НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

ХОРОШУН Анатолій Сергійович

УДК 531.36

МЕТОД ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ, КЕРУВАННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕТОЧНИХ РІЗНОТЕМПОВИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі стійкості процесів Інституту механіки імені С.П. Тимошенка Національної академії наук України.

Науковий консультант: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Мартинюк Анатолій Андрійович,
завідувач відділу стійкості процесів
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Зевін Олександр Аронович,
провідний науковий співробітник відділу
динаміки та міцності нових видів транспорту
Інституту транспортних систем і технологій
НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Мазко Олексій Григорович,
провідний науковий співробітник відділу
математичних проблем механіки
та теорії керування Інституту математики
НАН України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Хусаінов Денис Ях'євич,
професор кафедри моделювання складних систем
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка.

Захист відбудеться "   "   2019 р. о   годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 211.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504.

Автореферат розіслано "   "   2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,
доктор фізико-математичних наук   О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасний рівень розвитку техніки та технологій формує нові вимоги до математичних моделей механічних систем. При побудові таких моделей зазвичай "спрощують" початкову задачу, наприклад, нехтуючи деякими доданками чи складовими руху, тобто понижуючи порядок системи, або припускаючи, що параметри моделі виміряні точно і не змінюються протягом усього часу її функціонування. Можливість такого спрощення виправдовується малістю відкидаємих доданків та несуттєвістю похибок при вимірюванні. Ряд отриманих при таких спрощеннях моделей, внаслідок тривалого та успішного використання, отримали аксіоматичний характер. Однак, не всякою малою величиною можливо знехтувати, не спотворюючи при цьому суті задачі. Деякі механічні системи демонструють це, не відповідаючи поведінці, спрогнозованій за допомогою математичних моделей, отриманих при подібних припущеннях. Причому, з подібними питаннями досліднику доводиться стикатися незалежно від того, в якій галузі застосовуються математичні методи дослідження. Вони однаковою мірою актуальні в механіці, хімії, економіці, біології тощо.

Одним із видів залежності поведінки системи від параметра є наявність в математичній моделі системи, в якій присутні процеси, що відбуваються у різних масштабах часу, параметрів, які задають відношення швидкостей однієї частини рухів системи відносно іншої, т.зв. "швидких" та "повільних" рухів. Також, зазначені параметри можуть з'являтися внаслідок застосування специфічних способів побудови керування в математичних моделях систем, рухи яких не відрізняються за швидкостями. Системи диференціальних рівнянь, що містять такі параметри, мають назву різнотемпові системи диференціальних рівнянь. Початок їх дослідження, вважається, було покладено доповіддю L. Prandtl у 1904р. на 3-му Міжнародному математичному конгресі в Гейдельберзі. Вагомі результати в теорії т.зв. релаксаційних коливань, що є одним із прикладів поведінки траєкторій різнотемпових систем, були отримані B. Van der Pol і, згодом, розвинуті О.О. Андроновим, О.А. Віттом, Л.І. Мандельштамом. Класичними є результати А.М. Тихонова та І.С. Градштейна, які стосуються особливостей граничного переходу розв'язку сингулярної задачі Коші до розв'язку незбуреної задачі. Слід відмітити роботи М.М. Крилова, О.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, В.М. Волосова щодо застосування методу усереднення та роботи Л.С. Понтрягіна, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова щодо застосування асимптотичних методів в теорії релаксаційних коливань. Згадаємо також важливі дослідження W.R. Wasow, М.О. Желєзцова, Л.В. Родигіна, А.Б. Васильєвої, P.V. Kokotovic, H.K. Khalil.

Однак, основні методи дослідження різнотемпових систем, як то метод розділення змінних, що базується на застосуванні результатів Тихонова, метод усереднення, асимптотичні методи, мають ряд недоліків. По-перше, всі вони дають висновок про поведінку системи диференціальних рівнянь на скінченному часовому інтервалі, що у випадку різнотемпових систем, коли можливе явище зриву, робить прогноз поведінки реальних механічних систем, які описуються за допомогою таких математичних моделей, обмеженим. Хоча, накладання додаткової умови для методу розділення змінних розширює часовий інтервал дослідження на нескінченність, проте, у випадку сильної нелінійності досліджуваної системи, перевірка цієї умови може виявитися навіть складнішою за аналіз початкової системи. Відмітимо, що окремі роботи по дослідженню поведінки різнотемпових систем диференціальних рівнянь на нескінченному часовому інтервалі та їх стійкості, були опубліковані F.C. Hoppensteadt, І.С. Градштейном, Б.С. Разуміхіним, О.І. Клімушевим та М.М. Красовським. Проте, деякі з цих публікацій присвячені дослідженню лінійних систем, а ті, в яких акцент було зроблено на нелінійності, не дають відповіді на питання, зокрема, про глобальний характер стійкості, оцінку меж зміни параметра, тощо. По-друге, вищезгадані методи здебільшого зосереджені на аналізі крайових або початкових задач, у той час, як у багатьох випадках, потрібно слідкувати за поведінкою всієї системи диференціальних рівнянь, а не окремих її траєкторій. По-третє, існують складності із визначенням можливого інтервалу зміни величини параметра, який визначає відношення швидкостей "швидкого" та "повільного" рухів, що для більшості прикладних задач є важливим, оскільки цей параметр може явним чином входити в закон керування. Отже, актуальною є розробка нових і вдосконалення існуючих методик, які б дозволили подолати вищезгадані недоліки при дослідженні різнотемпових систем.

Ще одним варіантом залежності поведінки системи від параметрів є наявність у її складі неточних параметрів. Слід зауважити, що питання наявності неточних параметрів в математичних моделях реальних механічних систем видається природним, якщо врахувати, що параметри визначаються, зазвичай, за допомогою обрахунків або експерименту, тобто, наближено, а тому теоретичні побудови, що вимагають точних значень параметрів, взагалі кажучи, є марними. Дослідження систем з неточними значеннями параметрів проводилося в роботах Y.H. Chen, G. Leitman, M.J. Corless, В.Л. Харитонова, D.D. Siljak, Д.Я. Хусаінова, В.Б. Ларіна, А.А. Мартинюка, V. Lakshmikantham та ін. Для дослідження динамічних характеристик систем такого класу групою авторів M. Ikeda, Y. Ohta, D.D. Siljak було запропоновано використовувати концепцію параметричної стійкості. Зауважимо, що при дослідженні нелінійних систем, які містять неточні параметри, однією з основних проблем є визначення стану рівноваги та врахування зміни його положення через зміну значень параметрів. Концепція параметричної стійкості дозволяє вирішити цю проблему, оскільки вона поєднує в одному означенні існування стану рівноваги та його стійкість. Стан рівноваги при цьому розглядається, як деяка неперервна функція, що залежить від параметрів, які входять у систему. Одним з найбільш ефективних, а тому і найбільш використовуємих методів дослідження стійкості руху є метод функцій Ляпунова. Його застосування дозволяє досліджувати динаміку системи не інтегруючи її, що у випадку нелінійності системи майже завжди являє собою значну проблему. Тому, використання цього методу при дослідженні параметричної стійкості нелінійних систем приносить значну користь. Відмітимо, що концепція параметричної стійкості, яка є ефективною при дослідженні неточних систем, має деякі труднощі в застосуванні. Це пов'язано, перш за все, з необхідністю при використанні теорем методу функцій Ляпунова знати змінний стан рівноваги системи, що досліджується. Також, спосіб визначення області існування стану рівноваги в просторі параметрів, запропонований в роботі (Ikeda, Ohta, Siljak, 1991), є достатньо важким для застосування, особливо при дослідженні великомасштабних систем. Тому, незважаючи на наявні роботи у цій галузі, отримання нових результатів і покращення існуючих методик становить значний інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні наступних науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.363-08 "Побудова критерієв стійкості руху континуально-дискретних систем із застосуванням до задач механіки", номер державної реєстрації 0107U008614, 2008-2011 рр. ; НДР 1.3.1.374-12 "Розробка методів аналізу динамічної поведінки нелінійних механічних систем зі складними типами траєкторій і збурень", номер державної реєстрації 0112U000241, 2012-2015 рр.; НДР 1.3.1.406-16 "Розробка якісних методів аналізу динамічних властивостей механічних керованих систем із точною та неточною характеристикою параметрів", номер державної реєстрації 0115U005708, 2016-2019 рр. та в рамках виконання наступних грантів: F36/441-2012 "Параметрична стійкість сингулярно-збурених систем із застосуванням у задачах теоретичної механіки", номер державної реєстрації 0112U005719, 2012 р.; "Розвиток методу функцій Ляпунова в задачах стійкості, керування та стабілізації неточних "малоприводних" механічних систем", номер державної реєстрації 0115U005228, 2015-2016 рр.; F70/141-2017 "Розвиток теорії швидко-повільних динамічних систем із застосуванням в задачах стійкості, керування та стабілізації неточних "малоприводних" механічних систем", номер державної реєстрації 0117U007133, 2017 р.

Мета та завдання дослідження. *Метою* даної роботи є встановлення умов наявності заданих динамічних характеристик механічних систем, математичними моделями яких є неточні різнотемпові системи диференціальних рівнянь.

Для досягнення цієї мети необхідно:

1. розробити ефективний метод оцінки області у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи диференціальних рівнянь, що досліджується;
2. узагальнити метод функцій Ляпунова для врахування рухомості стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявності в ній параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних рухів";
3. застосувати отримані методики для дослідження актуальних типів неточних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що є математичними моделями механічних систем;
4. провести апробацію і перевірити ефективність методик при дослідженні динамічних характеристик реальних механічних систем, математичними моделями яких є неточні різнотемпові системи диференціальних рівнянь.

Об'єктом дослідження є динаміка нелінійних неточних різнотемпових моделей механічних систем, зокрема, систем типу Лур'є–Постнікова, систем типу Такагі–Сугено, малоприводних механічних систем.

Предметом досліджень є динамічні характеристики вказаних класів систем.

Методи дослідження. *Методами* досліджень є метод функцій Ляпунова (скалярних, векторних та матричнозначних), метод порівняння з векторною функцією Ляпунова для великомасштабних систем, метод Dynamic Surface Control для побудови керування малоприводними механічними системами. Метод функцій Ляпунова є потужним методом дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь, який дозволяє робити висновок про динамічні характеристики таких систем, зокрема про стійкість чи нестійкість, не розв'язуючи їх. Це є однією з його переваг, оскільки нелінійність досліджуваної системи значно ускладнює її розв'язання. Метод порівняння із векторною функцією Ляпунова є його модифікацією, яка адаптована для дослідження великомасштабних систем і заснована на разбитті системи великої розмірності на підсистеми із подальшою побудовою компонент векторної функції у вигляді скалярних функцій для підсистем. Це дозволяє простіше будувати результуючу функцію Ляпунова та повніше враховувати вплив підсистем на загальну динаміку всієї великомасштабної системи. Метод Dynamic Surface Control дозволяє будувати керування для системи, що приведена до каскадного вигляду. Однією з його особливостей є те, що керування, яке побудовано за його допомогою, забезпечує збіжність траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь не до рівноважних значень змінних, а до деяких наперед заданих траєкторій, збіжність яких до рівноважних значень змінних постулюється. Також особливістю даного методу є застосування фільтрів, за допомогою яких операція диференціювання замінюється визначенням приросту диференційованої величини за фіксований проміжок часу (часова константа фільтру). Це дозволяє уникнути збільшення складності елементів системи диференціальних рівнянь, в тому числі і закону керування.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Запропоновано новий підхід до визначення області, для значень параметрів з якої існує стан рівноваги неточних різнотемпових систем різних класів, як-то систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем і у випадку неможливості такого розділення, нелінійних систем у загальному вигляді, в тому числі великомасштабних.
2. Запропоновано узагальнення прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості неточних нелінійних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що полягає у його розширенні на новий клас систем, які досліджуються, а також у нових способах побудови відповідних допоміжних функцій та нових умовах стійкості, отриманих за їх допомогою.
3. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості та параметричної нестійкості для систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, які

для систем такого класу дають можливість робити висновок про динаміку системи при всіх можливих типах динаміки вказаних підсистем, без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.

4. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для систем типу Лур'є–Постнікова, у випадку коли вони не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем або у випадку браку відомостей про динамічні характеристики вказаних підсистем, без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.
5. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для нелінійних систем в загальному вигляді, які не потребують відшукання рухомого стану рівноваги, як у припущенні про їх великомасштабність, так і без такого припущення.
6. Запропоновано спосіб побудови керування, що забезпечує глобальну асимптотичну параметричну стійкість нелінійної системи в загальному вигляді відносно певної області у просторі параметрів системи у випадку її параметричної нестійкості.
7. Незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено у випадку, як стійкості, так і нестійкості лінійних наближень локальних підсистем, а також область такої стійкості у просторі параметрів моделі.
8. Розвинуто спосіб побудови керування для неточних малоприводних механічних систем, застосовуючи який отримано явні вигляди керування, що для всіх значень параметрів моделей з деяких областей забезпечують глобальну асимптотичну стійкість верхнього положення рівноваги маятника з маховиком, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги TORA, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги маніпулятора із пружним зчленуванням.
9. Запропоновано керування, тобто закон зміни напруги, що подається на вхід двигуна постійного струму послідовного збурення, яке забезпечує обертання валу двигуна із необхідною кутовою швидкістю для всіх значень параметрів моделі із деякої області.

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках теоретичної механіки та теорії диференціальних рівнянь; застосуванням точних аналітичних методів розв'язання поставлених задач та доведенням відповідних теорем та лем; узгодженістю та збігом деяких одержаних результатів з відомими в літературі, які були отримані за допомогою інших методів; відповідністю постановок, результатів і висновків до фізичної суті задач.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому розвитку концепції параметричної стійкості. Також отримані результати дозволяють робити висновок про якісну поведінку різних типів неточних різнотемпових моделей механічних систем на нескінченному часовому інтервалі у випадку, якщо внаслідок, наприклад, значної нелінійності моделі, що розглядається, застосування, зокрема, методу розділення змінних ускладнене. Достатні умови параметричної стійкості дають можливість максимально врахувати вплив неточних параметрів на динамічні характеристики механічних систем, тобто точніше моделювати реальні задачі і, відповідно, точніше прогнозувати поведінку реальних механічних систем. Результати, отримані при дослідженні малоприводних механічних систем, мають практичне застосування при побудові реальних робототехнічних систем, до яких вони входять, як складові частини, або, у випадку TORA, для моделювання поведінки супутника із подвійним обертанням чи механізму активного гасіння вібрацій.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних конференціях і форумах, зокрема:

на XIII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 2010;

на міжнародній конференції “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”, Київ, 2015, 2017;

на Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 2015;

на Українсько-Китайському форумі науки та технологій, Китай, Харбін, 2016;

на 5-й Міжнародній науковій конференції для молодих вчених по диференціальним рівнянням та їх застосуванням присвяченій Я. Б. Лопатинському, Київ, 2016;

на Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-ій річниці академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського, Київ, 2017;

на XVII та XVIII Міжнародних конференціях науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів “Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн”, Київ, 2017, 2018;

на Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченій Я. С. Підстригачу, Львів, 2018.

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалась

на семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України А.А. Мартинюк, 2018 р.);

на семінарі секції “Теорія коливань та стійкість руху” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України В.Д. Кубенко, 2018 р.);

на загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України А.Н. Гузь, 2018 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертації висвітлено в 31 наукових працях, з них 4 статті [5, 6, 9, 12] у провідних міжнародних наукових виданнях, 17 статей [1–4, 7, 8, 10, 11, 13–21] у наукових фахових виданнях України та 10 тез [22–31] доповідей і матеріалів міжнародних наукових конференцій. Всі результати роботи отримані автором самостійно. У спільних публікаціях автору дисертаційної роботи належить вибір методики розв'язання задач, аналітичні та чисельні розрахунки, аналіз отриманих результатів, співавтору – визначення загального напрямку дослідження, участь в аналізі отриманих результатів.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел зі 195 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 300 сторінок, разом із 26 рисунками.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультантові – академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Андрійовичу Мартинюку за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету й задачі досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; наведено дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок здобувача в них, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У **першому розділі** виконано огляд літератури за темою дисертації. На підставі аналізу літературних джерел висвітлено виникнення і розвиток теорії різнотемпових систем та систем з неточними значеннями параметрів, а також описано клас малоприводних механічних систем і основні моделі, які до нього належать.

В багатьох галузях науки і техніки зустрічаються системи, в яких присутні процеси, що відбуваються у різних масштабах часу. Адекватними математичними моделями таких систем є різнотемпові системи диференціальних рівнянь. В загальному випадку, автономну різнотемпову систему диференціальних рівнянь можливо записати як у швидко-повільному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,y,\varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y,\varepsilon), \end{cases}$$

так, застосувавши заміну змінних $t = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$, і у сингулярно-збуреному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = f(x,y,\varepsilon), \\ \varepsilon\dfrac{dy}{d\tau} = g(x,y,\varepsilon), \end{cases}$$

де x – повільна змінна, y – швидка змінна, ε – параметр, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів, f та g – достатньо гладкі функції.

Для неавтономних систем швидко-повільна і сингулярно-збурена форми не еквівалентні через присутність часу в правій частині системи.

Значний внесок у розвиток теорії різнотемпових систем зробили О.О. Андронов, О.М. Боголюбов, В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильєва, О.А. Вітт, М.Й. Вішік, В.М. Волосов, І.С. Градштейн, М.О. Железцов, М.М. Крилов, О.Б. Ликова, Л.А. Люстернік, Л.І. Мандельштам, Є.Ф. Міщенко, Ю.О. Митропольський, Л.С. Понтрягін, Л.В. Родигін, М.Х. Розов, А.М. Самойленко, А.М. Тихонов, N. Fenichel, F.C. Hoppensteadt, H.K. Khalil, P.V. Kokotovic, J. O'Reily, B. Van der Pol, W.R. Wasow та ін.

Вважається, що початок теорії сингулярно-збурених систем було покладено доповіддю "Про рух рідини при малому терті" (Prandtl, 1905) на Третьому міжнародному конгресі математиків у Гейдельберзі.

Важливою віхою стало дослідження Van der Pol-ем (Van der Pol, 1926) коливань, які виникали в електричному контурі. Спостерігалося, що при зменшенні деякого параметра характер коливань від близьких до гармонічних переходив до специфічного вигляду, коли в динаміці коливного процесу почали виділятися ділянки "повільної" зміни та швидких "стрибків" з одного стану на інший. Л.І. Мандельштам ввів для пояснення цих ефектів т. зв. "постулат стрибка". Відповідно до цього постулату, з певних фізичних міркувань, вважалося, що досягнувши деякого стану, система "миттєво" переходить у інший стан. Було запропоновано називати такі коливання "релаксаційними" та висунута гіпотеза, що при прямуванні параметра до нуля відповідні розв'язки рівняння, що описують динаміку таких коливань, стають розривними. Крім того, B. Van der Pol запропонував замінювати початкову систему, що описує динаміку коливань системи з однією степінню свободи, спрощеною системою, яка отримується із початкової усередненням правої частини системи по "швидкій" змінній, тобто поклав початок методам розділення рухів. Однак, цей метод, не дивлячись на популярність у інженерів через зручність проведення розрахунків, носив чисто інтуїтивний характер.

В 1930-х роках Крилов та Боголюбов (1934, 1937) запропонували загальний підхід (метод осереднення) для дослідження рівнянь, які розглядав B. Van der Pol. Його основний зміст полягає у побудові заміни змінних, яка дозволяє відокремити "швидкі" змінні від "повільних". Розв'язок початкової задачі має вигляд асимптотичного ряду, перший член якого співпадає із розв'язком, отриманим за методом Van der Pol-a. Згодом цей метод отримав розвиток у роботах Митропольського (1964, 1971), Волосова (1971) та ін.

Звична на даний час термінологія, як то "граничний шар" (англ. boundary layer), що запозичена з гідродинаміки, була введена в дисертаційній роботі Wasow (1941) та остаточно закріпилася після статті Вішіка та Люстерніка (1962). Термін "сингулярні збурення" (англ. singular perturbations) вперше з'явився в книзі Friedrichs, Wasow (1946), яка стала результатом роботи семінару з нелінійних коливань Нью-Йоркського університету.

Математичне пояснення "постулату стрибка" було отримано Железцовим

(1958) та Родигіним (1951). Повільна система з певною точністю описує поведінку реальної системи при малих значеннях параметра до тих пір, поки рух відбувається поблизу стійких ділянок повільної поверхні. Однак, може бути досягнута границя такої ділянки. В цей час траєкторія реальної системи може "зірватися", тобто залишити окіл повільної поверхні. Тепер її поведінка буде задаватися швидкою системою. Це і є "стрибок". В повільному масштабі часу він відбувається "миттєво", тобто траєкторія має розрив, а у швидкому – за деякий скінченний час. При цьому траєкторія, слідуючи швидкій динаміці, може потрапити на стійку ділянку повільної поверхні, після чого швидкий рух знов зміниться повільним.

Класичними є результати Тихонова (1948, 1950, 1952), щодо особливостей граничного переходу розв'язку сингулярної задачі Коші до розв'язку незбуреної задачі. Випадок, розглянутий А.М. Тихоновим, визначає якісну поведінку руху тоді, коли початкові умови системи швидких рухів належать області впливу її кореня, який є стійким станом рівноваги, а траєкторія виродженої системи – системи повільних рухів – не виходить з області стійкості кореня. Подібні результати були окремо отримані Градштейном (1950, 1953). В розглянутому випадку задача асимптотичного представлення розв'язку початкової системи по малому параметру може бути розв'язана до кінця. Існує аналог формули Маклорена, отриманий Васильєвою (1951) і доведений до формалізму, який дає асимптотичне представлення розв'язку початкової задачі.

Відмітимо роботи по дослідженню поведінки різнотемпових систем диференціальних рівнянь на нескінченному часовому інтервалі і їх стійкості: Васильєва (1962), Hoppensteadt (1965), Разуміхін (1957, 1963). Стійкість стаціонарних режимів сингулярно-збурених систем диференціальних рівнянь, в тому числі великомасштабних, досліджувалася в роботі Груйіча, Мартинюка, Ріббенс-Павеллі (1984) шляхом застосування скалярних та векторних функцій Ляпунова та в дисертаційній роботі Міладжанова (1993) за допомогою матричнозначних функцій Ляпунова.

В останні роки кількість публікацій, присвячених дослідженню різнотемпових систем та розвитку асимптотичних методів, неухильно зростає. З їх переліком та класифікацією відповідно до тематики досліджень можна ознайомитись в грунтовних оглядових роботах Kokotovic, O'Malley, Sannuti (1976), Saksena, O'Reilly, Kokotovic (1984), Naidu, Calise (2001), Zhang, Naidu, Cai, Zou (2014).

Зауважимо, що одним з припущень теорії стійкості руху Ляпунова є припущення, що параметри системи фіксовані та не змінюються за весь час руху (О.М. Ляпунов, 1954). Однак, на практиці ці параметри можуть змінювати своє значення. Наприклад, у зв'язку із допущеними неточностями при побудові моделі чи при зміні деяких параметрів середовища, в якому модель, що досліджується, функціонує. Крім того, в багатьох складних системах, забезпечення багаторежимності та багатофункціональності може мати місце лише при виконанні деяких вимог на підсистеми у фіксованому але достатньо широкому діапазоні параметрів цих підсистем. Дослідження систем з неточними значеннями параметрів проводилося в роботах Barmish, Leitman (1982), Chen, Leitman (1987), Corless (1990), Ivanenko (1996).

Розробляються декілька напрямків: дослідження інтервальних динамічних систем (Харитонов (1978), Хлебалін (1982), Жабко, Харитонов (1996), Мазко (2010) та ін.); застосування методу функцій Ляпунова (Хусаінов, Шатирко (1997), Heinen (1984), Xu (1985), Corless, Leitmann (1996), Chen (1999), Мартинюк (2002) та ін.); застосування методу H_∞ – керування (Gardiner, Laub (1986), Petersen, Anderson, Jonckheere (1991), Ларін (1998) та ін.).

Відносно новим напрямком в дослідженні неточних систем є напрямок, який заснований на застосуванні концепції параметричної стійкості. Ця концепція природно виникає, коли динамічна система нелінійна і параметри входять до її складу довільним чином. В цьому випадку зміна значення параметра тягне за собою зміну значення стану рівноваги або, навіть, його зникнення. Також, при переході від одного стану рівноваги до іншого може змінюватися характер стійкості. Таким чином, природно поєднати проблему існування стану рівноваги неточної системи і питання про його стійкість в єдиному означенні параметричної стійкості, що й було запропоновано зробити авторами роботи Ikeda, Ohta, Siljak (1991). В такому випадку, задача про дослідженняя цієї властивості динамічної системи зводиться до визначення області у просторі параметрів, для кожного значення параметра з якої існує стан рівноваги системи, що досліджується і, далі, до дослідження властивостей стійкості знайденого стану рівноваги для значень параметра із цієї області. При цьому, стан рівноваги пропонується розглядати як неперервну функцію, що залежить від значення параметра.

