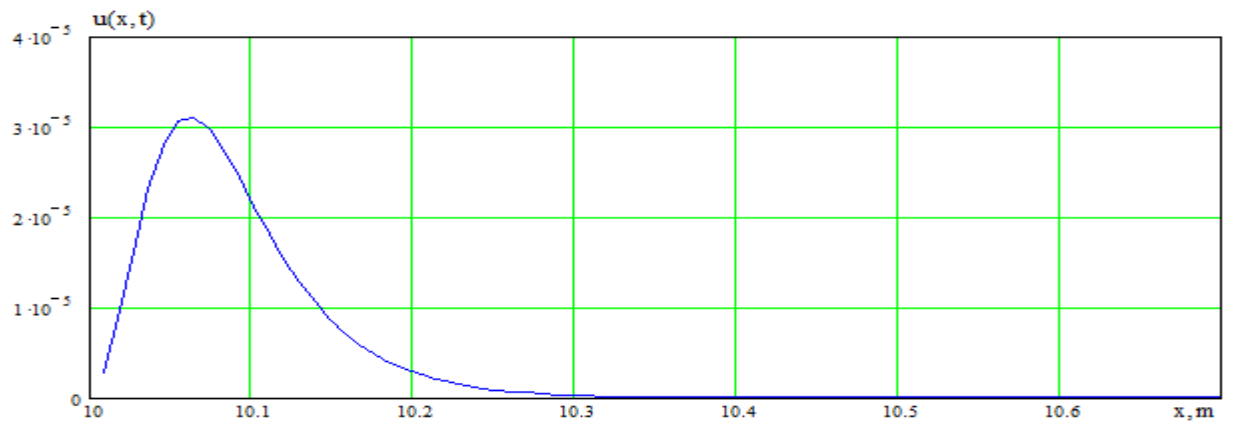
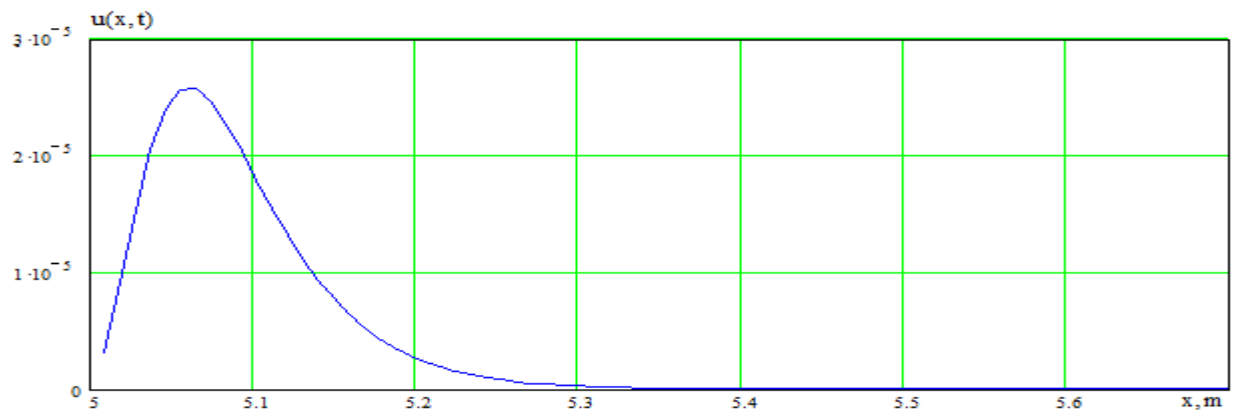
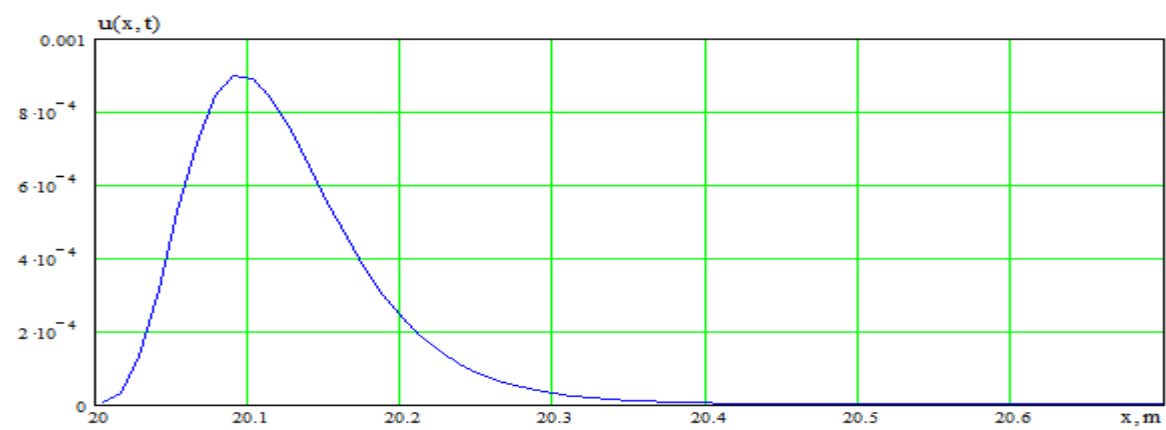
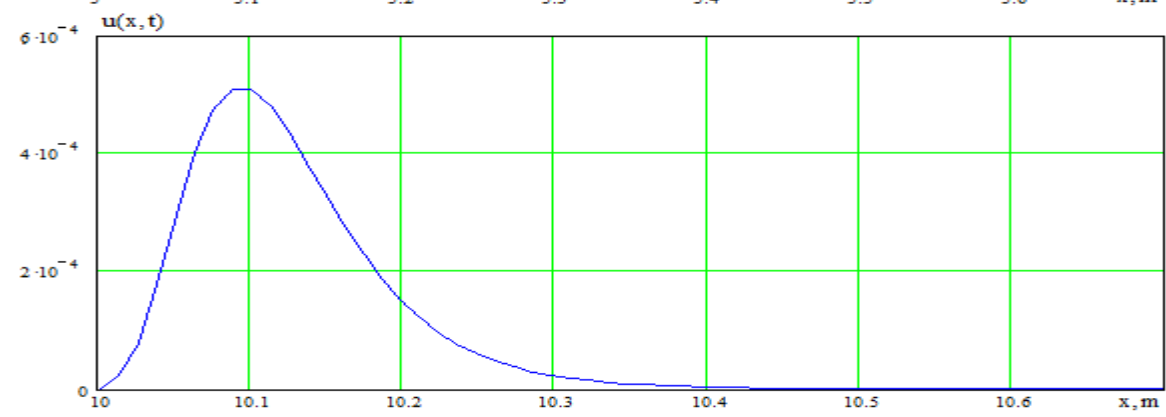
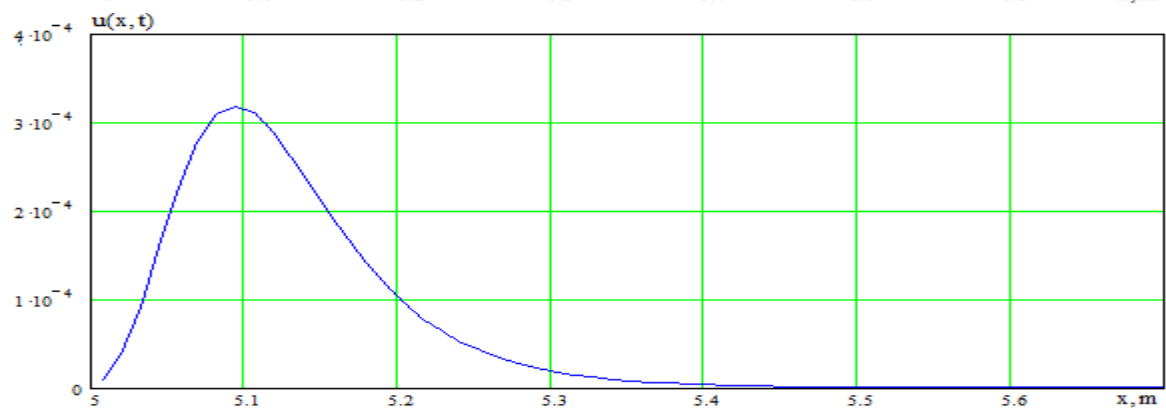
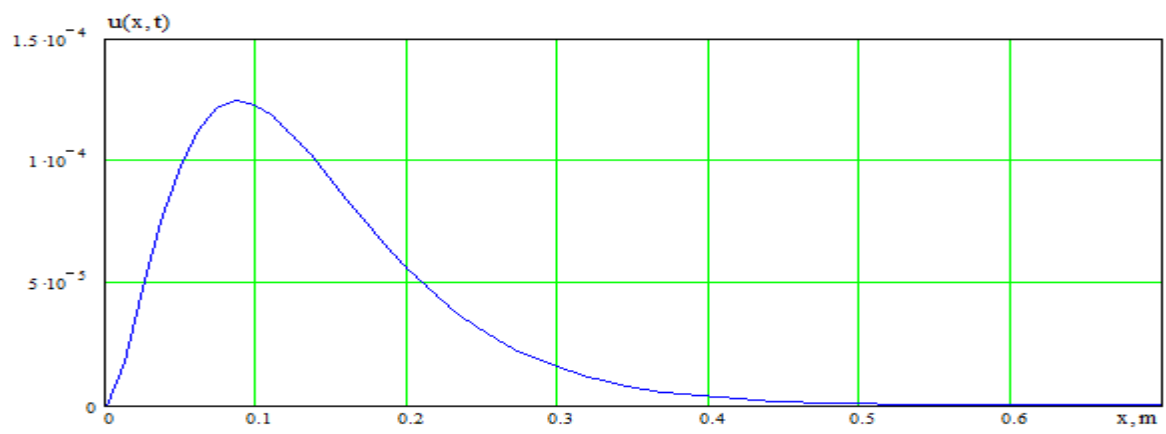


Рис. 4.57



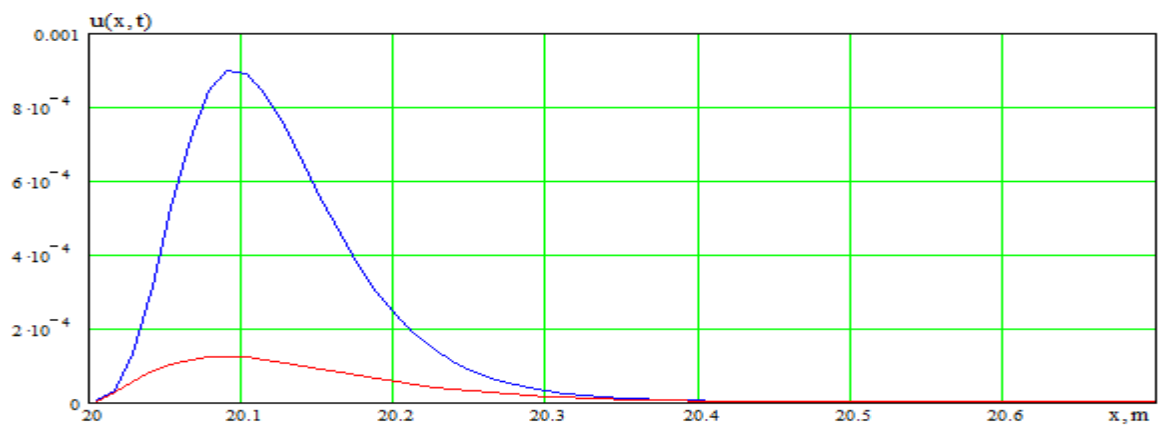
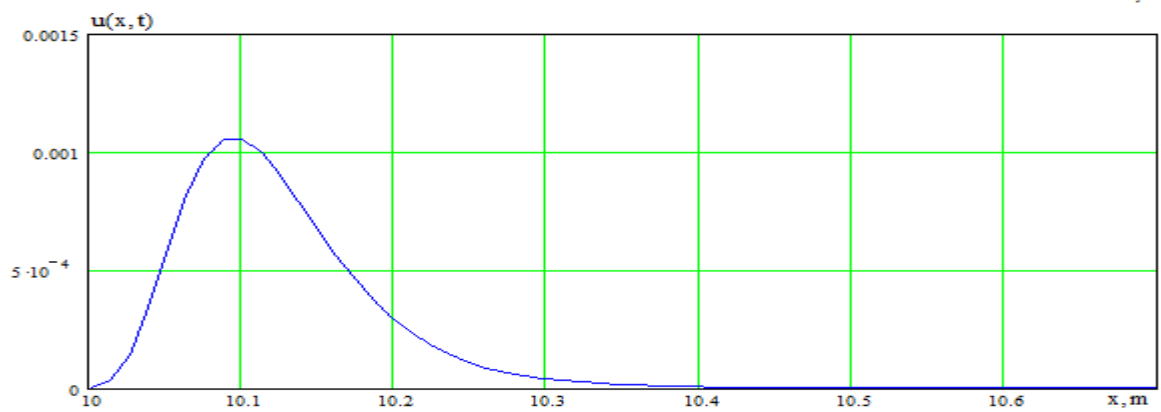
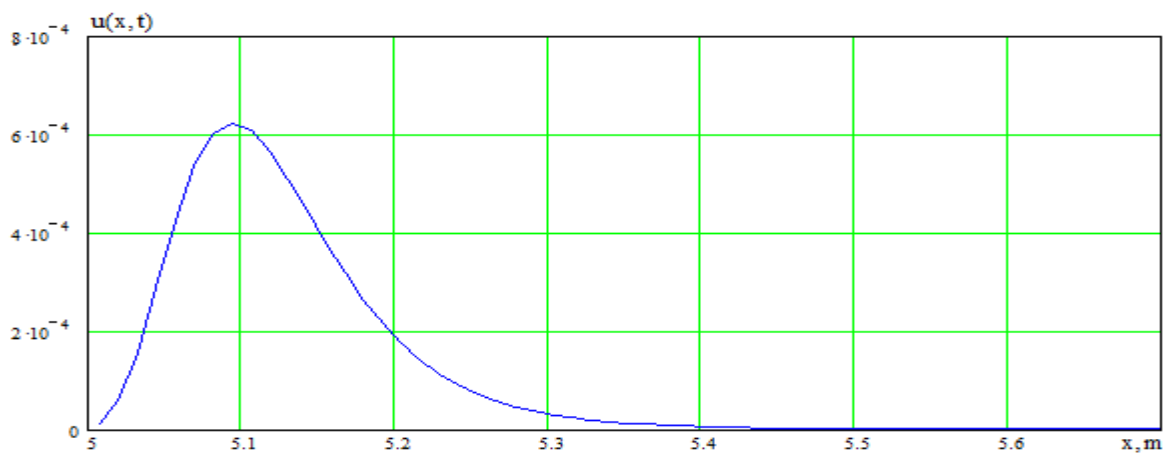
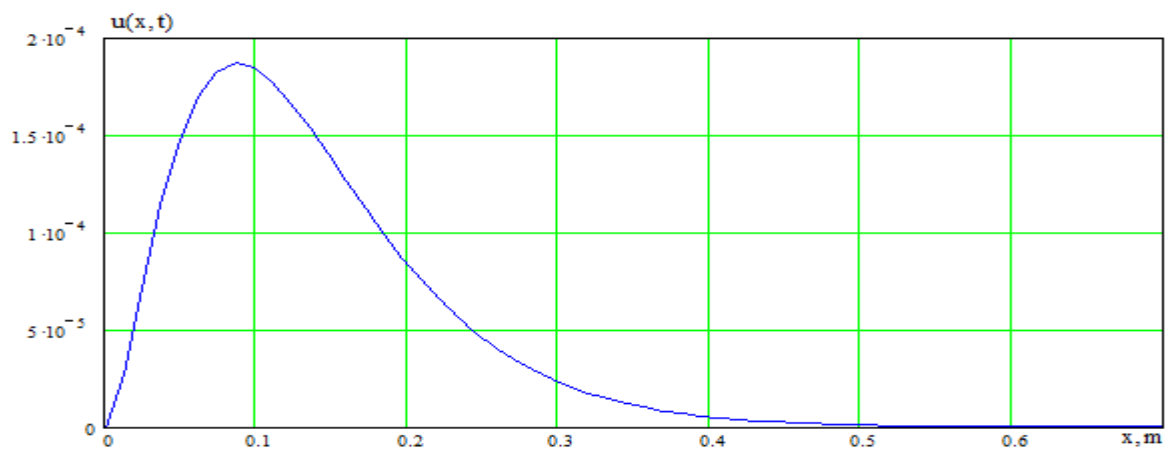


