ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ХОРОШУН АНАТОЛІЙ СЕРГІЙОВИЧ

УДК 531.36

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОД ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ, КЕРУВАННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕТОЧНИХ РІЗНОТЕМПОВИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

А.С. Хорошун

Науковий консультант: Мартинюк Анатолій Андрійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Хорошун А.С. Метод функцій Ляпунова в задачах стійкості керування та стабілізації неточних різнотемпових механічних систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 “Теоретична механіка”. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних характеристик неточних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, які є математичними моделями реальних механічних систем.

Запропоновано підхід, який дає можливість оцінити область у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується. Причому, відповідні оцінки областей і оцінки на нелінійності, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому відомому значенні параметра, що є суттєвою перевагою у порівнянні із відомими результатами. Розвинуто метод функцій Ляпунова для врахування рухомості стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявності в ній параметра, що визначає відношення швидкостей “швидких” та “повільних” рухів. Отримані за його допомогою достатні умови різних типів стійкості відносно знайденої області у просторі параметрів системи дозволяють робити висновок про якісну поведінку системи на нескінченному часовому інтервалі, що актуально, наприклад, для значної нелінійності моделі, що розглядається, коли застосування, зокрема, методу розділення змінних ускладнене. Достатні умови параметричної стійкості дають можливість максимально врахувати вплив неточних параметрів, які неодмінно з’являються при моделюванні, на динамічні характеристики моделей механічних систем, тобто точніше

моделювати реальні задачі і, відповідно, точніше прогнозувати поведінку реальних механічних систем.

Розвинуто спосіб побудови керування, що забезпечує бажану динаміку траєкторій моделей робототехнічних систем, що відносяться до т.зв. "малоприводних" механічних систем. Застосовуючи перетворення змінних, математична модель вказаної механічної системи зводиться до каскадного вигляду. Застосовуючи запропоновану методику побудови керування, визначається в явному вигляді керування актуатором. Система диференціальних рівнянь, до якої зводиться початкова математична модель і з певного виду стійкості стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стаціонарного режиму цієї моделі при запропонованому керуванні, має вигляд різнотемпової. Доведення факту стійкості проводиться методом функцій Ляпунова. Це дозволяє, зокрема, отримати оцінки області робастності побудованого керування, а також встановити обмеження на величину параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів і входить явним чином до закону керування. Результати, отримані при дослідженні малоприводних механічних систем, мають практичне застосування при побудові реальних робототехнічних систем, до яких вони входять, як складові частини, або, у випадку TORA, для моделювання поведінки супутника з подвійним обертанням чи механізму активного гасіння вібрацій.

Ключові слова: параметрична стійкість, рухомий стан рівноваги, різнотемпова система, неточна система, "швидкі" та "повільні" змінні, метод функцій Ляпунова, система типу Лур'є–Постнікова, система типу Такагі–Сугено, малоприводна механічна система.

Список публікацій здобувача.

1. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: Параметрическая устойчивость нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Прикл. мех. **46**(10),

106-121 (2010);

2. Хорошун, А.С.: О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **10**, 50-54 (2010);

3. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: К задаче стабилизации движения параметрической семьи нелинейных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **14**(2), 238-254 (2011);

4. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической стабилизации неточних сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **15**(3), 367-380 (2012);

5. Мартынюк, А.А., Хорошун А.С.: О методе векторних функций Ляпунова в задаче об абсолютной устойчивости неточних сингулярно возмущенных систем. В: Проблемы устойчивости и управления, с. 231-244. Физматлит, Москва (2013);

6. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической неустойчивости сингулярно возмущенных систем. Автоматика и телемеханика **1**, 59-78 (2013);

7. Хорошун, А.С.: Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **4**, 53-58 (2013);

8. Хорошун, А.С.: Об абсолютной устойчивости неточних крупномасштабных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **16**(4), 557-573 (2013);

9. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Novel approach to absolute parametric stability of the uncertain singularly perturbed systems. Communications in Applied Analysis **17**(3-4), 439-450 (2013);

10. Хорошун, А.С.: Об использовании многокомпонентных функций Ляпунова для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных механических систем. Прикл. мех. **50**(2), 115-133 (2014);

11. Хорошун, А.С.: Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги–Сугено. Случай устойчивых подсистем. Доповіді НАН України **4**, 64-69 (2014);

12. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Takagi-Sugeno systems: The Case of Unstable Subsystems. Differential Equations and Dynamical Systems **23**(4), 423-431 (2015);

13. Хорошун, А.С.: Об устойчивости горизонтального движения самолета. Прикл. мех. **52**(1), 134-144 (2016);

14. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. Прикл. мех. **52**(5), 125-137 (2016);

15. Хорошун, А.С.: Об устойчивости и управлении угловой скоростью вращения двигателя постоянного тока последовательного возбуждения. Прикл. мех. **52**(4), 122-129 (2016);

16. Мартинюк, А.А., Хорошун, А.С.: До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 43-46 (2017);

17. Хорошун, А.С.: Про стабілізацію руху TORA. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 53-56 (2017);

18. Хорошун, А.С.: О построении управления движением маятника вращением инерциального маховика. Доповіді НАН України **4**, 41-46 (2018);

19. Хорошун, А.С.: О построении управления поступательным движением вращением эксцентрикового маховика. Доповіді НАН України **3**, 53-58 (2018);

20. Хорошун, А.С.: О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика. Прикл. мех. **54**(5), 123-135 (2018);

21. Хорошун, А.С.: Об управлении неточными быстро-медленными системами Такаги-Сугено. Прикл. мех. **54**(4), 83-95 (2018);

22. Хорошун, А.С.: До теории параметричної стійкості сингулярно збурених систем. В: Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ (2010);

23. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. В: Материалы Международной научной конференции "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Киев (2015);

24. Хорошун, А.С.: Абсолютна параметрична стійкість неточних сингулярно збурених систем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків, Київ (2015);

25. Khoroshun, A.S.: The development of the theory of slow-fast dynamical systems with application in problems of stability and control of uncertain underactuated mechanical systems. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016);

26. Khoroshun, A.S.: On the global stability of large-scale uncertain slow-fast dynamical systems. In: Proceedings of the 5th International scientific conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Y. Lopatynsky, Kyiv (2016);

27. Хорошун, А.С.: О стабилизации движения неточных нелинейных сингулярно возмущенных систем. В: Материалы Международной научной конференции "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Киев (2017);

28. Хорошун, А.С.: Стійкість неточних швидко-повільних систем Такагі-Сугено у випадку стійких підсистем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків присвяченій 100-ій річниці академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського, Київ (2017);

29. Хорошун, А.С.: Про керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збурення. В: Матеріали XVII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів "Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн", Київ (2017);

30. Хорошун, А.С.: Стабілізація одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. В: Матеріали XVIII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів "Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн", Київ (2018);

31. Хорошун, А.С.: Стабілізація поступальних рухів обертанням ексцентрікового маховика. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченій Я. С. Підстригачу, Львів (2018).

SUMMARY

Khoroshun A.S. The Lyapunov functions method in problems of stability control and stabilization of uncertain multiple time scale mechanical systems.

– Qualification scientific thesis as a manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.01 “Theoretical mechanics”. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to using of the Lyapunov functions method for the investigation of the dynamical characteristics of uncertain multiple time scale systems of differential equations, which are the mathematical models of the real mechanical systems.

An approach, that makes it possible to estimate the region in the parameter space for all values of the parameters from which there is a unique equilibrium state of the investigated system, is proposed. Moreover, the estimations of such region and the estimations of the non-linearities of the system require information about the behavior of the model only for some known parameter value, which is a significant advantage over the known results. The Lyapunov functions method is developed to take into account the mobility of the equilibrium state of the system of differential equations and the presence of a parameter in it which determines the ratio of the velocities of “fast” and “slow” motions. The sufficient conditions of different types of stability obtained by this method for the parameters of the system from the found region give an ability to make a conclusion about qualitative behaviour of the system on the infinite time interval, which is actual, for example, for a significant nonlinearity of the model under consideration, when application, in particular, of the method of separation of variables is difficult. The sufficient conditions of the parametric stability give an opportunity to take into account the influence of uncertain parameters, which always appear during modeling, on the dynamical characteristics of models of mechanical systems, i.e. it gives an opportunity to predict the behavior of the real mechanical systems more accurately.

A method of control construction that ensures the desired dynamics of the trajectories of models of robotic systems which are the so-called "underactuated" mechanical systems is developed. Applying the transformation of variables, the mathematical model of the mechanical system is reduced to a cascade form. Using the proposed method for control construction the actuator control is determined explicitly. The system of differential equations to which the initial mathematical model is reduced and from the certain type of stability of the state of equilibrium of which follows a similar type of stability of the stationary mode of this model under the proposed control has the a multiple time scale form. Proof of the fact of stability is carried out by the method of Lyapunov functions. This allows in particular to obtain the estimates for the region of robustness of the constructed control and also to establish the limits for the value of the parameter that determines the ratio of the speeds of " fast " and " slow " motions and is explicitly included in the control law. The results obtained under the research of underactuated mechanical systems have practical application in the construction of real robotic systems, which they include as component parts, or, in the case of TORA, for modeling the behavior of a dual-spin spacecraft or the mechanism of active vibration damping.

Key words: parametric stability, mobile equilibrium state, multiple time scale system, uncertain system, "fast" and "slow" variables, Lyapunov function method, Lur'e-Postnikov type system, Takagi-Sugeno type system, underactuated mechanical system.

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми.Сучасний рівень розвитку техніки та технологій формує нові вимоги до математичних моделей механічних систем. При побудові таких моделей зазвичай “спрощують” початкову задачу, наприклад, нехтуючи деякими доданками чи складовими руху, тобто понижуючи порядок системи, або припускаючи, що параметри моделі виміряні точно і не змінюються протягом усього часу її функціонування. Можливість такого спрощення виправдовується малістю відкидаємих доданків та несуттєвістю похибок при вимірюванні. Ряд отриманих при таких спрощеннях моделей, внаслідок тривалого та успішного використання, отримали аксіоматичний характер. Однак, не всякою малою величиною можливо знехтувати, не спотворюючи при цьому суті задачі. Деякі механічні системи демонструють це, не відповідаючи поведінці, спрогнозованій за допомогою математичних моделей, отриманих при подібних припущеннях. Причому, з подібними питаннями досліднику доводиться стикатися незалежно від того, в якій галузі застосовуються математичні методи дослідження. Вони однаковою мірою актуальні в механіці, хімії, економіці, біології тощо.

Одним із видів залежності поведінки системи від параметра є наявність в математичній моделі системи, в якій присутні процеси, що відбуваються у різних масштабах часу, параметрів, які задають відношення швидкостей однієї частини рухів системи відносно іншої, т.зв. “швидких” та “повільних” рухів. Також, зазначені параметри можуть з’являтися внаслідок застосування специфічних способів побудови керування в математичних моделях систем, рухи яких не відрізняються за швидкостями. Системи диференціальних рівнянь, що містять такі параметри, мають назву різнотемпові системи диференціальних рівнянь. Початок їх дослідження, вважається, було покладено доповіддю L. Prandtl у 1904р. на 3-му Міжнародному математичному конгресі в Гейдельберзі. Вагомі результати в теорії т.зв. релаксаційних коливань, що є одним із прикладів поведінки траєкторій різнотемпових систем, були отримані B. Van der Pol і, згодом, розвинуті О.О. Андроновим, О.А. Віттом, Л.І. Мандельштамом. Класичними є результати А.М. Тихонова та І.С. Градштейна, які стосуються особливостей граничного переходу розв'язку сингулярної задачі Коші до розв'язку незбуреної задачі. Слід відмітити роботи М.М. Крилова, О.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, В.М. Волосова щодо застосування методу усереднення та роботи Л.С. Понтрягіна, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова щодо застосування асимптотичних методів в теорії релаксаційних коливань. Згадаємо також важливі дослідження W.R. Wasow, М.О. Желєзцова, Л.В. Родигіна, А.Б. Васильєвої, P.V. Kokotovic, H.K. Khalil.

Однак, основні методи дослідження різнотемпових систем, як то метод розділення змінних, що базується на застосуванні результатів Тихонова, метод усереднення, асимптотичні методи, мають ряд недоліків. По-перше, всі вони дають висновок про поведінку системи диференціальних рівнянь на скінченному часовому інтервалі, що у випадку різнотемпових систем, коли можливе явище зриву, робить прогноз поведінки реальних механічних систем, які описуються за допомогою таких математичних моделей, обмеженим. Хоча, накладання додаткової умови для методу розділення змінних розширює часовий інтервал дослідження на нескінченність, проте, у випадку сильної нелінійності досліджуваної системи, перевірка цієї умови може виявитися навіть складнішою за аналіз початкової системи. Відмітимо, що окремі роботи по дослідженню поведінки різнотемпових систем диференціальних рівнянь на нескінченному часовому інтервалі та їх стійкості, були опубліковані F.C. Hoppensteadt, І.С. Градштейном, Б.С. Разуміхіним, О.І. Клімушевим та М.М. Красовським. Проте, деякі з цих публікацій присвячені дослідженню лінійних систем, а ті, в яких акцент було зроблено на нелінійності, не дають відповіді на питання, зокрема, про глобальний характер стійкості, оцінку меж зміни параметра, тощо. По-друге, вищезгадані методи здебільшого зосереджені на аналізі крайових або початкових задач, у той час, як у багатьох випадках, потрібно слідкувати за поведінкою всієї системи диференціальних рівнянь, а не окремих її траєкторій. По-третє, існують складності із визначенням можливого інтервалу зміни величини параметра, який визначає відношення швидкостей "швидкого" та "повільного" рухів, що для більшості прикладних задач є важливим, оскільки цей параметр може явним чином входити в закон керування. Отже, актуальною є розробка нових і вдосконалення існуючих методик, які б дозволили подолати вищезгадані недоліки при дослідженні різнотемпових систем.

Ще одним варіантом залежності поведінки системи від параметрів є наявність у її складі неточних параметрів. Слід зауважити, що питання наявності неточних параметрів в математичних моделях реальних механічних систем видається природним, якщо врахувати, що параметри визначаються, зазвичай, за допомогою обрахунків або експерименту, тобто, наближено, а тому теоретичні побудови, що вимагають точних значень параметрів, взагалі кажучи, є марними. Дослідження систем з неточними значеннями параметрів проводилося в роботах Y.H. Chen, G. Leitman, M.J. Corless, В.Л. Харитонова, D.D. Siljak, Д.Я. Хусаінова, В.Б. Ларіна, А.А. Мартинюка, V. Lakshmikantham та ін. Для дослідження динамічних характеристик систем такого класу групою авторів (див. [130]), було запропоновано використовувати концепцію параметричної стійкості. Зауважимо, що при дослідженні нелінійних систем, які містять неточні параметри, однією з основних проблем є визначення стану рівноваги та врахування зміни його положення через зміну значень параметрів. Концепція параметричної стійкості дозволяє вирішити цю проблему, оскільки вона поєднує в одному означенні існування стану рівноваги та його стійкість. Стан рівноваги при цьому розглядається, як деяка неперервна функція, що залежить від параметрів, які входять у систему. Одним з найбільш ефективних, а тому і найбільш використовуємих методів дослідження стійкості руху є метод функцій Ляпунова. Його застосування дозволяє досліджувати динаміку системи не інтегруючи її, що у випадку нелінійності системи майже завжди являє собою значну проблему. Тому, використання цього методу при дослідженні параметричної стійкості нелінійних систем, приносить значну користь. Відмітимо, що концепція параметричної стійкості, яка є ефективною при дослідженні неточних систем, має деякі труднощі в застосуванні. Це пов'язано, перш за все, з необхідністю при використанні теорем методу функцій Ляпунова знати змінний стан рівноваги системи, що досліджується. Також, спосіб визначення області існування стану рівноваги в просторі параметрів, запропонований в роботі [130], є достатньо важким для застосування, особливо при дослідженні великомасштабних систем. Тому, незважаючи на наявні роботи у цій галузі, отримання нових результатів і покращення існуючих методик становить значний інтерес.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні наступних науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.363-08 "Побудова критеріїв стійкості руху континуально-дискретних систем із застосуванням до задач механіки", номер державної реєстрації 0107U008614, 2008-2011 рр. ; НДР 1.3.1.374-12 "Розробка методів аналізу динамічної поведінки нелінійних механічних систем зі складними типами траєкторій і збурень", номер державної реєстрації 0112U000241, 2012-2015 рр.; НДР 1.3.1.406-16 "Розробка якісних методів аналізу динамічних властивостей механічних керованих систем із точною та неточною характеристикою параметрів", номер державної реєстрації 0115U005708, 2016-2019 рр. та в рамках виконання наступних грантів: F36/441-2012 "Параметрична стійкість сингулярно-збурених систем із застосуванням у задачах теоретичної механіки", номер державної реєстрації 0112U005719, 2012 р.; "Розвиток методу функцій Ляпунова в задачах стійкості, керування та стабілізації неточних "малоприводних" механічних систем", номер державної реєстрації 0115U005228, 2015-2016 рр.; F70/141-2017 "Розвиток теорії швидко-повільних динамічних систем із застосуванням в задачах стійкості, керування та стабілізації неточних "малоприводних" механічних систем", номер державної реєстрації 0117U007133, 2017 р.

Мета та завдання дослідження. *Метою* даної роботи є встановлення умов наявності заданих динамічних характеристик механічних систем, математичними моделями яких є неточні різнотемпові системи диференціальних рівнянь.

Для досягнення цієї мети необхідно:

1. розробити ефективний метод оцінки області у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи диференціальних рівнянь, що досліджується;

2. узагальнити метод функцій Ляпунова для врахування рухомості стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявності в ній параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних рухів";

3. застосувати отримані методики для дослідження актуальних типів неточних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що є математичними моделями механічних систем;

4. провести апробацію і перевірити ефективність методик при дослідженні динамічних характеристик реальних механічних систем, математи-

чними моделями яких є неточні різнотемпові системи диференціальних рівнянь.

Об'єктом дослідження є динаміка нелінійних неточних різнотемпових моделей механічних систем, зокрема, систем типу Лур'є–Постнікова, систем типу Такагі–Сугено, малоприводних механічних систем.

Предметом досліджень є динамічні характеристики вказаних класів систем.

Методи дослідження. *Методами* досліджень є метод функцій Ляпунова (скалярних, векторних та матричнозначних), метод порівняння з векторною функцією Ляпунова для великомасштабних систем, метод Dynamic Surface Control для побудови керування малоприводними механічними системами. Метод функцій Ляпунова є потужним методом дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь, який дозволяє робити висновок про динамічні характеристики таких систем, зокрема про стійкість чи нестійкість, не розв'язуючи їх. Це є однією з його переваг, оскільки нелінійність досліджуваної системи значно ускладнює її розв'язання. Метод порівняння із векторною функцією Ляпунова є його модифікацією, яка адаптована для дослідження великомасштабних систем і заснована на разбитті системи великої розмірності на підсистеми із подальшою побудовою компонент векторної функції у вигляді скалярних функцій для підсистем. Це дозволяє простіше будувати результуючу функцію Ляпунова та повніше враховувати вплив підсистем на загальну динаміку всієї великомасштабної системи. Метод Dynamic Surface Control дозволяє будувати керування для системи, що приведена до каскадного вигляду. Однією з його особливостей є те, що керування, яке побудовано за його допомогою, забезпечує збіжність траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь не до рівноважних значень змінних, а до деяких наперед заданих траєкторій, збіжність яких до рівноважних значень змінних постулюється. Також особливістю даного методу є застосування фільтрів, за допомогою яких операція диференціювання замінюється визначенням приросту диференційованої величини за фіксований проміжок часу (часова константа фільтру). Це дозволяє уникнути збільшення складності елементів системи диференціальних рівнянь, в тому числі і закону керування.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Запропоновано новий підхід до визначення області, для значень параметрів з якої існує стан рівноваги неточних різнотемпових систем різних класів, як-то систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем і у випадку неможливості такого розділення, нелінійних систем у загальному вигляді, в тому числі великомасштабних.

2. Запропоновано узагальнення прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості неточних нелінійних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що полягає у його розширенні на новий клас систем, які досліджуються, а також у нових способах побудови відповідних допоміжних функцій та нових умовах стійкості, отриманих за їх допомогою.

3. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості та параметричної нестійкості для систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, які для систем такого класу дають можливість робити висновок про динаміку системи при всіх можливих типах динаміки вказаних підсистем, без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.

4. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для систем типу Лур'є–Постнікова, у випадку коли вони не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем або у випадку

браку відомостей про динамічні характеристики вказаних підсистем, без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.

5. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для нелінійних систем в загальному вигляді, які не потребують відшукання рухомого стану рівноваги, як у припущенні про їх великомасштабність, так і без такого припущення.

6. Запропоновано спосіб побудови керування, що забезпечує глобальну асимптотичну параметричну стійкість нелінійної системи в загальному вигляді відносно певної області у просторі параметрів системи у випадку її параметричної нестійкості.

7. Незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено у випадку, як стійкості, так і нестійкості лінійних наближень локальних підсистем, а також область такої стійкості у просторі параметрів моделі.

8. Розвинуто спосіб побудови керування для неточних малоприводних механічних систем, застосовуючи який отримано явні вигляди керування, що для всіх значень параметрів моделей з деяких областей забезпечують глобальну асимптотичну стійкість верхнього положення рівноваги маятника з маховиком, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги TORA, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги маніпулятора із пружним зчленуванням.