Нові задачі керування складними кінематичними механізмами обумовлені появою робототехнічних систем нетривіальної конструкції (див. Зевін, Філоненко (2007) та ін.). У зв'язку з цим, виникають проблеми стабілізації та керування просторовим рухом механізмів, у яких кількість керуючих входів менше числа степенів свободи, тобто є недостатньою для реалізації звичайних режимів роботи робота. Дослідження таких об'єктів, які в англомовній літературі носять назву underactuated mechanical systems, що може бути перекладено як "малоприводні" механічні системи (ММС), було розпочато близько двох декад тому, коли керування неголономними механічними системами викликало велику цікавість у дослідників і виникала значна кількість задач, до яких звичні методи теорії керування не могли бути застосовані (див. Bloch, Reyhanoglu, McClamroch (1992), Astolfi (1996), Fantoni, Lozano (2001)). Крім того, зменшення кількості керуючих входів і, відповідно, виконавчих пристроїв (приводів) позитивно впливає на енергетичні, масово-габаритні та вартісні показники ММС, що робить їх дослідження і впровадження ще більш актуальною задачею. ММС широко використовуються для моделювання реальних процесів у таких галузях, як робототехніка, космонавтика, морська справа, дослідження гнучких, мобільних, локомотивних систем, в багатьох інших (див. Liu, Yu (2013) та бібліографію там).

З огляду на проведений аналіз літературних джерел, виникає необхідність розвитку методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних характеристик неточних різнотемпових механічних систем на нескінченному інтервалі часу та отримання оцінок на множину неточних параметрів відповідної математичної моделі та величину параметра, що визначає відношення швидкостей "швидкого" та "повільного" рухів, при яких такі характеристики зберігаються. Важливою метою є розробка ефективних методів оцінки області в просторі параметрів системи, для всіх значень параметрів з якої існує її єдиний стан рівноваги, а також знаходження умов, які без визначення рухомого стану рівноваги дозволили б встановити параметричну стійкість системи, що досліджується. Враховуючи отримані результати, для малоприводних механічних систем, математичні моделі яких відносяться до класу неточних різнотемпових систем, треба розвинути спосіб побудови керування, яке б забезпечувало їх бажані динамічні характеристики, а також побудувати відповідні закони керування для основних систем з цього класу. На розвязання цих проблем націлені дослідження даної дисертаційної роботи.

Другий розділ присвячено застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних характеристик неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Системи Лур'є–Постнікова характеризуються тим, що нелінійна характеристика об'єкта, який досліджується, точно невідома і потрібно встановити умови, які гарантують певну динамічну властивість такої системи для всіх нелінійностей, що лежать в деяких допустимих межах. Слід зазначити, що окрім невизначеності нелінійної характеристики, суттєво впливати на динамічні властивості системи, що розглядається, може наявність у її складі невизначених параметрів, які неминуче з'являються у процесі моделювання реальної механічної системи. Таким чином, врахування впливу нелінійних характеристик об'єкта та параметричної невизначеності моделі на динамічні характеристики різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, зокрема, стійкість та нестійкість їх станів рівноваги, зумовлюють необхідність узагальнення відповідних теорем методу функцій Ляпунова.

В підрозділі 2.1 розглядається інваріантна по часу система диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, p), \tag{1}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – стан системи (1) в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{R}^m$ – векторний фізичний параметр, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – настільки гладка функція, що для довільного заданого $p \in \mathbb{R}^m$ і початкової точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент часу $t_0 = 0$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $x(t, x_0, p)$. Припускається, що для деякого номінального значення параметра p^* існує стан рівноваги x^* системи (1), тобто $f(x^*, p^*) = 0$ і при цьому x^* стійкий. Стан рівноваги $x^e : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ розглядається як неперервна функція $x^e(p)$ векторного параметра. Наведено базові означення концепції параметричної стійкості, яка дає можливість враховувати вплив невизначених параметрів на існування стану рівноваги системи, що розглядається, та різні види його стійкості (нестійкості).

Підрозділ 2.2 присвячений методиці оцінки області у просторі параметрів системи типу Лур'є–Постнікова, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги цієї системи, у випадку, коли система допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ 0 = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ – змінні, $r \in \mathbb{R}^k$, $p \in \mathbb{R}^l$ – векторні параметри, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, які неперервно залежать від параметра p, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ нелінійна функція, яка неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^k$ і така, що $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \neq 0$.

Відносно системи (2) зробимо наступне припущення.

Припущення 2.1. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $A_{22}(p)$ і $K_0(p,u) = A_0(p) + q_0(p)\dfrac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)$, де $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, невироджені в точках $p = p^*$ і $p = p^*$, $u = 0$, відповідно.*

Основний результат підрозділу представлено у вигляді теореми, яка дозволить встановити області $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ і $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq c\}$, для всіх значень параметрів з яких існує єдиний розв'язок системи (2).

Теорема 2.1. *Нехай система (2) задовольняє умови припущення 2.1 і для функції $\varphi(u)$ виконується умова*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)}$$

для всіх $u \in \{u \in \mathbb{R}^k \mid \|u\| \leq \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|C(p)\|a + c\}$, де c – *довільне додатне число,*

$$a = 2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\| \max_{p\in\Omega_p 1} \|q_0(p)\| \times$$

$$\times \left(\frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)} + \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \right) c,$$

область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b1\}$ така, що виконується умова

$$\max_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \leq \frac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|}$$

і область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b2\}$ така, що для всіх p з $\Omega_p 2$ матриця $A_{22}(p)$ невироджена. Тоді для всіх $(p,r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, $\Omega_p = \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2).

Основна ідея, на якій грунтується доведення, полягає в тому, що збіжність ітераційного процесу до єдиної нерухомої точки забезпечує існування та єдиність розв'язку відповідного рівняння. Суттєвим є те, що припущення, яким повинна задовольняти система, що розглядається, перевіряються для фіксованих значень параметра. Також отримані оцінки, яким повинна задовольняти нелінійна функція, що входить до системи.

В підрозділі 2.3 встановлено достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості різнотемпової системи типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли система допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{3}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}^k$ – корегуючий вектор, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, що неперервно залежать від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – нелінійна неперервно диференційовна функція, $\varphi(0) = 0$, $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = I$, де I – одинична матриця відповідної розмірності, $\varepsilon \in (0, 1]$ – малий параметр. Вважаємо, що для системи (3) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Відносно системи (3) зробимо наступне припущення.

Припущення 2.2. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $A_{22}(p)$ і $K_0(p, u) = A_0(p) + q_0(p)\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_u C(p)$, де $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, стійкі в точках $p = p^*$ і $p = p^*$, $u = 0$, відповідно.*

Нехай $Q_s \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $Q_f \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – довільні симетричні додатно визначені матриці, а P_s^* і P_f^* – симетричні додатно визначені матриці, що є, відповідно, розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$K_0^T(p^*, 0)P_s^* + P_s^* K_0(p^*, 0) = -Q_s \text{ і } A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*) = -Q_f,$$

які, згідно умов припущення 2.2, очевидно, існують. Також позначимо

$$M_0(p, p^*) = (K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0)),$$
$$N(p, p^*) = (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)).$$

Використовуючи векторну функцію Ляпунова

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} (x - x^e)^T P_s^*(x - x^e) \\ (y - y^e)^T P_f^*(y - y^e) \end{pmatrix},$$

елементи якої – скалярні функції Ляпунова для "повільної" та "швидкої" підсистем, $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (3), що відповідає значенням параметрів (p, r) з області існування стану рівноваги, отримано достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (3) відносно області у просторі параметрів. Основний результат підрозділу сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 2.2. *Нехай відносно системи (3) виконуються умови припущення 2.2 і функція $\varphi(u)$, що входить в систему (3), задовольняє наступне обмеження*

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - I\right\| \le \frac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*,0)\|\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|\max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|)\|C(p)\|} \equiv \alpha$$

для всіх $u \in \mathbb{R}^s$, де область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p - p^*\| \le b1\}$ визначається із системи нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*,0)\|\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} + \max\limits_{p\in\Omega_p 1}\|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \le \dfrac{1}{2\|(K_0(p^*))^{-1}\|}, \\ \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_s) \end{cases}$$

і область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p - p^*\| \le b2\}$ *визначається з умови*

$$\max_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_f).$$

Тоді система (3) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^s | \|r\| \le c\}$, c – довільне додатне число, для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = \dfrac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi}$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi > 0$ і для всіх $0 < \varepsilon \le 1$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi \le 0$, де

$$\beta_1 = -\lambda_{\min}(Q_s) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) + 2\|P_s^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|),$$

$$\beta_2 = -\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))), \quad \gamma_1 = 2\|P_s^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}\|A_{12}(p)\|,$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = 2\|P_f^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \Big(&\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_0(p)\|\alpha + \\ &+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\|\|C(p)\|\alpha + \\ &+\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\| + \|C(p)\|\|C(p)q_0(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\alpha^2 + \\ &+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)q_0(p)C(p)\|\alpha + \|C(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| + \\ &+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\|\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi = \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \Big[&\lambda_{\max}\Big(A_{12}^T(p)(A_{21}^T(p) + C^T(p)q_2^T(p))(A_{22}^{-1}(p))^T P_f^* + \\ &+P_f^* A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p) + q_2(p)C(p))A_{12}(p)\Big)\Big] + \\ &+2\|P_f^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_{12}(p)\|). \end{aligned}$$

Цей результат є узагальненням теореми М.М. Красовського для систем типу Лур'є–Постнікова, але має значно більшу прикладну важливість, оскільки містить оцінки нелінійності, області параметрів та величини, яка є відношенням швидкостей швидких та повільних рухів, що дуже важливо для практичного застосування цих результатів. В якості ілюстрації наведено приклад керування електромотором постійного струму.

У підрозділі 2.4, використовуючи теореми обернені до теорем Ляпунова про нестійкість та теорему Четаєва про нестійкість, встановлені достатні умови параметричної нестійкості різнотемпової системи типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли система допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, для всіх варіантів поєднань стійкості та нестійкості їх лінійних наближень при деякому значенні параметра. Тобто, були отримані області у просторі параметрів системи і встановлені умови, при виконанні яких для всіх значень параметрів із знайдених областей існує єдиний стан рівноваги системи, який є нестійким, якщо хоча б одне з лінійних наближень відповідних підсистем нестійке при певному значенні параметра з цієї області. Також вказано верхню межу інтервалу зміни значень параметра ε.

Третій розділ присвячено застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних властивостей неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем через те, що неможливо аналітично розв'язати відповідні алгебраїчні рівняння, а також неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова спеціального вигляду, які допускають виділення вказаних підсистем, але через відсутність у них потрібних динамічних властивостей не дозволяють побудувати векторну функцію Ляпунова способом, який був запропонований у розділі 2. Зазначимо, що до систем, які розглядаються в даному розділі, не можна застосувати і відомі результати А.М. Тихонова, тому розвиток методу функцій Ляпунова, який дозволяє встановити характер поведінки розв'язків систем таких класів, є актуальною та важливою задачею.

У підрозділі 3.1 для систем вказаних типів запропоновано спосіб оцінки області у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги таких систем. Застосувати напряму результати підрозділу 2.2 не вдається, адже неможливо отримати в явному вигляді потрібний для дослідження ітераційний процес. Але перетворення початкової алгебраїчної системи і використання результатів для блочних та блочно-діагональних матриць дає можливість звести поставлену задачу до вже вирішеної у підрозділі 2.2 і отримати бажані оцінки області існування єдиного стану рівноваги у просторі параметрів початкової системи.

Підрозділ 3.2 присвячений способам побудови функції Ляпунова, яка дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи типу Лур'є–Постнікова відносно певної області в просторі її параметрів у випадку, коли початкова система не допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)f_2(\sigma_2), \end{cases} \tag{4}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $r_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $r_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ – корегуючі вектори, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k_1}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k_2}$, $c_{11}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times n}$, $c_{12}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times m}$, $c_{21}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times n}$, $c_{22}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times m}$ мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\sigma_1 = c_{11}(p)x + c_{12}(p)y + r_1$, $\sigma_2 = c_{21}(p)x + c_{22}(p)y + r_2$, $f_1 : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_2}$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні, відповідно, на $\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbb{R}^{k_2}$ і такі, що $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\left.\dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} = I^{k_1\times k_1}$, $\left.\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} = I^{k_2\times k_2}$, де $I^{k_1\times k_1}$ і $I^{k_2\times k_2}$ – одиничні матриці відповідних розмірностей, $\varepsilon \in (0,1]$. Вважаємо, що для системи (4) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

У пункті 3.2.1 розглянуто випадок, коли існує таке значення параметра, при якому лінійні наближення підсистем початкової системи стійкі.

Введемо позначення:

$$D_{ij}(p) = A_{ij}(p) + q_i(p)\left.\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0} c_{ij}(p),\ i,j = 1,2,$$
$$D(p) = D_{11}(p) - D_{12}(p)D_{22}^{-1}(p)D_{21}(p).$$

Відносно системи (4) зробимо наступне припущення.