Рис. 4.60



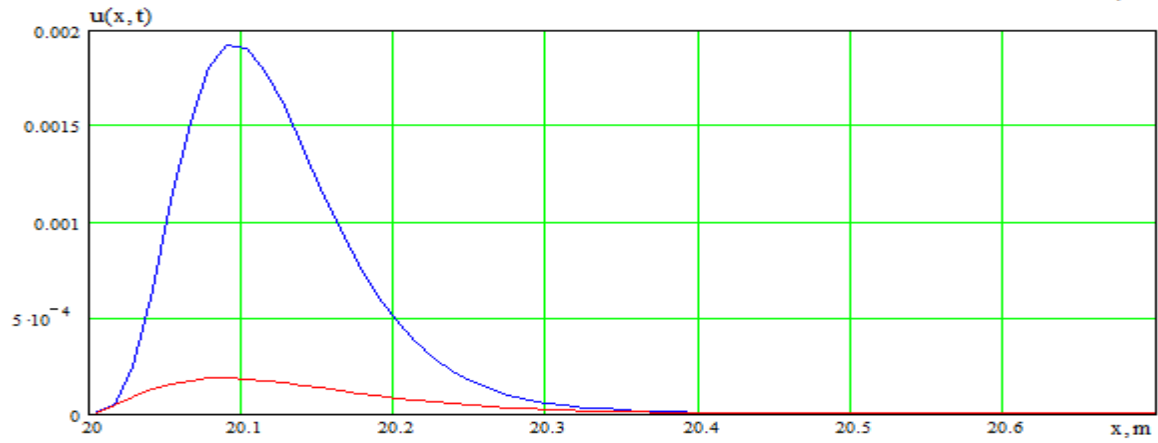
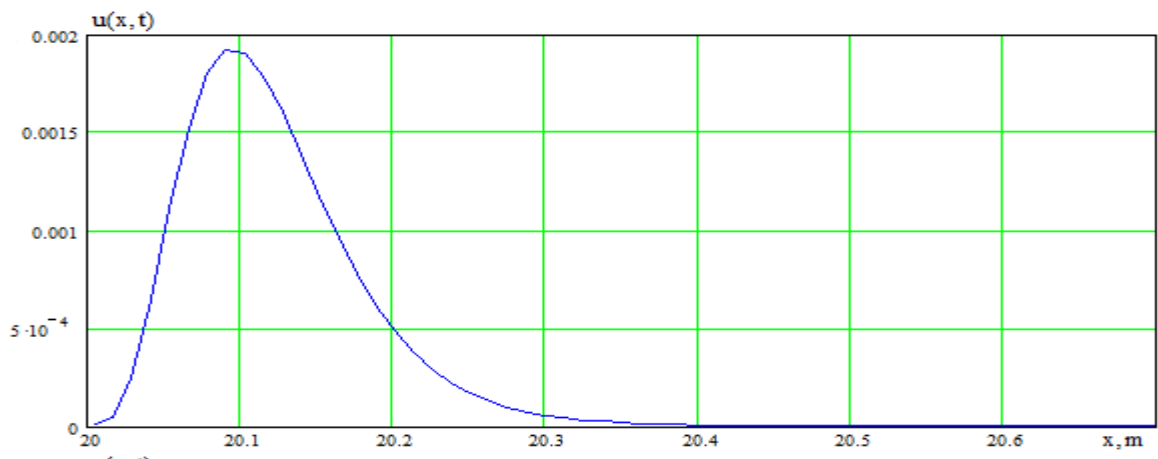
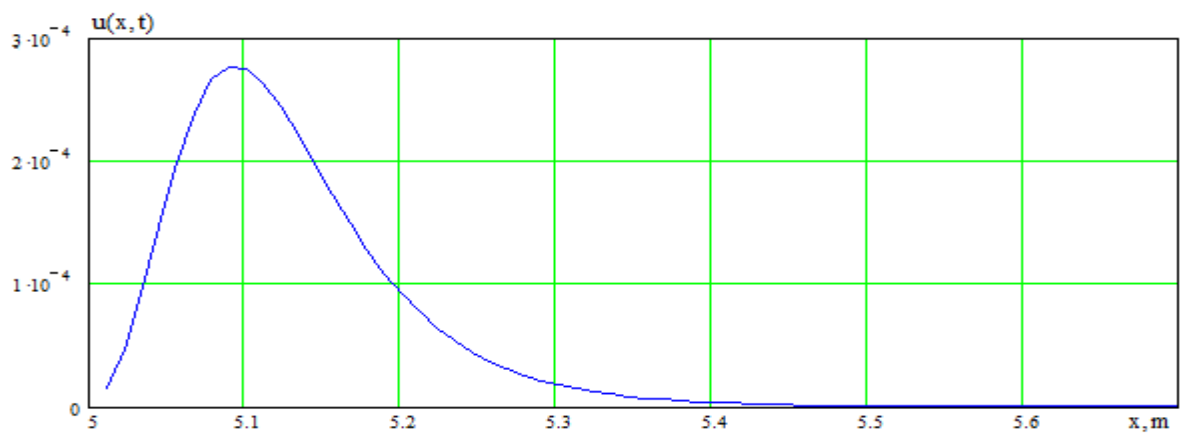
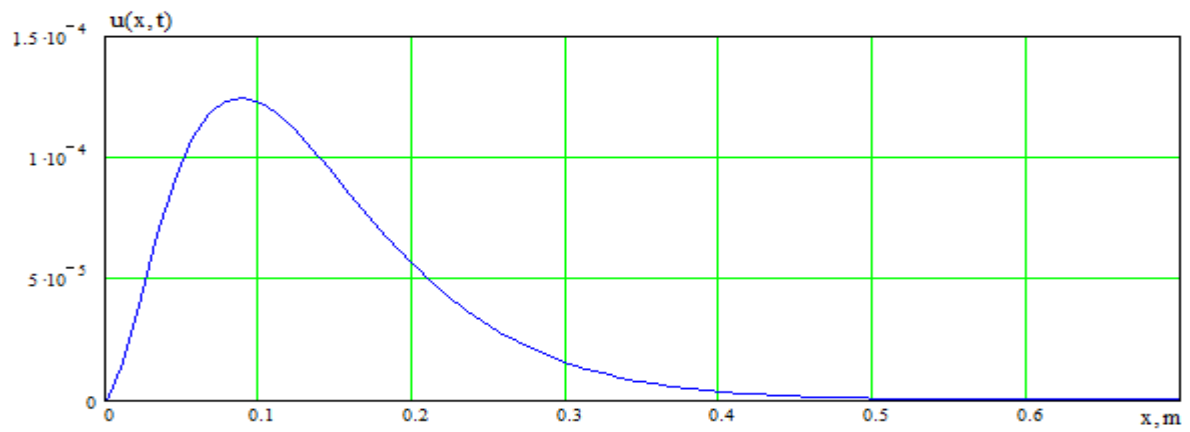


Рис. 4.61





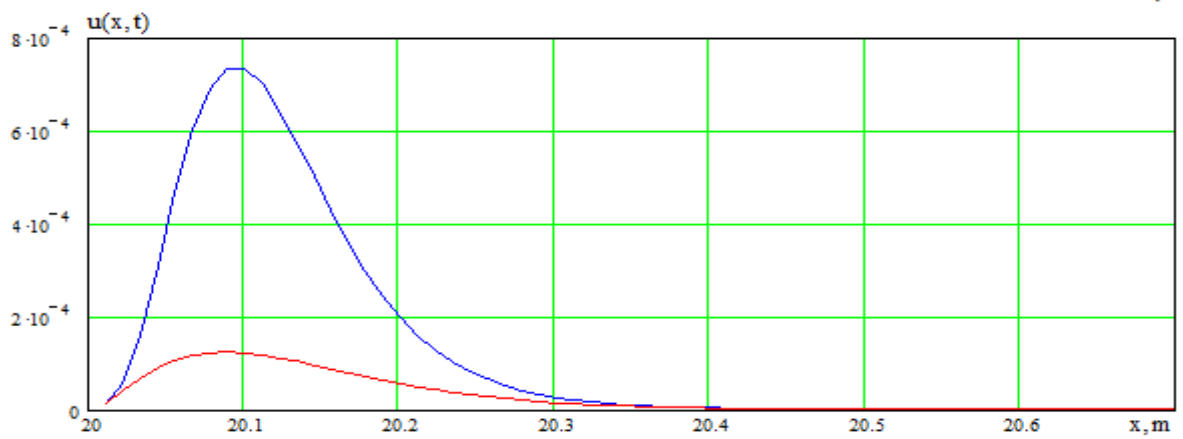
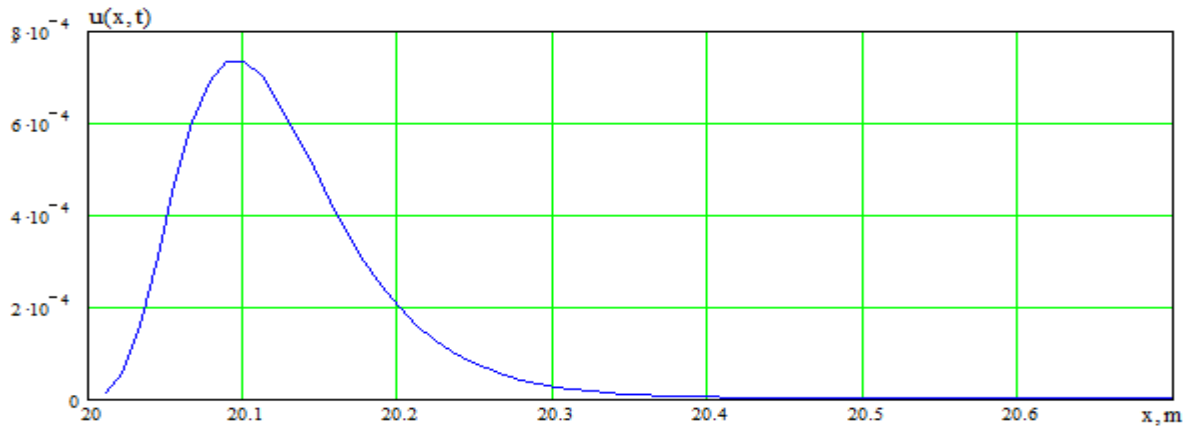
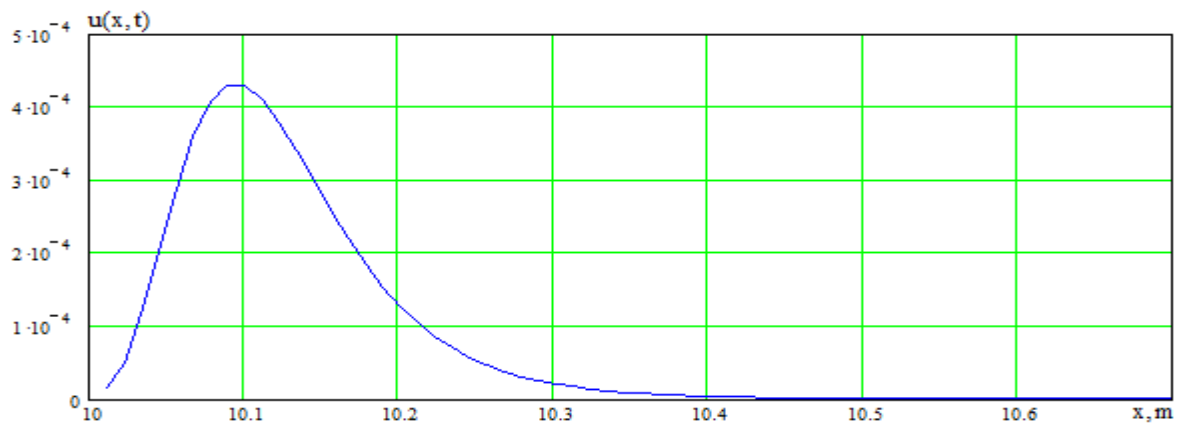
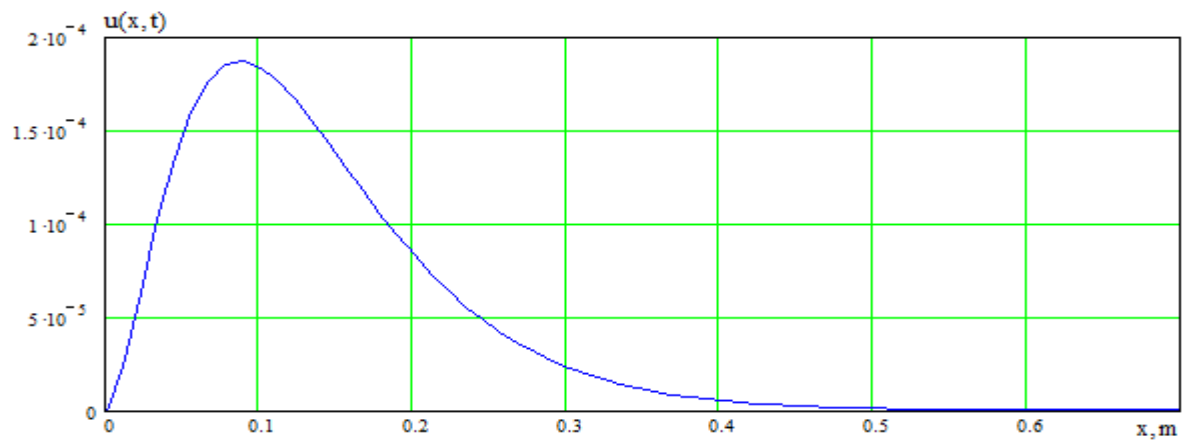