9. Запропоновано керування, тобто закон зміни напруги, що подається на вхід двигуна постійного струму послідовного збурення, яке забезпечує обертання валу двигуна із необхідною кутовою швидкістю для всіх значень параметрів моделі із деякої області.

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках теоретичної механіки та теорії диференціальних рівнянь; застосуванням точних аналітичних методів розв'язання поставлених задач та доведенням відповідних теорем та лем; узгодженістю та збігом деяких одержаних результатів з відомими в літературі, які були отримані за допомогою інших методів; відповідністю постановок, результатів і висновків до фізичної суті задач.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому розвитку концепції параметричної стійкості. Також отримані результати дозволяють робити висновок про якісну поведінку різних типів неточних різнотемпових моделей механічних систем на нескінченному часовому інтервалі у випадку якщо внаслідок, наприклад, значної нелінійності моделі, що розглядається, застосування, зокрема, методу розділення змінних ускладнене. Достатні умови параметричної стійкості дають можливість максимально врахувати вплив неточних параметрів на динамічні характеристики моделей механічних систем, тобто точніше моделювати реальні задачі і, відповідно, точніше прогнозувати поведінку реальних механічних систем. Результати, отримані при дослідженні малоприводних механічних систем, мають практичне застосування при побудові реальних робототехнічних систем, до яких вони входять, як складові частини, або, у випадку TORA, для моделювання поведінки супутника із подвійним обертанням чи мехнізму активного гасіння вібрацій.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних конференціях і форумах, зокрема:

на XIII Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 2010;

на міжнародній конференції “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”, Київ, 2015, 2017;

на Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 2015;

на Українсько-Китайському форумі науки та технологій, Китай, Харбін, 2016;

на 5-й Міжнародній науковій конференції для молодих вчених по диференціальним рівнянням та їх застосуванням присвяченій Я. Б. Лопатинському, Київ, 2016;

на Міжнародній конференції молодих математиків присвяченій 100-ій річниці академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського, Київ, 2017;

на XVII та XVIII Міжнародних конференціях науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів “Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн”, Київ, 2017, 2018;

на Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченій Я. С. Підстригачу, Львів, 2018.

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалась

на семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України А.А. Мартинюк, 2018 р.);

на семінарі секції “Теорія коливань та стійкість руху” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України В.Д. Кубенко, 2018 р.);

на загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару – академік НАН України А.Н. Гузь, 2018 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертації висвітлено в 31 наукових працях, з них 4 статті [47, 48, 135, 136] у провідних міжнародних наукових виданнях, 17 статей у наукових фахових виданнях України [45, 46, 49, 50, 78–90] та 10 тез доповідей і матеріалів міжнародних наукових конференцій. Всі результати роботи отримані автором самостійно. У спільних публікаціях автору дисертаційної роботи належить вибір методики розв'язання задач, аналітичні та чисельні розрахунки, аналіз отриманих результатів, співавтору – визначення загального напрямку дослідження, участь в аналізі отриманих результатів.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел зі 195 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 300 сторінок, разом із 26 рисунками.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультантові – академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Андрійовичу Мартинюку за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Різнотемпові системи диференціальних рівнянь та основні методи їх дослідження

В багатьох галузях науки і техніки, в тому числі при дослідженні фізичних, біологічних, хімічних та іншої природи систем, часто зустрічаються такі, в яких присутні процеси, що відбуваються у різних масштабах часу. Адекватними математичними моделями таких систем є різнотемпові системи диференціальних рівнянь. Одними з основних проблем при дослідженні таких моделей є їх висока розмірність та т. зв. “жорсткість”, тобто значні складнощі при застосуванні стандартних чисельних методів для їх розв’язання. В загальному випадку, автономну різнотемпову систему диференціальних рівнянь можливо записати як у швидко-повільному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

так, застосувавши заміну змінних $t = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$, і у сингулярно-збуреному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dfrac{dy}{d\tau} = g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

де x – повільна змінна, y – швидка змінна, ε – параметр, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів, f та g – достатньо гладкі функції. Для неавтономних систем швидко-повільна і сингулярно-збурена форми не еквівалентні через присутність часу в правій частині системи. Теорія сингулярно-збурених систем та тісно пов'язаний з нею метод розділення рухів є потужними інструментами, що дозволяють значною мірою вирішити питання великої розмірності та "жорсткості" різнотемпових систем.

Вважається, що початок теорії сингулярно-збурених систем було покладено доповіддю Prandtl "Про рух рідини при малому терті" (див. [159]) на Третьому міжнародному конгресі математиків у Гейдельберзі.

Згодом, важливою віхою стало дослідження Van der Pol-ем (див. [184]) коливань, які виникали в контурі, що включає в себе два опори, ємність, індуктивність та тетрод. Спостерігалося, що при зменшенні деякого параметра характер коливань від близьких до гармонічних переходив до специфічного вигляду, коли в динаміці коливного процесу почали виділятися ділянки "повільної" зміни та швидких "стрибків" з одного стану на інший. Л.І. Мандельштам ввів для пояснення цих ефектів т. зв. "постулат стрибка". Відповідно до цього постулату, з певних фізичних міркувань, вважалося, що досягнувши деякого стану, система "миттєво" переходить у інший стан. Було запропоновано називати такі коливання "релаксаційними" та висунута гіпотеза, що при прямуванні параметра до нуля відповідні розв'язки рівняння, що описують динаміку таких коливань, стають розривними.

Крім того, B. Van der Pol запропонував замінювати початкову систему, що описує динаміку коливань системи з однією степінню свободи, спрощеною системою, яка отримується із початкової усередненням правої частини системи по "швидкій" змінній, тобто поклав початок методам розділення рухів. Однак, цей метод, не дивлячись на популярність у інженерів через зручність проведення розрахунків, носив чисто інтуїтивний характер.

В 1930-х роках М.М. Крилов та О.М. Боголюбов запропонували загальний підхід (метод осереднення) для дослідження рівнянь, які розглядав Van der Pol (див. [34, 35]). Його основний зміст полягає у побудові такої заміни змінних, яка дозволяє відокремити "швидкі" змінні від "повільних". Розв'язок початкової задачі має вигляд асимптотичного ряду, перший член якого співпадає із розв'язком, отриманим за методом Van der Pol-a. Згодом цей метод отримав розвиток у роботах Митропольського, Зубарева, Волосова та ін. (див. [4, 5, 14, 56, 57]).

Також у 1930-х роках слід відмітити роботи Nagumo (див. [152]), пов'язані із аналізом диференціальних рівнянь, що описували деякі хімічні процеси, та роботи Rothe (див. [161–164]) по дослідженню скін-ефекта у електричних провідниках.

Звична на даний час термінологія, як то "граничний шар" (англ. boundary layer), що запозичена з гідродинаміки, була введена в дисертаційній роботі Wasow (див. [189]) та остаточно закріпилася після статті Вішика та Люстерніка (див. [185]). Термін "сингулярні збурення" (англ. singular perturbations) вперше з'явився в книзі Friedrichs and Wasow (див. [118]), яка стала результатом роботи семінару з нелінійних коливань Нью-Йоркського університету.

Ефекти схожі на "стрибки" між станами моделі, спостерігалися, також, при дослідженні різних схем мультивібраторів. Андронов та Вітт спостерігали (див. [2] і бібліографію там), що деякі "паразитні" параметри (наприклад, самоіндукція провідника), якими, зазвичай, нехтували в силу їх відносної малості при побудові відповідної математичної моделі, можуть істотно впливати на поведінку системи. Тобто їх відкидання приводило до неадекватної моделі.

Математичне пояснення "постулату стрибка" було отримано Железцовим та Родигіним (див. [23, 24]). Повільна система з певною точністю описує поведінку реальної системи при малих значеннях параметра до тих пір, поки рух відбувається поблизу стійких ділянок повільної поверхні. Однак, може бути досягнута границя такої ділянки. В цей час траєкторія реальної системи може "зірватися", тобто залишити окіл повільної поверхні. Тепер її поведінка буде задаватися швидкою системою. Це і є "стрибок". В повільному масштабі часу він відбувається "миттєво", тобто траєкторія має розрив, а у швидкому – за деякий скінченний час. При цьому траєкторія, слідуючи швидкій динаміці, може потрапити на стійку ділянку повільної поверхні, після чого швидкий рух знов зміниться повільним.

Слід відмітити класичні результати Тихонова (див. [67–69]), щодо особливостей граничного переходу розв'язку сингулярної задачі Коші до розв'язку незбуреної задачі. Випадок, розглянутий А.М. Тихоновим, визначає якісну поведінку руху тоді, коли початкові умови системи швидких рухів належать області впливу її кореня, який є стійким станом рівноваги, а траєкторія виродженої системи – системи повільних рухів – не виходить з області стійкості кореня. Подібні результати були окремо отримані Градштейном (див. [15, 17]). В розглянутому випадку задача асимптотичного представлення розв'язку початкової системи по малому параметру може бути розв'язана до кінця. Існує аналог формули Маклорена, отриманий Васильєвою (див. [8]) і доведений до формалізму, який дає асимптотичне представлення розв'язку початкової задачі. Детально цей метод описаний в [9]. Згодом, в роботах Іманалієва (див. [27–29]) по побудові асимптотичних представлень розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, цей формалізм було приведено до більш компактного вигляду.

Зазначимо, що результат А.М. Тихонова має деяке обмеження у вигляді скінченності часового інтервалу, на якому встановлюється близькість розв'язків сингулярно-збуреної і виродженої систем. Дослідженню задачі Коші для сингулярно-збуреної системи диференціальних рівнянь на нескінченному проміжку зміни аргумента присвячені роботи Васильєвої (див. [7]), Hoppensteadt (див. [129]). В роботах Градштейна (див. [16]), Клімушева та Красовського (див. [31]) встановлено додаткову умову до умов теореми Тихонова, у вигляді рівномірної асимптотичної стійкості довільного часткового розв'язку повільної підсистеми, при виконанні якої зберігається близькість розв'язків сингулярно-збуреної і виродженої систем на нескінченному інтервалі часу.

Питання про поведінку системи у випадку, коли зображаюча точка виходить на границю області стійкості (при повільному русі) або питання динаміки системи в околі точок зриву, де відбувається переключення із швидких рухів на повільні, А.М. Тихоновим не розглядалося. Ця задача була розв'язана Л.С. Понтрягіним та Є.Ф. Міщенко в кінці 1950-х років. За допомогою деякого перетворення однієї із швидких координат у повільні виявилося можливим побудувати розв'язок початкової задачі у вигляді асимптотичного ряду по степеням малого параметра. Методи, розроблені Понтрягіним (див. [61,62]) та Міщенко (див. [58]), дозволили отримати повні асимптотики розв'язків типових різнотемпових систем на площині, які викладені у класичній монографії Міщенка та Розова (див. [59]).

Важливий з практичної точки зору випадок був розглянутий Понтрягіним та Родигіним (див. [63]). В цьому випадку система швидких рухів має стійкий граничний цикл, тобто єдиний невироджений асимптотично стійкий періодичний розв'язок. Показано, що при виконанні певних умов, початкова система має близький до цикла повільної системи асимптотично стійкий при малому значенні параметра періодичний розв'язок. Велика кількість практичних прикладів можуть бути віднесені до випадка А.М. Тихонова чи до випадка Л.С. Понтрягіна і Л.В. Родигіна, тому результати отримані цими авторами грають суттєву роль у методі розділення рухів.

Відмітимо, також, роботи Тупчієва (див. [70–72]), Wasow (див. [190, 191]), Harris (див. [125, 126]), Erdelyi (див. [113–115]) з дослідження граничного переходу у двоточковій крайовій задачі, Олійника (див. [155, 156]) з дослідження сингулярно-збурених диференціальних рівнянь в частинних похідних та огляд Вішіка та Люстерника (див. [10]), де розглянута побудова асимптотичних представлень розв'язків лінійних сингулярно-збурених диференціальних рівнянь в частинних похідних. Ці результати знайшли, згодом, широке застосування у багатьох прикладних питаннях, зокрема в геометричній оптиці (див. [133]). Також, не дивлячись не те, що робота М.Й. Вішіка та Л.А. Люстерніка стосувалася лінійних рівнянь, загальні закономірності, встановлені в цій роботі, носять загальний характер і їх можливо використовувати і при дослідженні нелінійних випадків. В роботі Haber and Levinson (див. [122]) вперше було досліджено (без побудови асимптотики) розв'язок із внутрішнім граничним шаром.

У роботі Волосова (див. [12]) розглядалась специфічна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, де порушувалася властивість стійкості кореня швидкої підсистеми, так як дійсна частина кореня відповідного характеристичного рівняння була рівна нулю. Виявилося, що в цьому випадку траєкторія сингулярно збуреної системи не має границі при прямуванні малого параметра до нуля, а коливається з нескінченно великою частотою і скінченною амплітудою навколо виродженого розв'язку. Згодом, аналогічні результати були отримані і для більш складних задач, для розв'язання яких Волосов розвивав метод осереднення (див. [11, 13]).

Широковживаним підходом до якісного дослідження нелінійних систем є застосування геометричних методів аналізу. Геометрична теорія різнотемпових систем була започаткована в роботах Ж.А. Пуанкаре та О.М. Ляпунова. Її основні питання – існування та дослідження властивостей як окремих розв'язків, що володіють спеціальними якостями, так і цілих класів розв'язків (інтегральних многовидів). Основи теорії інтегральних многовидів, тобто гладких інваріантних поверхонь системи диференціальних рівнянь, закладені в роботах Боголюбова та Мітропольського (див. [5, 6]). Їх використання дозволяє знизити розмірність моделей, які вивчаються, тобто замінити їх більш простими моделями, що з високою степінню точності відображають поведінку початкових моделей, а також позбавитись від обчислювальної "жорсткості". Теорія інтегральних многовидів для дослідження різнотемпових систем розвивалася в роботах Задираки (див. [25]), Ликової та Бариса (див. [39]), Самойленка та Свищука (див. [66]), Fenichel (див. [117]), Hale and Stokes (див. [123]), Kokotovic, Khalil and O'Reily (див. [138]) та ін.

При дослідженні нелінійних систем найбільшу цікавість викликало встановлення загальних якісних властивостей початкової системи (наприклад, стійкість, наявність автоколивань, тощо) по властивостям спрощених систем. Це можливо при використанні метода Ляпунова. Ідея використання такого підходу належить Красовському (див. [33]). Встановлено достатні умови, при виконанні яких із стійкості швидких та повільних рухів слідує стійкість тривіального розв'язку початкової системи. Їх можно інтерпретувати як умови збіжності наближеного розв'язку до точного на нескінченному інтервалі при умові стійкості повільних рухів. Стійкість тривіального розв'язку сингулярно-збуреної системи диференціальних рівнянь досліджувалось, також, у роботах Клімушева (див. [30]), Клімушева та Красовського (див. [31]), Разуміхіна (див. [64, 65]), Градштейна (див. [17]), Hoppensteadt (див. [128]).

Стійкість стаціонарних режимів сингулярно-збурених систем диференціальних рівнянь, в тому числі великомасштабних, досліджувалася в роботі [18] шляхом застосування скалярних та векторних функцій Ляпунова.

Для великомасштабних систем розглянуті випадки існування декількох малих параметрів і, відтак, нерівномірного (коли малі параметри взаємно не пов'язані, тобто система має істотно незалежні часові шкали) та рівномірного (коли часові шкали взаємопов'язані) градуювання часових шкал.

В дисертаційній роботі Міладжанова наведені результати дослідження стійкості стаціонарних режимів сингулярно-збурених систем диференціальних рівнянь, в тому числі і великомасштабних, використовуючи матричнозначні функції Ляпунова (див. [55] та бібліографію там). Динамічні властивості "швидкої" та "повільної" підсистем використовуються для побудови діагональних елементів такої функції, а позадіагональні елементи враховують обмеження на функції звя'зку між підсистемами. Достатні умови стійкості (нестійкості) формулюються в термінах знаковизначеності відповідних матриць.

В останні роки кількість публікацій, присвячених дослідженню різнотемпових систем та розвитку асимптотичних методів, неухильно зростає. З їх переліком та класифікацією відповідно до тематики досліджень можна ознайомитись в грунтовних оглядових роботах (див. [139,153,169,195]). Все це вказує на те, що дослідження різнотемпових систем диференціальних рівнянь, які є математичними моделями реальних механічних систем, та методів аналізу їх поведінки, включаючи як асимптотичні методи і метод розділення рухів, так і методи якісного аналізу динамічних характеристик таких систем, як-то дослідження стійкості розв'язків таких систем, є актуальною та важливою задачею теоретичної механіки.

1.2 Системи з неточними значеннями параметрів та параметрична стійкість

Зауважимо, що одним з припущень теорії стійкості руху О.М. Ляпунова є припущення, що параметри системи фіксовані та не змінюються за весь час руху. Однак, на практиці ці параметри можуть змінювати своє значення. Наприклад, у зв'язку із допущеними неточностями при побудові моделі чи при зміні деяких параметрів середовища, в якому модель, що досліджується, функціонує. Крім того, в багатьох складних системах, забезпечення багаторежимності та багатофункціональності може мати місце лише при виконанні деяких вимог на підсистеми у фіксованому але достатньо широкому діапазоні параметрів цих підсистем. Все вищезазначене пояснює інтерес в останні роки до розвитку теорії стійкості систем, параметри яких задані неточно (див. Barmish and Leitman [99], Chen and Leitman [105], Corless [108], Ivanenko [131]). Розробляються декілька напрямків досліджень.

Один з них заснований на припущенні, що параметри системи (як правило лінійної) змінюються в наперед заданому інтервалі і керування відсутнє. Такі системи отримали назву інтервальних динамічних систем. Дослідження стійкості проводиться методом характеристичних рівнянь. Використовується критерій стійкості Харитонова (див. [74]) та його узагальнення (див. Хлебалін [75], Жабко та Харитонов [22] та ін.). Їх використання дозволяє зробити висновок про стійкість систем, коефіцієнти характеристичних поліномів яких приймають невизначені значення із заданих інтервалів, аналізуючи властивості скінченного числа поліномів зі значеннями параметрів, рівними величинам нижніх та верхніх меж вказаних інтервалів. Відмітимо, що у випадку дискретних лінійних інтервальних динамічних систем критерій Харитонова застосувати неможливо і питання про необхідні та достатні умови їх стійкості залишається відкритим. Викликає інтерес отримання результатів, аналогічних теоремам Харитонова, для дослідження інтервальних систем безпосередньо по значенням елементів матриць, які входять до рівняння стану. Матриці, елементи яких приймають значення з деяких відомих інтервалів, отримали назву інтервальних матриць. Виявилося, що критерій Харитонова не розповсюджується на випадок інтервальних матриць і задача отримання необхідних та достатніх умов стійкості інтервальних матриць для неперервних і дискретних лінійних інтервальних динамічних систем також залишається нерозв'язаною. Тому, актуальною є задача отримання достатніх умов стійкості інтервальних матриць. Перші результати в цьому напрямку були отримані застосовуючи теорему Гершгоріна. Відмітимо, що окрім теорем Гершгоріна, локалізацію спектра матриці можливо проводити використовуючи результати робіт [41, 42]. Застосування методу векторних функцій Ляпунова та ідей методу порівняння дозволило значно поліпшити отримані результати, а також сформулювати достатні умови нестійкості інтервальних матриць. Змістовне викладення вказаних методик і отримані на їх основі результати представлені в оглядах [19, 20] та в статті [173].

Використання ідей методу функцій Ляпунова для дослідження інтервальних систем також проводилося в роботах Хусаінова та Шатирко (див. [92]), Хусаінова та Мустафаєвої (див. [91]), Мустафаєвої (див. [60]), Heinen (див. [127]), Xu (див. [192]) та ін. Слід відмітити роботу [44], в якій застосовується концепція розширення початкової інтервальної системи в поєднанні з методом векторної функції Ляпунова. Вказаний підхід дозволяє отримати ширші оцінки на множину значень параметра, при яких зберігається інтервальна стійкість початкової системи.

Інший напрямок пов'язаний з дослідженням динаміки систем при наявності керування. Тут використовуються як алгебраїчні, так і якісні методи аналізу інтервальної стійкості. Відмітимо метод H_∞ – керування (див. Ларін [36], Ларін, Алієв та Вєлієва [37], Aliev and Larin [94, 95], Larin and Aliev [141], Petersen, Anderson and Jonckheere [157], Petersen and Hollot [158], Kenney, Laub and Jonckheere [134], Gardiner and Laub [119] та ін.), який тісно пов'язанbq з розв'язком алгебраїчного рівняння Ріккаті. В останні роки, для вирішення багатьох проблем, які виникають в теорії систем, включаючи H_∞ – керування неточними лінійними системами, використовується метод лінійних матричних нерівностей. Його перевагою без сумніву є реалізація цього методу в пакеті прикладних програм MATLAB. Крім цього, ефективним при аналізі такого типу систем є метод функцій Ляпунова. Використовуються як скалярні (див. Corless and Leitmann [109, 110], Gutman [121], Corless [107], Leitman [142, 143], Rotea and Khargonekar [160], Chen [103, 104]), так і векторні функції Ляпунова (див. Chen [102]).