Припущення 3.1. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $D_{11}(p)$ і $D_{22}(p)$ стійкі, а матриця $D(p)$ невироджена в точці $p = p^*$.*

Нехай $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – довільні симетричні додатно визначені матриці, а P_1^* і P_2^* – симетричні додатно визначені матриці, що є, відповідно, розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$D_{11}^T(p^*)P_1^* + P_1^*D_{11}(p^*) = -Q_1 \text{ і } D_{22}^T(p^*)P_2^* + P_2^*D_{22}(p^*) = -Q_2,$$

які, згідно умов припущення 3.1, очевидно, існують. Також позначимо

$$M_1(p,p^*) = (D_{11}(p) - D_{11}(p^*))^T P_1^* + P_1^*(D_{11}(p) - D_{11}(p^*)),$$
$$M_2(p,p^*) = (D_{22}(p) - D_{22}(p^*))^T P_2^* + P_2^*(D_{22}(p) - D_{22}(p^*)),$$

$$u = (\sigma_1^T, \sigma_2^T)^T,\ f : \mathbb{R}^{k_1+k_2} \to R^{k_1+k_2},\ f = (f_1^T, f_2^T)^T,$$

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix},\ q(p) = \begin{pmatrix} q_1(p) & 0 \\ 0 & q_2(p) \end{pmatrix},\ C(p) = \begin{pmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{pmatrix},$$

$$K(p,u) = A(p) + q(p)\left.\frac{df(u)}{du}\right|_u C(p),\ \alpha = \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)}.$$

Використовуючи векторну функцію Ляпунова

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} (x-x^e)^T P_1^*(x-x^e) \\ (y-y^e)^T P_2^*(y-y^e) \end{pmatrix},$$

де $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (4), що відповідає значенням параметрів (p, r) з області існування стану рівноваги, отримано достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (4) відносно області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 3.1. *Нехай відносно системи (4) виконуються умови припущення 3.1 і функції $f_1(\sigma_1)$ та $f_2(\sigma_2)$, що входять в систему (4), задовольняють наступним обмеженням:*

$$\left\| \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \right\| \leq \beta_1 < \min\left\{ \alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*)))}{2\|P_1^*\| \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_1(p)\|\|c_{11}(p)\|)} \right\}$$

для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, де область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b_1\}$ визначається з умови

$$\max_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_1),$$

$$\left\| \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} \right\| \leq \beta_2 < \min\left\{ \alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_2) - \max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(M_2(p,p^*)))}{2\|P_2^*\| \max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|)} \right\}$$

для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, де область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b_2\}$ визначається з умови

$$\max_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_2),$$

область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ визначається з умови

$$\max_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\| \leq \frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|},$$

$\beta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_2 \in \mathbb{R}_+$ і для всіх $p \in P \subseteq (\Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$ виконується умова

$$\delta_1\delta_2 < \gamma_1\gamma_2,$$

де

$$\gamma_1 = -\lambda_{\min}(Q_1) + \lambda_{\max}(M_1(p,p^*)) + 2\|P_1^*\|\|q_1(p)\|\|c_{11}(p)\|\beta_1,$$

$$\gamma_2 = -\lambda_{\min}(Q_2) + \lambda_{\max}(M_2(p,p^*)) + 2\|P_2^*\|\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2,$$

$$\delta_1 = 2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(p) + q_1(p)c_{12}(p)\| + \|q_1(p)\|\|c_{12}(p)\|\beta_1\Big),$$

$$\delta_2 = 2\|P_2^*\|\Big(\|A_{21}(p) + q_2(p)c_{21}(p)\| + \|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2\Big).$$

Тоді система (4) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^{k_1} \mid \|r_1\| \leq c_1\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^{k_2} \mid \|r_2\| \leq c_2\}$, c_1 і c_2 – довільні додатні числа, для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.

У пункті 3.2.2 наведено спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова, яка дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи відносно певної області в просторі її параметрів у випадку, коли не виконується умова, наведена в пункті 3.2.1.

Відносно системи (4) зробимо наступне припущення.

Припущення 3.2. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $D_{22}(p)$ і $D(p)$ невироджені в точці $p = p^*$.*

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – деяка стала матриця, $B(p,\varepsilon)$ – блочна матриця розміру 4×4 з елементами $B_{11} = P_1A_{11}(p) + A_{11}^T(p)P_1 + P_3A_{21}(p) + A_{21}^T(p)P_3^T$,
$B_{21} = B_{12}^T = \varepsilon P_3^T A_{11}(p) + P_2A_{21}(p) + A_{22}^T(p)P_3^T + A_{12}^T(p)P_1$,
$B_{22} = \varepsilon P_3^T A_{12}(p) + P_2A_{22}(p) + \varepsilon A_{12}^T(p)P_3 + A_{22}^T(p)P_2$,
$B_{13} = B_{31}^T = P_1q_1(p) + c_{11}^T(p)$, $B_{14} = B_{41}^T = P_3q_2(p) + c_{21}^T(p)$,
$B_{23} = B_{32}^T = \varepsilon P_3^T q_1(p) + c_{12}^T(p)$, $B_{24} = B_{42}^T = P_2q_2(p) + c_{22}^T(p)$,
$B_{33} = -\dfrac{2}{a_1}I^{k_1\times k_1}$, $B_{34} = B_{43}^T = 0^{k_1\times k_2}$, $B_{44} = -\dfrac{2}{a_2}I^{k_2\times k_2}$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – деякі числа.

Введемо наступні позначення:

$$M_i = -\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\| - \frac{a_i}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(2\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\| + a_i\right)^2 - \right.$$

$$\left. -4\left(\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|^2 - \frac{a_i}{2}\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \ i = 1, 2,$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{24} \end{pmatrix},$$

$$I_{a_1a_2} = \begin{pmatrix} B_{33} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & B_{44} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1}{2}I^{k_1\times k_1} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & -\dfrac{a_2}{2}I^{k_2\times k_2} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи матричнозначну функцію Ляпунова

$$V(x,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\varepsilon) \\ v_{21}(x,y,\varepsilon) & v_{22}(y,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де $v_{11}(x) = (x-x^e)^T P_1(x-x^e)$, $v_{22}(y) = \varepsilon(y-y^e)^T P_2(y-y^e)$,
$v_{21}(x,y,\varepsilon) = v_{12}(x,y,\varepsilon) = \varepsilon(x-x^e)^T P_3(y-y^e)$, $((x^e)^T,(y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (4), що відповідає значенням параметрів (p, r_1, r_2) з області існування стану рівноваги, отримано достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (4) відносно області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 3.2. *Нехай для системи (4) виконуються умови припущення 3.2, для функцій $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ при всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, відповідно, виконуються* *оцінки*

$$\left\| \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i} - \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\| < \min\{\alpha, M_i\},\ i = 1, 2,$$

де

$$a_i > \frac{2\left\| \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\|^2}{\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right)^T \right)},\ i = 1, 2,$$

$P \subseteq \Omega_p$, *де область* Ω_p *визначається з умови*

$$\max_{p \in \Omega_p} \|K(p, 0) - K(p^*, 0)\| \leq \frac{1}{2\|(K(p^*, 0))^{-1}\|}$$

і для всіх $p \in P$, $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$, *де* $\varepsilon^* = \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2)}{\lambda_{\max}(P_3 P_3^T)}$, *матриця* $B = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & I_{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix}$ *стійка. Тоді система (4) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області* $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^{k_1} \mid \|r_1\| \leq c_1,\ c_1 > 0\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^{k_2} \mid \|r_2\| \leq c_2,\ c_2 > 0\}$, *для всіх* $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$.

В підрозділі 3.3 розглядається система типу Лур'є–Постнікова спеціального типу, яка дозволяє виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, проте для побудови векторної функції Ляпунова бракує даних про стійкість цих підсистем при деякому значенні параметра. Використання матричнозначної функції Ляпунова дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості відносно певної області в просторі її параметрів для всіх значень параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів, з інтервалу $(0,\ 1]$.

Всі результати цього розділу проілюстровані конкретними числовими прикладами.

Четвертий розділ присвячено застосуванню прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості неточних різнотемпових систем в загальному вигляді та побудові керування для таких систем.

Загальний вигляд функцій, які входять до складу систем, що розглядаються в цьому розділі, унеможливлює застосування методу розділення рухів різнотемпових систем, який базується на результатах А.М. Тихонова та його послідовників, оскільки цей метод потребує наявності в явному вигляді розв'язку деякого рівняння, який в контексті загального вигляду відповідної функції та її нелінійності отримати досить складно. Альтернативним і найбільш загальним методом дослідження нелінійних систем, до яких відносяться і різнотемпові системи, що розглядаються в цьому розділі, є другий (прямий) метод Ляпунова. Він дозволяє встановити динамічні характеристики системи, яка досліджується, не знаходячи її розв'язку, що для нелінійних систем практично завжди являє собою суттєву складність, а також, не вдаючись до її лінеаризації, що у випадку, наприклад, дослідження глобальної стійкості не приведе до бажаного результату. Однак, на практиці, застосування цього методу ускладнюється відсутністю регулярних методів побудови відповідної функції. Тому вдосконалення існуючих та розробка нових методик та способів побудови функцій Ляпунова для різних класів нелінійних систем є актуальною та важливою задачею.

У підрозділі 4.1 запропоновано спосіб оцінки області у просторі параметрів неточних різнотемпових систем в загальному вигляді, в тому числі великомасштабних, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги таких систем. Зауважимо, що на відміну від розділів 2 та 3, де таку область було знайдено з умов збіжності ітераційного процесу, в цьму розділі оцінку шуканої області отримано з оцінок областей невиродженості матриць, від яких залежать розвязкі відповідних рівнянь.

У підрозділі 4.2 встановлено достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості різнотемпової системи відносно певної області у просторі її параметрів.

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,p), \\ \varepsilon\dot{y} = f_2(x,y,p), \end{cases} \tag{5}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – зміні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x,y,p) \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x,y,p) \in \mathbb{R}^m$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon \in (0,1]$. Вважаємо, що для системи (5) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для функцій $f_1(x,y,p)$ і $f_2(x,y,p)$, систему (5) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + C_2(p), \end{cases} \tag{6}$$

де

$$A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}}, \quad A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}},$$

$$A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}}, \quad A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}},$$

$C_1(p) = f_1(0,0,p)$, $C_2(0,0,p) = f_2(0,0,p)$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$ – деякі точки відповідних просторів.

Відносно системи (6) зробимо наступне припущення.

Припущення 4.1. *Система рівнянь (6) така, що*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що при цьому значенні параметра існує стан рівноваги $x = x^*$, $y = y^*$ цієї системи;

(2) існують такі додатні числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta < +\infty$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}(x,y,p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\| \le \alpha, \quad \|A_{12}(x,y,p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| \le \beta,$$

$$\|A_{21}(x,y,p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\| \le \gamma, \quad \|A_{22}(x,y,p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\| \le \delta$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$;

(3) матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*)$ *і*

$$A = A_{22}(x^*,y^*,p^*) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)A_{12}(x^*,y^*,p^*)$$

невироджені.

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стала матриця. Введемо наступні позначення:

$$A(\alpha,\gamma) = \lambda_{\max}\Big(A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_1 + P_1A_{11}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_2^T +$$

$$+P_2A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big) + 2\|P_1\|\alpha + 2\|P_2\|\gamma,$$

$$B(\beta,\delta,\varepsilon) = \lambda_{\max}\Big(A_{22}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + P_3A_{22}(x^*,y^*,p^*) + \varepsilon A_{12}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 +$$

$$+\varepsilon P_2^T A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big) + 2\|P_3\|\delta + 2\varepsilon\|P_2\|\beta,$$

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \Big\|P_1A_{12}(x^*,y^*,p^*) + P_2A_{22}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 +$$

$$+\varepsilon A_{11}(x^*,y^*,p^*)P_2\Big\| + \|P_1\|\beta + \|P_2\|\delta + \varepsilon\|P_2\|\alpha + \|P_3\|\gamma,$$

$$M(\alpha) = \frac{\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|^2\alpha}{1-\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\alpha}.$$

Оскільки ніяких відомостей про стійкість лінійних наближень відповідних підсистем початкової системи, які б дозволили побудувати компоненти векторної функції Ляпунова, нема, то для дослідження стійкості всієї системи було застосовано матричнозначну функцію Ляпунова:

$$V(x,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\varepsilon) \\ v_{21}(x,y,\varepsilon) & v_{22}(y,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де $v_{11}(x) = (x-x^e)^TP_1(x-x^e)$, $v_{22}(y,\varepsilon) = \varepsilon(y-y^e)^TP_3(y-y^e)$, $v_{21}(x,y,\varepsilon) = v_{12}(x,y,\varepsilon) = \varepsilon(x-x^e)^TP_2(y-y^e)$, $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стала матриця, $((x^e)^T,(y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (6), що відповідає значенню параметра p з області існування стану рівноваги, отримано достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (6) відносно області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 4.1. *Нехай для системи (6), до якої зводиться система (5), виконуються умови припущення 4.1, справедливі співвідношення*

$$\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\alpha < 1,$$

$$\|A^{-1}\|\delta + \|A^{-1}\|\Big[\gamma M(\alpha)\beta + \gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta + \gamma M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| +$$

$$+\gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\|+\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta+$$

$$\left.+\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|M(\alpha)\beta+\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\|\right]<1$$

і для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon^*<\dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_3)}{\lambda_{\max}(P_2P_2^T)}$ *вірні оцінки*

$$A(\alpha,\gamma)<0,\;\; A(\alpha,\gamma)B(\beta,\delta,\varepsilon)-C^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)>0.$$

Тоді система (5) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P *для всіх* $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$.