Рис. 4.63



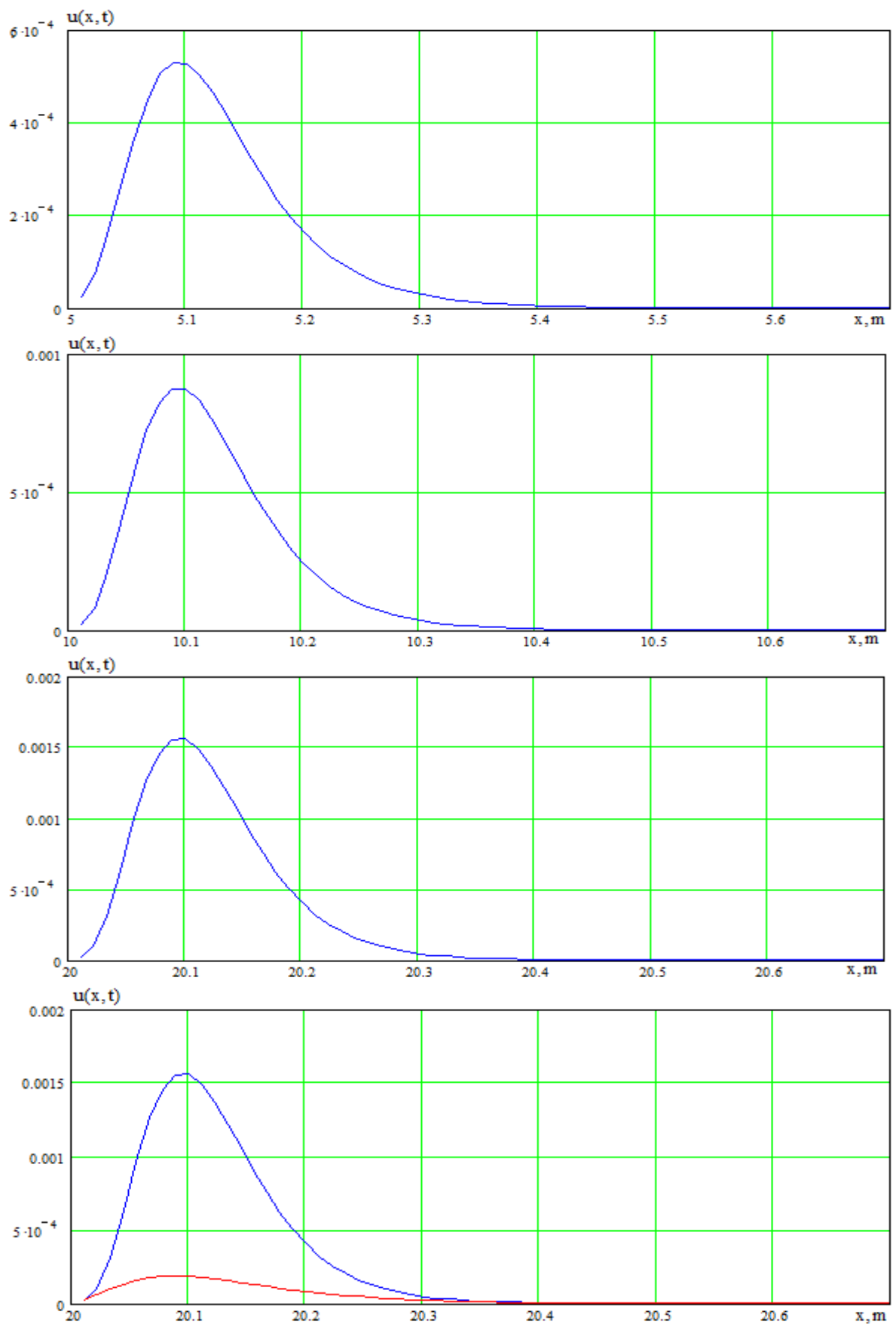


Рис. 4.64

## ДОДАТОК В

Графіки поширення поодиноких поперечних хвиль з профілем у вигляді функції Гауса

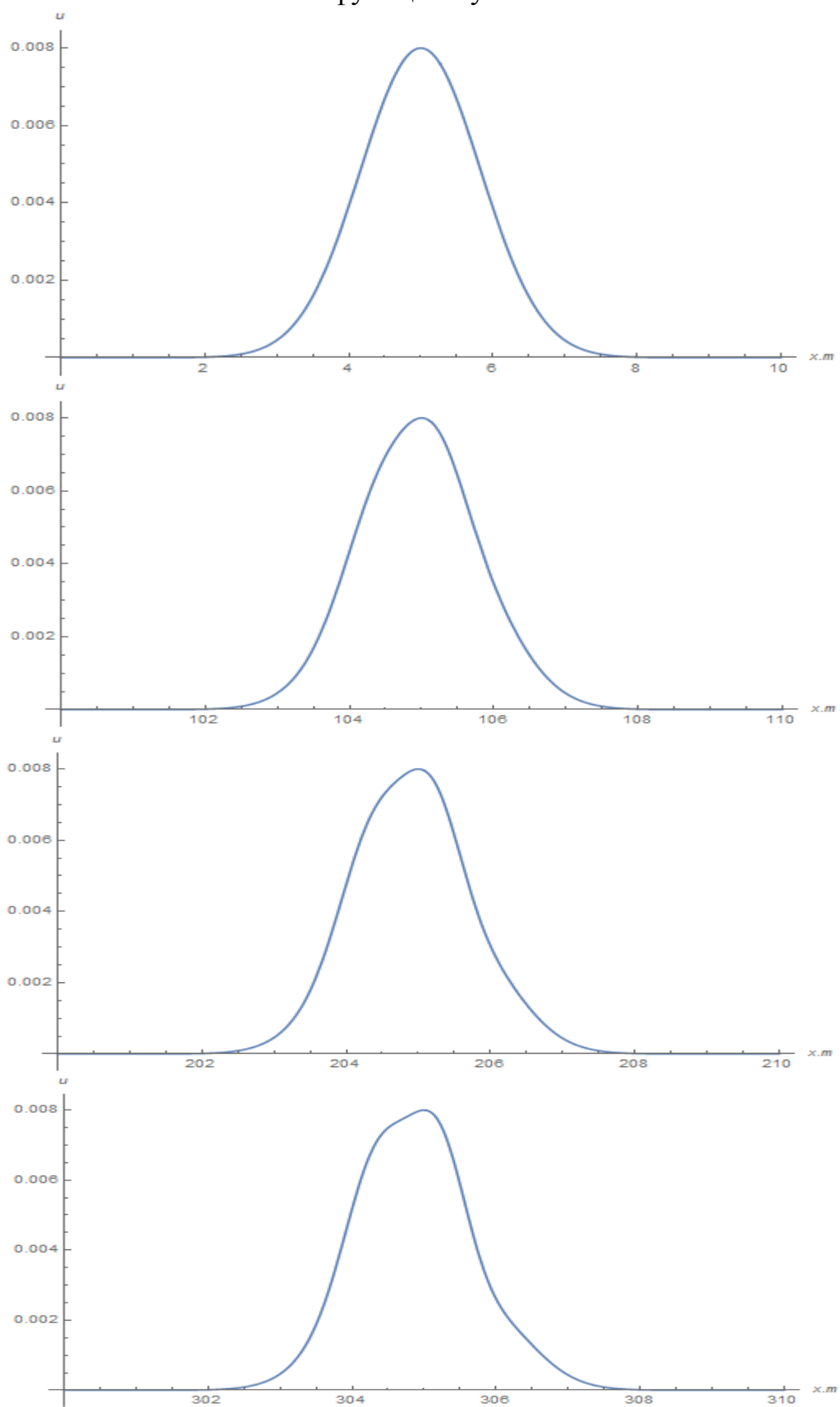


Рис. 5.2

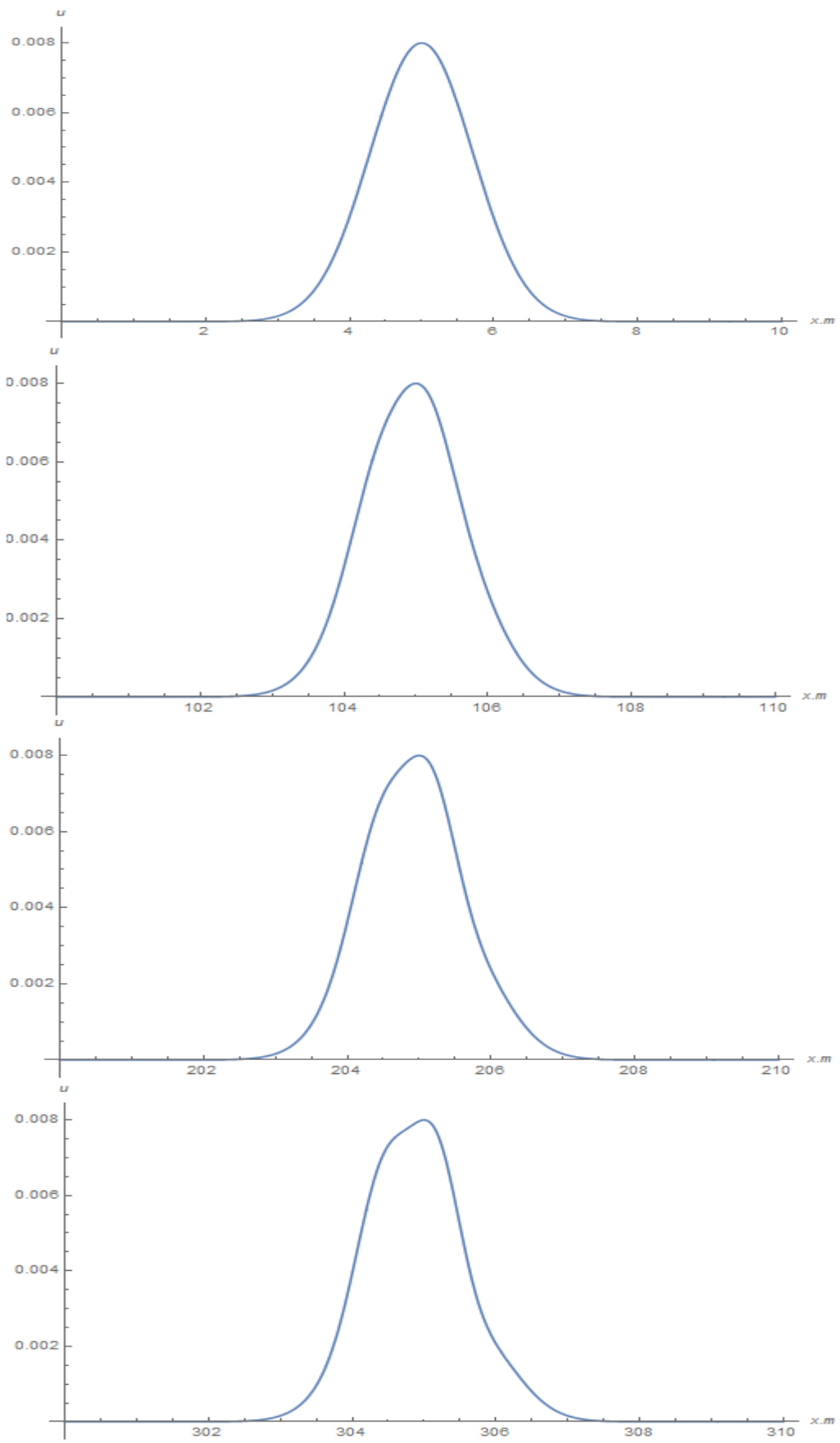


Рис. 5.3