Відносно новим ефективним методом дослідження неточних систем є метод матричних функцій Ляпунова (див. [43, 148]). Відмітимо також роботи [51–54]. В них досліджується стійкість розв'язків неточної системи загального вигляду

$$\dot{x} = f(t, x, \alpha)$$

відносно рухомої множини

$$A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r(\alpha)\},$$

де $r(\alpha) > 0$, $r(\alpha) \to r_0$ ($r_0 = const > 0$) при $\|\alpha\| \to 0$, $r(\alpha) \to +\infty$ при $\|\alpha\| \to +\infty$. В залежності від значення функції $r(\alpha)$, дана задача може інтерпретуватися як дослідження стійкості деякого граничного циклу або як дослідження стійкості тривіального стану рівноваги початкової системи.

В роботі [140] досліджується динаміка неточних систем при наявності пари умовно інваріантних рухомих множин. використовуючи узагальнене інверсійне перетворення, проведено синтез керувань рухом таких систем. Отримані умови асимптотичної стійкості руху неточних систем відносно рухомих умовно інваріантних множин.

Стійкість неточних дискретних систем досліджувалась в роботах Мартинюка та Лук'янової (див. [146, 147]). Використовуючи ієрархічну функцію Ляпунова і однорівневу декомпозицію отримані оцінки неточностей, при яких зберігається експоненціальна стійкість стану рівноваги початкової системи.

Відносно новим напрямком в дослідженні неточних систем є напрямок, який заснований на застосуванні концепції параметричної стійкості (див. [130]). Ця концепція природно виникає, коли динамічна система нелінійна і параметри входять до її складу довільним чином. В цьому випадку зміна значення параметра тягне за собою зміну значення стану рівноваги або, навіть, його зникнення. Також, при переході від одного стану рівноваги до іншого може змінюватися характер стійкості. Таким чином, природно поєднати проблему існування стану рівноваги неточної динамічної системи і питання про його стійкість в єдиному означенні параметричної стійкості, що й було запропоновано зробити авторами роботи [130]. Відмітимо, що поняття параметричної стійкості є розширенням поняття конективної стійкості, де невизначені параметри належать деякій множині і трактуються як сила взаємодії між підсистемами моделі (див. [171, 172]). Поняття параметричної стійкості не накладає обмежень на природу параметрів, що дає можливість досліджувати ширший клас систем.

Виходячи з означення параметричної стійкості (див. [130]), задача про дослідженняя цієї властивості динамічної системи зводиться до визначення області у просторі параметрів, для кожного значення параметра з якої існує стан рівноваги системи, що досліджується і, далі, до дослідження властивостей стійкості знайденого стану рівноваги для значень параметра із цієї області. При цьому, стан рівноваги пропонується розглядати як неперервну функцію, що залежить від значення параметра.

Відмітимо, що поняття параметричної стійкості тісно пов'язано з поняттям грубості системи або структурної стійкості (див. [2]). Як відомо, грубі системи, це системи диференціальних рівнянь, в яких топологічна поведінка траєкторій не змінюється при малих збуреннях правої частини. Згідно загальноприйнятій точці зору, тільки грубі системи можуть описувати реальні процеси, оскільки неможливо довіряти математичній моделі, яка різко змінює свою поведінку при малій зміні параметрів, що входять до її складу (які в реальності ніколи не можуть бути визначені точно). Властивість грубості системи в околі деякого стану рівноваги забезпечується експоненціальною стійкістю цього стану рівноваги. В цьому випадку, при малому збуренні параметрів системи стан рівноваги не зникає і залишається асимптотично стійким. Та ж властивість гарантується і параметричною асимптотичною стійкістю системи при значенні параметра, для якого існує стан рівноваги, що розглядається.

Слід підкреслити, що в загальному випадку дослідження системи диференціальних рівнянь на грубість є достатньо складним і потребує розвинутої техніки. Теория грубих систем є достатньо вивченою, коли розмірність простору станів мала ($n \leq 2$). В цьому випадку грубі системи утворюють в множині всіх динамічних систем над простором станів всюди щільну множину і допускають описання в термінах якісного поведінки траєкторій (т.зв. системи Морса-Смейла). У випадку просторів станів більших розмірностей ці властивості динамічних систем не зберігаються.

Все вищезазначене підкреслює важливість введення та використання поняття параметричної стійкості, оскільки воно дає можливість робити висновок про локальну грубість систем в околі стану рівноваги при довільних розмірностях просторів станів.

Авторами роботи [130] запропонований підхід до визначення області існування стану рівноваги неточної системи, що досліджується. Для встановлення властивості стійкості пропонується скористатися методом функцій Ляпунова, зокрема використовувати скалярну квадратичну функцію Ляпунова і векторну функцію Ляпунова з квадратичними скалярними функціями для підсистем при дослідженні великомасштабних систем. Відмітимо, що метод, запропонований в роботі [130] для відшукання області існування стану рівноваги, є достатньо грубим і важковживаним для практичного застосування, особливо для великомасштабних систем. В багатьох же інших роботах пропонується доводити існування області в просторі параметрів, для якої існує стан рівноваги, а не знаходити її. Також, для застосування теорем про стійкість потрібно знати зміний стан рівноваги, відшукання якого, з-за нелінійності відповідної функції, може являти собою достатньо складну задачу. Тому, важливою задачею є розробка ефективних методів оцінки області в просторі параметрів, для значень параметрів з якої існує відповідний стан рівноваги, а також знаходження умов на нелінійну функцію в правій частині системи диференціальних рівнянь, які без визначення стану рівноваги дозволили б встановити параметричну стійкість динамічної системи, що досліджується.

Незважаючи на те, що концепція параметричної стійкості спочатку розроблялась для дослідження нейронних сіток та різних моделей типу Лотки–Вольтерра, подальші дослідження показали можливість її застосування для вивчення інших класів систем, зокрема систем типу Лур'є–Постнікова, які є адекватними моделями багатьох задач непрямого регулювання машин та механізмів (див. [154, 186, 187]). Актуальним в цьому напрямку також є отримання достатніх умов параметричної стійкості відповідного типу без знаходження рухомого стану рівноваги і визначення області в просторі параметрів, для значень параметрів з якої така стійкість зберігається. Зауважимо, що в роботах [154, 186, 187] область існування стану рівноваги системи, що досладжується, не відшукується, а або вважається відомою, або доводиться сам факт її існування.

Докладніше із концепцією параметричної стійкості, а також із останніми результатами, отриманими при її розвитку, є можливість ознайомитися в роботі [77].

Таким чином, враховуючи все вищезазначене, вивчення властивостей механічних систем, параметри яких задані неточно, зокрема розвиток концепції параметричної стійкості, є новою та актуальною задачею теоретичної механіки.

1.3 Малоприводні механічні системи

Нові задачі керування складними кінематичними механізмами обумовлені появою робототехнічних систем нетривіальної конструкції (див. [26]). У зв'язку з цим, виникають проблеми стабілізації та керування просторовим рухом механізмів, у яких кількість керуючих входів менше числа степенів свободи, тобто його недостатньо для реалізації звичайних режимів роботи робота. Дослідження таких об'єктів, які в англомовній літературі носять назву underactuated mechanical systems, що може бути перекладено як "малоприводні" механічні системи (ММС), було розпочато близько двох декад тому, коли керування неголономними механічними системами викликало велику цікавість у дослідників і виникала значна кількість задач, до яких звичні методи теорії керування не могли бути застосовані (див. [98, 100, 116]). Крім того, зменшення кількості керуючих входів і, відповідно, виконавчих пристроїв (приводів) позитивно впливає на енергетичні, масово-габаритні та вартісні показники ММС, що робить їх дослідження і впровадження ще більш актуальною задачею. ММС широко використовуються для моделювання реальних процесів у таких галузях, як робототехніка, космонавтика, морська справа, дослідження гнучких, мобільних, локомотивних систем, в багатьох інших (див. [145] та бібліографію там). Зупинимось докладніше на тих ММС, які будуть розглянуті в цій роботі.

Маятник з маховиком (англ. Inertia Wheel Pendulum) був вперше запропонований до розгляду в роботі [178], де також отримано перші результати по стабілізації обертанням маховика верхнього нестійкого стану рівноваги маятника застосовуючи гібридне керування. Спочатку маятник "накачуючись" енергією разхитується і потрапляє до деякого околу верхнього стану рівноваги. Потім керування, отримане за допомогою спеціальної заміни змінних, яка зводить систему диференціальних рівянь, що описує поведінку маятника, до лінійного вигляду, остаточно стабілізує маятник. Зауважимо, що така заміна змінних можлива лише у верхній півплощині обертання маятника. Подібний "енергетичний" підхід був використаний і в лабораторії мехатроніки Інституту механіки МДУ, де було сконструйовано працюючий зразок (див. [73]). Однак, автор вказує, що "... в даній роботі не отримано теоретичного доведення дієздатності отриманого вище закону. Хоча ефективність його окремих частин доведена. Дієздатність побудованого керування в цілому вдається показати тільки за допомогою чисельних та експериментальних досліджень." В роботі [168], використовуючи перетворення змінних, початкова система диференціальних рівнянь, яка описує поведінку маятника з маховиком, зводиться до т.зв. "каскадного" вигляду. З умов глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги цієї системи отримано закон керування, що забезпечує такий же тип стійкості верхнього стану рівноваги маятника. Слід відмітити, що отриманий закон керування має громіздкий вигляд, що робить складним його застосування на практиці.

Супутники з подвійним обертанням є одним з основних типів безпілотних космічних апаратів. Наближено такий супутник може бути представлений у вигляді двох твердих тіл, платформи та ротора, що з'єднані жорстким валом. Після доставки на орбіту, супутник рухається без взаємного обертання однієї з його частин відносно іншої, як одне тверде тіло. Задача полягає в тому, щоб забезпечити необертання платформи, наприклад, для проведення досліджень чи фотозйомки в заданому напрямку. Для цього електродвигун, що розташований на платформі, обертає за допомогою валу ротор у напрямку, який співпадає з напрямком початкового обертання. Таким чином, кутова швидкість платформи прямує до нуля, а момент імпульсу ротора стає рівним початковому моменту системи. Відомо, однак (див. [124, 137]), що в ході такого маневру супутник може "перекинутись" через збільшення кута нутації чи швидкість обертання ротора почне необмежено збільшуватись, що призведе до значного відхилення руху космічного апарату від бажаного. В роботі [193] для дослідження цих негативних режимів було запропоновано використовувати механічну модель, яка отримала назву TORA (англ. Translational Oscillator with Rotating Actuator) та має схожу математичну природу із моделлю супутника із подвійним обертанням. Відмітимо, що окрім застосування до космічних апаратів, TORA представляє і окремий інтерес. Зокрема, в роботі [101] запропоновано використовувати TORA у вигляді моделі механізму, призначеного для активного гасіння вібрацій обертанням ексцентрикового маховика (див. також [194] і бібліографію там). В роботі [145] наведений список робіт, які присвячені основним підходам до побудови керування TORA. Згадаємо, також, роботи [168, 188], де за допомогою перетворення змінних початкова система диференціальних рівнянь, що описує поведінку TORA, зводиться до т.зв. "каскадного вигляду". З умов глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги цієї системи отримано закон керування, що забезпечує такий же тип стійкости стану рівноваги TORA. Слід відмітити, що отриманий закон керування, як і у випадку застосування даного методу до маятника з маховиком, має громіздкий вигляд, що робить складним його застосування на практиці.

Широко відомо, що однією з причин виникнення вібрацій у маніпуляторах промислових роботів є пружність зчленувань між керуючим приводом і керованою ланкою. Це може бути викликано деформацією елементів трансмісії, таких як ремені передачі чи довгі вали, наприклад, під час швидкого їх руху чи під час великих на них навантажень. Зазвичай, такі малі збурення ігноруються при моделюванні механічних систем, проте цілий ряд експериментів довели, що це може призводити до некоректності моделей, в тому числі до значних порушень у бажаних режимах їх функціонування (див. [120]). Зокрема, можливе виникнення явища резонансу, що призведе до руйнування частин механізму. Адекватними моделями, які враховують вищезазначені зауваження, є механічні моделі, де пружність трансмісії моделюється торсіонними пружинами у кожному із зчленувань (див. [111, 176, 183]). Сила, що виникає внаслідок деформації пружини, зазвичай вважається лінійно залежною від зміщення. Спеціальною заміною змінних математична модель, яка відповідає механічній моделі, що розглядається, може бути зведена до лінійного вигляду (див. [112]). Цей факт дозволяє застосовувати потужний апарат побудови бажаного керування, розроблений для лінійних систем диференціальних рівнянь, а разом із високою адекватністю таких механічних моделей для певних задач це робить їх актуальними і широковживаними. Однак, слід зауважити, що більшої адекватності математична модель набуває, якщо враховувати ефект затухання коливань, а також нелінійний характер згадуваної сили, що стає критичним, коли розглядаються великі навантаження чи інші пограничні режими функціонування механічної моделі. В цьому випадку звести відповідну математичну модель до лінійного вигляду не є можливим і задача побудови керування залишається відкритою.

Таким чином, розвиток теорії ММС взагалі, а також дослідження конкретних моделей таких систем, які є адекватними моделями багатьох реальних механічних систем, є актуальною та важливою задачею теоретичної механіки.

Розділ 2

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ НЕТОЧНИХ РІЗНОТЕМПОВИХ СИСТЕМ ТИПУ ЛУР'Є–ПОСТНІКОВА, ЯКІ ДОПУСКАЮТЬ ВИДІЛЕННЯ "ШВИДКОЇ" ТА "ВИРОДЖЕНОЇ" ПІДСИСТЕМ

Даний розділ присвячено застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних характеристик неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Системи Лур'є–Постнікова характеризуються тим, що нелінійна характеристика об'єкта, який досліджується, точно невідома і потрібно встановити умови, що гарантують певну динамічну властивість такої системи для всіх нелінійностей, що лежать в деяких допустимих межах. Така задача вперше була поставлена Лур'є та Постніковим в [38], де була розглянута стійкість системи автоматичного регулювання при довільних початкових збуреннях і довільній нелінійності сервомотора, що лежить в заданому секторі. Згодом ця робота започаткувала цілий новий напрямок – теорію абсолютної стійкості, де розглядається стійкість не одної конкретної системи, а деякої множини систем, що належать певному класу.

Слід зазначити, що окрім невизначеності нелінійної характеристики, суттєво впливати на динамічні властивості системи, що розглядається, може наявність у її складі невизначених параметрів, які неминуче з'являються е процесі моделювання реальної механічної системи.

Таким чином, врахування впливу нелінійних характеристик об'єкта та параметричної невизначеності моделі на динамічні характеристики різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, зокрема, стійкість та нестійкість їх станів рівноваги, зумовлюють необхідність узагальнення відповідних теорем методу функцій Ляпунова.

В підрозділі 2.1 наведено базові означення концепції параметричної стійкості, яка дає можливість враховувати вплив невизначених параметрів на існування стану рівноваги системи, що розглядається, та різні види його стійкості (нестійкості).

Підрозділ 2.2 присвячений методиці оцінки області у просторі параметрів системи, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги цієї системи. Основною ідеєю, на якій грунтується дана методика, є те, що збіжність відповідного ітераційного процесу до нерухомої точки забезпечує існування та єдиність розв'язку відповідного рівняння. Суттєвим є те, що припущення, яким повинна задовольняти система, що розглядається, перевіряються для фіксованих значень параметра, а відповідна теорема, виходячи з цих припущень, дозволяє отримати оцінки області у просторі параметрів і оцінки нелінійності.

В підрозділі 2.3 встановлено достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості різнотемпової системи типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли система допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем. Цей результат є узагальненням теореми Красовського (див. [33]) для систем типу Лур'є–Постнікова, але має значно більшу прикладну важливість, оскільки містить оцінки нелінійності, області параметрів та величини, яка є відношенням швидкостей швидких та повільних рухів, що дуже важливо для практичного застосування цих результатів. В якості ілюстрації наведено приклад керування електродвигуном постійного струму.

В підрозділі 2.4, використовуючи теореми обернені до теорем Ляпунова про нестійкість та теорему Четаєва про нестійкість, встановлені достатні умови параметричної нестійкості різнотемпової системи типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли система допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем для всіх варіантів поєднань стійкості та нестійкості їх лінійних наближень при деякому значенні параметра.

2.1 Базові означення

Наявність в реальній механічній системі фізичних параметрів, які можуть змінювати своє значення в процесі її функціонування, має адекватно відображатися в математичній моделі такої системи. На відміну від ситуації, коли параметри системи фіксовані, наявність параметрів, що змінюються, може призводити до появи нових станів рівноваги. Цей факт не дозволяє безпосередньо застосовувати загальноприйняту методику аналізу стійкості, розвинуту для випадку єдиного стану рівноваги. Тому в роботі [130] було введено поняття параметричної стійкості, яке дозволяє подолати зазначені труднощі наступним чином.

Розглянемо інваріантну по часу систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, p), \tag{2.1}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – стан системи (2.1) в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{R}^m$ – векторний фізичний параметр, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – настільки гладка функція, що для довільного заданого $p \in \mathbb{R}^m$ і початкової точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в момент часу $t_0 = 0$ рівняння (2.1) має єдиний розв'язок $x(t, x_0, p)$.

Припустимо, що для деякого номінального значення параметра p^* існує стан рівноваги x^* системи (2.1), тобто $f(x^*, p^*) = 0$ і при цьому x^* стійкий. Нехай параметр p змінює своє значення від p^* до деякого іншого значення. При цьому виникає ряд питань якісного аналізу системи (2.1), серед яких такі:

– чи існує новий стан рівноваги x^e системи (2.1) і як "далеко" він знаходиться від x^*?

– чи супроводжується зміна стану рівноваги системи (2.1) від x^* до x^e втратою стійкості?

– якщо новий стан рівноваги x^e існує і стійкий, то чи є ця стійкість того ж типу, що й стійкість стану рівноваги x^*?

Відповіді на ці питання можуть бути знайдені в рамках поняття параметричної стійкості. Розглянемо стан рівноваги $x^e : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, як неперервну функцію $x^e(p)$ векторного параметра і наведемо наступні означення.

Означення 2.1. *Система (2.1) параметрично стійка при значенні параметра $p^* \in \mathbb{R}^m$, якщо існує такий відкритий окіл $N(p^*)$, що для довільного $p \in N(p^*)$ виконуються умови:*

(а) існує стан рівноваги $x^e(p) \in \mathbb{R}^n$;

(б) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon, p) > 0$, що з умови

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \delta$$

следує оцінка

$$\|x(t, x_0, p) - x^e(p)\| < \varepsilon,$$

при всіх $t \in \mathbb{R}_+$.

Означення 2.2. *Система (2.1) параметрично асимптотично стійка при значенні параметра $p^* \in \mathbb{R}^m$ якщо*:

(а) *при значенні параметра p^* вона параметрично стійка*;

(б) *при всіх $p \in N(p^*)$ існує таке число $\mu(p) > 0$, що з умови*

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \mu(p),$$

слідує граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0, p) = x^e(p).$$

Означення 2.3. *Система (2.1) називається параметрично асимптотично стійкою по відношенню до області $P \subset \mathbb{R}^m$, якщо для любого $p \in P$:*

(1) існує стан рівноваги $x^e(p) \in \mathbb{R}^n$;

(2) для довільного числа $\varepsilon > 0$, існує таке число $\delta(\varepsilon, p) > 0$, що з умови

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \delta,$$

слідує оцінка

$$\|x(t; x_0, p) - x^e(p)\| < \varepsilon, \text{ при всіх } t \in \mathbb{R}_+;$$

(3) існує таке число $\mu(p) > 0$, що з умови

$$\|x_0 - x^e(p)\| < \mu(p),$$

слідує

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, p) = x^e(p).$$

Якщо в Означенні 2.3 μ довільне як завгодно велике але фіксоване число, тоді система (2.1) називається глобально параметрично асимптотично стійкою по відношенню до області P.

Якщо система (2.1) не володіє типом стійкості, вказаним в Означенні 2.1, то вона параметрично нестійка.

Означення 2.4. *Система (2.1) параметрично нестійка при значенні параметра $p^* \in \mathbb{R}^m$, якщо в довільному околі $N(p^*)$ точки p^* існує точка*

$\tilde{p}$, відповідний стан рівноваги для якої $x^e(\tilde{p}) \in \mathbb{R}^n$ існує, але нестійкий в сенсі Ляпунова.

Якщо умови Означення 2.4 виконуються для всіх $p \in P \subseteq \mathbb{R}^m$, то кажуть про параметричну нестійкість системи відносно області P.

Таким чином, для того щоб дослідити систему (2.1) в контексті з Означеннями 2.1, 2.2, 2.3 чи 2.4, необхідно встановити спочатку умови існування стану рівноваги відносно деякої області у просторі параметрів, а потім застосувати відповідний метод аналізу стійкості (нестійкості), зокрема, прямий метод Ляпунова.

2.2 Методика оцінки області існування єдиного стану рівноваги системи диференціальних рівнянь в просторі її параметрів

Наведемо деякі допоміжні твердження.

Розглянемо векторне рівняння наступного вигляду:

$$A(p)x + q(p)\varphi(r + C(p)x) = 0, \tag{2.2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – змінна, $p \in \mathbb{R}^l$, $r \in \mathbb{R}^m$ – векторні параметри, матриці $A(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ мають елементи, які неперервно залежать від параметра p, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – нелінійна функція, яка неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^m$ і така, що $\varphi(0) = 0$ і $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \neq 0$. Відносно системи (2.2) зробимо наступне припущення.

Припущення 2.1. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриця*

$$K(p,u) = A(p) + q(p)\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_u C(p)$$

невироджена в точці $p = p^*$, $u = 0$.