В якості прикладу застосування запропонованої методики досліджено неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь четвертого порядку зі скалярним параметром.

Підрозділ 4.3 присвячено розширенню результатів підрозділу 4.2 на випадок великомасштабності системи, яка досліджується. В цьому випадку, окрім "звичних" труднощів, які виникають при дослідженні великомасштабних систем, додаються труднощі, пов'язані із наявністю декількох параметрів при старших похідних відповідних рівнянь. Розглядається випадок, коли такі параметри взаємно не зв'язані, тому початкова система має декілька істотно незалежних часових шкал. Розбивши вектори стану системи на субвектори, великомасштабна система розглядається у вигляді сукупності взаємозв'язаних підсистем. Застосувавши скалярну функцію Ляпунова у вигляді суми функцій, які будуються для незалежних підсистем згідно результатів підрозділу 4.2, отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості початкової системи і вказана область такої стійкості у просторі параметрів системи. Знайдено оцінки на величини параметрів при старших похідних в рівняннях системи, для яких зберігається знайдена динамічна характеристика. Отримані результати проілюстровані на прикладі неточної різнотемпової системи диференціальних рівнянь восьмого порядку зі скалярним параметром.

В підрозділі 4.4 запропоновано спосіб побудови керування для параметричної стабілізації системи (5), що розглядалася у підрозділі 4.2, у випадку її параметричної нестійкості. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}=f_1(x,y,p)+B_1(p)u,\\ \varepsilon\dot{y}=f_2(x,y,p)+B_2(p)u, \end{cases} \tag{7}$$

де матриці $B_1(p)\in\mathbb{R}^{n\times k}$, $B_2(p)\in\mathbb{R}^{m\times k}$ мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра p. Керування $u\in\mathbb{R}^k$ будемо розглядати у вигляді $u=K_1x+K_2y$, де $K_1\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $K_2\in\mathbb{R}^{k\times m}$ деякі сталі матриці. Вважаємо, що для системи (7) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для функцій

$f_1(x,y,p)$ та $f_2(x,y,p)$, систему (7) аналогічно системі (6) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1x + K_2y). \end{cases} \qquad (8)$$

Відносно системи (8) зробимо наступне припущення.

Припущення 4.2. *Система рівнянь (8) така, що*

(1) існує таке значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$, що при цьому значенні параметра існує стан рівноваги $x = x^*$, $y = y^*$ цієї системи;

(2) існують такі додатні числа $\alpha,\beta,\gamma,\delta < +\infty$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}(x,y,p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\| \le \alpha, \quad \|A_{12}(x,y,p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| \le \beta,$$
$$\|A_{21}(x,y,p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\| \le \gamma, \quad \|A_{22}(x,y,p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\| \le \delta$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$;

(3) матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1$ і

$$A = A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2 - \Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1\Big)\times$$
$$\times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2\Big)$$

невироджені.

Нехай матриці K_1 та K_2 вибрані таким чином, що матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1$ та $A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2$ стійкі, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_1^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, які є розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^T P_1^* + P_1^*(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1) = -Q_1,$$
$$(A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2)^T P_2^* + P_2^*(A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2) = -Q_2,$$

відповідно. Ці розв'язки, очевидно, існують внаслідок вибору матриць K_1 та K_2. Позначимо

$$M(\alpha) = \frac{\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|^2(\alpha + \max\limits_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|)}{1 - \|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha + \max\limits_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|)}.$$

Використовуючи метод порівняння з векторною функцією Ляпунова,

$$V(x,y) = (v_1(x), v_2(y))^T,$$

де $v_1(x) = (x - x^e)^T P_1^*(x - x^e)$, $v_2(y) = (y - y^e)^T P_2^*(y - y^e)$ $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (8), що відповідає значенню параметра p з області існування стану рівноваги, отримано достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (8) відносно області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 4.2. *Нехай відносно системи (8) виконуються умови припущення 4.2, матриці K_1 та K_2 вибрані так, що матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1$ та $A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2$ стійкі, функції $f_1(x,y,p)$ та $f_2(x,y,p)$ задовольняють* *обмеженням*

$$\left\|\frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\| \le \alpha_1 <$$

$$< \min\left\{\alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - 2\|P_1^*\|\|K_1\| \max\limits_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|}{2\|P_1^*\|}\right\}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$,

$$\left\|\frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\| \le \delta_1 <$$

$$< \min\left\{\delta, \frac{\lambda_{\min}(Q_2) - 2\|P_2^*\|\|K_2\| \max\limits_{p\in P}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|}{2\|P_2^*\|}\right\}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ *і виконуються співвідношення*

$$\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha + \max_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_1\|) < 1,$$

$$\|A^{-1}\|\Big(\delta + \max_{p\in P}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\|A^{-1}\|\Bigg[\Big(\gamma+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)M(\alpha)\Big(\beta+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma + \max_{p\in P}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\Big(\beta + \max_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma + \max_{p\in P}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\|+$$

$$+\Big(\gamma + \max_{p\in P}\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\|+$$

$$+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\|M(\alpha)\Big(\beta + \max_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\|\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\Big(\beta + \max_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big) + \|(A_{21}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_1)\times$$

$$\times\|M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_2)\|\Bigg] < 1,$$

$$2\|P_1^*\|\|K_1\| \max_{p\in P}\|B_1(p) - B_1(p^*)\| < \lambda_{\min}(Q_1),$$

$$2\|P_2^*\|\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|<\lambda_{\min}(Q_2),$$

$$AC>BD,$$

де

$$A=-\lambda_{\min}(Q_1)+2\|P_1^*\|\Big(\alpha_1+\|K_1\|\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big),$$

$$B=2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\|+\beta+\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big),$$

$$C=-\lambda_{\min}(Q_2)+2\|P_2^*\|\Big(\delta_1+\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big),$$

$$D=2\|P_2^*\|\Big(\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\|+\gamma+\|K_1\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big).$$

Тоді система (7) при керуванні $u=K_1x+K_2y$ глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P для всіх $\varepsilon\in(0,1]$.

Спосіб побудови керування проілюстровано на прикладі системи третього порядку зі скалярним параметром. Лінійні наближення цієї системи нестійкі при деякому значенні параметра.

П'ятий розділ присвячено дослідженню динамічних характеристик неточних різнотемпових систем типу Такагі–Сугено. Велика кількість механічних систем та виробничих процесів настільки складні, що відповідну математичну модель дуже складно чи взагалі неможливо побудувати. Однак, більшість з таких систем можливо представити у вигляді деякого "набору" математичних моделей, кожна з яких описує локальну динаміку загальної системи. Такий підхід, запропонований T. Takagi та M. Sugeno, активно розвивається і застосовується у наш час. Нечіткі (англ. fuzzy) моделі, отримані з його допомогою, дозволяють більш точно моделювати процес, враховуючи його локальні складові, а не "усереднено" описувати всю систему однією моделлю, як це робилося раніше.

Класична теорія систем Такагі-Сугено, як відомо, розглядає нелінійні системи, які апроксимуються набором локальних лінійних систем, що пов'язані між собою правилами "якщо-то". Причому, клас нелінійних систем, які апроксимуються, достатньо широкий і лінійність локальних систем дозволяє застосувати для їх дослідження детально розроблені класичні методи, зокрема метод лінійних матричних нерівностей (англ. LMI). Однак, якщо початкова система істотно нелінійна, то кількість правил в моделі та, відповідно, розмірність методу LMI істотно зростає, що ускладнює застосування цього методу. Саме тому, в останні роки активно развивається теорія систем Такагі-Сугено, де локальні системи вважаються нелінійними. Це дозволяє зменшити кількість правил в моделі, а також підвищити її акуратність, тобто адекватність початковій системі. Таким чином, актуальною задачею є розробка нових та вдосконалення існуючих методик дослідження динамічних характеристик систем типу Такагі–Сугено із нелінійними, зокрема різнотемповими, локальними системами.

Розглянемо нечітку модель, для опису якої використано набір нечітких предикатних правил у наступному вигляді

$$R_i: \quad \text{якщо} \quad z_1(t) \in M_{i1} \quad \text{і} \quad \dots \quad \text{і} \quad z_s(t) \in M_{is},$$
$$\text{то} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_i(x,y,p), \\ \varepsilon \dot{y} = g_i(x,y,p), \end{cases} \quad i = \overline{1,r},$$

де M_{ig} – нечіткі множини, які визначаються функціями приналежності $\overline{M}_{ig} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $i = \overline{1,r}$, $g = \overline{1,s}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f_i(x,y,p) \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x,y,p) \in \mathbb{R}^m$ – векторні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, причому $f_i(0,0,p) = 0$ і $g_i(0,0,p) = 0$, $i = \overline{1,r}$, $z_1(t), \dots, z_s(t)$ – деякі системні змінні. Використовуючи формулу Лагранжа про скінченні прирости, після приведення до чіткості центроїдним методом, отримаємо різнотемпову систему, яка описує динаміку нечіткої моделі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y \Big], \\ \varepsilon \dot{y} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y \Big], \end{cases} \tag{9}$$

де

$$A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}_i \\ y=\tilde{y}_i}}, \quad A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}_i \\ y=\tilde{y}_i}},$$

$$A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i \\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}}, \quad A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i \\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}}, \quad i = \overline{1,r},$$

$\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y}_i \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{x}}_i \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^m$ – деякі точки відповідних просторів, $\mu_i(z(t)) = \dfrac{\omega_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} \omega_i(z(t))}$, $\omega_i(z(t)) = \prod\limits_{g=1}^{s} \overline{M}_{ig}(z_g(t))$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) = 1$, $\mu_i(z(t)) \geq 0$, $i = \overline{1,r}$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_s(t))^T$. Вважаємо, що система (9) має єдиний розв'язок початкової задачі.

У підрозділі 5.1 встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями у випадку стійкості лінійних наближень підсистем всіх локальних систем при певному значенні параметра.

Відносно системи (9) зробимо наступне припущення.

Припущення 5.1. *Система рівнянь (9) така, що:*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що для всіх $i = \overline{1,r}$ матриці $A_{11}^i(0,0,p^*)$, $A_{22}^i(0,0,p^*)$ стійкі;

(2) існують такі додатні числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i = \overline{1,r}$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \leq \alpha_i, \quad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \leq \beta_i,$$
$$\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \leq \gamma_i, \quad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \leq \delta_i,$$

для всіх $i = \overline{1,r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$.

Розглянемо системи лінійних матричних нерівностей

$$\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_1 + P_1\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)\Big) < 0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{10}$$

$$\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_2 + P_2\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)\Big) < 0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{11}$$

де $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці. Також позначимо

$$A_i(\alpha_i) = \lambda_{\max}\Big[\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0,0,p^*)\Big] + 2\alpha_i\|P_1\|,$$

$$B_i(\beta_i,\gamma_i) = \Big\|P_1 A_{12}^i(0,0,p^*) + \Big(A_{21}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_2\Big\| + \|P_1\|\beta_i + \|P_2\|\gamma_i,$$

$$C_i(\delta_i) = \lambda_{\max}\Big[\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_2 + P_2 A_{22}^i(0,0,p^*)\Big] + 2\delta_i\|P_2\|.$$

Використовуючи скалярну функцію Ляпунова

$$V(x,y,\varepsilon) = x^T P_1 x + \varepsilon y^T P_2 y,$$

отримано достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (9) відносно певної області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 5.1. *Нехай для системи (9) виконуються умови припущення 5.1, системи лінійних матричних нерівностей (10), (11) сумісні, відповідно, на множині симетричних додатно визначених матриць P_1 і P_2, для величин α_i, β_i, γ_i, δ_i, виконуються співвідношення*

$$A_i(\alpha_i) < 0, \quad A_i(\alpha_i)C_i(\delta_i) - B_i^2(\beta_i,\gamma_i) > 0, \quad i=\overline{1,r}.$$

Тоді стан рівноваги $x=0$, $y=0$ системи (9) асимптотично стійкий відносно області P для всіх $\varepsilon \in (0,1]$.