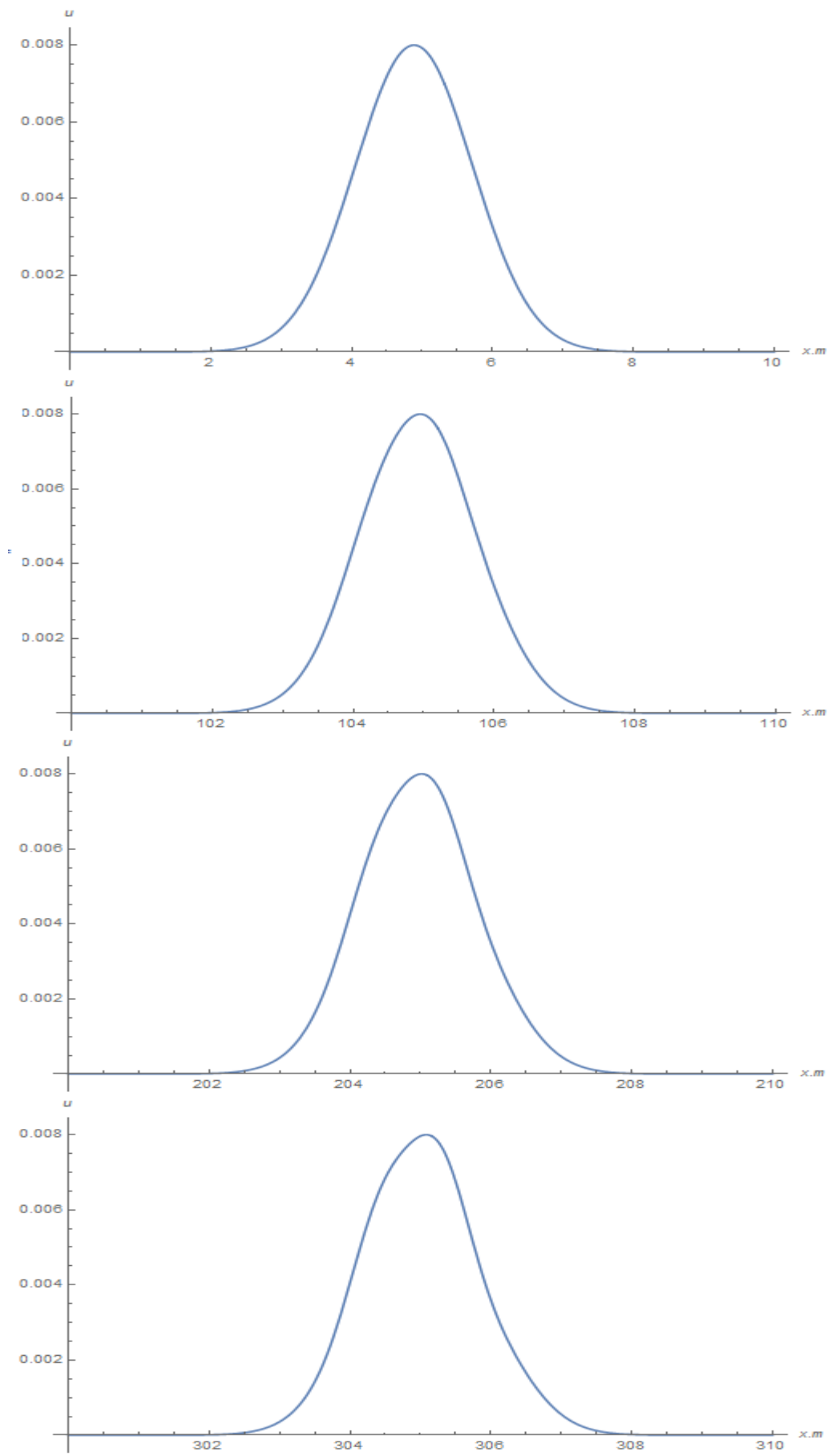


Рис. 5.5

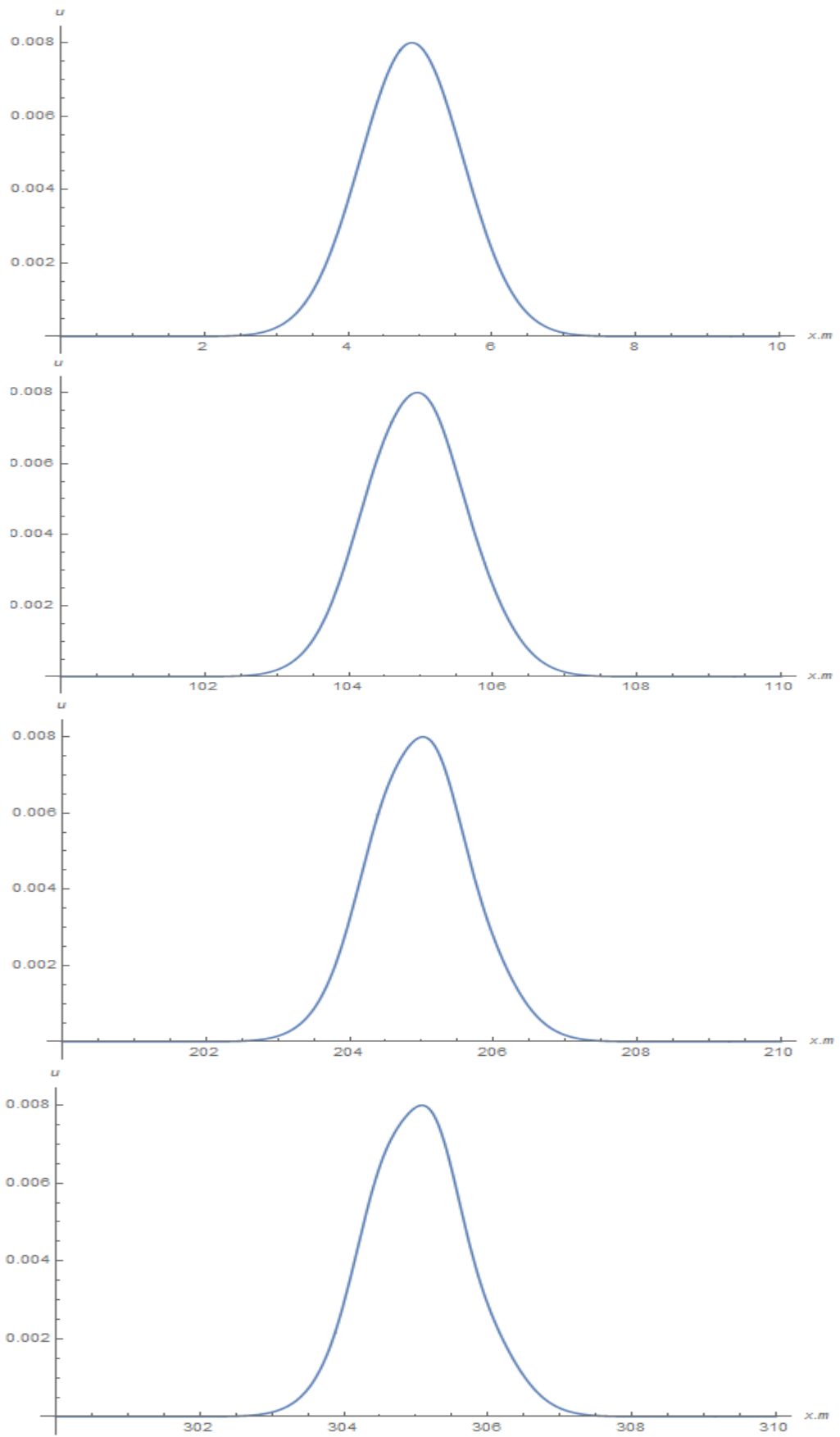


Рис. 5.6

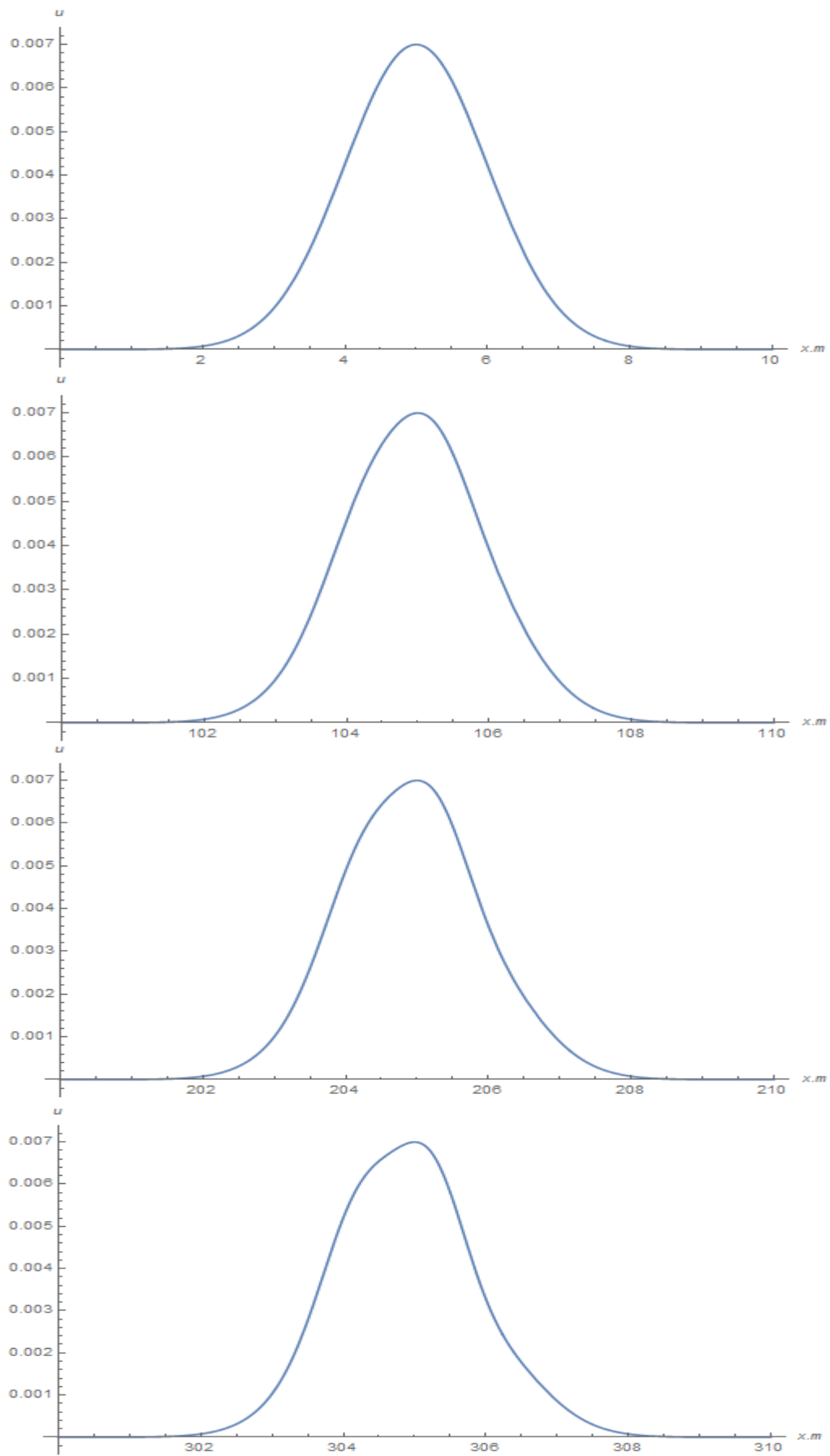


Рис. 5.9

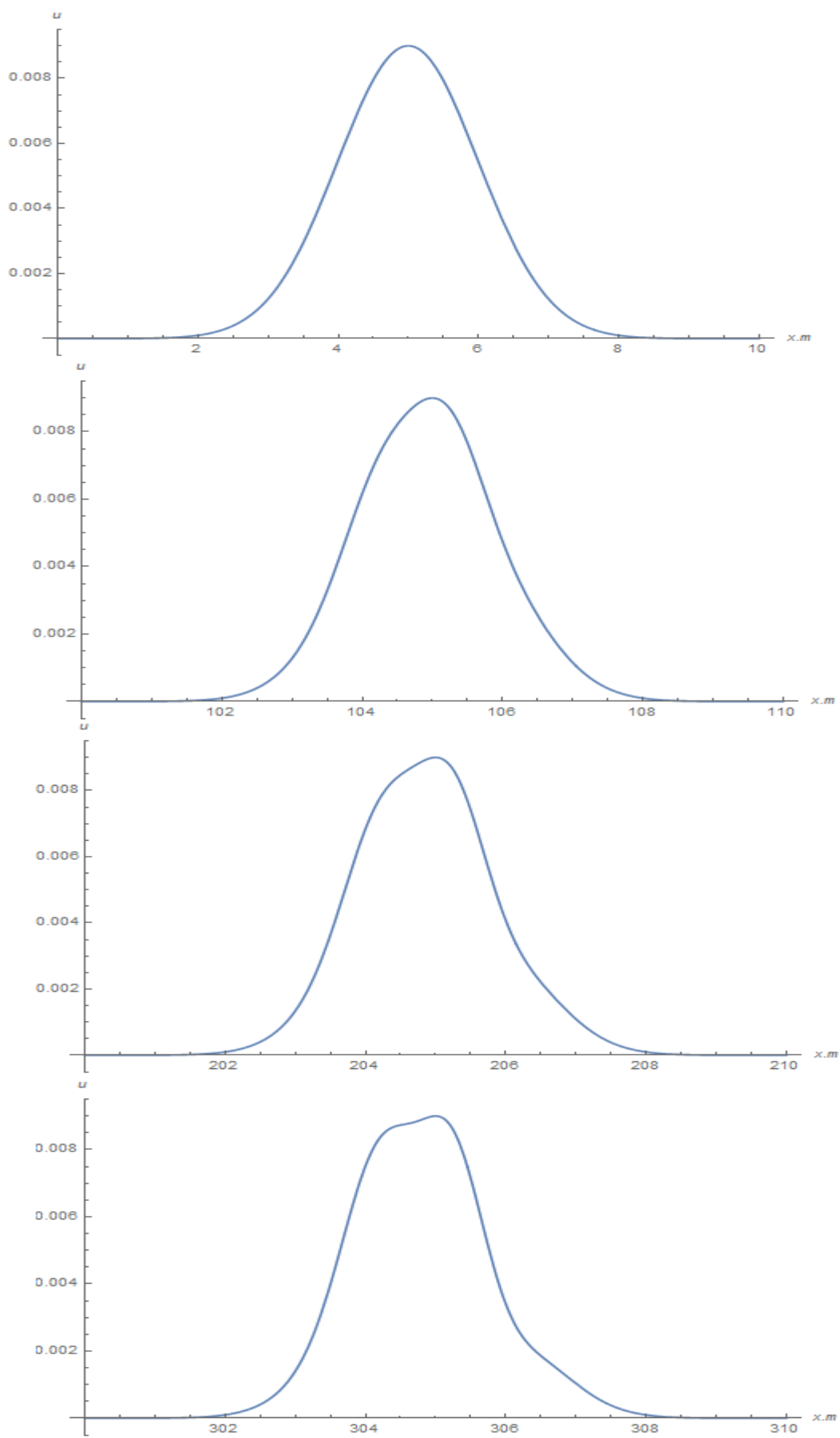


Рис. 5.10



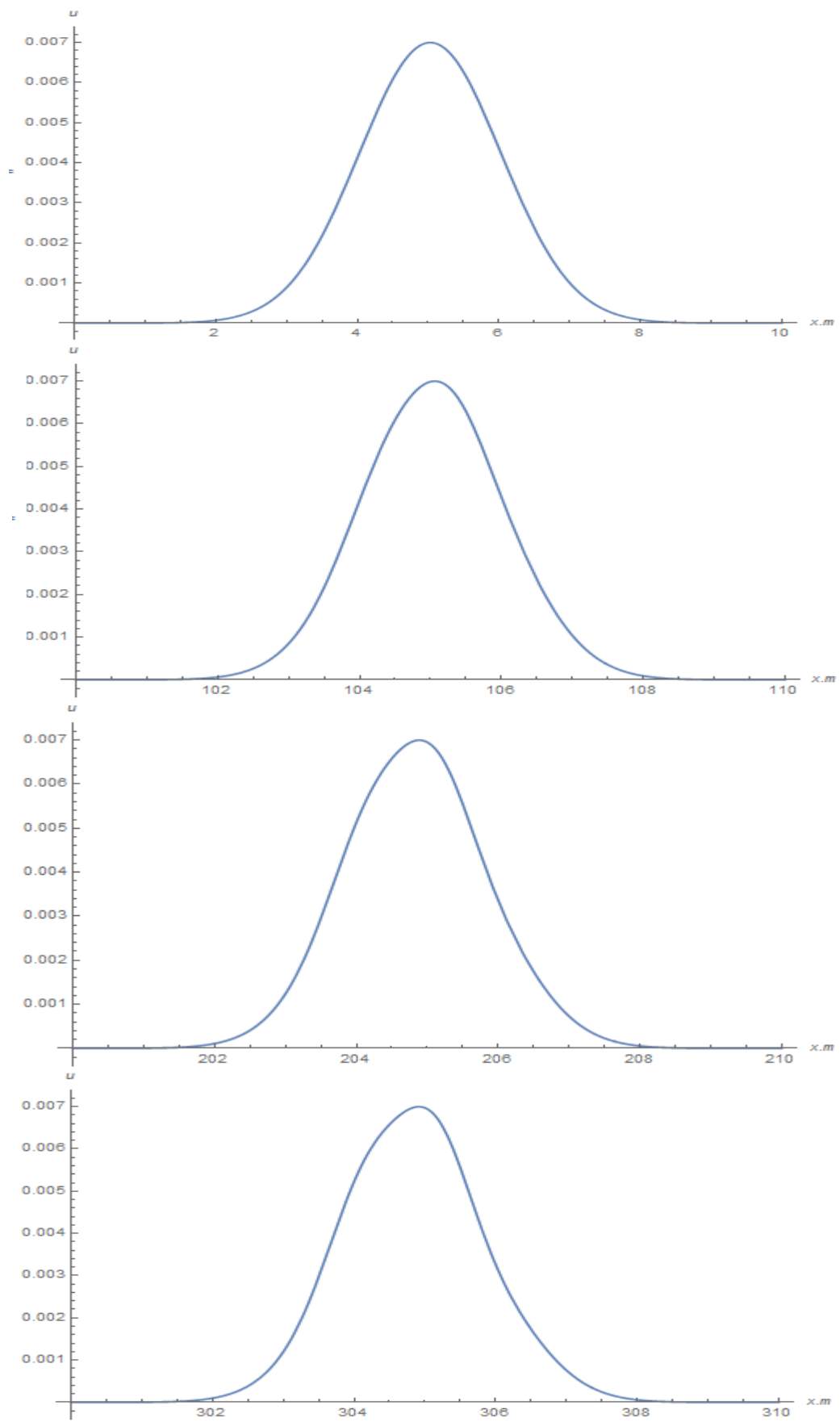


Рис. 5.12

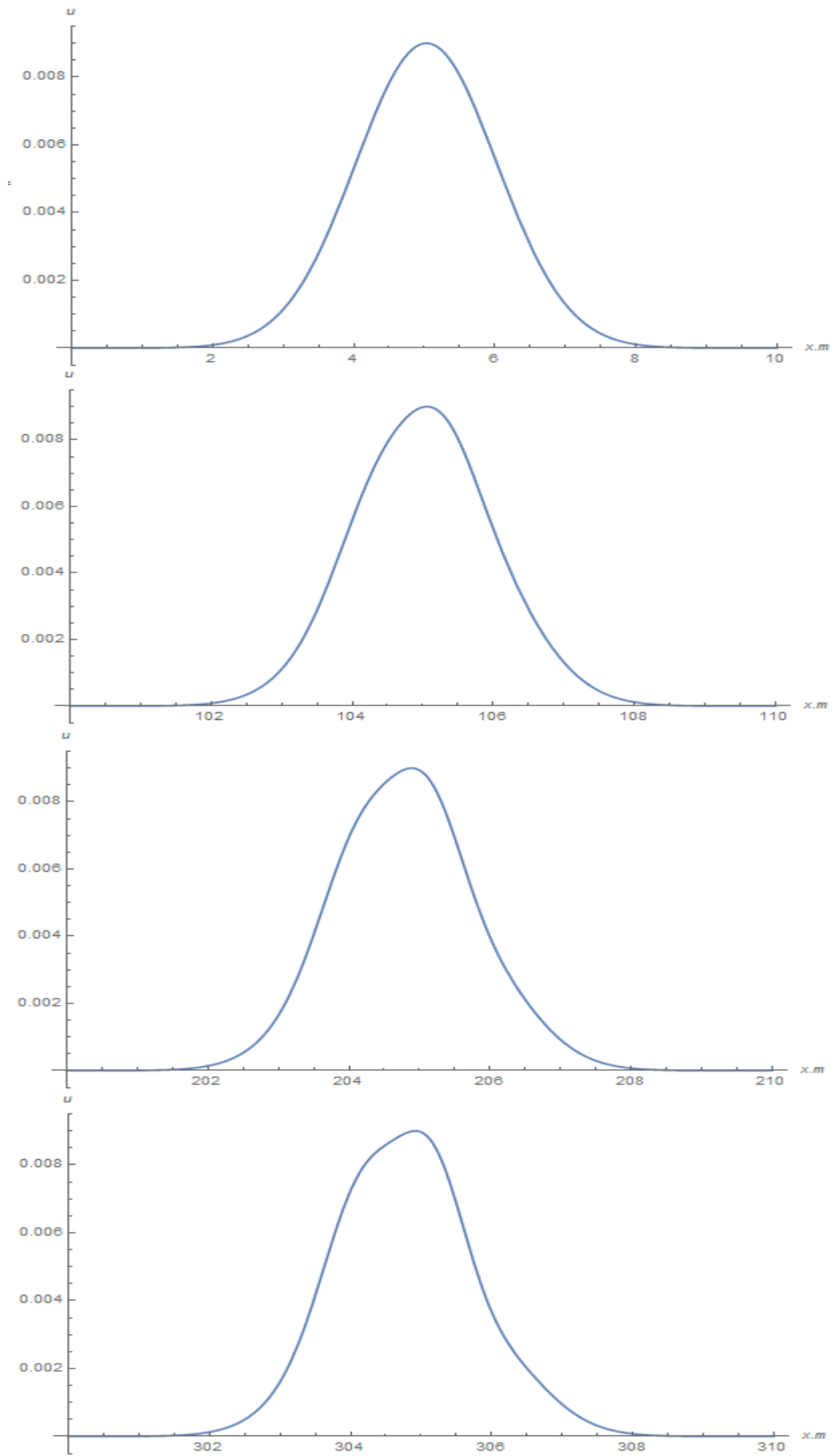