Сформулюємо і доведемо лему, яка дозволить визначити область

$$\Pi = \{(x,p,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \mid \Omega_x : \|x\| \le a,\ \Omega_p : \|p - p^*\| \le b,\ \Omega_r : \|r\| \le c\}$$

таку, що для всіх (p,r) з $\Omega_p \times \Omega_r$ існує x^e – єдиний розв'язок рівняння (2.2), який належить Ω_x.

Лема 2.1. *Нехай рівняння (2.2) задовольняє умовам Припущення 2.1 і для функції $\varphi(u)$ виконується умова*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)} \tag{2.3}$$

для всіх $u \in \Omega_u$, де $\Omega_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| \le \max\limits_{p\in\Omega_p} \|C(p)\|a + c\}$, c – довільне додатне число,

$$a = 2\|(K(p^*,0))^{-1}\| \max_{p\in\Omega_p} \|q(p)\| \times$$

$$\times \left(\frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)} + \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \right) c$$

і область Ω_p така, що виконується умова

$$\max_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\| \le \frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|}. \tag{2.4}$$

Тоді для всіх $(p,r) \in \Omega_p \times \Omega_r$ існує єдиний розв'язок рівняння (2.2), $x^e(p,r)$ який належить Ω_x.

Доведення. Рівняння (2.2) представимо у вигляді

$$x = (K(p^*,0))^{-1}\Big(K(p,0)x - [A(p)x + q(p)\varphi(r + C(p)x)]\Big) -$$

$$-(K(p^*,0))^{-1}\Big(K(p,0)-K(p^*,0)\Big)x$$

і розглянемо ітераційний процес

$$\begin{aligned} x_{n+1} = (K(p^*,0))^{-1}\Big(K(p,0)x_n - [A(p)x_n + q(p)\varphi(r + C(p)x_n)]\Big)- \\ - (K(p^*,0))^{-1}\Big(K(p,0)-K(p^*,0)\Big)x_n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Застосуємо до нього теорему про нерухому точку у випадку метричного простору із числовим множником в якості оператора (див. [32]). Згідно вказаній теоремі, виконання умов

$$\begin{aligned} \max_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)\max_{u\in\Omega_u}\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\| + \\ + \max_{p\in\Omega_p}\|K(p,0)-K(p^*,0)\| \le \frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

для всіх $u \in \Omega_u$, де $\Omega_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| \le \max\limits_{p\in\Omega_p}\|C(p)\|a + c\}$ і

$$\|\varphi(r)\| \le \frac{a}{2\|(K(p^*))^{-1}\|\max\limits_{p\in\Omega_p}\|q(p)\|} \tag{2.7}$$

для всіх $r \in \Omega_r$, достатньо для того, щоб ітераційний процес (2.5) мав єдину нерухому точку, або, що те саме, відповідне йому рівняння має точно один розв'язок, який належить Ω_x.

Очевидно, що при виконанні оцінки (2.3) нерівність (2.6) справедлива для всіх $u \in \Omega_u$.

Нехай c – довільне додатнє число, а Ω_p визначається так, як вказано вище. Виберемо

$$a = 2\|(K(p^*,0))^{-1}\|\max_{p\in\Omega_p}\|q(p)\|\times$$

$$\times\left(\frac{\frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|}-\max\limits_{p\in\Omega_p}\|K(p,0)-K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)}+\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\right)c.$$

Оскільки

$$\|\varphi(r)\|=\left\|\varphi(0)+\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=\tilde r}r\right\|\leq\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=\tilde r}\right\|c\leq$$

$$\leq\left(\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=\tilde r}-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|+\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\right)c\leq$$

$$\leq\left(\frac{\frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|}-\max\limits_{p\in\Omega_p}\|K(p,0)-K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)}+\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\right)c=$$

$$=\frac{a}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|\max\limits_{p\in\Omega_p}\|q(p)\|},$$

то нерівність (2.7) виконується для всіх $r\in\Omega_r$.

Отже, нерівності (2.6) та (2.7) виконуються і для всіх $(p,r)\in\Omega_p\times\Omega_r$, де Ω_p вибирається із урахуванням нерівності (2.4), існує єдиний розв'язок x^e рівняння (2.2), який належить Ω_x.

Лему доведено.

Розглянемо матрицю $A(p)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, елементи якої неперервно залежать від векторного параметра $p\in\mathbb{R}^l$ і зробимо відносно неї наступні припущення.

Припущення 2.2. *Існує таке значення параметра $p^*\in\mathbb{R}^l$, що матриця $A(p)$ стійка в точці $p=p^*$;*

Припущення 2.3. *Існує таке значення параметра $p^*\in\mathbb{R}^l$, що матриця $A(p)$ невироджена в точці $p=p^*$.*

Нехай Q – довільна симетрична додатно визначена матриця розмірності $n\times n$, P – симетрична додатно визначена матриця, яка є розв'язком алгебраїчного рівняння Ляпунова

$$A^T(p^*)P + PA(p^*) = -Q, \tag{2.8}$$

який, очевидно, існує, якщо виконуються умови Припущення 2.2, $N(p,p^*) = (A(p) - A(p^*))^T P + P(A(p) - A(p^*))$.

Сформулюємо і доведемо леми, які дозволять встановити область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ невиродженості матриці $A(p)$ в просторі параметрів.

Лема 2.2. *Нехай матриця $A(p)$ задовольняє умови Припущення 2.2 і область Ω_p така, що виконується співвідношення*

$$\max_{p\in\Omega_p}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q). \tag{2.9}$$

Тоді матриця $A(p)$ невироджена для всіх значень параметра p з області Ω_p.

Доведення. Нехай виконуються умови Припущення 2.2 і область Ω_p така, що співвідношення (2.9) має місце. Виберемо довільне значення параметра $\tilde{p}$ з цієї області і розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = A(\tilde{p})z, \;\; z \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Побудуємо функцію $V(z) = z^T P z$, $V(0) = 0$, де P – розв'язок рівняння (2.8), яка, очевидно, є додатно визначеною і знайдемо її похідну по часу в силу системи (2.10):

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2.10)} = z^T(A^T(\tilde{p})P + PA(\tilde{p}))z =$$

$$= \Big(-\lambda_{\min}(Q) + \max_{p\in\Omega_p}(\lambda_{\max}(N(\tilde{p},p^*)))\Big)\|z\|^2.$$

Згідно (2.9), ця похідна є від'ємною для всіх $z \in \mathbb{R}^n$, оскільки $\tilde{p}$ належить Ω_p. Це означає, що функція $V(z)$ задовольняє всі умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість, а отже, для значення параметра $\tilde{p}$, система (2.10) асимптотично стійка. Необхідною і достатньою умовою для цього є стійкість матриці $A(\tilde{p})$, тобто її невиродженість. Оскільки $\tilde{p}$ довільне значення параметра з області Ω_p, то матриця $A(p)$ стійка, тобто невироджена, для всіх значень параметра p з області Ω_p.

Лему доведено.

Лема 2.3. *Нехай матриця $A(p)$ задовольняє умови Припущення 2.3 і область Ω_p така, що виконується співвідношення*

$$\max_{p \in \Omega_p} \|A(p) - A(p^*)\| < \frac{1}{\|A(p)^{-1}\|}. \tag{2.11}$$

Тоді матриця $A(p)$ невироджена для всіх значень параметра p з області Ω_p.

Доведення. Нехай виконуються умови Припущення 2.3 і область Ω_p така, що співвідношення (2.11) має місце. Виберемо довільне значення парамера $\tilde{p}$ з цієї області і представимо матрицю $A(\tilde{p})$ наступним чином: $A(\tilde{p}) = A(p^*)(I + A^{-1}(p^*)(A(\tilde{p}) - A(p^*)))$, де I – одинична матриця відповідної розмірності. Оскільки матриця $A(p^*)$ невироджена, то невиродженість матриці $A(\tilde{p})$ еквівалентна невиродженості матриці $I + A^{-1}(p^*)(A(\tilde{p}) - A(p^*))$, що буде мати місце, якщо виконується співвідношення

$$\|A^{-1}(p^*)(A(\tilde{p}) - A(p^*))\| < 1. \tag{2.12}$$

Так як $\tilde{p} \in \Omega_p$ і тому $\|A^{-1}(p^*)(A(\tilde{p}) - A(p^*))\| \leq$ $\leq \|A^{-1}(p^*)\| \|(A(\tilde{p}) - A(p^*))\| \leq \|A^{-1}(p^*)\| \max_{p \in \Omega_p} \|(A(p) - A(p^*))\| < 1$ згідно (2.11), то співвідношення (2.12) виконується і матриця $A(\tilde{p})$ невироджена. Оскільки $\tilde{p}$ довільне значення параметра з області Ω_p, то матриця $A(p)$

невироджена для всіх значень параметра p з області Ω_p.

Лему доведено.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ 0 = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{2.13}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ – змінні, $r \in \mathbb{R}^k$, $p \in \mathbb{R}^l$ – векторні параметри, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, які неперервно залежать від параметра p, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ нелінійна функція, яка неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^k$ і така, що $\varphi(0) = 0$, $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \neq 0$.

Відносно системи (2.13) зробимо наступне припущення.

Припущення 2.4. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $A_{22}(p)$ і $K_0(p,u) = A_0(p) + q_0(p)\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_u C(p)$, де $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, невироджені в точках $p = p^*$ і $p = p^*$, $u = 0$, відповідно.*

Сформулюємо і доведемо основний результат розділу у вигляді теореми, яка дозволить встановити області $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ і $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq c\}$, для всіх значень параметрів з яких існує єдиний розвязок системи (2.13).

Теорема 2.1. *Нехай система (2.13) задовольняє умовам Припущення 2.4 і для функції $\varphi(u)$ виконується умова*

$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_u - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p 1} (\|q_0(p)\|\|C(p)\|)} \tag{2.14}$$

для всіх $u \in \Omega_u$, *де* $\Omega_u = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \|u\| \leq \max\limits_{p \in \Omega_p 1} \|C(p)\| a + c\}$, c *– довільне додатне число,*

$$a = 2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\| \max_{p \in \Omega_p 1} \|q_0(p)\| \times$$

$$\times \left(\frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p \in \Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p \in \Omega_p 1} (\|q_0(p)\| \|C(p)\|)} + \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \right) c,$$

область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b1\}$ *така, що виконується умова*

$$\max_{p \in \Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \leq \frac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} \tag{2.15}$$

і область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b2\}$ *така, що для всіх* p *з* $\Omega_p 2$ *матриця* $A_{22}(p)$ *невироджена. Тоді для всіх* $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, $\Omega_p = \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$, *існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2.13).*

Доведення. Нехай величина c, яка визначає область Ω_r, це довільне додатне число, область $\Omega_p 1$ визначається згідно співвідношення (2.15), область $\Omega_p 2$ така, що для всіх p з $\Omega_p 2$ матриця $A_{22}(p)$ невироджена, $\Omega_p = \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$, величина a така, як зазначено в умові теореми і виконуються умови Припущення 2.4. Виберемо довільні $(\tilde{p}, \tilde{r})$ з області $\Omega_p \times \Omega_r$ і розглянемо систему (2.13) при цих значеннях параметрів. Оскільки $\tilde{p} \in \Omega_p 2$, то матриця $A_{22}(\tilde{p})$ невироджена. Легко бачити, що розв'язок $(\tilde{x}, \tilde{y})$ системи (2.13), який відповідає значенням параметрів $(\tilde{p}, \tilde{r})$, існує, якщо існує розв'язок рівняння

$$0 = A_0(\tilde{p})\tilde{x} + q_0(\tilde{p})\varphi(\tilde{r} + C(\tilde{p})\tilde{x}), \tag{2.16}$$

при цьому $\tilde{y} = -A_{22}^{-1}(\tilde{p})(A_{21}(\tilde{p})\tilde{x} + q_2(\tilde{p})\varphi(\tilde{r} + C(\tilde{p})\tilde{x}))$.

Так як $\tilde{p} \in \Omega_p 1$, виконуються умови Припущення 2.4 і умова (2.14), то згідно Леми 2.1 для значень параметрів $(\tilde{p}, \tilde{r})$ існує єдиний розвязок рівняння (2.16). Оскільки $(\tilde{p}, \tilde{r})$ довільні значення параметрів з області

$\Omega_p \times \Omega_r$, то для всіх $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2.13).

Теорему доведено.

Зауваження 2.1. *Оскільки, згідно Припущення 2.4, матриця $A_{22}(p^*)$ невироджена і елементи матриці $A_{22}(p)$ неперервно залежать від значень параметра p, то область Ω_p2 завжди існує і може бути визначена згідно співвідношення (2.11) із Леми 2.3. У випадку, коли відомо про стікість матриці $A_{22}(p^*)$, область Ω_p2 може бути визначена згідно співвідношення (2.9) із Леми 2.2. Аналогічно, оскільки при p^* співвідношення (2.15) виконується і елементи матриці $K_0(p, 0)$ неперервно залежать від значень параметра p, то область Ω_p1 завжди існує і може бути визначена згідно співвідношення (2.15). Таким чином, очевидно, область Ω_p завжди існує і $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b\}$, $b = \min\{b1, b2\}$.*

2.3 Достатні умови глобальної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги

В даному розділі, згідно Означення 2.3, досліджено питання глобальної параметричної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги системи диференціальних рівнянь відносно певної області у просторі її параметрів.

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{2.17}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}^k$ – корегуючий вектор, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, що неперервно залежать від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$,

$\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – нелінійна неперервно диференційовна функція така, що $\varphi(0) = 0$, $\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = I$, де I – одинична матриця відповідної розмірності, $\varepsilon \in (0, 1]$ – малий параметр. Вважаємо, що для системи (2.17) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Зауважимо, що система (2.17) має нерухомий стан рівноваги в початку координат для всіх значень параметра p, якщо значення корегуючого вектора рівне 0. Однак, якщо $r \neq 0$, то стан рівноваги стає рухомим через зміну значень параметрів p та r. Властивості стійкості цього стану рівноваги також будуть залежати від вказаних параметрів.

Відносно системи (2.17) зробимо наступне припущення.

Припущення 2.5. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $A_{22}(p)$ і $K_0(p, u) = A_0(p) + q_0(p)\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_u C(p)$, де $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, стійкі в точках $p = p^*$ і $p = p^*$, $u = 0$, відповідно.*

Нехай $Q_s \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $Q_f \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – довільні симетричні додатно визначені матриці, а P_s^* і P_f^* – симетричні додатно визначені матриці, що є, відповідно, розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$K_0^T(p^*, 0)P_s^* + P_s^* K_0(p^*, 0) = -Q_s \text{ і } A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*) = -Q_f,$$

які, згідно умов Припущення 2.5, очевидно, існують. Також позначимо

$$M_0(p, p^*) = (K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0)),$$

$$N(p, p^*) = (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)).$$

Сформулюємо і доведемо основний результат розділу у вигляді теореми, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (2.17) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 2.2. *Нехай відносно системи (2.17) виконуються умови Припущення 2.5 і функція $\varphi(u)$, що входить в систему (2.17), задовольняє наступне обмеження*

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - I\right\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*,0)\|\|(K_0(p^*,0))^{-1}\| \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|)\|C(p)\|} \equiv \alpha \tag{2.18}$$

для всіх $u \in \mathbb{R}^s$, де область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p - p^*\| \leq b1\}$ визначаєтьcя із системи нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*,0)\|\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} + \\ + \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \leq \dfrac{1}{2\|(K_0(p^*))^{-1}\|}, \\ \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_s), \end{cases} \tag{2.19}$$

і область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p - p^*\| \leq b2\}$ *визначаєтьcя з умови*

$$\max_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_f). \tag{2.20}$$

Тоді система (2.17) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^s | \|r\| \leq c\}$, c – довільне додатне число, для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = \dfrac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi}$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi > 0$ і для всіх $0 < \varepsilon \leq 1$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi \leq 0$, де

$$\beta_1 = -\lambda_{\min}(Q_s) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) +$$

$$+2\|P_s^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|),$$

$$\beta_2 = -\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))),$$

$$\gamma_1 = 2\|P_s^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \|A_{12}(p)\|,$$

$$\gamma_2 = 2\|P_f^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \Big(\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_0(p)\|\alpha +$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\|\|C(p)\|\alpha +$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\| + \|C(p)\|\|C(p)q_0(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\alpha^2 +$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)q_0(p)C(p)\|\alpha + \|C(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| +$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\|\Big),$$

$$\xi = \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \Big[\lambda_{\max}\Big(A_{12}^T(p)(A_{21}^T(p) + C^T(p)q_2^T(p))(A_{22}^{-1}(p))^T P_f^* +$$

$$+P_f^* A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p) + q_2(p)C(p))A_{12}(p)\Big)\Big] +$$

$$+2\|P_f^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} (\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_{12}(p)\|).$$

Доведення. Якщо для системи (2.17) виконуються умови Припущення 2.5, то, очевидно, для неї виконуються і умови Припущення 2.4. Також, з (2.18) та (2.19) легко бачити, що для всіх p з області $\Omega_p 1$ виконуються умови (2.14) та (2.15). При виконанні умови (2.20), згідно Леми 2.2, для всіх p з області $\Omega_p 2$ матриця $A_{22}(p)$ невироджена. Таким чином, згідно Теореми 2.1, для всіх $(p, r) \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2.13), тобто єдиний стан рівноваги системи (2.17).

Нехай (p, r) довільні значення параметрів з області $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$ і $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (2.17), що їм відповідає. Розглянемо векторну функцію Ляпунова

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} (x - x^e)^T P_s^*(x - x^e) \\ (y - y^e)^T P_f^*(y - y^e) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

елементи якої – скалярні функції Ляпунова для "повільної" та "швидкої" підсистем – очевидно, додатні для всіх значень змінних окрім рівноважних і оцінимо похідні компонент цієї функції в силу системи (2.17):

$$\frac{dV_s(x)}{dt}\Big|_{(2.17)} = \Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)^T P_s^*(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T P_s^* \Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x)\Big) =$$

$$= \Big(A_0(p)x + q_0(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)^T P_s^*(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T P_s^* \Big(A_0(p)x + q_0(p)\varphi(r + C(p)x)\Big) +$$

$$+ \left(A_{12}(p)y + A_{12}(p)A_{22}^{-1}\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\right)^T P_s^*(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T P_s^* \left(A_{12}(p)y + A_{12}(p)A_{22}^{-1}\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\right). \quad (2.22)$$

Враховуючи, що $A_0(p)x^e + q_0(p)\varphi(r + C(p)x^e) = 0$ і $y^e = -A_{22}^{-1}\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x\Big)$, перепишемо співвідношення (2.22) наступним чином:

$$\frac{dV_s(x)}{dt}\Big|_{(2.17)} = (x - x^e)^T \Big(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}} C(p)\Big)^T P_s^*(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T P_s^* \Big(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}} C(p)\Big)(x - x^e) +$$

$$+ (y - y^e)^T A_{12}^T(p) P_s^*(x - x^e) + (x - x^e)^T P_s^* A_{12}(p)(y - y^e) =$$

$$= (x - x^e)^T \Big(K_0(p^*, 0)^T P_s^* + P_s^* K_0(p^*, 0)\Big)(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T \left(\Big(K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0)\Big)P_s^* + P_s^*\Big(K_0(p, 0) - K_0(p^*, 0)\Big)\right)(x - x^e) +$$

$$+(x-x^e)^T\left(q_0(p)\Big(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde u}-I\Big)C(p)\right)^T P_s^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_s^*\left(q_0(p)\Big(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde u}-I\Big)C(p)\right)^T (x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T A_{12}(p)P_s^*(x-x^e)+(x-x^e)P_s^*A_{12}(p)(y-y^e), \tag{2.23}$$

де $\tilde u$ – деяка точка простору $\mathbb{R}^s$.