Як приклад, розглянуто нечітку модель електричного ланцюга, який містить тунельний діод.

У підрозділі 5.2 розглядається випадок, коли при певному значенні параметра серед лінійних наближень підсистем локальних систем існують нестійкі. При зробленому припущенні, спосіб побудови скалярної функції Ляпунова, запропонований у підрозділі 5.1, застосувати не вдається. Але використання матричнозначної функції Ляпунова дає можливість встановити достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями у вказаному випадку. Також вказано спосіб оцінки області у просторі параметрів системи, для значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається. Як приклад, також розглянуто нечітку модель електричного ланцюга, який містить тунельний діод.

Підрозділ 5.3 присвячено побудові керування, яке забезпечує стійкість стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями. Розглянуто випадок, коли результати підрозділів 5.1, 5.2 для побудови функції Ляпунова застосувати не вдається, але при запропонованому керуванні досягається бажана динамічна характеристика системи відносно певної області у просторі її параметрів.

Відносно систем (9) зробимо наступне припущення.

Припущення 5.2. *Система рівнянь (9) така, що:*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що серед матриць $A_{22}^i(0,0,p^*)$, $i=\overline{1,r}$, хоча б одна нестійка;

(2) існують такі додатні числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i=\overline{1,r}$, що виконуються оцінки

$$\begin{aligned} &\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \le \alpha_i, \quad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \le \beta_i, \\ &\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \le \gamma_i, \quad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \le \delta_i, \end{aligned}$$

для всіх $i=\overline{1,r}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $p\in P\subseteq\mathbb{R}^l$.

Введемо керування $u\in\mathbb{R}^k$ таким чином, що набір нечітких предикатних правил для опису початкової нечіткої моделі має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} R_i:\quad &\text{якщо}\quad z_1(t)\in M_{i1}\quad \text{і}\quad \dots\quad \text{і}\quad z_s(t)\in M_{is}, \\ &\text{то}\quad \begin{cases} \dot{x} = A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)y + B_1^i(p)u, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)y + B_2^i(p)u, \end{cases} \quad i=\overline{1,r}, \end{aligned}$$

де $B_1^i(p)\in\mathbb{R}^{n\times k}$, $B_2^i(p)\in\mathbb{R}^{m\times k}$, $i=\overline{1,r}$, мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра p.

Після приведення нечіткої моделі до чіткості центроїдним методом, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка описує повну динаміку початкової нечіткої моделі при керуванні u:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^r \mu_i(z(t))\Big[A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)y + B_1^i(p)u\Big], \\ \varepsilon\dot{y} = \sum\limits_{i=1}^r \mu_i(z(t))\Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + B_2^i(p)u\Big], \end{cases} \tag{12}$$

де $z(t) = (z_1(t),\dots,z_s(t))^T$, $\mu_i(z(t)) = \dfrac{\omega_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^r \omega_i(z(t))}$, $\omega_i(z(t)) = \prod\limits_{g=1}^s \overline{M}_{ig}(z_g(t))$, $\sum\limits_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$ і $\mu_i(z(t))\ge 0$, $i=\overline{1,r}$.

Нехай для опису керування використано набір нечітких предикатних правил

$$\begin{aligned} R_i:\quad &\text{якщо}\quad z_1(t)\in M_{i1}\quad \text{і}\quad \dots\quad \text{і}\quad z_s(t)\in M_{is} \\ &\text{то}\quad u = K_1^i x + K_2^i y,\ i=\overline{1,r}, \end{aligned} \tag{13}$$

де $K_1^i\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $K_2^i\in\mathbb{R}^{k\times m}$ – деякі сталі матриці. Тоді система (12) із урахуванням (13) буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i,j=1}^r \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\left[(A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1^i(p)K_1^j)x + (A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p) + B_1^i(p)K_2^j)y\right], \\ \varepsilon\dot{y} = \sum\limits_{i,j=1}^r \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\left[(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) + B_2^i(p)K_1^j)x + (A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) + B_2^i(p)K_2^j)y\right]. \end{cases} \tag{14}$$

Вважаємо, що для системи диференціальних рівнянь (14) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі. Розглянемо системи лінійних матричних нерівностей

$$\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^i\Big)^T P_1+P_1\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^i\Big)<0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{15}$$

$$\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^i\Big)^T P_2+P_2\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^i\Big)<0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{16}$$

де $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці і введемо позначення:

$L(\alpha_1,\dots,\alpha_r,p) = \Big(L_{ij}\Big)_{i,j=1}^r$, $M(\beta_1,\dots,\beta_r,\gamma_1,\dots,\gamma_r,p) = \Big(M_{ij}\Big)_{i,j=1}^r$, $N(\delta_1,\dots,\delta_r,p) = \Big(N_{ij}\Big)_{i,j=1}^r$ – симетричні матриці розмірності $r\times r$,

$$L_{ij}=\frac{1}{2}\lambda_{\max}\Big[\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j\Big)^T P_1+P_1\Big(A_{11}^i(0,0,p^*)+B_1^i(p^*)K_1^j\Big)+$$
$$+\Big(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i\Big)^T P_1+P_1\Big(A_{11}^j(0,0,p^*)+B_1^j(p^*)K_1^i\Big)\Big]+$$
$$+\|P_1\|\alpha_i+\|P_1\|\|K_1^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+\|P_1\|\alpha_j+\|P_1\|\|K_1^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|,$$

$$N_{ij}=\frac{1}{2}\lambda_{\max}\Big[\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j\Big)^T P_2+P_2\Big(A_{22}^i(0,0,p^*)+B_2^i(p^*)K_2^j\Big)+$$
$$+\Big(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i\Big)^T P_2+P_2\Big(A_{22}^j(0,0,p^*)+B_2^j(p^*)K_2^i\Big)\Big]+$$
$$+\|P_2\|\delta_i+\|P_2\|\|K_2^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+\|P_2\|\delta_j+\|P_2\|\|K_2^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|,$$

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\Bigg[\Big\|P_1A_{12}^i(0,0,p^*)+P_1B_1^i(p^*)K_2^j+\Big(A_{21}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_2+\Big(K_1^j\Big)^T\Big(B_2^i(p^*)\Big)^T P_2+$$
$$+P_1A_{12}^j(0,0,p^*)+P_1B_1^j(p^*)K_2^i+\Big(A_{21}^j(0,0,p^*)\Big)^T P_2+\Big(K_1^i\Big)^T\Big(B_2^j(p^*)\Big)^T P_2\Big\|+$$
$$+\|P_1\|\beta_i+\|P_1\|\|K_2^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+\|P_1\|\beta_j+\|P_1\|\|K_2^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|+$$
$$+\|P_2\|\gamma_i+\|P_2\|\|K_1^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+\|P_2\|\gamma_j+\|P_2\|\|K_1^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\Bigg].$$

Використовуючи скалярну функцію Ляпунова

$$V(x,y,\varepsilon)=x^TP_1x+\varepsilon y^TP_2y,$$

отримано достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (14) відносно певної області у просторі параметрів. Має місце теорема.

Теорема 5.2. *Нехай для системи (14) виконуються умови припущення 5.2, існують такі матриці K_1^i, K_2^i, $i=\overline{1,r}$, що системи лінійних матричних нерівностей (15), (16) сумісні, відповідно, на множині симетричних додатно визначених матриць P_1 і P_2, для всіх значень параметра $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ і для величин*

α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, виконуються співвідношення

$$\lambda_{\max}\Big(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\Big)<0,$$

$$\lambda_{\max}\Big(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\Big)\cdot\lambda_{\max}\Big(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)\Big)-$$

$$-\max\Big\{\lambda^2_{\min}\Big(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\Big),\lambda^2_{\max}\Big(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\Big)\Big\}>0.$$

Тоді стан рівноваги $x=0$, $y=0$ системи (14) асимптотично стійкий відносно області P для всіх $\varepsilon\in(0,1]$.

Запропонований підхід до побудови керування проілюстровано на прикладі нечіткої моделі третього порядку зі скалярним параметром.

Зауважимо, що важливим результатом є те, що встановлені у всіх підрозділах достатні умови стійкості стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями не залежать від вибору функцій приналежності нечітких множин. Також відмітимо, що запропоновані підходи не потребують розділення рухів на “швидкі” та “повільні”. Це, виходячи із загальності вигляду нелінійних функцій в локальних системах, становило б значні труднощі.

Шостий розділ присвячено застосуванню отриманих теоретичних результатів для дослідження механічних систем, математичні моделі яких можуть бути зведені до вигляду різнотемпових систем диференціальних рівнянь.

У підрозділі 6.1 розглядається задача побудови керування неточними “малоприводними” механічними системами. Застосовуючи перетворення змінних, математична модель вказаної механічної системи зводиться до каскадного вигляду. Застосовуючи метод побудови керування англ. Dynamic Surface Control, визначається в явному вигляді керування актуатором. Система диференціальних рівнянь, до якої зводиться початкова математична модель і з певного виду стійкості стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стаціонарного режиму цієї моделі при запропонованому керуванні, має вигляд різнотемпової. Доведення факту стійкості проводиться методом функцій Ляпунова. Це дозволяє, зокрема, отримати оцінки області робастності побудованого керування, а також встановити обмеження на величину параметра, що визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів і входить, явним чином, до закону керування.

У пункті 6.1.1 розглядається глобальна стабілізація верхнього положення рівноваги маятника обертанням маховика, який зображено на Рис. 1. Маховик обертається завдяки електродвигуну. Керування маятником здійснюється за допомогою обертання маховика. Задача керування полягає у стабілізації маятника у його верхньому положенні рівноваги у той час, як маховик припинить своє обертання. Припустимо, що деякі параметри моделі можуть бути відомі неточно. Тоді система рівнянь, шо описує поведінку системи “маятник-маховик”, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} J_1(p) & J_2(p)\\ J_2(p) & J_2(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot q_1\\ \ddot q_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega(p)\sin(q_1)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \Delta\end{pmatrix},$$

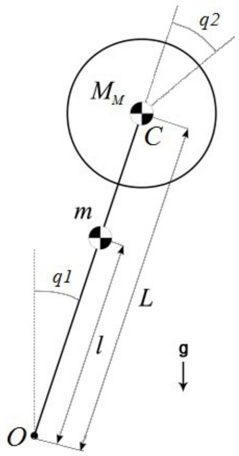

Рис. 1 – Маятник з маховиком

де $J_1(p) = J_m + (M_M + M_R)L^2 + J_M + J_R$, $J_2(p) = J_M + J_R$, $\omega(p) = (ml + (M_M + M_R)L)g$, g – прискорення вільного падіння, M_M – маса маховика, m – маса маятника, M_R – маса електродвигуна, J_m, J_M і J_R – моменти інерції маятника, маховика і ротора двигуна, відповідно, відносно їх осей обертання, L – довжина маятника, l – відстань від шарніру O до центру мас маятника, Δ – момент електромагнітних сил, які прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Перейшовши до безрозмірних величин, здійснивши певну заміну змінних та використавши метод Dynamic Surface Control, отримаємо закон керування

$$\Delta = \omega(p)\left(1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\right)\left[\left(-K_2 + \frac{1}{\varepsilon}\right)x_3(0)\exp\left(-K_2\sqrt{\frac{\omega(p)}{J_2(p)}}t\right) + \frac{J_1(p)}{J_2(p)\varepsilon}\sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{J_1(p)K_1}{J_2(p)\varepsilon}\left(q_1 + \arctan\left(\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_1 + \sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_2\right)\right)\right] + \omega(p)\frac{J_2(p)}{J_1(p)}\sin(q_1)$$

і математичну модель, що описує поведінку маятника з маховиком у вигляді різнотемпової системи наступного вигляду, з глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості верхнього положення рівноваги маятника з маховиком при запропонованому керуванні:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega(p)\sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1)), \\ \dot{x}_2 = -K_1 x_2 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}x_3 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}y, \\ \dot{x}_3 = -K_2 x_3, \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{x_4}{\tau_2} + \dfrac{\sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1))}{1 + (x_1)^2}, \\ \varepsilon\dot{y} = -y + \varepsilon F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y), \end{cases}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = -\sin\Big(x_2 + x_4 - \arctan(x_1)\Big) +$$

$$+ \frac{J_1(p)}{J_2(p)}K_1^2 x_2 + K_1 x_3 + K_1 y + \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\frac{x_4}{\tau_2^2} - \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\frac{1}{\tau_2}\frac{\sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1))}{1 + (x_1)^2}.$$

Застосовуючи метод функцій Ляпунова, побудовано скалярну функцію

$$V(x, y) = \sqrt{1 + x_1^2} - 1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y^2),$$

яка дає можливість вибрати параметри керування і часові константи фільтрів таким чином, щоб запропоноване керування забезпечувало глобальну асимптотичну стійкість верхнього стану рівноваги маятника. Також отримано оцінку області параметрів моделі, для всіх значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається. Отримані результати проілюстровані на прикладі реальної механічної моделі.