Рис. 5.13

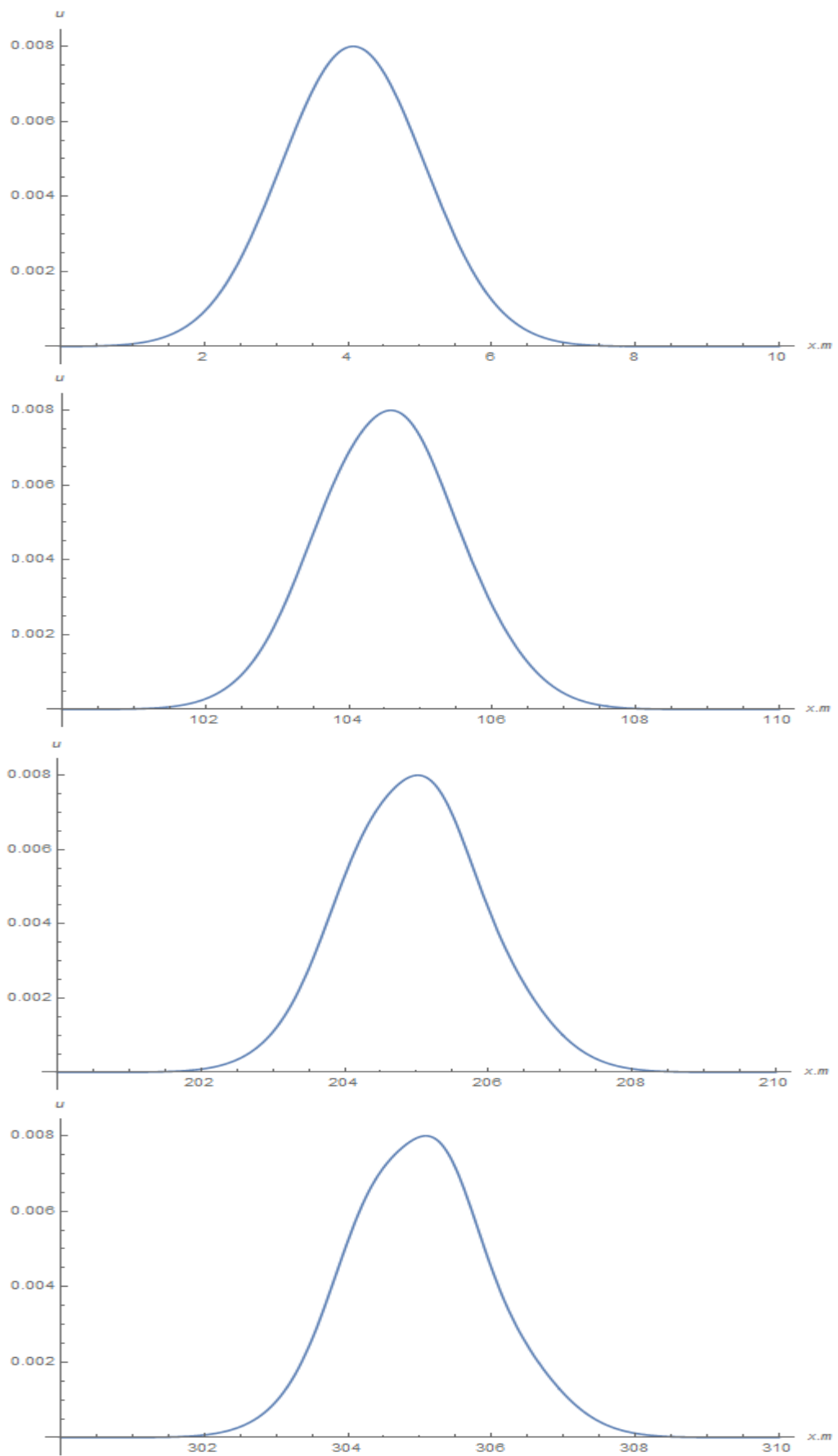


Рис. 5.16

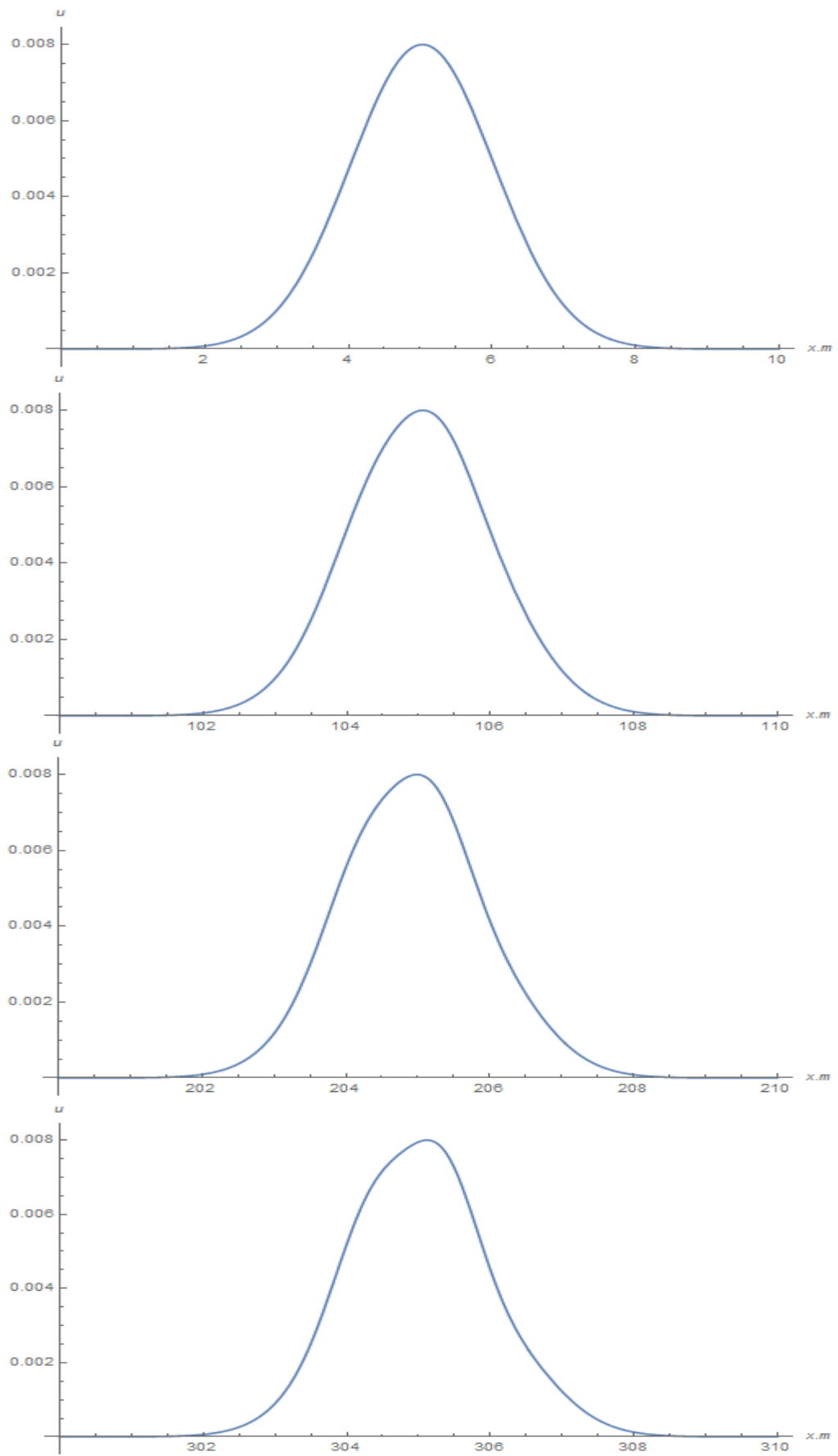


Рис. 5.17

## ДОДАТОК Г

Графіки поширення радіальних циліндричних хвиль з профілем у вигляді функції Макдональда

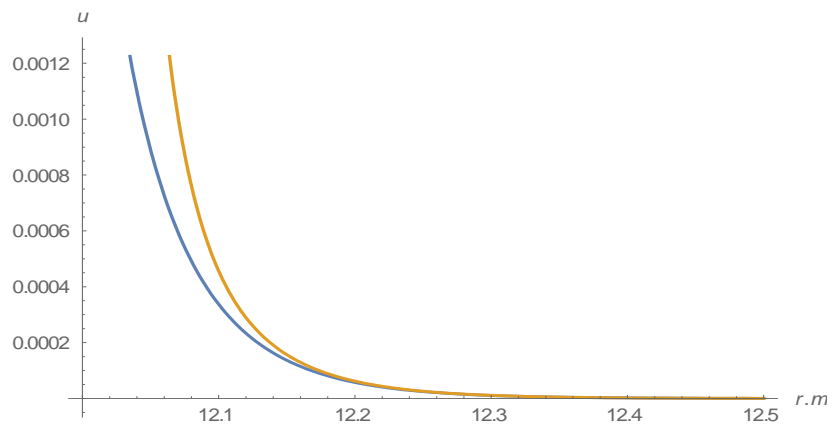