Враховуючи що

$$\lambda_{\min}(P_s^*)\|x-x^e\|^2\le V_s(x)\le\lambda_{\max}(P_s^*)\|x-x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_f^*)\|y-y^e\|^2\le V_f(x,y)\le\lambda_{\max}(P_f^*)\|y-y^e\|^2,$$

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde u}-I\right\|\le\alpha,$$

продовжимо оцінку (2.23):

$$\frac{dV_s(x)}{dt}\Big|_{(2.17)}\le\Bigg(-\lambda_{\min}(Q_s)+\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))\Big)+$$

$$+2\|P_s^*\|\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\|q_0(p)\|\|C(p)\|\Big)\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde u}-I\right\|\Bigg)\|x-x^e\|^2+$$

$$+2\|P_s^*\|\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\|A_{12}(p)\|\Big)\|x-x^e\|\|y-y^e\|\le$$

$$\le\Bigg(-\lambda_{\min}(Q_s)+\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))\Big)+$$

$$+2\|P_s^*\|\alpha\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\|q_0(p)\|\|C(p)\|\Big)\Bigg)\frac{V_s(x)}{\lambda_{\min}(P_s^*)}+$$

$$+2\|P_s^*\|\max_{p\in(\Omega_p1\cap\Omega_p2)}\Big(\|A_{12}(p)\|\Big)\frac{V_s^{\frac12}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_s^*)}\frac{V_f^{\frac12}(x,y)}{\lambda_{\min}^{\frac12}(P_f^*)}=$$

$$= \beta_1 \frac{V_s(x)}{\lambda_{\min}(P_s^*)} + \gamma_1 \frac{V_s^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)} \frac{V_f^{\frac{1}{2}}(x,y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)}. \tag{2.24}$$

$$\frac{dV_f(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} = (\dot{y} - \frac{dy^e}{dx}\dot{x})^T P_f^*(y-y^e) + (y-y^e)^T P_f^*(\dot{y} - \frac{dy^e}{dx}\dot{x}) =$$

$$= \Bigg(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p)x + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p)y + \frac{1}{\varepsilon}q_2(p)\varphi(r + C(p)x) +$$

$$+ A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)\Big) \times$$

$$\times\Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\Bigg)^T P_f^*(y-y^e) +$$

$$+ (y-y^e)^T P_f^*\Bigg(\frac{1}{\varepsilon}A_{21}(p)x + \frac{1}{\varepsilon}A_{22}(p)y + \frac{1}{\varepsilon}q_2(p)\varphi(r + C(p)x) +$$

$$+ A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)\Big) \times$$

$$\times\Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Big(A_{22}^T(p)P_f^* + P_f^* A_{22}(p)\Big)(y-y^e) +$$

$$+ \Bigg(A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)\Big) \times$$

$$\times\Big(A_0(p)x + q_0(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\Bigg)^T P_f^*(y-y^e) +$$

$$+ \Bigg(A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)\Big) A_{12}(p)(y-y^e)\Bigg)^T P_f^*(y-y^e) +$$

$$+ (y-y^e)^T P_f^*\Bigg(A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)\Big)\Big(A_0(p)x + q_0(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)\Bigg) +$$

$$+(y-y^e)^T P_f^* \left(A_{22}^{-1}(p) \Big(A_{21}(p) + q_2(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p) \Big) A_{12}(p) \right) (y-y^e) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T \Big(A_{22}^T(p) P_f^* + P_f^* A_{22}(p) \Big) (y-y^e) +$$

$$+(x-x^e)^T \left(A_{22}^{-1}(p) \Big(A_{21}(p) + q_2(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p) \Big) \times \right.$$

$$\left. \times \Big(A_0(p) + q_0(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\approx u} C(p) \Big) \right)^T P_f^* (y-y^e) +$$

$$+(y-y^e)^T P_f^* \left(A_{22}^{-1}(p) \Big(A_{21}(p) + q_2(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p) \Big) \times \right.$$

$$\left. \times \Big(A_0(p) + q_0(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\approx u} C(p) \Big) \right) (x-x^e) +$$

$$+(y-y^e)^T \left(A_{22}^{-1}(p) \Big(A_{21}(p) + q_2(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p) \Big) A_{12}(p) \right)^T P_f^* (y-y^e) +$$

$$+(y-y^e)^T P_f^* \left(A_{22}^{-1}(p) \Big(A_{21}(p) + q_2(p) \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p) \Big) A_{12}(p) \right) (y-y^e) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T \Big(A_{22}^T(p) P_f^* + P_f^* A_{22}(p) \Big) (y-y^e) +$$

$$+(y-y^e)^T \left[\left(A_{22}^{-1}(p) A_{21}(p) A_{12}(p) + A_{22}^{-1}(p) q_2(p) \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - I \right) C(p) A_{12}(p) + \right. \right.$$

$$\left. + A_{22}^{-1}(p) q_2(p) C(p) A_{12}(p) \right)^T P_f^* + P_f^* \left(A_{22}^{-1}(p) A_{21}(p) A_{12}(p) + \right.$$

$$\left. \left. + A_{22}^{-1}(p) q_2(p) \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - I \right) C(p) A_{12}(p) + A_{22}^{-1}(p) q_2(p) C(p) A_{12}(p) \right) \right] (y-y^e) +$$

$$+(x-x^e)^T \left[A_{22}^{-1}(p) A_{21}(p) A_0(p) + A_{22}^{-1}(p) q_2(p) \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\approx u} - I \right) C(p) A_0(p) + \right.$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)+A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$\left.+A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\right]^T P_f^*(y-y^e)+$$

$$+(y-y^e)^T P_f^*\left[A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)A_0(p)+\right.$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)+A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)q_0(p)C(p)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\overset{\approx}{u}}-I\right)C(p)+$$

$$\left.+\,A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)+A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\right](x-x^e), \qquad (2.25)$$

де $\overset{\approx}{u}$ – деяка точка простору $\mathbb{R}^s$.

Враховуючи що

$$\lambda_{\min}(P_s^*)\|x-x^e\|^2 \le V_s(x) \le \lambda_{\max}(P_s^*)\|x-x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_f^*)\|y-y^e\|^2 \le V_f(x,y) \le \lambda_{\max}(P_f^*)\|y-y^e\|^2,$$

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}} - I\right\| \leq \alpha,$$

продовжимо оцінку (2.25):

$$\frac{dV_f(x,z)}{dt}\Big|_{(2.17)} \leq \Bigg(-\frac{1}{\varepsilon}\lambda_{\min}(Q_f) + \frac{1}{\varepsilon}\max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}\Big(\lambda_{\max}(N(p,p^*))\Big)+$$

$$+\Bigg[\max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}\Bigg(\lambda_{\max}\Big[\Big(A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p)+q_2(p)C(p)\Big)A_{12}(p)\Big)^T P_f^* +$$

$$+P_f^*\Big(A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p)+q_2(p)C(p)\Big)A_{12}(p)\Big)\Big]\Bigg)+$$

$$+2\|P_f^*\|\alpha\max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}\Big(\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_{12}(p)\|\Big)\Bigg]\|y-y^e\|^2+$$

$$+2\|P_f^*\|\max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}\Bigg(\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_0(p)\|\alpha+$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\|\|C(p)\|\alpha+$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\| + \|C(p)\|\|C(p)q_0(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\alpha^2+$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)q_0(p)C(p)\|\alpha + \|C(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\|\alpha+$$

$$+\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\|\Bigg)\|x-x^e\|\|y-y^e\| =$$

$$= \Big(\frac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi\Big)\|z-z^e\|^2 + \gamma_2\|x-x^e\|\|z-z^e\| \leq$$

$$\leq \Big(\frac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi\Big)\frac{V_f(x,y)}{\lambda_{\min}(P_f^*)} + \gamma_2\frac{V_s^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)}\frac{V_f^{\frac{1}{2}}(x,y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)}. \tag{2.26}$$

З оцінок (2.24) і (2.26) слідує оцінка похідної векторної функції $V(x,y)$

в силу системи (2.17) відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$:

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} \leq \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)}V_s(x) + \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)}V_s^{\frac{1}{2}}(x)V_f^{\frac{1}{2}}(x,y) \\ \dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_s^*)\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_f^*)}V_s^{\frac{1}{2}}(x)V_f^{\frac{1}{2}}(x,y) + \dfrac{\left(\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi\right)}{\lambda_{\min}(P_f^*)}V_f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Скориставшись нерівністю $-az^2+bz \leq -\dfrac{a}{2}z^2 + \dfrac{b^2}{2a}$, продовжимо оцінку (2.27)

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} \leq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)}V_s(x) + \dfrac{\gamma_1^2}{(-\beta_1)\lambda_{\min}(P_f^*)}V_f(x,y) \\ \dfrac{\gamma_2^2}{\lambda_{\min}(P_s^*)\left(-\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}-\xi\right)}V_s(x) + \dfrac{\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi}{\lambda_{\min}(P_f^*)}V_f(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$= AV(x,y),$$

де

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\beta_1}{\lambda_{\min}(P_s^*)} & \dfrac{\gamma_1^2}{(-\beta_1)\lambda_{\min}(P_f^*)} \\ \dfrac{\gamma_2^2}{\left(-\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}-\xi\right)\lambda_{\min}(P_s^*)} & \dfrac{\dfrac{\beta_2}{\varepsilon}+\xi}{\lambda_{\min}(P_f^*)} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що оскільки виконується оцінка (2.18) і для всіх $p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$, очевидно, справедливі співвідношення (2.19), то $\beta_1 < 0$. Також, оскільки для всіх $p \in (\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$ оцінка (2.20) має місце, то $\beta_2 < 0$. Величини γ_1, γ_2 – додатні.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dU}{dt} = AU, \tag{2.28}$$

де матриця A задана вище, а $U = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$. При виконанні співвідношення

$$\beta_1\Big(\frac{\beta_2}{\varepsilon} + \xi\Big) > \gamma_1\gamma_2 \tag{2.29}$$

функція $f(U) = AU$ задовольняє умову Важевського відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$ і матриця A стійка, тобто система (2.28) є системою порівняння для системи (2.17) і стан рівноваги $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ системи (2.17) для обраних значень параметрів (p, r) є глобально асимптотично стійким. Так як (p, r) довільна точка області $(\Omega_p 1 \cap \Omega_p 2) \times \Omega_r$, то система (2.17) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Нерівність (2.29) виконується для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = \dfrac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi}$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi > 0$ і для всіх $0 < \varepsilon \leq 1$, якщо $\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi \leq 0$.

Теорему доведено.

Приклад 2.1. В якості ілюстрації застосування запропонованої методики, розглянемо модель керування електродвигуном постійного струму (див. [132, 167, 174]).

В нормальних змінних, система диференціальних рівнянь, що являє собою математичну модель механізму, який розглядається, має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = i + \sum\limits_{j=1}^{k} a_j\omega_{1j}(\theta, \omega), \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{T_m}{T_e}(-\omega - i + \xi), \\ \varepsilon\dfrac{d\xi}{dt} = -\xi + gu, \end{cases} \tag{2.30}$$

де θ, ω, i та ξ – координати, що визначають положення двигуна, його кутову швидкість, силу тока в обмотці ротору та напругу, відповідно; u – керування підсилювачем, який характеризиується постійним коефіцієнтом g та параметром ε. Невизначене навантаження на валу представлено у вигляді

$\sum\limits_{j=1}^{k} a_j\omega_{1j}(\theta,\omega)$, де $\omega_{1j}(\theta,\omega)$ деякі нелінійні функції, а a_j – невідомі константи. Для простоти вважатимемо $k=1$, тобто невизначене навантаження на валу – $a_1\omega_{11}(\theta,\omega)$. Виконавши заміну змінних

$$x_1=\theta,\ x_2=\omega,\ x_3=i,\ y=\xi$$

і застосувавши закон керування

$$u=-\frac{1}{bg}[75x_1+(90-3b)x_2+(30-3b)x_3+15a_1\omega_{11}(x_1,x_2)+24by],$$

перетворимо систему (2.30) до загального вигляду (2.17), де

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -b & -b \end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ b \end{pmatrix},\quad q_1(a_1)=\begin{pmatrix} 0\\ a_1\\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} -\frac{75}{b}, & -\big(\frac{90}{b}-3\big), & -\big(\frac{30}{b}-3\big) \end{pmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} -25 \end{pmatrix},\quad q_2(a_1)=\begin{pmatrix} -\frac{15a_1}{b} \end{pmatrix},\quad b=\frac{T_m}{T_e}.$$

Нелінійна функція $\varphi(\sigma)=\omega_{11}(x_1,x_2)$, де $\sigma=r+Cx$, $r\in\mathbb{R}$ – деякий параметр, $C=\begin{pmatrix} 0, & 0.1, & 0 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}^T$. Вважаємо, що

$$\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0}=1.$$

За допомогою запропонованого вище підходу, визначимо множину значень параметра a_1, для кожного значення параметра з якої система буде глобально асимптотично стійкою, побудуємо відповідні функції Ляпунова в явному вигляді і вкажемо граничне значення параметра ε^*.

Визначимо матрицю $K_0(a_1, 0)$ і переконаємося, що система задовольняє умовам Припущення 2.5. Значення параметра a_1^* виберемо рівним 5. Нехай матриця

$$Q_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і $b = 1.5$, тоді

$$P_s^* = \begin{pmatrix} 2.725 & 2.185 & 0.166 \\ 2.185 & 4.890 & 0.982 \\ 0.166 & 0.982 & 0.588 \end{pmatrix}$$

з відповідного алгебраїчного рівняння Ляпунова. Обрахувавши матрицю $M_0(a_1, a_1^*)$, отримаємо область

$$\Omega_{a_1}1 = \{a_1 \in \mathbb{R} \Big| |a_1 - a_1^*| \leq 2.3\}$$

з системи нерівностей (2.19) і величину $\alpha = 0.00335$ із співвідношення (2.18). Для матриці $Q_f = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ визначимо матрицю $P_f^* = \begin{pmatrix} 0.02 \end{pmatrix}$. Оскільки A_{22} не залежить від параметра a_1, то $N(a_1, a_1^*) = 0$ і, відповідно, $\Omega_{a_1}2 = \mathbb{R}$. Обрахуємо $\beta_1 = -0.843$, $\beta_2 = -1$, $\gamma_1 = 19.182$, $\gamma_2 = 0.184$, $\xi = 0.041$ і отримаємо $\varepsilon^* = 0.237$. Таким чином, згідно Теореми 2.2, система (2.30) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $\{a_1 \in \mathbb{R} \Big| |a_1 - 5| \leq 2.3\} \times \{r \in \mathbb{R} \Big| |r| \leq c\}$, де c – довільне додатне число, для всіх $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon^*]$, якщо функція $\varphi(\sigma)$ задовольняє секторній умові

$$\left| \frac{\partial \varphi(\sigma)}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma} - 1 \right| \leq 0.00335.$$

Функція Ляпунова для "виродженої" системи має вигляд

$$V_s(x) = (x - x^e(a_1, r))^T P_s^*(x - x^e(a_1, r)),$$

для "швидкої" –

$$V_f(x, z) = (z - z^e(a_1, r))^T P_f^*(z - z^e(a_1, r)),$$

де $(x^e(a_1, r), z^e(a_1, r))$ – стан рівноваги системи, який відповідає значенням параметрів a_1 та r.

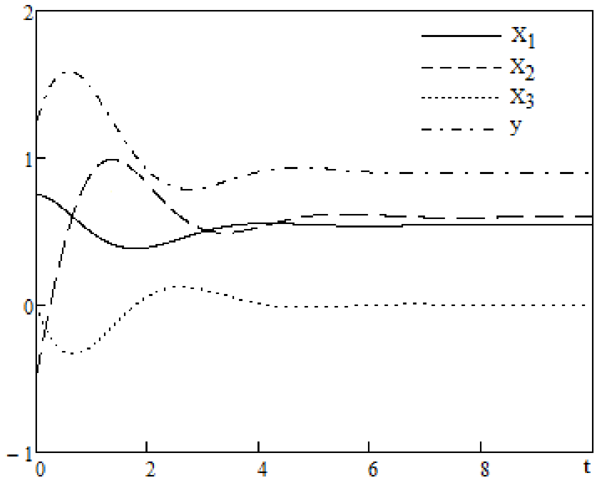


Рис. 2.1 – Поведінка траєкторій системи (2.30)

Вибравши $\varphi(\sigma) = 0.0015 \sin \sigma + 0.9985\sigma$ переконаємось, що ця функція задовольняє отриманим секторним умовам. На Рис. 2.1 представлено поведінку змінних x та y при значеннях параметрів $a_1 = 3$, $r = -2$, $\varepsilon = 0.01$ і початкових значеннях змінних $x_0 = \begin{pmatrix} 0.75, & 0, & -0.5 \end{pmatrix}$, $y_0 = -0.1$.

Стан рівноваги, який відповідає вибраним значенням параметрів – $x^e = \begin{pmatrix} 0.546, & 0, & 0.6 \end{pmatrix}$, $y^e = 0.899$.

2.4 Достатні умови нестійкості рухомого стану рівноваги

В даному розділі досліджується питання параметричної нестійкості рухомого стану рівноваги у контексті Означення 2.4.

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь (2.17), яка введена у підрозділі 2.2. Нехай відносно неї виконуються умови Припущення 2.4. Зауважимо, що система допускає виділення виродженої та швидкої підсистем, які описують повільні та швидкі рухи системи, відповідно.

Розглянемо випадок, коли в точці p^* простору параметрів $\mathbb{R}^l$ кожна з цих підсистем нестійка.

Припущення 2.6. *Існує значення параметра* $p^* \in \mathbb{R}^l$ *таке, що*

1) *матриця* $A_{22}(p^*)$ *нестійка, тобто існує хоча б одне власне значення матриці* $A_{22}(p^*)$*, яке має додатню дійсну частину;*

2) *для всіх* $i, j = 1, \ldots, m$*,* $\lambda_i(A_{22}(p^*)) + \lambda_j(A_{22}(p^*)) \neq 0$*, де* $\lambda_i(\cdot)$ *власні значення відповідної матриці;*

3) *матриця* $K_0(p, u) = A_0(p) + q_0(p)\dfrac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p)$ *нестійка в точці* $p = p^*$*,* $u = 0$ *у вказаному вище сенсі;*

4) $\lambda_i(K_0(p^*, 0)) + \lambda_j(K_0(p^*, 0)) \neq 0$*, для всіх* $i, j = 1, \ldots, n$*.*

Нехай $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, а $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні матриці, які є розв'язками рівнянь

$$(K_0(p^*, 0))^T P_1 + P_1 K_0(p^*, 0) = Q_1, \quad (A_{22}(p^*))^T P_2 + P_2 A_{22}(p^*) = Q_2,$$

причому, згідно теореми оберненій до теореми Ляпунова про нестійкість для лінійних систем (див. [3]), а також умовам Припущення 2.6, матриці P_1 та P_2 існують.

Розглянемо функцію

$$V(x,y) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e) + (y - \phi(x))^T P_2 (y - \phi(x)), \tag{2.31}$$

де $\phi(x) = -A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)$, $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (2.17). Очевидно, що $V(x^e, y^e) = 0$. Сформулюємо і доведемо лему.

Лема 2.4. *В довільному околі $S_1 \times S_2$ точки $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ існує така точка $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$, що $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.*

Доведення. Виберемо S_1 – довільний окіл точки x^e і S_2 – довільний окіл точки $y^e = \phi(x^e)$. Покажемо, що в околі $S_1 \times S_2$ точки $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ існує така точка $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$, що $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Нехай $x = x^e$. Тоді $V(x^e, y) = (y - y^e)^T P_2 (y - y^e)$. Згідно теоремb, оберненій до теореми Ляпунова про нестійкість і виходячи з вибору матриці P_2 можемо заключити, що в довільному околі точки y^e існує така точка, що в ній функція $V(x^e, y)$ додатня. Нехай в околі S_2 це точка $\tilde{z}$, тобто $V(x^e, \tilde{y}) > 0$. Оскільки функція $V(x, \tilde{y})$ неперервна по x, то існує деякий окіл точки x^e такий, що для всіх x з нього $V(x, \tilde{y}) > 0$. Вибрав в якості точки $\tilde{x}$ довільну точку перетину цієї області з областю S_1 остаточно отримаємо, що в довільному околі $S_1 \times S_2$ точки $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ існує точка $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$ така, що $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.

Лему доведено.

Позначимо

$$A(\alpha, P) = \lambda_{\min}(Q_1) + \min_{p \in P}(\lambda_{\min}(M(p,0) - M(p^*,0))) -$$

$$-2\|P_1\| \max_{p \in P}(\|C(p)\| \|q_0(p)\|)\alpha,$$

$$B_1(P) = \lambda_{\min}(Q_2) + \min_{p \in P}(\lambda_{\min}(L_1(p) - L_1(p^*))),$$

$$B_2(\alpha, P) = \lambda_{\min}(L_2(p^*, 0)) -$$

$$-2\|P_2\|\max_{p\in P}\Big(\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)\|\Big]-$$

$$-2\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|\gamma_1(p,\alpha)\Big]\Big),$$

$$C(\alpha,P)=\|N(p^*,0,0)\|+\max_{p\in P}\Big(\|P_1\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+$$

$$+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\|+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)+\|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|\Big]+$$

$$+\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\|+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)\Big]\Big),$$

де

$$M(p,\tilde{\tilde{u}})=Q_1+\Big(K_0(p,0)-K_0(p^*,0)\Big)^TP_1+P_1\Big(K_0(p,0)-K_0(p^*,0)\Big)+$$

$$+(C(p))^T\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)^T(q_0(p))^TP_1+$$

$$+P_1q_0(p)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)C(p),$$

$$L_1(p)=Q_2+\Big(A_{22}(p)-A_{22}(p^*)\Big)^TP_2+P_2\Big(A_{22}(p)-A_{22}(p^*)\Big),$$

$$L_2(p,\tilde{u})=P_2A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)+(A_{12}(p^*))^T(K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^TP_2+$$

$$+P_2\Big(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\Big)\Big[\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)+$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)A_{12}(p^*)+K_1(p^*,0)\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)+$$

$$+K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)\Big]+P_2A_{22}^{-1}(p^*)\Big[\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)+$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)A_{12}(p^*)+K_1(p^*,0)\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)\Bigg]+$$

$$+\Bigg[(A_{12}(p^*))^T\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)^T+\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)^T(K_1(p^*,0))^T+$$

$$+\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)^T\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)^T\Bigg](A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2+$$

$$+\Bigg[(A_{12}(p^*))^T(K_1(p^*,0))^T+\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)^T K_1(p^*,0)+$$

$$+(A_{12}(p^*))^T\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)^T+$$

$$+\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)^T\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)^T\Bigg]\Big(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\Big)^T P_2,$$

$$N(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})=(A_{12}(p^*))^T P_1+P_2A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)+$$

$$+\Big(A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\Big)^T P_1+P_2\Big(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\Big)\times$$

$$\times\Bigg[\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}})-K_0(p^*,0)\Big)+$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0)+$$

$$+K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}})-K_0(p^*,0)\Big)+K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\Bigg]+$$

$$+P_2A_{22}^{-1}(p^*)\Bigg[\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}})-K_0(p^*,0)\Big)+$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u})-K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0)+K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}})-K_0(p^*,0)\Big)\Bigg],$$

$$K_1(p,u)=A_{21}(p)+q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u C(p).$$

Сформулюємо і доведемо лему.