У пункті 6.1.2 розглядається глобальна стабілізація стану рівноваги механічної моделі, зображеної на Рис. 2, яка отримала назву TORA (англ. Translational Oscillator with Rotational Actuator). Основою моделі є прикріплений до стіни, за допомогою пружини, возик. На возику розташований симетричний відносно центру маховик з точковою масою. Керування TORA відбувається за допомогою обертання ексцентрикового маховика, яке задається електродвигуном. Задача керування полягає в стабілізації TORA в його положенні рівноваги $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Зауважимо, що ця механічна модель була запропонована для дослідження режимів стабілізації супутника із подвійним обертанням. Також, вона використовується як модель механізму, призначеного для активного гасіння вібрації.

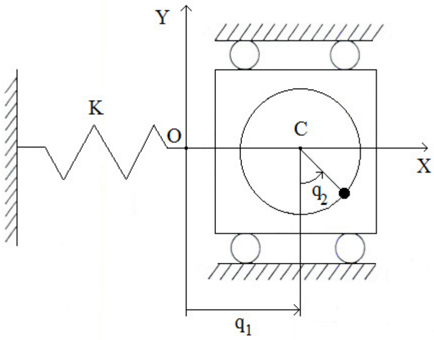

Рис. 2 – TORA

Вважаємо, що деякі параметри моделі задані неточно. Тоді система рівнянь, що описує поведінку TORA, має вигляд:

$$\begin{cases} \Big(M(p)+m(p)\Big)\ddot{q}_1 + m(p)r(p)\Big(\ddot{q}_2\cos(q_2) - \dot{q}_2^2\sin(q_2)\Big) + K(p)q_1 = 0, \\ \Big(I(p)+m(p)r^2(p)\Big)\ddot{q}_2 + m(p)r(p)\cos(q_2)\ddot{q}_1 + m(p)gr(p)\sin(q_2) = \Delta, \end{cases}$$

m – точкова маса, M – маса возика, мотора і маховика, r – відстань між центром маховика і точковою масою, J – момент інерції маховика, K – жорсткість пружини, Δ – момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора, g – прискорення вільного падіння, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Перейшовши до безрозмірних величин, здійснивши певну заміну змінних та використавши метод Dynamic Surface Control, отримаємо закон керування

$$\Delta = \frac{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}{M(p)+m(p)} \times \Bigg[(1-\gamma^2(p)\cos^2(q_2))\times$$

$$\times\Bigg(\left(-c_2+\frac{1}{\tau_2}\right)x_4(0)\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{K(p)}{M(p)+m(p)}}t\right) - \frac{c_1}{\tau_2}q_2 -$$

$$-\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\frac{\dot{q}_2}{\tau_2} - \frac{c_1}{\tau_2}\arctan\left(\Lambda(p,q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)\right)\Bigg)+$$

$$+\gamma(p)\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}\sin(q_2)\cos(q_2)\dot{q}_2^2 - \gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{J(p)+m(p)r^2(p)}}\cos(q_2)q_1+$$

$$+\frac{m(p)gr(p)(M(p)+m(p))\sin(q_2)}{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}\Bigg],$$

$$\gamma(p)=\frac{m(p)r(p)}{\sqrt{\Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)\Big(M(p)+m(p)\Big)}},$$

$$\Lambda(p,q_1,q_2,\dot q_1,\dot q_2)=\frac{\phi(p,q_2,\dot q_1,\dot q_2)}{\sqrt{1+\left(\varphi(p,q_1,q_2)\right)^2+\left(\chi(p,q_2,\dot q_1,\dot q_2)\right)^2}},$$

$$\phi(p,q_2,\dot q_1,\dot q_2)=\frac{M(p)+m(p)}{\sqrt{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}}\dot q_1+\gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\cos(q_2)\dot q_2,$$

$$\varphi(p,q_1,q_2)=\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{J(p)+m(p)r^2(p)}}q_1+\gamma(p)\sin(q_2),$$

$$\chi(p,q_2,\dot q_1,\dot q_2)=\frac{M(p)+m(p)}{\sqrt{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}}\dot q_1+\gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\cos(q_2)\dot q_2$$

і математичну модель, що описує поведінку TORA, у вигляді різнотемпової системи наступного вигляду, з глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стану рівноваги TORA при запропонованому керуванні:

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2,\\ \dot x_2=-x_1+\gamma(p)\sin\left(x_3+y_1-\arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right),\\ \dot x_3=-c_1x_3+x_4+y_2,\\ \dot x_4=-c_2x_4,\\ \dot y_1=-\dfrac{y_1}{\tau_1}+F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p),\\ \varepsilon\dot y_2=-y_2+\varepsilon F_2(x,y,p),\end{cases}$$

$$G(x_1,x_2,p)=1+x_1^2+x_2^2,$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p)=\frac{G(x_1,x_2,p)}{G(x_1,x_2,p)+x_2^2}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{-x_1+\gamma(p)\sin\left(x_3+y_1-\arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}-$$

$$-\frac{\gamma(p)x_2^2\sin\left(x_3+y_1-\arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)}{\left(\sqrt{G(x_1,x_2,p)}\right)^3}\Bigg],$$

$$F_2(x,y,p)=c_1x_4+c_1y_2-c_1^2x_3-\frac{y_1}{\tau_1^2}+\frac{1}{\tau_1}F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p).$$

Застосовуючи метод функцій Ляпунова, побудовано скалярну функцію

$$V(x,y,p) = 2\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p)} - 2 + \frac{1}{2}(x_3^2+x_4^2+y_1^2+y_2^2),$$

де $V_1(x_1,x_2,p) = \dfrac{\Psi(p)}{2}(x_1^2+x_2^2) + \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}$, $\Psi(p) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\gamma(p)} + \dfrac{\gamma(p)}{\sqrt{2}}$, яка дає можливість вибрати параметри керування і часові константи фільтрів таким чином, щоб запропоноване керування забезпечувало глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги TORA. Також отримано оцінку області параметрів моделі для всіх значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається. Отримані результати проілюстровані на прикладі реальної механічної моделі.

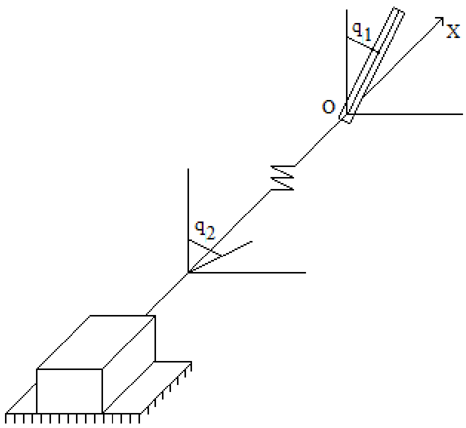

Рис. 3 – Маніпулятор із пружним зчленуванням

У пункті 6.1.3 розглядається стабілізація стану рівноваги одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням, який зображено на Рис. 3. Обертання маніпулятора задається електродвигуном і передається до маніпулятора через трансмісію, пружність якої моделюється торсіонною пружиною. Керування маніпулятором відбувається шляхом обертання електродвигуна. Задача керування полягає в стабілізації моделі в стані рівноваги $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$. Припустимо, що деякі параметри моделі можуть бути відомі неточно. Тоді система рівнянь, що описує поведінку маніпулятора, має вигляд:

$$\begin{cases} J_1(p)\ddot{q}_1 + b_1(p)\dot{q}_1 + m(p)gl(p)\sin(q_1) + K_1(p)(q_1-q_2) + K_2(p)(q_1-q_2)^3 = 0, \\ J_2(p)\ddot{q}_2 + b_2(p)\dot{q}_2 - K_1(p)(q_1-q_2) - K_2(p)(q_1-q_2)^3 = \Delta, \end{cases}$$

де m – маса ланки маніпулятора, l – відстань від точки O до центру мас ланки маніпулятора, g – прискорення вільного падіння, b_1 та b_2 – коефіцієнти демпфування при обертанні ланки маніпулятора та валу електродвигуна відповідно, J_1 – момент інерції ланки маніпулятора відносно вісі OX, J_2 – момент інерції валу електродвигуна, Δ – момент електромагнітних сил, прикладених до ротора електродвигуна зі сторони статора. Зауважимо, що на відміну від відомих результатів, де жорсткість пружини вважається лінійно залежною від зміщення, в даному випадку жорсткість K пружини вважаємо нелінійно залежною від зміщення: $K(p) = K_1(p)(q_1-q_2) + K_2(p)(q_1-q_2)^3$, де $K_1(p)$ і $K_2(p)$ – коефіцієнти жорсткості, $p \subseteq P \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Перейшовши до безрозмірних величин, здійснивши певну заміну змінних та використавши метод Dynamic Surface Control, отримаємо закон керування

$$\Delta = K_1(p)\left[-\sqrt{\frac{J_2(p)}{K_1(p)}}\frac{\dot{q}_2}{\varepsilon} - \frac{q_2}{\tau_1\varepsilon} - \sqrt{\frac{J_2(p)}{K_1(p)}}\dot{q}_1 + \frac{b_2(p)}{J_2(p)}\dot{q}_2 - (q_1-q_2) - \frac{K_2(p)}{K_1(p)}(q_1-q_2)^3\right]$$

і математичну модель, що описує поведінку маніпулятора у вигляді різнотемпової системи наступного вигляду, з глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стану рівноваги маніпулятора при запропонованому керуванні:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\dfrac{b_1(p)}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}}\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_2 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}(\eta_1 - \eta_3) - \\ -\dfrac{K_2(p)}{K_1(p)}\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}(\eta_1 - \eta_3)^3 - \dfrac{m(p)gl(p)}{K_1(p)}\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \varepsilon\dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \dfrac{\eta_3}{\tau_1} - \varepsilon\eta_2. \end{cases}$$

Застосовуючи метод функцій Ляпунова, побудовано скалярну функцію

$$V(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, p) = \frac{1}{4}\frac{K_2(p)}{K_1(p)}\frac{J_2(p)}{J_1(p)}(\eta_1 - \eta_3)^4 +$$

$$+\frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4)M(p, \tau_1, \varepsilon)(\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T,$$

де

$$M(p, \tau_1, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}\left(1 + \dfrac{b_1(p)}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\tau_1\varepsilon^2} - \dfrac{1}{\tau_1\varepsilon} + 1 & \varepsilon \\ 0 & -1 & \varepsilon & \dfrac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

яка дає можливість вибрати часові константи фільтрів таким чином, щоб запропоноване керування забезпечувало глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги маніпулятора. Також отримано оцінку області параметрів моделі, для всіх значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається. Отримані результати проілюстровані на прикладі реальної механічної моделі.

У підрозділі 6.2 розглядається керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збурення. Запропоновано закон зміни напруги, що підводиться до двигуна, який забезпечує асимптотичне прямування кутової швидкості його обертання до бажаної незалежно від початкових значень змінних. Показана робастність такого керування та запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів моделі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ І ВИСНОВКИ

Отримані результати є інструментом аналізу практичних проблем, що виникають у різних галузях науки та техніки. Вони дозволяють робити висновок про якісну поведінку різних типів неточних різнотемпових моделей механічних систем на нескінченному часовому інтервалі у випадку, якщо внаслідок, наприклад, значної нелінійності моделі, що розглядається, застосування, зокрема, методу розділення змінних ускладнене. Крім того, достатні умови параметричної стійкості дають можливість максимально врахувати вплив неточних параметрів на динамічні характеристики моделей механічних систем, тобто точніше моделювати реальні задачі і, відповідно, точніше прогнозувати поведінку реальних механічних систем.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче.

1. Запропоновано новий підхід до визначення області, для значень параметрів з якої існує стан рівноваги неточних різнотемпових систем різних класів, як-то систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем та у випадку неможливості такого розділення, нелінійних систем у загальному вигляді, в тому числі великомасштабних. Причому, відповідні оцінки областей і оцінки на нелінійності, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому фіксованому значенні параметра, що є суттєвою перевагою порівняно з відомими результатами.

2. Запропоновано узагальнення прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості неточних нелінійних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що полягає у його розширенні на новий клас систем, які досліджуються, у нових способах побудови відповідних допоміжних функцій, які враховують рухомість стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявність в ній параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів, а також у нових умовах стійкості, отриманих за їх допомогою.