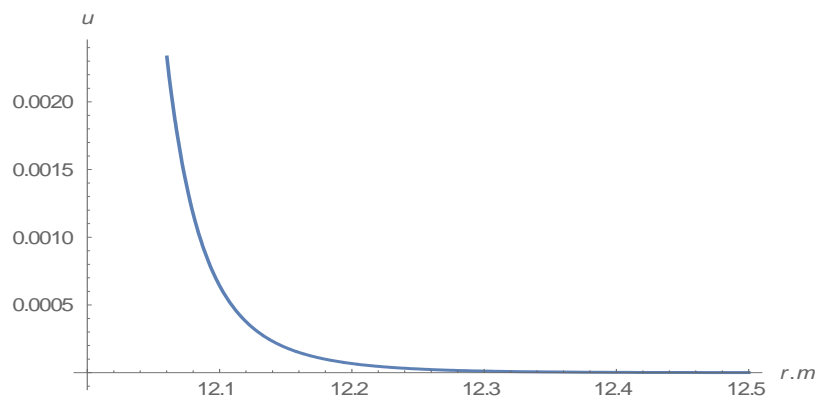
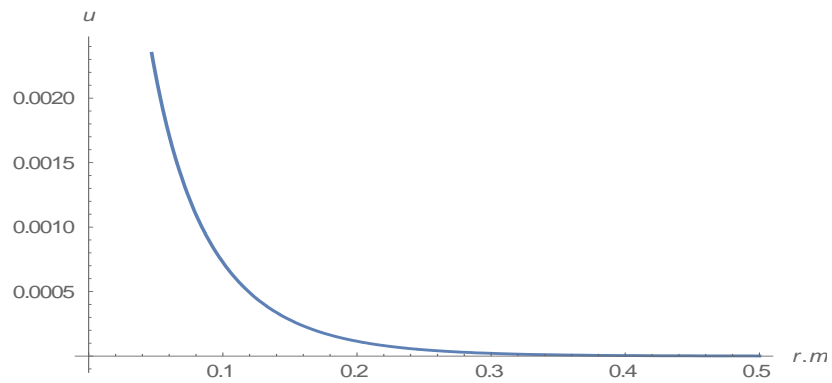
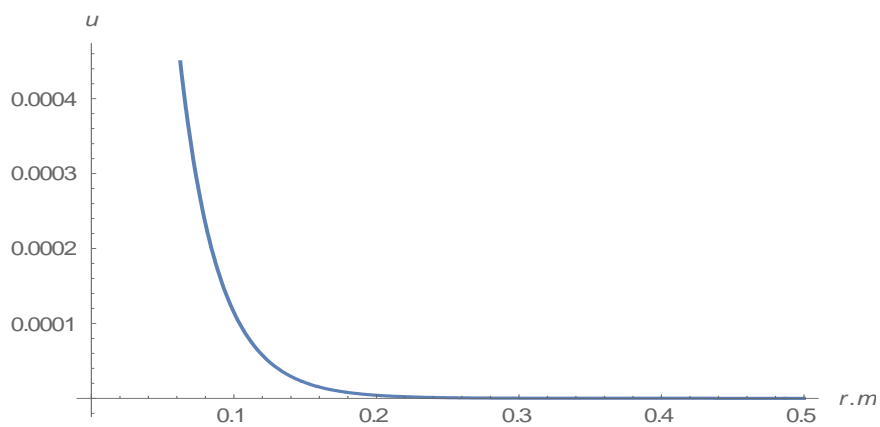


Рис. 6.2



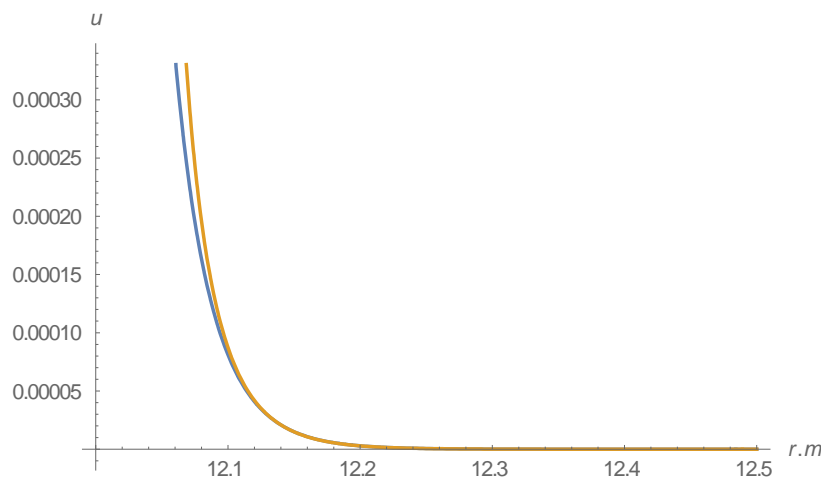
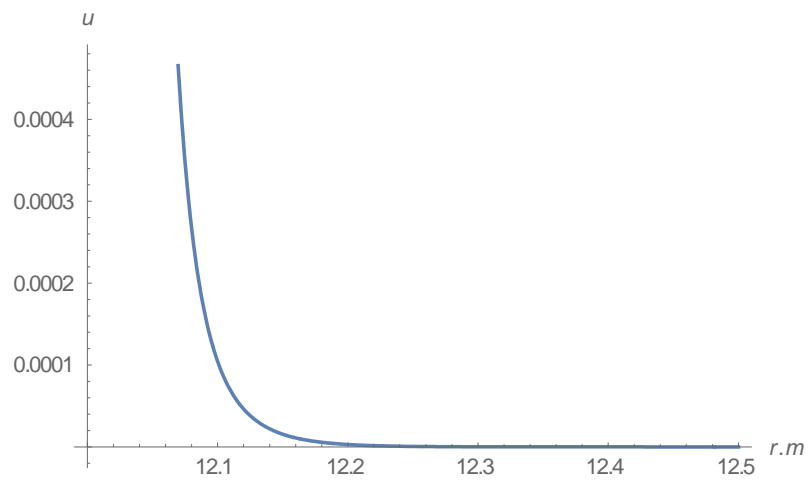
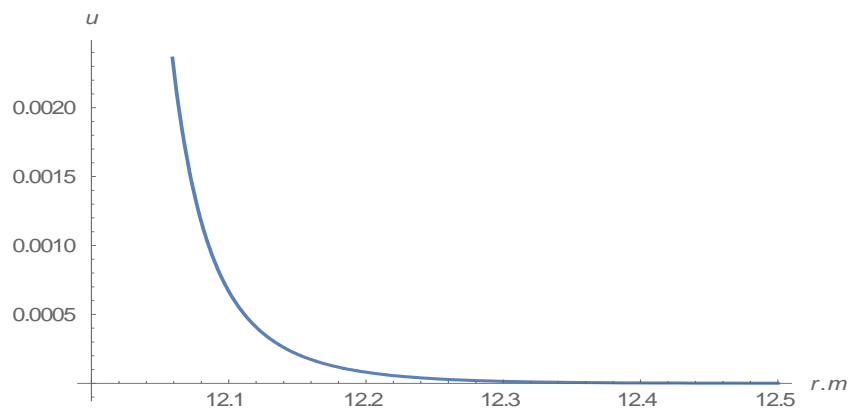
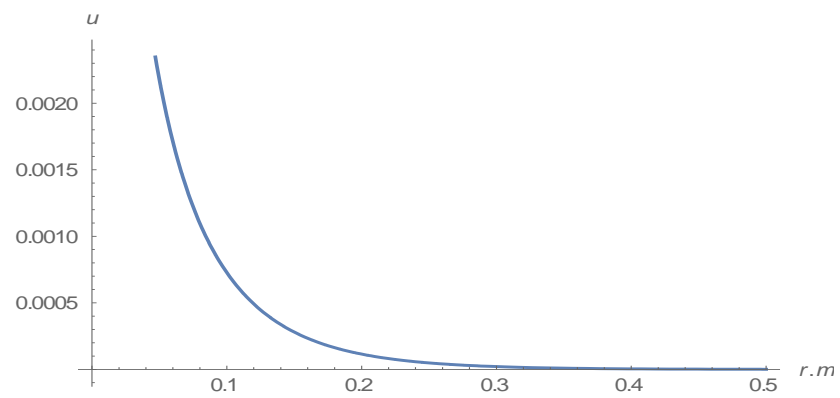