Лемма 2.5 *Нехай функція $\varphi(u)$ така, що для всіх $u \in \mathbb{R}^k$*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \leq \alpha, \ \ \alpha > 0,$$

і значення параметра p вибране з деякої області P, $p^* \in P$. Тоді для похідної функції (2.31) по часу в силу системи (2.17) для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ має місце наступна оцінка знизу:

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} \geq (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|) D(\alpha, P) (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)^T, \quad (2.32)$$

де

$$D(\alpha, P) = \begin{pmatrix} A(\alpha, P) & -C(\alpha, P) \\ -C(\alpha, P) & \dfrac{1}{\varepsilon} B_1(P) + B_2(\alpha, P) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)z + q_1(p)\varphi(u) =$$

$$= \Big(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}} C(p)\Big)(x - x^e) + A_{12}(p)(z - \phi(x))$$

і

$$\dot{y} - \frac{d\phi(x)}{dx}\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} A_{22}(p)(y - \phi(x)) +$$

$$+ A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}} C(p)\Big)\Big(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}} C(p)\Big)(x - x^e) +$$

$$+ A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}} C(p)\Big) A_{12}(p)(y - \phi(x)),$$

де $\tilde{u}$ і $\tilde{\tilde{u}}$ – деякі значення змінної з $\mathbb{R}^k$, отримаємо:

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} = (x - x^e)^T M(p, \tilde{\tilde{u}})(x - x^e) + \frac{1}{\varepsilon}(y - \phi(x))^T L_1(p)(y - \phi(x)) +$$

$$+(y-\phi(x))^T L_2(p,\tilde{u})(y-\phi(x)) + (x-x^e)^T (N(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))^T (y-\phi(x)) +$$

$$+(y-\phi(x))^T N(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x-x^e).$$

Скориставшись оцінками, що отримані в роботі [48],

$$\|K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\| \le \|A_0(p) - A_0(p^*)\| + \beta_0(p,\alpha) = \gamma_0(p,\alpha),$$

$$\|K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\| \le \|A_{21}(p) - A_{21}(p^*)\| + \beta_1(p,\alpha) = \gamma_1(p,\alpha),$$

де

$$\beta_i(p,\alpha) = \alpha\|q_i(p) - q_i(p^*)\|\|C(p) - C(p^*)\| + \alpha\|C(p^*)\|\|q_i(p) - q_i(p^*)\| +$$

$$+\|q_i(p) - q_i(p^*)\| \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \|C(p) - C(p^*)\| +$$

$$+\|q_i(p) - q_i(p^*)\| \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \|C(p^*)\| +$$

$$+\alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p) - C(p^*)\| + \alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p^*)\| +$$

$$+\|q_i(p^*)\| \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \|C(p) - C(p^*)\|, \; i = 0,1$$

і враховуючи, що функція $\varphi(u)$ така, що

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u} - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \alpha, \; \alpha > 0,$$

для всіх $u \in \mathbb{R}^k$, отримаємо оцінку похідної функції (2.31) знизу, якщо значення параметра p вибирається з деякої області $P \subseteq \mathbb{R}^l$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$:

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} \ge A(\alpha,P)\|x - x^e\|^2 +$$

$$+\Big(\frac{1}{\varepsilon}B_1(P) + B_2(\alpha,P)\Big)\|y - \phi(x)\|^2 - 2C(\alpha,P)\|x - x^e\|\|y - \phi(x)\| =$$

$$= (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|) D(\alpha, P) (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)^T.$$

Лему доведено.

Введемо позначення

$$\alpha^* = \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p} \Big(\|q_0(p)\| \|C(p)\|\Big)},$$

$$\alpha_1 = \min\left\{\alpha^*, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) + \min\limits_{p\in\Omega_p 2} \Big(\lambda_{\min}(M(p,0) - M(p^*,0))\Big)}{2\|P_1\| \max\limits_{p\in\Omega_p 2} \Big(\|C(p)\| \|q_0(p)\|\Big)}\right\}$$

і сформулюємо теорему:

Теорема 2.3. *Нехай для системи (2.17) виконуються умови Припущень 2.4, 2.6, функція $\varphi(u)$, при всіх $u \in \mathbb{R}^k$, задовольняє умові*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \alpha < \alpha_1, \tag{2.33}$$

$$\varepsilon \in \begin{cases} \Big(0, \frac{A(\alpha,P)B_1(P)}{C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P)}\Big), \ \textit{якщо}\ C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P) > 0 \\ \textit{і}\ \frac{A(\alpha,P)B_1(P)}{C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P)} < 1; \\ (0,1], \ \textit{якщо}\ C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P) > 0 \\ \textit{і}\ \frac{A(\alpha,P)B_1(P)}{C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P)} \ge 1; \\ (0,1], \ \textit{якщо}\ C^2(\alpha,P) - A(\alpha,P)B_2(\alpha,P) \le 0; \end{cases}$$

область Ω_p визначається з умови (2.15), область $\Omega_p 2$ вибирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_1) + \min_{p\in\Omega_p 2} \Big(\lambda_{\min}(M(p,0) - M(p^*,0))\Big) > 0, \tag{2.34}$$

область $\Omega_p 3$ вибирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_2) + \min_{p \in \Omega_p 3} \Big(\lambda_{\min}(L_1(p) - L_1(p^*)) \Big) > 0, \tag{2.35}$$

область $\Omega_p 1$ визначається згідно Леми 2.3, $P \subseteq \Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2 \cap \Omega_p 3$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b, b \in \mathbb{R}_+\}$. Тоді система (2.17) параметрично нестійка відносно області $P \times \Omega_r$.

Доведення. Згідно Теореми 2.1, якщо система (2.17) задовольняє умовам Припущення 2.4 і для всіх $u \in \mathbb{R}^k$ виконується нерівність (2.33), то для всіх $(p^T, r^T)^T \in (\Omega_p \cap \Omega_p 1) \times \Omega_r$, де Ω_p вибирається з умови (2.15), $\Omega_p 1$ визначається згідно Леми 2.3, а $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b\}$, де b – довільне додатне число, існує єдиний стан рівноваги системи (2.17). Очевидно, що він буде існувати і для всіх $(p^T, r^T)^T \in P \times \Omega_r$. Покажемо, що для всіх значень параметра з цієї області відповідний стан рівноваги буде нестійким.

Нехай $(p^T, r^T)^T \in P \times \Omega_r$ і $((x^e(p,r))^T, (y^e(p,r))^T)^T$ – стан рівноваги системи (2.17), який їм відповідає. Розглянемо скалярну функцію (2.31), для якої, згідно Леми 2.4, в довільному околі стану рівноваги $((x^e(p,r))^T, (y^e(p,r))^T)^T$ існує точка $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$, в якій $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Для похідної функції (2.31) по часу в силу системи (2.17) справедлива оцінка (2.32). Для вибраного у відповідності з умовою (2.33) значення α і, згідно (2.34), (2.35), для всіх $p \in P$, елементи матриці $D(\alpha, P)$, а саме $A(\alpha, P)$ і $B_1(P)$, додатні. Тому, матриця $D(\alpha, P)$ додатно визначена, тобто $\left.\dfrac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(2.17)} > 0$, при всіх $p \in P$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ і ε таких, як зазначено в умові теореми. Отже, згідно теореми Четаєва про нестійкість (див. [21]), система (2.17) нестійка при вибраних значеннях параметрів $(p^T, r^T)^T$. Оскільки, ці значення довільні з області $P \times \Omega_r$, то система (2.17) параметрично нестійка відносно цієї області.

Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли в точці p^* простору параметрів $\mathbb{R}^l$ вироджена підсистема стійка, а швидка – нестійка.

Припущення 2.7. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що*

1) *матриця $A_{22}(p^*)$ нестійка, тобто існує хоча б одне власне значення матриці $A_{22}(p^*)$, яке має додатню дійсну частину;*

2) *для всіх $i, j = 1, \dots, m$, $\lambda_i(A_{22}(p^*)) + \lambda_j(A_{22}(p^*)) \neq 0$, де $\lambda_i(\cdot)$ власні значення відповідної матриці;*

3) *матриця $K_0(p^*, 0)$ стійка, тобто всі власні значення матриці $K_0(p^*, 0)$ мають від'ємні дійсні частини.*

Нехай $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична додатно визначена матриця, яка є розв'язком рівняння

$$(K_0(p^*, 0))^T P_1 + P_1 K_0(p^*, 0) = -Q_1,$$

$P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетрична матриця, яка є розв'язком рівняння

$$(A_{22}(p^*))^T P_2 + P_2 A_{22}(p^*) = Q_2,$$

причому, враховуючи умови Припущення 2.7, згідно теореми оберненій до теореми Ляпунова про стійкість для лінійних систем і теореми оберненій до теореми Ляпунова про нестійкість для лінійних систем (див. [3]), матриці P_1 і P_2, відповідно, існують.

Розглянемо функцію

$$\tilde{V}(x, y) = -(x - x^e)^T P_1 (x - x^e) + (y - \phi(x))^T P_2 (y - \phi(x)), \tag{2.36}$$

де $\phi(x) = -A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)$, $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (2.17). Очевидно, що $\tilde{V}(x^e, y^e) = 0$.

Лемма 2.6. *В довільному околі* $S_1 \times S_2$ *точки* $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ *існує така точка* $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$*, що* $V(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.

Доведення Леми 2.6 аналогічне доведенню Леми 2.4.

Позначимо

$$\tilde{A}(\alpha, P) = \lambda_{\min}(Q_1) + \min_{p \in P}(\lambda_{\min}(\tilde{M}(p,0) - \tilde{M}(p^*,0))) -$$

$$-2\|P_1\| \max_{p \in P}(\|C(p)\| \|q_0(p)\|)\alpha,$$

$$\tilde{C}(\alpha, P) = \|\tilde{N}(p^*,0,0)\| + \max_{p \in P}\Big(\|P_1\| \|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| + \|P_2\| \|A_{22}^{-1}(p) -$$

$$-A_{22}^{-1}(p^*)\| \Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha) +$$

$$\|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|\Big] + \|P_2 A_{22}^{-1}(p^*)\| \Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) +$$

$$+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)\Big]\Big),$$

$$\tilde{L}_1(p) = L_1(p), \quad \tilde{L}_2(p,\tilde{u}) = L_2(p,\tilde{u}),$$

де

$$\tilde{M}(p,\tilde{\tilde{u}}) = Q_1 + \Big(K_0(p^*,0) - K_0(p,0)\Big)^T P_1 + P_1\Big(K_0(p^*,0) - K_0(p,0)\Big) -$$

$$-(C(p))^T \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}} - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right)^T (q_0(p))^T P_1 -$$

$$-P_1 q_0(p) \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}} - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right) C(p),$$

$$\tilde{N}(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) = -(A_{12}(p^*))^T P_1 + P_2 A_{22}^{-1}(p^*) K_1(p^*,0) K_0(p^*,0) +$$

$$+P_2\Big(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\Big)\Big[\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\Big] - \Big(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\Big)^T P_1 +$$

$$+P_2 A_{22}^{-1}(p^*)\Bigg[\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big)\Bigg].$$

Лема 2.7. *Нехай функція $\varphi(u)$ така, що для всіх $u \in \mathbb{R}^k$*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \alpha,\ \ \alpha > 0,$$

і значення параметра p вибирається з деякої області P, $p^* \in P$. Тоді для похідної функції (2.36) по часу в силу системи (2.17) для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ має місце наступна оцінка знизу

$$\frac{d\tilde{V}(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} \ge (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)\tilde{D}(\alpha,P)(\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)^T,$$

де

$$\tilde{D}(\alpha,P) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\alpha,P) & -\tilde{C}(\alpha,P) \\ -\tilde{C}(\alpha,P) & \frac{1}{\varepsilon}B_1(P) + B_2(\alpha,P) \end{pmatrix}.$$

Доведення Леми 2.7 проводиться аналогічно доведенню Леми 2.5 із урахуванням того, що

$$\frac{d\tilde{V}(x,y)}{dt}\Big|_{(1)} = (x - x^e)^T \tilde{M}(p,\tilde{\tilde{u}})(x - x^e) + \frac{1}{\varepsilon}(y - \phi(x))^T \tilde{L}_1(p)(y - \phi(x)) +$$

$$+(y - \phi(x))^T \tilde{L}_2(p,\tilde{u})(y - \phi(x)) + (x - x^e)^T(\tilde{N}(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))^T(y - \phi(x)) +$$

$$+(y - \phi(x))^T \tilde{N}(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x - x^e).$$

Введемо позначення

$$\alpha_2 = \min\left\{\alpha^*, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) + \min\limits_{p\in\Omega_p 2}\Big(\lambda_{\min}(\tilde{M}(p,0) - \tilde{M}(p^*,0))\Big)}{2\|P_1\| \max\limits_{p\in\Omega_p 2}\Big(\|C(p)\|\|q_0(p)\|\Big)}\right\},$$

де α^* визначено перед Теоремою 2.3.

Сформулюємо теорему.

Теорема 2.4. *Нехай для системи (2.17) виконуються умови Припущень 2.4, 2.7, функція $\varphi(u)$, для всіх $u \in \mathbb{R}^k$, задовольняє умову*

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\| \le \alpha < \alpha_2,$$

$$\varepsilon \in \begin{cases} \left(0, \frac{\tilde{A}(\alpha,P)B_1(P)}{\tilde{C}^2(\alpha,P)-\tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P)}\right), \ \textit{якщо}\ \tilde{C}^2(\alpha,P) - \tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P) > 0 \\ \textit{і}\ \frac{\tilde{A}(\alpha,P)B_1(P)}{\tilde{C}^2(\alpha,P)-\tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P)} < 1; \\ (0,1], \ \textit{якщо}\ \tilde{C}^2(\alpha,P) - \tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P) > 0 \\ \textit{і}\ \frac{\tilde{A}(\alpha,P)B_1(P)}{\tilde{C}^2(\alpha,P)-\tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P)} \ge 1; \\ (0,1], \ \textit{якщо}\ \tilde{C}^2(\alpha,P) - \tilde{A}(\alpha,P)B_2(\alpha,P) \le 0, \end{cases}$$

область Ω_p визначається з умови (2.15), область $\Omega_p 2$ обирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_1) + \min_{p\in\Omega_p 2}\Big(\lambda_{\min}(\tilde{M}(p,0) - \tilde{M}(p^*,0))\Big) > 0,$$

область $\Omega_p 3$ обирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_2) + \min_{p\in\Omega_p 3}\Big(\lambda_{\min}(L_1(p) - L_1(p^*))\Big) > 0,$$

область $\Omega_p 1$ визначається згідно Леми 2.3, $P \subseteq \Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2 \cap \Omega_p 3$,

$\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq b\}$, *де* b *– довільне додатне число. Тоді система* (2.17) *параметрично нестійка відносно області* $P \times \Omega_r$.

Доведення Теореми 2.4 аналогічне доведенню Теореми 2.3.

Розглянемо випадок, коли в точці p^* простору параметрів R^l вироджена підсистема нестійка, а швидка – стійка.

Припущення 2.8. *Існує значення параметра* $p^* \in \mathbb{R}^l$ *таке, що*

1) *матрицz* $A_{22}(p^*)$ *стійка, тобто всі власні значення матриці* $A_{22}(p^*)$ *мають від'ємні дійсні частини;*

2) *матриця* $K_0(p^*, 0)$ *нестійка, тобто існує хоча б одне власне значення матриці* $K_0(p^*, 0)$, *яке має додатню дійсну частину;*

3) *для всіх* $i, j = 1, \ldots, m$, $\lambda_i(K_0(p^*, 0)) + \lambda_j(K_0(p^*, 0)) \neq 0$, *де* $\lambda_i(\cdot)$ *власні значення відповідної матриці.*

Нехай $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетрична матриця, якя є розв'язком рівяння

$$(K_0(p^*, 0))^T P_1 + P_1 K_0(p^*, 0) = Q_1,$$

$P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – симетрична додатно визначена матриця, яка є розв'язком рівняння

$$(A_{22}(p^*))^T P_2 + P_2 A_{22}(p^*) = -Q_2,$$

причому, враховуючи умови Припущення 2.8, згідно теореми оберненій до теореми Ляпунова про стійкість для лінійних систем і теореми оберненій до теореми Ляпунова про нестійкість для лінійних систем (див. [3]), матриці P_2 і P_1, відповідно, існують.

Розглянемо функцію

$$\tilde{\tilde{V}}(x, y) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e) - (y - \phi(x))^T P_2 (y - \phi(x)), \tag{2.37}$$

де $\phi(x) = -A_{22}^{-1}(p)\Big(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)\Big)$, $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – стан рівноваги системи (2.17). Очевидно, що $\tilde{\tilde{V}}(x^e, y^e) = 0$.

Лема 2.8. *В довільному околі $S_1 \times S_2$ точки $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ існує така точка $(\tilde{x}^T, \tilde{y}^T)^T$, що $\tilde{\tilde{V}}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.*

Доведення Леми 2.8 аналогічне доведенню Леми 2.4.

Позначимо

$$\tilde{\tilde{B}}_1(P) = \lambda_{\min}(Q_2) + \min_{p\in P}(\lambda_{\min}(\tilde{\tilde{L}}_1(p^*) - \tilde{\tilde{L}}_1(p))),$$

$$\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha, P) = \lambda_{\min}(-L_2(p^*, 0)) -$$
$$-2\|P_2\| \max_{p\in P}\Big(\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| +$$
$$+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)\|\Big] -$$
$$-2\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\| + \|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| +$$
$$+\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\|\gamma_1(p,\alpha)\Big]\Big),$$
$$\tilde{\tilde{C}}(\alpha, P) = \|\tilde{\tilde{N}}(p^*, 0, 0)\| + \max_{p\in P}\Big(\|P_1\|\|A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\| +$$
$$+\|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) +$$
$$+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha) + \|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|\Big] +$$
$$+\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha) + \gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\| + \|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)\Big]\Big),$$
$$\tilde{\tilde{M}}(p, \tilde{\tilde{u}}) = M(p, \tilde{\tilde{u}}), \quad \tilde{\tilde{L}}_2(p, \tilde{u}) = -L_2(p, \tilde{u}),$$

де

$$\tilde{\tilde{L}}_1(p) = Q_2 + \Big(A_{22}(p^*) - A_{22}(p)\Big)^T P_2 + P_2\Big(A_{22}(p^*) - A_{22}(p)\Big),$$

$$\tilde{\tilde{N}}(p, \tilde{u}, \tilde{\tilde{u}}) = (A_{12}(p^*))^T P_1 -$$

$$-P_2 A_{22}^{-1}(p^*) K_1(p^*,0) K_0(p^*,0) + \Big(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)\Big)^T P_1 -$$

$$-P_2\Big(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\Big)\Bigg[\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\Bigg] - P_2 A_{22}^{-1}(p^*)\Bigg[\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big) +$$

$$+\Big(K_1(p,\tilde{u}) - K_1(p^*,0)\Big)K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)\Big(K_0(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_0(p^*,0)\Big)\Bigg].$$

Лемма 2.9. *Нехай функція $\varphi(u)$ така, що для всіх $u \in \mathbb{R}^k$*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \alpha, \ \ \alpha > 0,$$

і значення параметра p вибирається з деякої області P, $p^* \in P$. Тоді для похідної функції (2.37) по часу в силу системи (2.17) для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ має місце наступна оцінка знизу

$$\frac{d\tilde{\tilde{V}}(x,z)}{dt}\Big|_{(2.17)} \ge (\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)\tilde{\tilde{D}}(\alpha,P)(\|x - x^e\|, \|y - \phi(x)\|)^T,$$

де

$$\tilde{\tilde{D}}(\alpha,P) = \begin{pmatrix} A(\alpha,P) & -\tilde{\tilde{C}}(\alpha,P) \\ -\tilde{\tilde{C}}(\alpha,P) & \dfrac{1}{\varepsilon}\tilde{\tilde{B}}_1(P) + \tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P) \end{pmatrix}.$$

Доведення Леми 2.9 проводиться аналогічно доведенню Леми 2.5 з урахуванням того, що

$$\frac{d\tilde{\tilde{V}}(x,y)}{dt}\Big|_{(2.17)} = (x - x^e)^T \tilde{\tilde{M}}(p,\tilde{\tilde{u}})(x - x^e) + \frac{1}{\varepsilon}(y - \phi(x))^T \tilde{\tilde{L}}_1(p)(y - \phi(x)) +$$

$$+(y-\phi(x))^T\tilde{\tilde{L}}_2(p,\tilde{u})(y-\phi(x))+(x-x^e)^T(\tilde{\tilde{N}}(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))^T(y-\phi(x))+$$

$$+(y-\phi(x))^T\tilde{\tilde{N}}(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x-x^e),$$

Сформулюємо Теорему 3.