3. Для систем типу Лур'є–Постнікова, у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості та параметричної нестійкості, які для систем такого класу дають можливість робити висновок про динаміку системи при всіх можливих типах динаміки вказаних підсистем без потреби відшукання рухомого стану рівноваги. У випадку, коли системи типу Лур'є–Постнікова не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем або у випадку браку відомостей про динамічні характеристики вказаних підсистем, застосовуючи багатокомпонентні функції Ляпунова також отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.

4. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для неточних нелінійних різнотемпових систем в загальному вигляді, які не потребують відшукання рухомого стану рівноваги, як у припущенні про їх великомасштабність, так і без такого припущення, а також запропоновано спосіб побудови керування, що забезпечує глобальну асимптотичну параметричну стійкість неточної нелінійної різнотемпової системи в загальному вигляді відносно певної області у просторі параметрів системи у випадку її параметричної нестійкості.

5. Незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено із різнотемповими локальними підсистемами у випадку як стійкості, так і нестійкості лінійних наближень локальних підсистем, а також область такої стійкості у просторі параметрів моделі. У випадку, коли застосувати отримані результати для побудови функції Ляпунова не вдається, запропоновано керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено відносно певної області у просторі параметрів моделі незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин.

6. Розвинуто спосіб побудови керування для неточних малоприводних механічних систем, застосовуючи який отримано явні вигляди керування, що для всіх значень параметрів моделей з деяких областей забезпечують глобальну асимптотичну стійкість верхнього положення рівноваги маятника з маховиком, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги TORA, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги маніпулятора із пружним зчленуванням. Також запропоновано керування, тобто закон зміни напруги, що подається на вхід двигуна постійного струму послідовного збудження, яке забезпечує обертання валу двигуна із необхідною кутовою швидкістю для всіх значень параметрів моделі з деякої області та незалежно від початкових значень змінних.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: Параметрическая устойчивость нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Прикл. мех. **46**(10), 106-121 (2010);
2. Хорошун, А.С.: О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **10**, 50-54 (2010);
3. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: К задаче стабилизации движения параметрической семьи нелинейных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **14**(2), 238-254 (2011);
4. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической стабилизации неточных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **15**(3), 367-380 (2012);
5. Мартынюк, А.А., Хорошун А.С.: О методе векторных функций Ляпунова в задаче об абсолютной устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем. В: Проблемы устойчивости и управления, с. 231-244. Физматлит, Москва (2013);
6. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической неустойчивости сингулярно возмущенных систем. Автоматика и телемеханика **1**, 59-78 (2013);
7. Хорошун, А.С.: Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **4**, 53-58 (2013);
8. Хорошун, А.С.: Об абсолютной устойчивости неточных крупномасштабных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **16**(4), 557-573 (2013);
9. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Novel approach to absolute parametric stability of the uncertain singularly perturbed systems. Communications in Applied Analysis **17**(3-4), 439-450 (2013);
10. Хорошун, А.С.: Об использовании многокомпонентных функций Ляпунова для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных механических систем. Прикл. мех. **50**(2), 115-133 (2014);
11. Хорошун, А.С.: Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги–Сугено. Случай устойчивых подсистем. Доповіді НАН України **4**, 64-69 (2014);
12. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Takagi-Sugeno systems: The Case of Unstable Subsystems. Differential Equations and Dynamical Systems **23**(4), 423-431 (2015);
13. Хорошун, А.С.: Об устойчивости горизонтального движения самолета. Прикл. мех. **52**(1), 134-144 (2016);
14. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. Прикл. мех. **52**(5), 125-137 (2016);

15. Хорошун, А.С.: Об устойчивости и управлении угловой скоростью вращения двигателя постоянного тока последовательного возбуждения. Прикл. мех. **52**(4), 122-129 (2016);

16. Мартинюк, А.А., Хорошун, А.С.: До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 43-46 (2017);

17. Хорошун, А.С.: Про стабілізацію руху TORA. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 53-56 (2017);

18. Хорошун, А.С.: О построении управления движением маятника вращением инерциального маховика. Доповіді НАН України **4**, 41-46 (2018);

19. Хорошун, А.С.: О построении управления поступательным движением вращением эксцентрикового маховика. Доповіді НАН України **3**, 53-58 (2018);

20. Хорошун, А.С.: О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика. Прикл. мех. **54**(5), 123-135 (2018);

21. Хорошун, А.С.: Об управлении неточными быстро-медленными системами Такаги-Сугено. Прикл. мех. **54**(4), 83-95 (2018);

22. Хорошун, А.С.: До теорії параметричної стійкості сингулярно збурених систем. В: Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ (2010);

23. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. В: Материалы Международной научной конференции "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Киев (2015);

24. Хорошун, А.С.: Абсолютна параметрична стійкість неточних сингулярно збурених систем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків, Київ (2015);

25. Khoroshun, A.S.: The development of the theory of slow-fast dynamical systems with application in problems of stability and control of uncertain underactuated mechanical systems. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016);

26. Khoroshun, A.S.: On the global stability of large-scale uncertain slow-fast dynamical systems. In: Proceedings of the 5th International scientific conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Y. Lopatynsky, Kyiv (2016);

27. Хорошун, А.С.: О стабилизации движения неточных нелинейных сингулярно возмущенных систем. В: Материалы Международной научной конференции "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Киев (2017);

28. Хорошун, А.С.: Стійкість неточних швидко-повільних систем Такагі-Сугено у випадку стійких підсистем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків присвяченій 100-ій річниці академіка НАН України,

професора Ю. О. Митропольського, Київ (2017);

29. Хорошун, А.С.: Про керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збурення. В: Матеріали XVII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів "Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн", Київ (2017);
30. Хорошун, А.С.: Стабілізація одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. В: Матеріали XVIII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів "Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн", Київ (2018);
31. Хорошун, А.С.: Стабілізація поступальних рухів обертанням ексцентрікового маховика. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченій Я. С. Підстригачу, Львів (2018).

АНОТАЦІЯ

Хорошун А.С. Метод функцій Ляпунова в задачах стійкості, керування та стабілізації неточних різнотемпових механічних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 "Теоретична механіка". – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних характеристик неточних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, які є математичними моделями механічних систем.

Запропоновано підхід, який дозволяє оцінити область у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується. Причому, оцінка вказаної області і оцінки на нелінійності, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому відомому значенні параметра, що є суттєвою перевагою у порівнянні із відомими результатами. Розвинуто метод функцій Ляпунова для врахування рухомості стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявності в ній параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів. Достатні умови параметричної стійкості дають можливість врахувати вплив неточних параметрів на динамічні характеристики моделей механічних систем.

Розвинуто спосіб побудови керування, що забезпечує бажану динаміку траєкторій моделей малоприводних механічних систем. Застосовуючи запропоновану методику побудови керування, визначається в явному вигляді керування актуатором. Система диференціальних рівнянь, до якої зводиться початкова математична модель і з певного виду стійкості стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стаціонарного режиму цієї моделі при запропонованому керуванні, має вигляд різнотемпової. Доведення факту стійкості проводиться методом функцій Ляпунова. Це дозволяє, зокрема, отримати оцінки області робастності побудованого керування, а також встановити обмеження на величину параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів і входить явним чином до закону керування. Результати, отримані при дослідженні "малоприводних" механічних систем, мають практичне застосування при побудові реальних робототехнічних систем, до яких вони входять як, складові частини, або, у випадку TORA, для моделювання поведінки супутника з подвійним обертанням чи механізму активного гасіння вібрацій.

Ключові слова: параметрична стійкість, рухомий стан рівноваги, різнотемпова система, неточна система, "швидкі" та "повільні" змінні, метод функцій Ляпунова, система типу Лур'є–Постнікова, система типу Такагі–Сугено, малоприводна механічна система.

АННОТАЦИЯ

Хорошун А.С. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости, управления и стабилизации неточных разнотемповых механических систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 “Теоретическая механика”. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена использованию метода функций Ляпунова для исследования динамических характеристик неточных разнотемповых систем дифференциальных уравнений, являющихся математическими моделями механических систем.

Предложен подход, позволяющий оценить область в пространстве параметров, для всех значений параметров из которой существует единственное состояние равновесия исследуемой системы. Причем, для оценки указанной области и оценок на нелинейности, входящие в систему, требуется информация про поведение модели только при некотором известном значении параметра, что является существенным преимуществом по сравнению с известными результатами. Развит метод функций Ляпунова с учетом подвижности состояния равновесия системы дифференциальных уравнений и наличия в ней параметра, определяющего отношение скоростей “быстрых” и “медленных” движений. Достаточные условия параметрической устойчивости дают возможность учесть влияние неточных параметров на динамические характеристики моделей механических систем.

Развит способ построения управления, которое обеспечивает желаемую динамику траекторий моделей малоприводных механических систем. Используя предложенную методику построения управления, определяется в явном виде закон управления актуатором. Система дифференциальных уравнений, к которой сводится начальная математическая модель и из определенного вида устойчивости состояния равновесия которой следует аналогичный тип устойчивости стационарного режима этой модели при предложенном законе управления, имеет вид разнотемповой. Доказательство факта устойчивости проводится методом функций Ляпунова. Это позволяет получить оценки области робастности построенного управления, а также установить ограничение на величину параметра, определяющего отношение скоростей “быстрых” и “медленных” движений и явным образом входящего в закон управления. Результаты, полученные при исследовании малоприводных механических систем, используются при построении реальных робототехнических систем, в которые они входят как составляющие части, или, в случае TORA, для моделирования поведения спутника з двойным вращением или механизма активного гашения вибраций.

Ключевые слова: параметрическая устойчивость, подвижное состояние равновесия, разнотемповая система, неточная система, “быстрые” и “медленные” переменные, метод функций Ляпунова, система типа Лурье–Постникова, система типа Такаги–Сугено, малоприводная механическая система.

SUMMARY

Khoroshun A.S. The Lyapunov functions method in problems of stability control and stabilization of uncertain multiple time scale mechanical systems. – Qualification scientific thesis as a manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.01 “Theoretical mechanics”. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to using of the Lyapunov functions method for the investigation of the dynamical characteristics of uncertain multiple time scale systems of differential equations, which are the mathematical models of the real mechanical systems.

An approach, that makes it possible to estimate the region in the parameter space for all values of the parameters from which there is a unique equilibrium state of the investigated system, is proposed. Moreover, the estimations of such region and the estimations of the non-linearities of the system require information about the behavior of the model only for some known parameter value, which is a significant advantage over the known results. This approach is applied to systems of Lurie-Postnikov type in the case when they allow the allocation of “fast” and “degenerate” subsystems and in the case when such separation is impossible. Also it applied to nonlinear systems in general view, including large-scale ones.

The Lyapunov functions method is developed to take into account the mobility of the equilibrium state of the system of differential equations and the presence of a parameter in it which determines the ratio of the velocities of “fast” and “slow” motions. The corresponding Lyapunov functions were constructed in an explicit form and with their help the new sufficient conditions for parametric stability were obtained. The sufficient conditions of different types of stability obtained by this method for the parameters of the system from the found region give an ability to make a conclusion about qualitative behaviour of the system on the infinite time interval, which is actual, for example, for a significant nonlinearity of the model under consideration, when application, in particular, of the method of separation of variables is difficult. The sufficient conditions of the parametric stability give an opportunity to take into account the influence of uncertain parameters, which always appear during modeling, on the dynamical characteristics of models of mechanical systems, i.e. it gives an opportunity to predict the behavior of the real mechanical systems more accurately.

A method of control construction that ensures the desired dynamics of the trajectories of models of robotic systems which are the so-called “underactuated” mechanical systems is developed. Applying the transformation of variables, the mathematical model of the mechanical system is reduced to a cascade form. Using the proposed method for control construction the actuator control is determined explicitly. The system of differential equations to which the initial mathematical model is reduced and from the certain type of stability of the state of equilibrium of which follows a similar type of stability of the stationary mode of this model under the

proposed control has the a multiple time scale form. Proof of the fact of stability is carried out by the method of Lyapunov functions. This allows in particular to obtain the estimates for the region of robustness of the constructed control and also to establish the limits for the value of the parameter that determines the ratio of the speeds of “ fast ” and “ slow ” motions and is explicitly included in the control law. The results obtained under the research of underactuated mechanical systems have practical application in the construction of real robotic systems, which they include as component parts, or, in the case of TORA, for modeling the behavior of a dual-spin spacecraft or the mechanism of active vibration damping.

Key words: parametric stability, mobile equilibrium state, multiple time scale system, uncertain system, “fast” and “slow” variables, Lyapunov function method, Lurie-Postnikov type system, Takagi-Sugeno type system, underactuated mechanical system.

Підписано до друку 7.02.2019. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. авт. арк. 1,84. Тираж 100 прим. Замовлення № 137.

Фото-копі центр "Кубік"
ПП Клименко Р.В.,
м. Київ, вул. Будівельників, 32/2