Рис. 6.3



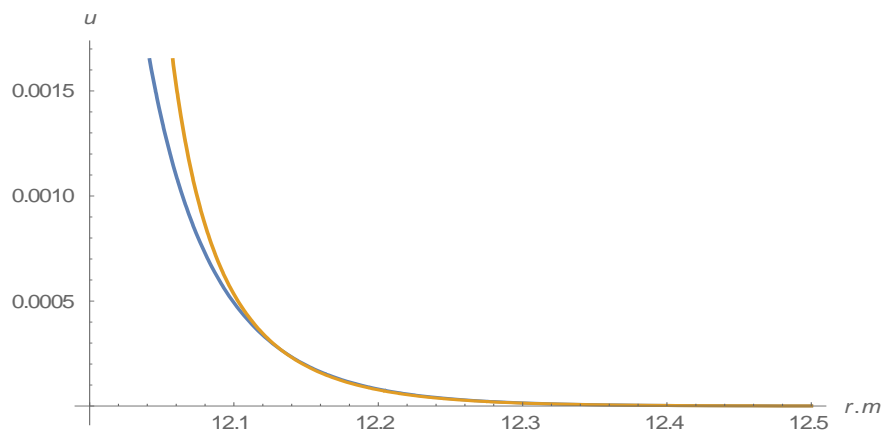


Рис. 6.5

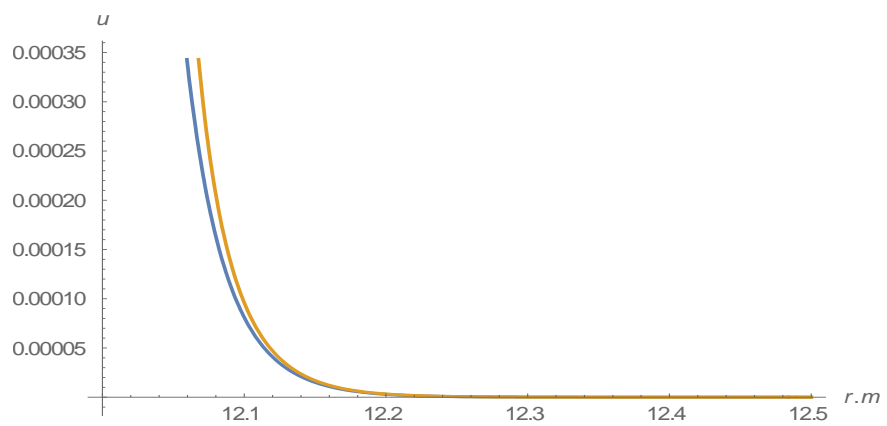
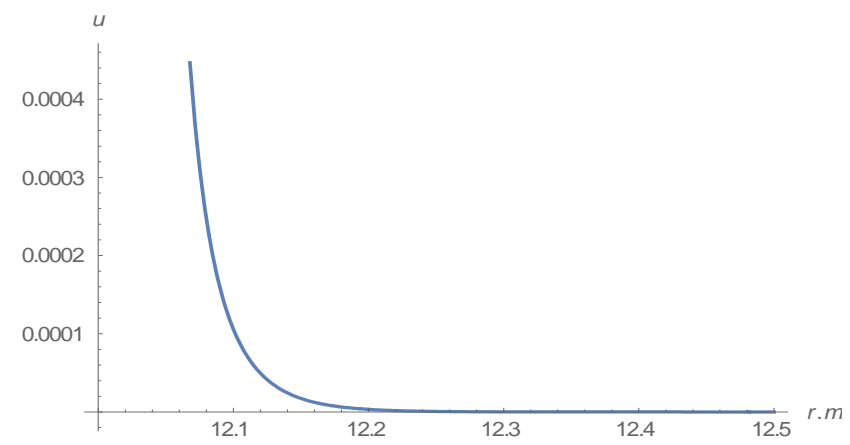
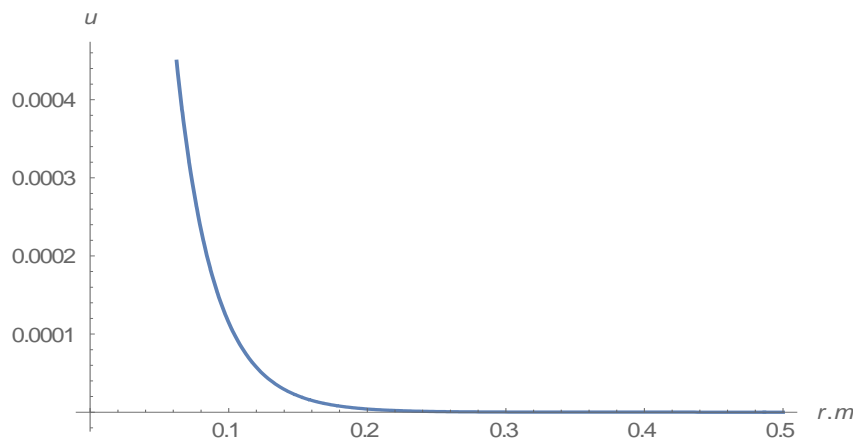


Рис. 6.6

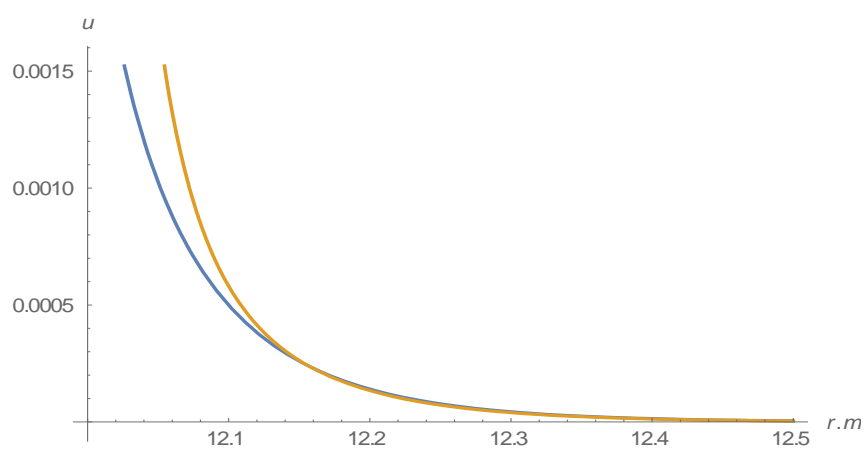
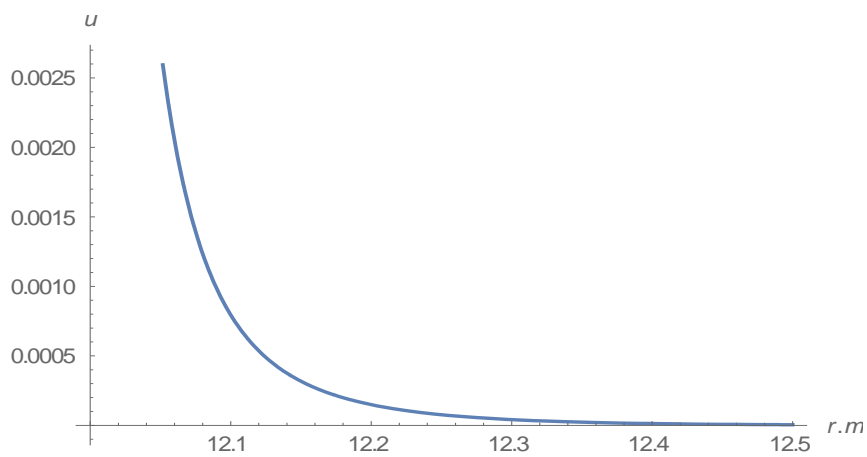
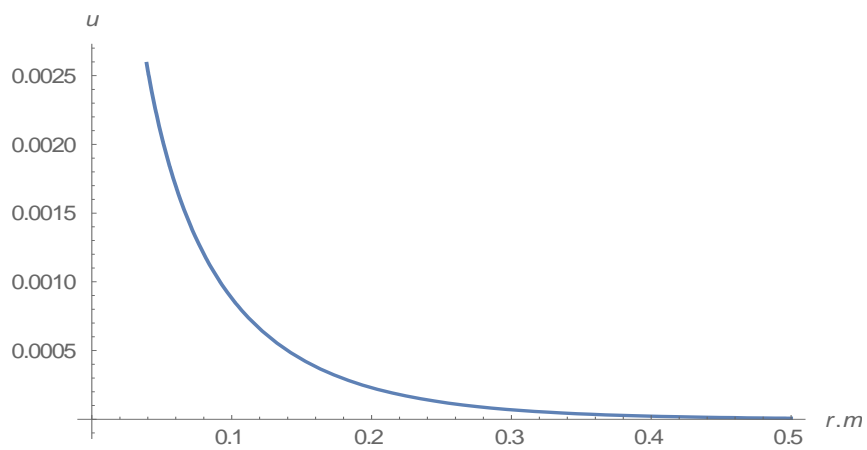
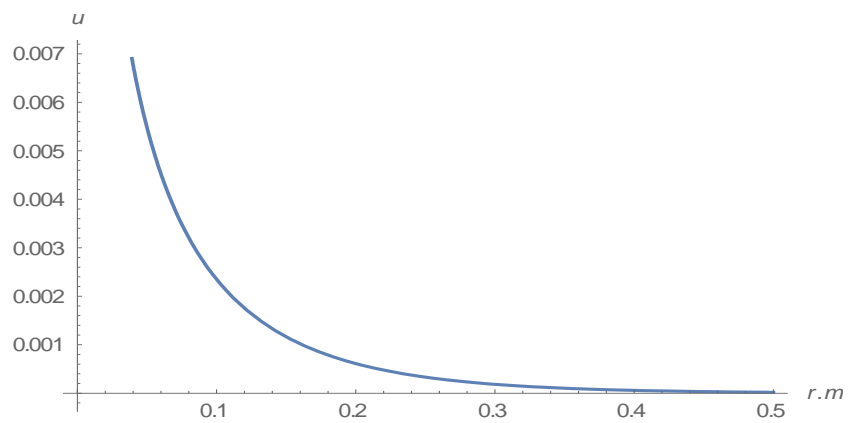


Рис. 6.9





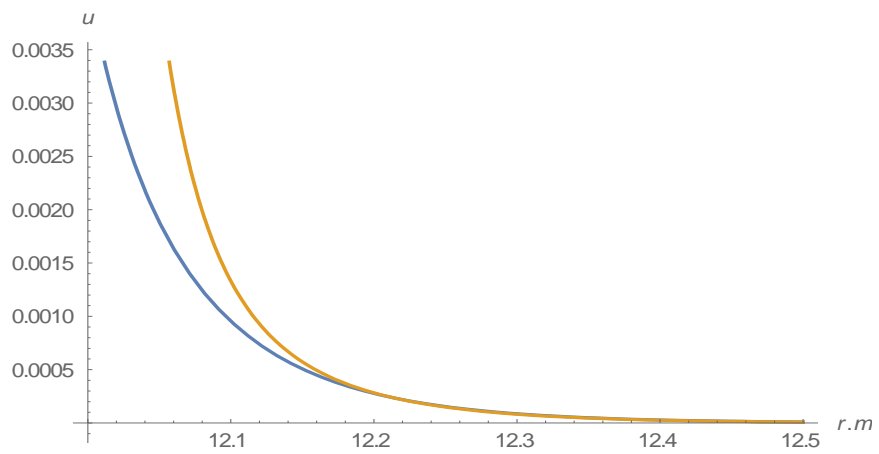
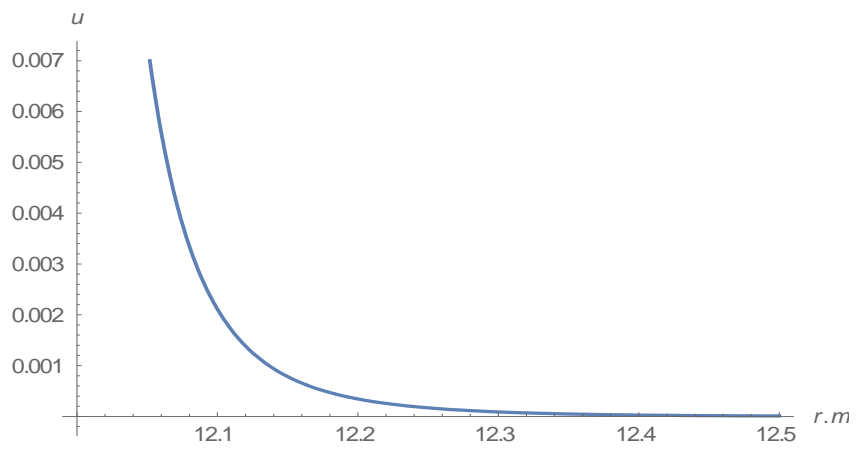
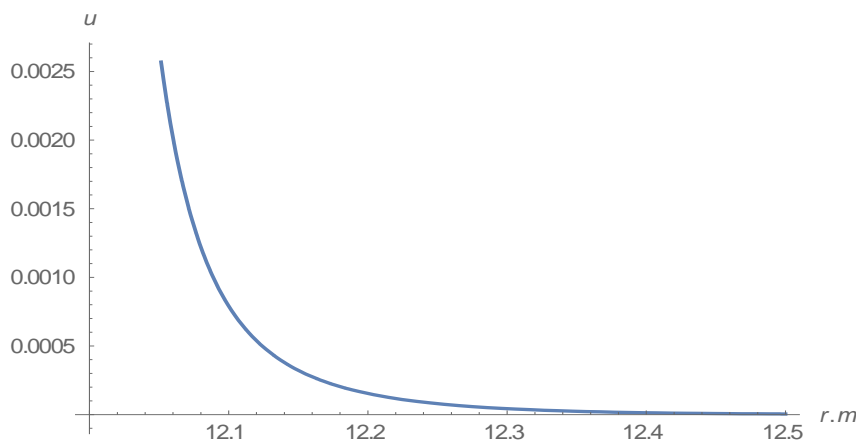
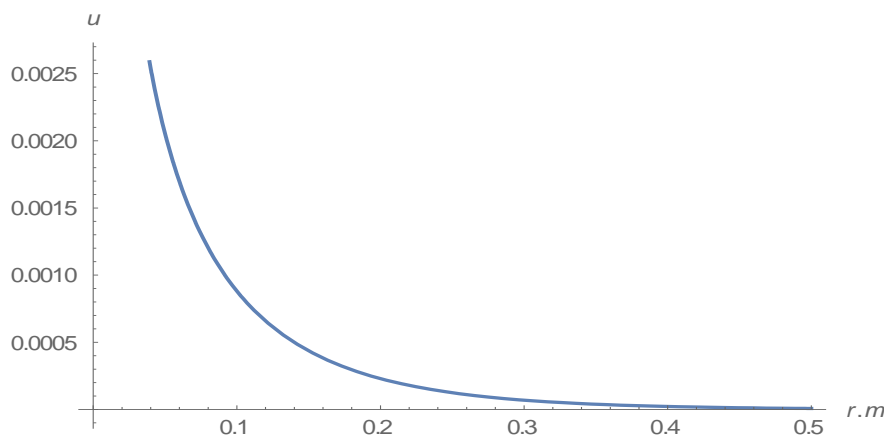