Теорема 2.5. *Нехай для системи (2.17) виконуються умови Припущень 2.4, 2.8, функція $\varphi(u)$, для всіх $u \in \mathbb{R}^k$, задовольняє умову*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le \alpha < \alpha_1,$$

$$\varepsilon \in \begin{cases} \left(0, \frac{A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_1(P)}{\tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P)}\right), \text{ якщо } \tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P)>0 \\ \text{і } \frac{A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_1(P)}{\tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P)} < 1; \\ (0,1], \text{ якщо } \tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P)>0 \\ \text{і } \frac{A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_1(P)}{\tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P)} \ge 1; \\ (0,1], \text{ якщо } \tilde{\tilde{C}}^2(\alpha,P)-A(\alpha,P)\tilde{\tilde{B}}_2(\alpha,P) \le 0; \end{cases}$$

область Ω_p визначається з умови (2.15), область Ω_p2 вибирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_1)+\min_{p\in\Omega_p2}\Big(\lambda_{\min}(M(p,0)-M(p^*,0))\Big)>0,$$

область Ω_p3 вибирається із урахуванням нерівності

$$\lambda_{\min}(Q_2)+\min_{p\in\Omega_p3}\Big(\lambda_{\min}(\tilde{\tilde{L}}_1(p)-\tilde{\tilde{L}}_1(p^*))\Big)>0,$$

область Ω_p1 визначається згідно Леми 2.3, $P \subseteq \Omega_p \cap \Omega_p1 \cap \Omega_p2 \cap \Omega_p3$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \le b\}$, де b – довільне додатне число. Тоді система (2.17) параметрично нестійка відносно області $P \times \Omega_r$.

Доведення Теореми 2.5 аналогічне доведенню Теореми 2.3.

Зауваження 2.2. *Так як в точці p^* відповідні нерівності виконуються і функції, що входять до складу цих нерівностей неперервні, то області Ω_p, $\Omega_p 1$, $\Omega_p 2$, $\Omega_p 3$ в Теоремі 1, Теоремі 2 і Теоремі 3 існують.*

Приклад 2.2. В якості першого прикладу застосування запропонованої методики, розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду (2.17), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$, $r \in \mathbb{R}^1$, $C(p) = \begin{pmatrix} 82, & p^2 \end{pmatrix}$,

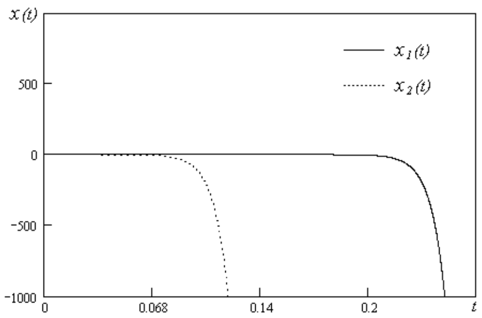
$$A_{11}(p) \begin{pmatrix} -2.3 + p^2 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01p^3 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 2.5 - p^5 & 0 \\ \sin(p) & -20 \end{pmatrix}, \quad A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \tan^3(p) & 0.35 \end{pmatrix},$$

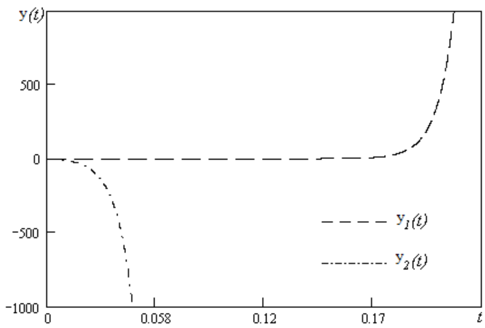
$$q_1(p) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01p \end{pmatrix}, \quad q_2(p) = \begin{pmatrix} -0.35 + 0,1p^4 \\ \sin^2(p) \end{pmatrix}.$$

Згідно Теореми 2.3, можемо зробити висновок, що система диференціальних рівнянь, яка розглядається, параметрично нестійка відносно області $P \times \Omega_r$, де $P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0.01\}$, для всіх функцій $\varphi(u)$, які задовольняють умові $\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \leq 0.07$, для всіх $u \in \mathbb{R}^1$, при всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.0038]$.

Вибравши $\varphi(u) = -0.035\sin(u) + 1.035u$ переконаємося, що дана функція задовольняє отриманим секторним умовам. На Рис. 2.2 представлені графіки, які ілюструють поведінку змінних $x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи диференціальних рівнянь, що наведена вище, при $p = 0.009$, $\varepsilon = 0.003$, $r = -25$, $x_0^T = (0.5,\ 0.1)$, $y_0^T = (0,\ 0.1)$.



а)



б)

Рис. 2.2 – Поведінка змінних. Приклад 2.2

Приклад 2.3. В якості другого прикладу розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду (2.17), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$, $r \in \mathbb{R}^1$, $C(p) = \begin{pmatrix} 82, & p^2 \end{pmatrix}$,

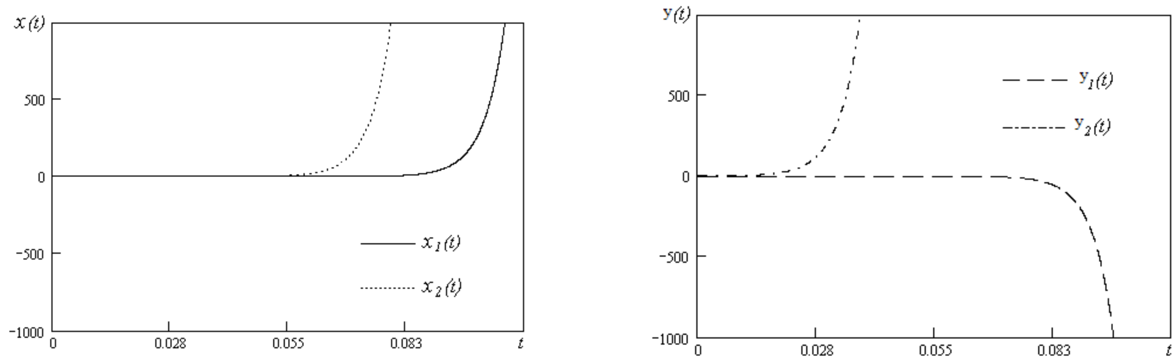
$$A_{11}(p)\begin{pmatrix} -2.3+p^2 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01p^3 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 2.5-p^5 & 0 \\ \sin(p) & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \tan^3(p) & 5 \end{pmatrix},$$

$$q_1(p) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01p \end{pmatrix}, \quad q_2(p) = \begin{pmatrix} -0.35+0.1p^4 \\ \sin^2(p) \end{pmatrix}.$$

Згідно Теореми 2.4, можемо зробити висновок, що система диференціальних рівнянь вигляду (2.17), яка досліджується, параметрично нестійка відносно області $P \times \Omega_r$, де $P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \le 0.3\}$, для всіх функцій $\varphi(u)$, які задовольняють умову $\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le 1.12$, для всіх $u \in \mathbb{R}^1$, при всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.0249]$.

Вибравши $\varphi(u) = -0.56\sin(u) + 1.56u$ переконаємось, що дана функція задовольняє отриманим секторним умовам. На Рис. 2.3 представлені графіки, які ілюструють поведінку змінних $x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи диференціальних рівнянь, що наведена вище, при $p = 0.25$, $\varepsilon = 0.024$, $r = -25$, $x_0^T = (0.5,\ 0.1)$, $y_0^T = (0,\ 0.1)$.



а) б)

Рис. 2.3 – Поведінка змінних. Приклад 2.3

Приклад 2.4. В якості третього прикладу розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду (2.17), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$, $r \in \mathbb{R}^1$, $C(p) = \begin{pmatrix} 82, & p^2 \end{pmatrix}$,

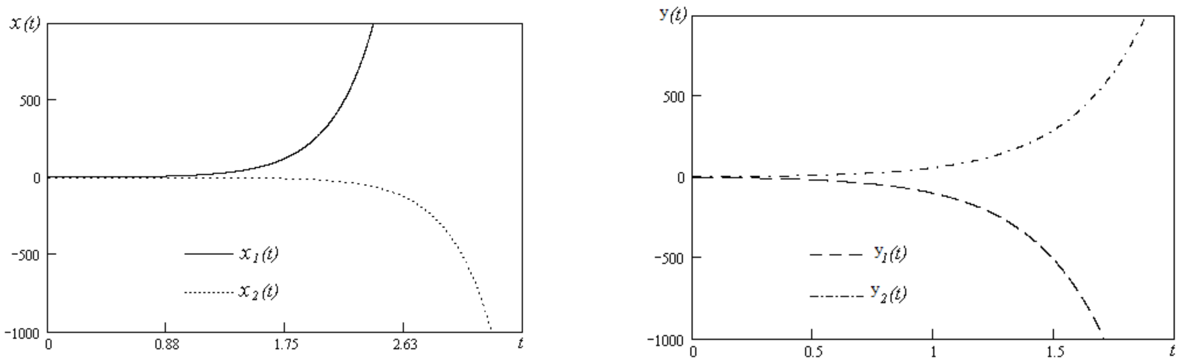
$$A_{11}(p) \begin{pmatrix} 2.3 + p^2 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01p^3 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 2.5 - p^5 & 0 \\ \sin(p) & -2 \end{pmatrix}, A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \tan^3(p) & -5 \end{pmatrix},$$

$$q_1(p) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01p \end{pmatrix}, \quad q_2(p) = \begin{pmatrix} -0.35 + 0.1p^4 \\ \sin^2(p) \end{pmatrix}.$$

Згідно Теореми 2.5, можемо зробити висновок, що система диференціальних рівнянь вигляду (2.17), яка досліджується, параметрично нестійка відносно області $P \times \Omega_r$, де $P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0.65\}$, для всіх функцій $\varphi(u)$, які задовольняють умову $\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \leq 0.22$, для всіх $u \in \mathbb{R}^1$, при всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.014]$.

Вибравши $\varphi(u) = -0.11\sin(u) + 1.11u$ переконаємось, що дана функція задовольняє отриманим секторним умовам. На Рис. 2.4 представлені графіки, які илюструють поведінку змінних $x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи диференціальних рівнянь, що наведена вище, при $p = 0.6$, $\varepsilon = 0.013$, $r = -25$, $x_0^T = (0.5,\ -0.5)$, $y_0^T = (0,\ -0.1)$.



а) б)

Рис. 2.4 – Поведінка змінних. Приклад 2.4

2.5 Результати та висновки

В розділі 2 досліджено динаміку неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

Запропоновано підхід, який дає можливість оцінити область у просторі параметрів системи, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується. Причому, відповідні оцінки областей і оцінки на нелінійності, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому відомому значенні параметра, що є суттєвою перевагою у порівнянні із відомими результатами (див. [174]).

Використання методу порівняння з двокомпонентною функцією Ляпунова дозволяє отримати достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості систем вказаного класу. На відміну від робіт [167, 174], де область у просторі параметрів, відносно якої встановлюється параметрична стійкість, вважається відомою, тут вона визначається безпосередньо. Також, в явному вигляді отримано функції Ляпунова для "швидкої" та "виродженої" підсистем, що дозволяє обрахувати верхню границю інтервалу зміни параметра, який визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів простіше, ніж у вказаних роботах.

Вперше встановлено достатні умови параметричної нестійкості систем вказаного класу. Показано, що для такого типу нестійкості достатньо щоб у відомій точці простору параметрів хоча б одна з підсистем ("вироджена" чи "швидка") була нестійкою. Таким чином, для неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які допускають виділення "виродженої" та "швидкої" підсистем, при кожному наборі "стійкості-нестійкості" вказаних підсистем є можливість робити висновок про динаміку початкової системи.

Основні результати цього розділу викладено в роботах [48, 50, 81].

Розділ 3

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ НЕТОЧНИХ РІЗНОТЕМПОВИХ СИСТЕМ ТИПУ ЛУР'Є–ПОСТНІКОВА У ВИПАДКУ НЕМОЖЛИВОСТІ ВИДІЛЕННЯ "ШВИДКОЇ" ТА "ВИРОДЖЕНОЇ" ПІДСИСТЕМ АБО ВІДСУТНОСТІ ПОТРІБНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ЇХ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Даний розділ присвячено розвитку методу функцій Ляпунова для дослідження динамічних властивостей неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова, які не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем через те, що неможливо аналітично розв'язати відповідні алгебраїчні рівняння, а також неточних різнотемпових систем типу Лур'є–Постнікова спеціального вигляду, які допускають виділення вказаних підсистем, але через відсутність у них потрібних динамічних властивостей не дозволяють побудувати векторну функцію Ляпунова способом, який був запропонований у розділі 2. Зазначимо, що до систем, які розглядаються в даному розділі, не можна застосувати і відомі результати Тихонова (див. [9, 69]), тому розвиток методу функцій Ляпунова, який дозволяє встановити характер поведінки розв'язків систем таких класів, є актуальною та важливою задачею.

В підрозділі 3.1 для систем вказаних типів запропоновано спосіб оцінки області у просторі параметрів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги таких систем. Застосувати напряму результати підрозділу 2.2 не вдається, адже неможливо отримати в явному вигляді потрібний для дослідження ітераційний процес. Але перетворення початкової алгебраїчної системи і використання результатів для блочних та блочно-діагональних матриць дає можливість звести поставлену задачу до вже вірішеної у підрозділі 2.2 і отримати бажані оцінки області існування єдиного стану рівноваги у просторі параметрів початкової системи.

Підрозділ 3.2 присвячений способам побудови функції Ляпунова, яка дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи типу Лур'є–Постнікова відносно певної області в просторі її параметрів у випадку, коли початкова система не допускає виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем.

У пункті 3.2.1 розглянуто випадок, коли існує деяке значення параметра, при якому лінійні наближення підсистем початкової системи стійкі. Побудовано векторну функцію Ляпунова, методом порівняння із якою отримано достатні умови бажаного характеру стійкості початкової системи відносно певної області в просторі її параметрів.

У пункті 3.2.2 наведено спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова, яка дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи відносно певної області в просторі її параметрів у випадку, коли не виконується умова, наведена в пункті 3.2.1.

В підрозділі 3.3 розглядається система типу Лур'є–Постнікова спеціального типу, яка дозволяє виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, проте для побудови векторної функції Ляпунова бракує даних про стійкість цих підсистем при деякому значенні параметра. Використання матричнозначної функції Ляпунова дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості відносно певної області в просторі її параметрів.

3.1 Методика оцінки області існування єдиного стану рівноваги системи диференціальних рівнянь в просторі її параметрів

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1), \\ 0 = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)f_2(\sigma_2), \end{cases} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ – змінні, $r_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $r_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, $p \in \mathbb{R}^l$ – векторні параметри, $\sigma_1 = c_{11}(p)x + c_{12}(p)y + r_1$, $\sigma_2 = c_{21}(p)x + c_{22}(p)y + r_2$, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k_1}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k_2}$, $c_{11}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times n}$, $c_{12}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times m}$, $c_{21}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times n}$, $c_{22}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times m}$ мають елементи, які неперервно залежать від p, $f_1 : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_2}$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні, відповідно, на $\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbb{R}^{k_2}$ і такі, що $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\left.\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \neq 0$, $\left.\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} \neq 0$.

Введемо позначення:

$$D_{ij}(p) = A_{ij}(p) + q_i(p)\left.\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0} c_{ij}(p),\ i,j = 1,2,$$

$$D(p) = D_{11}(p) - D_{12}(p)D_{22}^{-1}(p)D_{21}(p)$$

і зробимо відносно системи рівнянь (3.1) наступне припущення.

Припущення 3.1. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $D_{22}(p)$ і $D(p)$ невироджені в точці $p = p^*$.*

Нехай

$$K(p,u) = A(p) + q(p)\left.\frac{df(u)}{du}\right|_u C(p),$$

де $u = (\sigma_1^T, \sigma_2^T)^T$, $f : \mathbb{R}^{k_1+k_2} \to R^{k_1+k_2}$, $f = (f_1^T, f_2^T)^T$,

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ \\ A_{21}(p) & A_{22}(p) \end{pmatrix}, \ q(p) = \begin{pmatrix} q_1(p) & 0 \\ \\ 0 & q_2(p) \end{pmatrix},$$

$$C(p) = \begin{pmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка дозволить встановити області $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$, $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^k \mid \|r_1\| \leq c_1\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^k \mid \|r_2\| \leq c_2\}$ для всіх значень параметрів з яких існує єдиний розвязок системи рівнянь (3.1).

Теорема 3.1. *Нехай система рівнянь (3.1) задовольняє умовам Припущення 3.1 і для функцій $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ виконуються умови*

$$\left\| \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)} \tag{3.2}$$

для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$,

$$\left\| \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)} \tag{3.3}$$

для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, де область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ така, що виконується умова

$$\max_{p\in\Omega_p} \|K(p,0) - K(p^*,0)\| \leq \frac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|}, \tag{3.4}$$

область $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^k \mid \|r_1\| \leq c_1\}$, *область* $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^k \mid \|r_2\| \leq c_2\}$, *де* c_1 *і* c_2 *– довільні додатні числа. Тоді для всіх* $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, *існує єдиний розв'язок системи рівнянь (3.1).*

Доведення. Представимо систему рівнянь (3.1) у вигляді

$$A(p)z + q(p)f(C(p)z + r) = 0, \tag{3.5}$$

де $z = (x^T, y^T)^T$, $r = (r_1^T, r_2^T)^T$, $f : \mathbb{R}^{k_1+k_2} \to R^{k_1+k_2}$, $f = (f_1^T, f_2^T)^T$,

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p) \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \; q(p) = \begin{pmatrix} q_1(p) & 0 \\ 0 & q_2(p) \end{pmatrix},$$

$$C(p) = \begin{pmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

Тоді, очевидно, розвязок системи рівнянь (3.1) існує, якщо існує розв'язок рівняння (3.5). Оскільки матриця $\left(\frac{df(u)}{du}\Big|_u - \frac{df(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)$, де $u = (\sigma_1^T, \sigma_2^T)^T$, блочно-діагональна, то

$$\left\|\frac{df(u)}{du}\Big|_u - \frac{df(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\| =$$

$$= \max\left\{\left\|\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0}\right\|, \left\|\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\right\|\right\}.$$

Крім того, використовуючи формулу визначника блочної матриці (див. [76]), легко бачити, що при виконанні умов Припущення 3.1, виконується умова Припущення 2.1. Таким чином, при виконанні умов Теореми 3.1 виконуються всі умови Леми 2.1 для рівняння (3.5) і для всіх $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, де $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^{k_1+k_2} \mid \|r\| \leq c\}$, c – довільне додатне число, існує єдиний розв'язок рівняння (3.5), а отже і системи рівнянь (3.1). Завершує доведення теореми той факт, що $\|r\| = \sqrt{r_1^2 + \ldots + r_{k_1}^2 + r_{k_1+1}^2 + \ldots + r_{k_2}^2} = \sqrt{\|r_1\|^2 + \|r_2\|^2} \leq \|r_1\| + \|r_2\|$, тобто умова $\|r\| \leq c$ виконується, якщо виконуються умови $\|r_1\| \leq \frac{c}{2} = c_1$ і $\|r_2\| \leq \frac{c}{2} = c_2$, тобто $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} \subset \Omega_r$.

Теорему доведено.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x + \varepsilon A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ 0 = A_{21}(p)x + \varepsilon A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{3.6}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ – змінні, $r \in \mathbb{R}^k$, $p \in \mathbb{R}^l$ – векторні параметри, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, які неперервно залежать від p, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – нелінійна функція, яка неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^k$ і така, що $\varphi(0) = 0$, $\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \neq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Сформулюємо і доведемо теорему, яка дозволить встановити області $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ і $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \leq c\}$, для всіх значень параметрів з яких існує єдиний розвязок системи рівнянь (3.6).

Теорема 3.2. *Нехай система рівнянь (3.6) задовольняє умовам Припущення 2.4 і для функції $\varphi(u)$ виконується умова*

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \leq \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)}$$

для всіх $u \in \Omega_u$, де $\Omega_u = \{u \in \mathbb{R}^k \mid \|u\| \leq \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|C(p)\|a + c\}$, c – довільне додатне число,

$$a = 2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\| \max_{p\in\Omega_p 1} \|q_0(p)\| \times$$

$$\times \left(\frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)} + \left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \right) c,$$

область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b1\}$ *така, що виконується умова*

$$\max_{p\in\Omega_p 1} \|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\| \le \frac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|}$$

і область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b2\}$ *така, що для всіх* p *з* $\Omega_p 2$ *матриця* $A_{22}(p)$ *невироджена. Тоді для всіх* $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, $\Omega_p = \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \le c\}$, $c > 0$, *існує єдиний розв'язок системи рівнянь (3.6).*

Доведення Теореми 3.2 повторює доведення Теореми 2.1 із єдиною відмінністю в тому, що розв'язок $\tilde{y}$ системи (3.6), який відповідає значенням параметрів $(\tilde{p}, \tilde{r})$, має вигляд $\tilde{y} = -\dfrac{1}{\varepsilon} A_{22}^{-1}(\tilde{p})(A_{21}(\tilde{p})\tilde{x} + q_2(\tilde{p})\varphi(\tilde{r} + C(\tilde{p})\tilde{x}))$.