Рис. 6.10



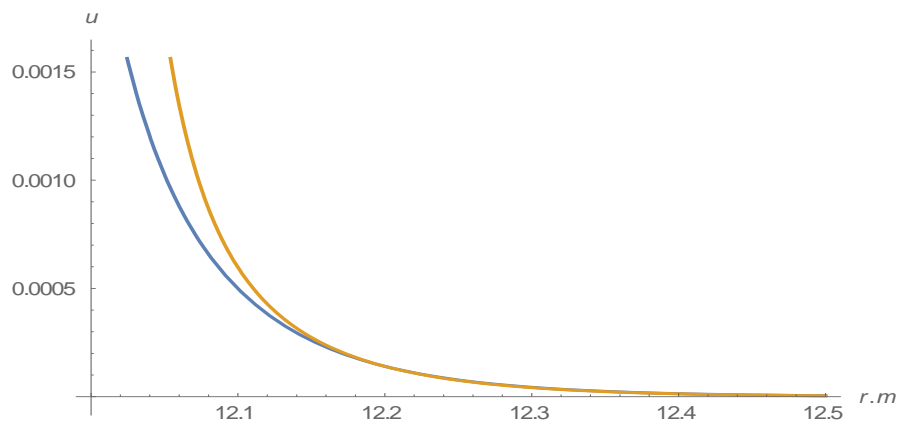


Рис. 6.12

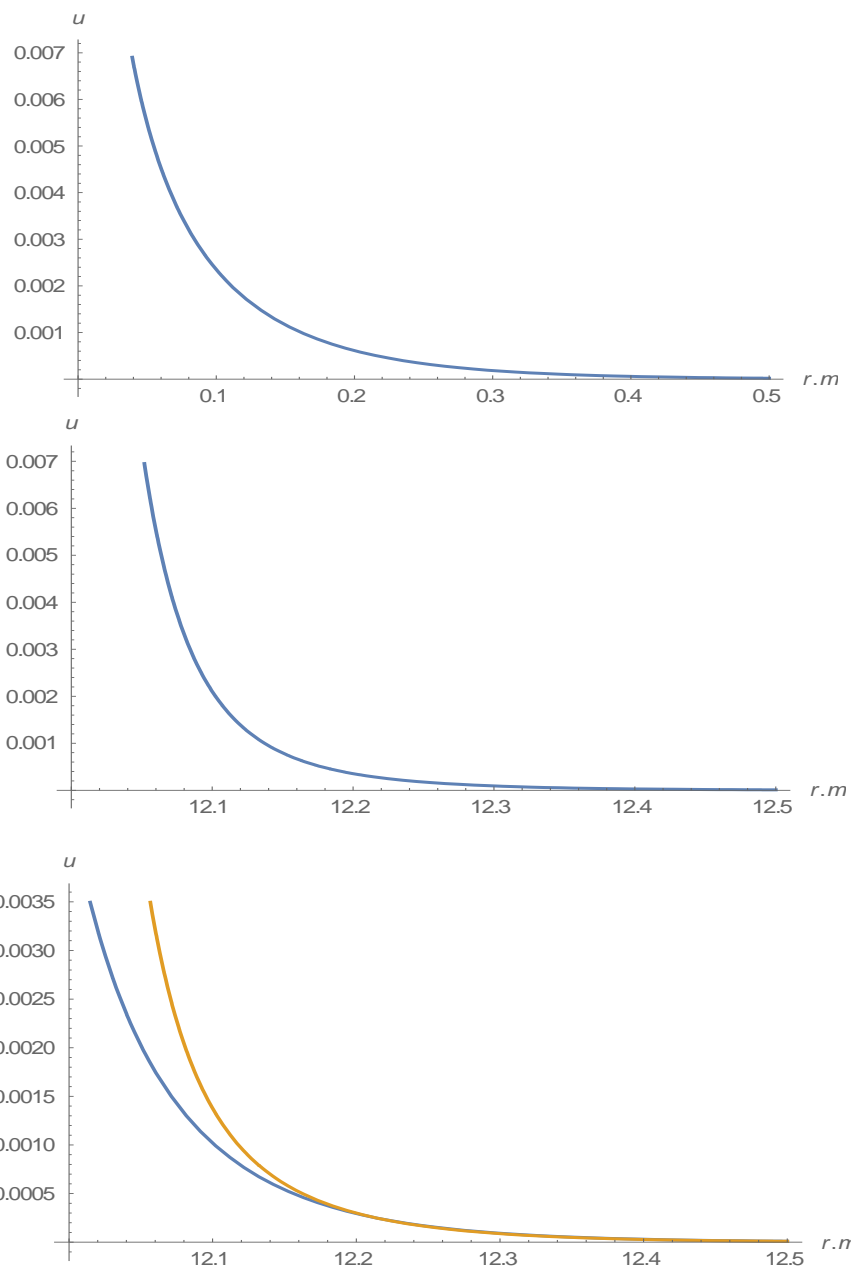


Рис. 6.13

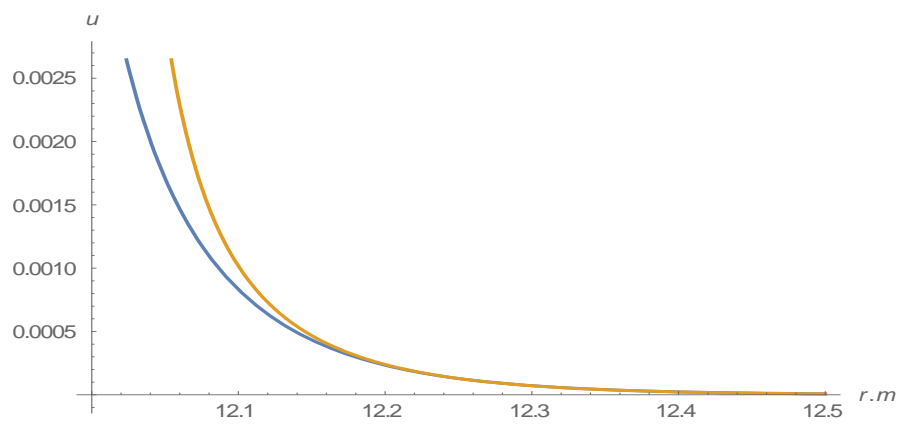
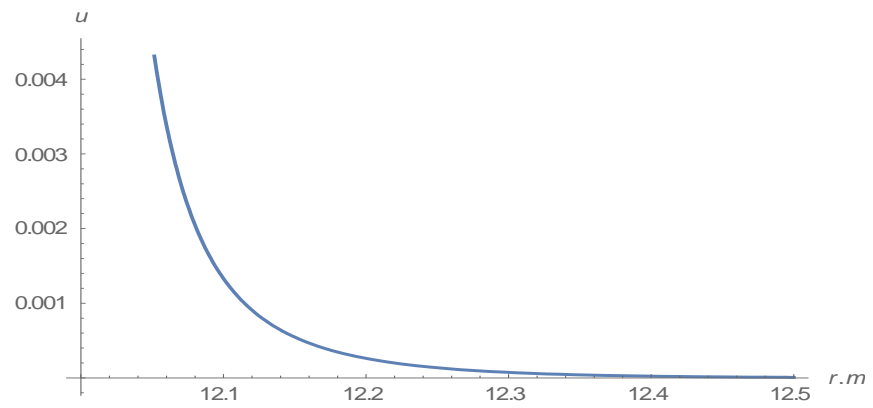
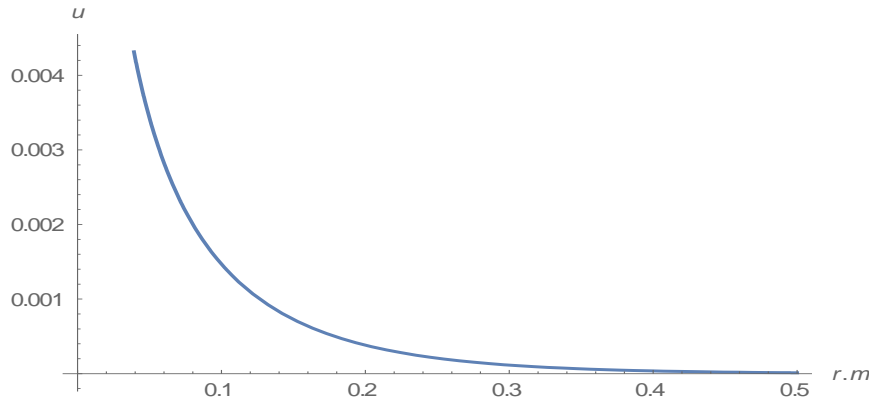
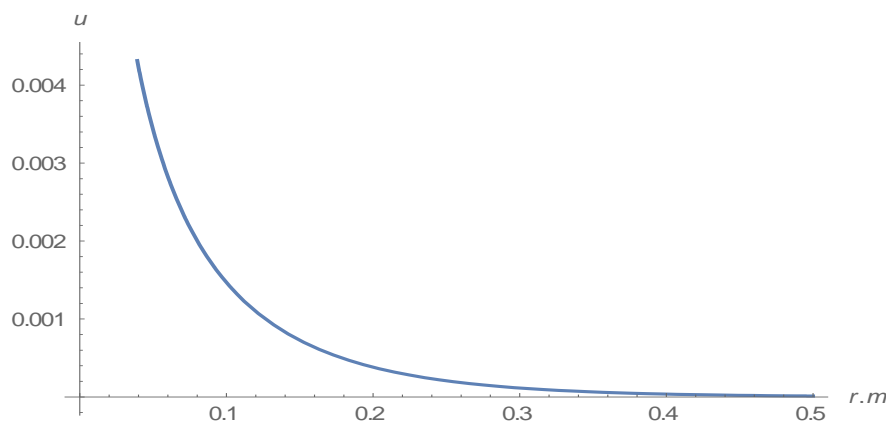


Рис. 6.16



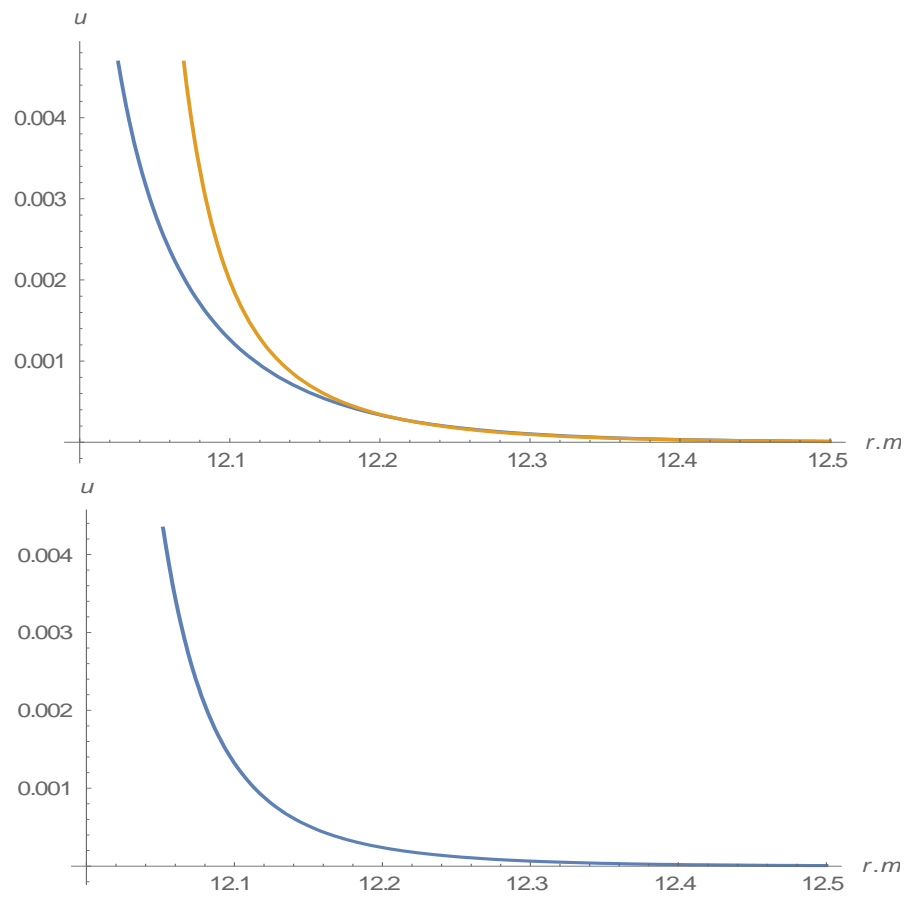


Рис. 6.17