3.2 Способи побудови функції Ляпунова і достатні умови глобальної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги у випадку неможливості явного виділення «швидкої» та «виродженої» підсистем

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)f_2(\sigma_2), \end{cases} \tag{3.7}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $r_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $r_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ – корегуючі вектори, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k_1}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k_2}$, $c_{11}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times n}$, $c_{12}(p) \in \mathbb{R}^{k_1\times m}$, $c_{21}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times n}$, $c_{22}(p) \in \mathbb{R}^{k_2\times m}$

мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\sigma_1 = c_{11}(p)x + c_{12}(p)y + r_1$, $\sigma_2 = c_{21}(p)x + c_{22}(p)y + r_2$, $f_1 : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_2}$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні, відповідно, на $\mathbb{R}^{k_1}$, $\mathbb{R}^{k_2}$ і такі, що $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} = I^{k_1\times k_1}$, $\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} = I^{k_2\times k_2}$, де $I^{k_1\times k_1}$ і $I^{k_2\times k_2}$ – одиничні матриці відповідних розмірностей, $\varepsilon \in (0,1]$. Вважаємо, що для системи (3.7) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Зауважимо, що система (3.7) має нерухомий стан рівноваги в початку координат для всіх значень параметра p, якщо корегуючі вектори рівні 0. Однак, якщо це не так, то стан рівноваги стає рухомим через зміну значень параметрів p та r_1, r_2. Властивості стійкості цього стану рівноваги також будуть залежати від вказаних параметрів. Крім того, застосувати для дослідження стійкості рухомого стану рівноваги результати розділу 2 не вдасться, оскільки виділити "вироджену" та "швидку" підсистеми початкової системи запропонованим в розділі 2 чином не можна.

3.2.1 Використання векторної функції Ляпунова

Відносно системи (3.7) зробимо наступне припущення.

Припущення 3.2. *Існує значення параметра $p^* \in \mathbb{R}^l$ таке, що матриці $D_{11}(p)$ і $D_{22}(p)$ стійкі, а матриця $D(p)$ невироджена в точці $p = p^*$.*

Нехай $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – довільні симетричні додатно визначені матриці, а P_1^* і P_2^* – симетричні додатно визначені матриці, що є, відповідно, розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$D_{11}^T(p^*)P_1^* + P_1^*D_{11}(p^*) = -Q_1 \text{ і } D_{22}^T(p^*)P_2^* + P_2^*D_{22}(p^*) = -Q_2,$$

які, згідно умов Припущення 3.2, очевидно, існують. Також позначимо

$$M_1(p,p^*) = (D_{11}(p) - D_{11}(p^*))^T P_1^* + P_1^*(D_{11}(p) - D_{11}(p^*)),$$

$$M_2(p,p^*) = (D_{22}(p) - D_{22}(p^*))^T P_2^* + P_2^*(D_{22}(p) - D_{22}(p^*)),$$

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)},$$

де $K(p,u)$, $q(p)$ та $C(p)$ введені перед Теоремою 3.1.

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (3.7) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 3.3. *Нехай відносно системи (3.7) виконуються умови Припущення 3.2 і функції $f_1(\sigma_1)$ та $f_2(\sigma_2)$, що входять в систему (3.7), задовольняють наступним обмеженням:*

$$\left\| \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \right\| \le \beta_1 <$$

$$< \min\left\{\alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*)))}{2\|P_1^*\| \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_1(p)\|\|c_{11}(p)\|)}\right\} \tag{3.8}$$

для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, де область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b_1\}$ визначається з умови

$$\max_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_1); \tag{3.9}$$

$$\left\| \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} \right\| \le \beta_2 <$$

$$< \min\left\{\alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_2) - \max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(M_2(p,p^*)))}{2\|P_2^*\| \max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|)}\right\} \tag{3.10}$$

для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$*, де область* $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b_2\}$ *визначається з умови*

$$\max_{p \in \Omega_p 2} (\lambda_{\max}(M_2(p, p^*))) < \lambda_{\min}(Q_2), \tag{3.11}$$

область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leq b\}$ *визначається з умови (3.4),* $\beta_1 \in \mathbb{R}_+$*,* $\beta_2 \in \mathbb{R}_+$ *і для всіх* $p \in P \subseteq (\Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2)$ *виконується умова*

$$\delta_1 \delta_2 < \gamma_1 \gamma_2, \tag{3.12}$$

де

$$\gamma_1 = -\lambda_{\min}(Q_1) + \lambda_{\max}(M_1(p, p^*)) + 2\|P_1^*\|\|q_1(p)\|\|c_{11}(p)\|\beta_1,$$

$$\gamma_2 = -\lambda_{\min}(Q_2) + \lambda_{\max}(M_2(p, p^*)) + 2\|P_2^*\|\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2,$$

$$\delta_1 = 2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(p) + q_1(p)c_{12}(p)\| + \|q_1(p)\|\|c_{12}(p)\|\beta_1\Big),$$

$$\delta_2 = 2\|P_2^*\|\Big(\|A_{21}(p) + q_2(p)c_{21}(p)\| + \|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2\Big).$$

Тоді система (3.7) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$*, де* $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^{k_1} \mid \|r_1\| \leq c_1\}$*,*
$\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^{k_2} \mid \|r_2\| \leq c_2\}$*, де* c_1 *і* c_2 *– довільні додатні числа, для всіх* $\varepsilon \in (0, 1]$.

Доведення. При виконанні умов Теореми 3.3, для системи (3.1), з якої визначається стан рівноваги системи (3.7), виконуються всі умови Теореми 3.1. Отже, для всіх $(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де Ω_p визначається з умови (3.4), а Ω_{r_1} і Ω_{r_2} такі, як в умові теореми, існує єдиний стан рівноваги системи рівнянь (3.7). Очевидно, що він існує і для всіх $(p, r_1, r_2) \in P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$. Покажемо, що для всіх значень параметрів з цієї області вказаний стан рівноваги буде глобально асимптотично стійким.

Нехай (p, r_1, r_2) – довільні значення параметрів з області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$ і $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – відповідний їм стан рівноваги системи рівнянь (3.7).

Розглянемо векторну функцію $V(x,y) = (v_1(x), v_2(y))^T$, де
$v_1(x) = (x - x^e)^T P_1^*(x - x^e) > 0$, для всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^e\}$,
$v_2(y) = (y - y^e)^T P_2^*(y - y^e) > 0$, для всіх $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{y^e\}$. Оцінимо похідні компонент функції $V(x,y)$ по часу в силу системи (3.7).

Для першої компоненти маємо:

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(3.7)} = \Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1)\Big)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+(x - x^e)^T P_1^*\Big(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1)\Big) =$$

$$= (x - x^e)^T \left[\left(A_{11}(p) + q_1(p)\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} c_{11}(p)\right)^T P_1^* + \right.$$

$$\left. +P_1^* \left(A_{11}(p) + q_1(p)\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} c_{11}(p)\right) \right](x - x^e) +$$

$$+(y - y^e)^T \left(A_{12}(p) + q_1(p)\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} c_{12}(p)\right)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+ (x - x^e)^T P_1^* \left(A_{12}(p) + q_1(p)\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} c_{12}(p)\right)(y - y^e), \tag{3.13}$$

де $\tilde{\sigma}_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ – деяка точка відповідного простору. Було використано, що

$$A_{11}(p)x^e + A_{12}(p)y^e + q_1(p)f_1(c_{11}(p)x^e + c_{12}(p)y^e + r_1) = 0$$

і формула скінченних приростів Лагранжа. З (3.13) отримаємо

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(3.7)} = (x - x^e)\Big[(D_{11}(p^*))^T P_1^* + P_1^* D_{11}(p^*) +$$

$$+\Big(D_{11}(p) - D_{11}(p^*)\Big)^T P_1^* + P_1^*\Big(D_{11}(p) - D_{11}(p^*)\Big)\Big](x - x^e) +$$

$$+(x - x^e)^T \left(q_1(p)\Big(\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0}\Big)c_{11}(p)\right)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+(x-x^e)^T P_1^* \left(q_1(p) \Big(\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \Big) c_{11}(p) \right) (x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T \Bigg(A_{12}(p) + q_1(p) I^{k_1\times k_1} c_{12}(p)+$$

$$+q_1(p)\Big(\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \Big) c_{12}(p) \Bigg)^T P_1^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_1^* \Bigg(A_{12}(p) + q_1(p) I^{k_1\times k_1} c_{12}(p)+$$

$$+q_1(p)\Big(\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \Big) c_{12}(p) \Bigg) (y-y^e) \le$$

$$\le \Bigg(-\lambda_{\min}(Q_1) + \lambda_{\max}(M_1(p,p^*))+$$

$$+2\|P_1^*\| \|q_1(p)\| \|c_{11}(p)\| \left\| \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - I^{k_1\times k_1} \right\| \Bigg) \|x-x^e\|^2+$$

$$+2\|P_1^*\| \Bigg(\|A_{12}(p) + q_1(p) I^{k_1\times k_1} c_{12}(p)\|+$$

$$+\|q_1(p)\| \|c_{12}(p)\| \left\| \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\tilde{\sigma}_1} - I^{k_1\times k_1} \right\| \Bigg) \|x-x^e\| \|y-y^e\|. \tag{3.14}$$

Продовжимо оцінку (3.14) враховуючи, що

$$\lambda_{\min}(P_1^*)\|x-x^e\|^2 \le v_1(x) \le \lambda_{\max}(P_1^*)\|x-x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_2^*)\|y-y^e\|^2 \le v_2(y) \le \lambda_{\max}(P_2^*)\|y-y^e\|^2.$$

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(3.7)} \le$$

$$\le \Big(-\lambda_{\min}(Q_1) + \lambda_{\max}(M_1(p,p^*)) + 2\|P_1^*\| \|q_1(p)\| \|c_{11}(p)\| \beta_1 \Big) \frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)}+$$

$$+2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p)\|+$$

$$+\|q_1(p)\|\|c_{12}(p)\|\beta_1\Big)\frac{(v_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}}\frac{(v_2(y))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\gamma_1\frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)}+\delta_1\frac{(v_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}}\frac{(v_2(y))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.15}$$

Для другої компоненти маємо:

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(3.7)}=\frac{1}{\varepsilon}\Big(A_{21}(p)x+A_{22}(p)y+q_2(p)f_2(\sigma_2)\Big)^TP_2^*(y-y^e)+$$

$$+(y-y^e)^TP_2^*\frac{1}{\varepsilon}\Big(A_{21}(p)x+A_{22}(p)y+q_2(p)f_2(\sigma_2)\Big)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Bigg[\left(A_{22}(p)+q_2(p)\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde\sigma_2}c_{22}(p)\right)^TP_2^*+$$

$$+P_2^*\left(A_{22}(p)+q_2(p)\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde\sigma_2}c_{22}(p)\right)\Bigg](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(x-x^e)^T\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde\sigma_2}c_{21}(p)\right)^TP_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^TP_2^*\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde\sigma_2}c_{21}(p)\right)(x-x^e), \tag{3.16}$$

де $\tilde\sigma_2\in\mathbb{R}^{k_2}$ – деяка точка відповідного простору. Було використано, що

$$A_{21}(p)x^e+A_{22}(p)y^e+q_2(p)f_2(c_{21}(p)x^e+c_{22}(p)y^e+r_2)=0$$

і формула скінченних приростів Лагранжа. З (3.16) отримаємо

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(3.7)}=\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)\Big[(D_{22}(p^*))^TP_2^*+P_2^*D_{22}(p^*)+$$

$$+\Big(D_{22}(p)-D_{22}(p^*)\Big)^TP_2^*+P_2^*\Big(D_{22}(p)-D_{22}(p^*)\Big)\Big](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\left(q_2(p)\Big(\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\Big)c_{22}(p)\right)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T P_2^*\left(q_2(p)\Big(\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\Big)c_{22}(p)\right)(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(x-x^e)^T\Bigg(A_{21}(p)+q_1(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)+$$

$$+q_2(p)\Big(\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\Big)c_{21}(p)\Bigg)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T P_2^*\Bigg(A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)+$$

$$+q_2(p)\Big(\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\Big)c_{21}(p)\Bigg)(x-x^e)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon}\Bigg(-\lambda_{\min}(Q_2)+\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))+$$

$$+2\|P_2^*\|\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\left\|\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-I^{k_2\times k_2}\right\|\Bigg)\|y-y^e\|^2+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\|P_2^*\|\Bigg(\|A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)\|+$$

$$+\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\left\|\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\tilde{\sigma}_2}-I^{k_2\times k_2}\right\|\Bigg)\|x-x^e\|\|y-y^e\|. \qquad (3.17)$$

Продовжимо оцінку (3.17) враховуючи, що

$$\lambda_{\min}(P_1^*)\|x-x^e\|^2\leq v_1(x)\leq\lambda_{\max}(P_1^*)\|x-x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_2^*)\|y-y^e\|^2\leq v_2(y)\leq\lambda_{\max}(P_2^*)\|y-y^e\|^2.$$

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(3.7)}\leq$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\Big(-\lambda_{\min}(Q_2) + \lambda_{\max}(M_2(p,p^*)) + 2\|P_2^*\|\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2\Big)\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\|P_2^*\|\Big(\|A_{21}(p)+$$

$$+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)\| + \|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|\beta_2\Big)\frac{(v_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}}\frac{(v_2(y))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\gamma_2\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)} + \delta_2\frac{(v_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}}\frac{(v_2(y))^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.18}$$

Таким чином, з оцінок (3.15), (3.18), для похідної векторної функції $V(x,y)$ в силу системи (3.7) має місце оцінка відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(3.7)} \le$$

$$\le \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x) + \dfrac{\delta_1}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}(v_1(x))^{\frac{1}{2}}(v_2(y))^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)}v_2(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\delta_2}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}(v_1(x))^{\frac{1}{2}}(v_2(y))^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Скориставшись нерівністю $-az^2 + bz \le -\dfrac{a}{2}z^2 + \dfrac{b^2}{2a}$, $a > 0$, яка вірна для всіх $z \in \mathbb{R}$, продовжимо оцінку (3.19).

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(3.7)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x) + \dfrac{\delta_1^2}{(-\gamma_1)\lambda_{\min}(P_2^*)}v_1(x)v_2(y) \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)}v_2(y) + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\delta_2^2}{(-\gamma_2)\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x)v_2(y) \end{pmatrix} = AV(x,y),$$

де

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)} & \dfrac{\delta_1^2}{(-\gamma_1)\lambda_{\min}(P_2^*)} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\delta_2^2}{(-\gamma_2)\lambda_{\min}(P_1^*)} & \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Зауважимо, що оскільки виконуються умови (3.8), (3.10), то для вибраних значень параметра (p, r_1, r_2) величини γ_1 і γ_2 – від'ємні.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{du}{dt} = Au, \tag{3.21}$$

де матриця A задана в (3.20), а $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Так як $\gamma_1 < 0$ і $\gamma_2 < 0$, то функція $f(u) = Au$ задовольняє умову Важевського відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$, тобто система (3.21) є системою порівняння для системи (3.7). Для вибраних значень параметра (p, r_1, r_2) виконується умова (3.12), тобто матриця A стійка і стан рівноваги $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ системи (3.7) для обраних значень параметрів (p, r_1, r_2) є глобально асимптотично стійким. Так як (p, r_1, r_2) довільна точка області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, то система (3.7) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Оскільки все вищесказане має місце для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$, то властивість глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (3.7) також зберігається при всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.

Теорему доведено.

Приклад 3.1. В якості прикладу застосування Теореми 3.3 розглянемо систему вигляду (3.7), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$, $r_1 \in \mathbb{R}^1$, $r_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$A_{11}(p) = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ p & 0.001 \end{pmatrix}, \; A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -4+p & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$q_1(p) = \begin{pmatrix} p \\ 0.1 \end{pmatrix}, \; q_2(p) = \begin{pmatrix} 0.1+p & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$c_{11}(p) = \begin{pmatrix} -0.01 & p \end{pmatrix}, \; c_{12}(p) = \begin{pmatrix} p & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$c_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0.001+p & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}, \; c_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ p & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Нелінійні функції $f_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ неперервно диференційовні, відповідно, на $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ і такі, що $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} = 1$, $\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Виберемо значення параметра p^* рівним 0. Визначимо матриці $D_{11}(p)$, $D_{22}(p)$, $D(p)$ і переконаємось, що дана система задовольняє умовам Припущення 3.2. Згідно Теореми 3.1, якщо функції $f_1(\sigma_1)$ і $f_2(\sigma_2)$ такі, що $\left|\frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \frac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0}\right| \leq 0.976$, для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^1$, $\left\|\frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \frac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\right\| \leq 0.976$, для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^2$, то для всіх $(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| < 0.1\}$,
$\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^1 \mid |r_1| \leq c_1\}$, $c_1 > 0$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \|r_2\| \leq c_2\}$, $c_2 > 0$, існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується.

Вибравши матриці

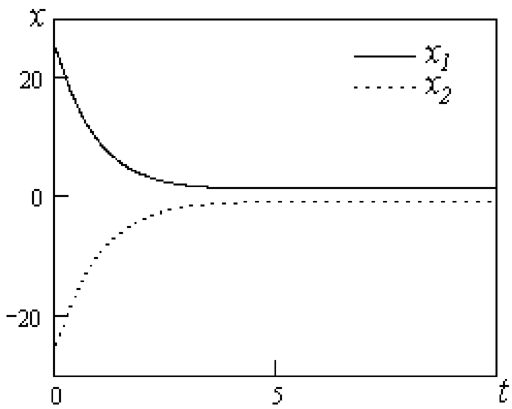
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

визначимо матриці

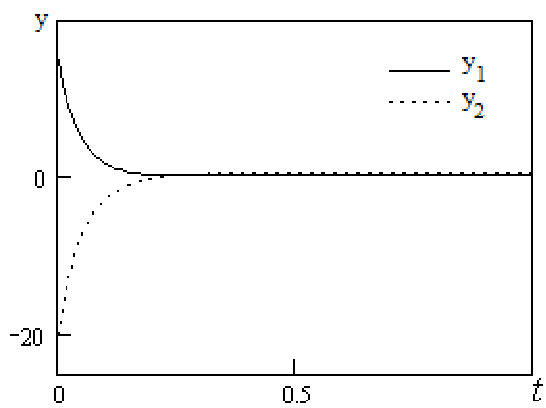
$$P_1^* = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \ P_2^* = \begin{pmatrix} 0.133 & 0.033 \\ \\ 0.033 & 0.133 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення (3.8)-(3.11), визначимо області
$\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0.1\}$, $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0.1\}$ і величини $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.9$. Умова (3.12) виконується для всіх
$p \in \Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \leq 0.1\} = P$, тобто система, що досліджується, згідно Теореми 3.3, глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, при всіх $\varepsilon \in (0, 1]$, якщо для функцій $f_1(\sigma_1)$ і $f_2(\sigma_2)$ виконуються умови $\left| \dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} \right| \leq 0.9$ для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^1$ і $\left\| \dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} \right\| \leq 0.9$ для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^2$.

Вибравши $f_1(\sigma_1) = 0.45 \sin \sigma_1 + 0.55\sigma_1$ і
$f_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -0.225 \sin 2\sigma_{2_1} + 1.45\sigma_{2_1} \\ \\ -0.225 \sin 2\sigma_{2_2} + 1.45\sigma_{2_2} \end{pmatrix}$, $\sigma_2^T = (\sigma_{2_1} \ \sigma_{2_2})$, переконаємось, що ці функції задовольняють отриманим секторним умовам.



а)



б)

Рис. 3.1 – Поведінка змінних. Приклад 3.1

На Рис. 3.1 представлені графіки, які ілюструють поведінку змінних

$x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи, що розглядається, при $p = -0.05$, $\varepsilon = 0.25$, $r_1 = -20$, $r_2^T = (10,\ 20)$, $x_0^T = (25,\ -25)$, $y_0^T = (15,\ -20)$. Стан рівноваги, який відповідає значенням параметрів, що наведені вище,
$x^e = (0.811,\ -0.863)^T$, $y^e = (0.375,\ 0.804)^T$.

3.2.2 Використання матричнозначної функції Ляпунова

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – деяка стала матриця, $B(p,\varepsilon)$ – блочна матриця розміру 4×4 з елементами $B_{11} = P_1A_{11}(p) + A_{11}^T(p)P_1 + P_3A_{21}(p) + A_{21}^T(p)P_3^T$,
$B_{21} = B_{12}^T = \varepsilon P_3^T A_{11}(p) + P_2A_{21}(p) + A_{22}^T(p)P_3^T + A_{12}^T(p)P_1$,
$B_{22} = \varepsilon P_3^T A_{12}(p) + P_2A_{22}(p) + \varepsilon A_{12}^T(p)P_3 + A_{22}^T(p)P_2$,
$B_{13} = B_{31}^T = P_1q_1(p) + c_{11}^T(p)$, $B_{14} = B_{41}^T = P_3q_2(p) + c_{21}^T(p)$,
$B_{23} = B_{32}^T = \varepsilon P_3^T q_1(p) + c_{12}^T(p)$, $B_{24} = B_{42}^T = P_2q_2(p) + c_{22}^T(p)$,
$B_{33} = -\dfrac{2}{a_1}I^{k_1\times k_1}$, $B_{34} = B_{43}^T = 0^{k_1\times k_2}$, $B_{44} = -\dfrac{2}{a_2}I^{k_2\times k_2}$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – деякі числа.

Введемо наступні позначення:

$$M_i = -\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\| - \frac{a_i}{2} + \frac{1}{2}\Bigg[\left(2\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\| + a_i\right)^2 -$$

$$-4\left(\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|^2 - \frac{a_i}{2}\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)\right)\Bigg]^{\frac{1}{2}},\ i = 1, 2,$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{24} \end{pmatrix},$$

$$I_{a_1a_2} = \begin{pmatrix} B_{33} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & B_{44} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1}{2}I^{k_1\times k_1} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & -\dfrac{a_2}{2}I^{k_2\times k_2} \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{2\|(K(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K(p,0) - K(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q(p)\|\|C(p)\|)},$$

де $K(p,u)$, $q(p)$ та $C(p)$ введені перед Теоремою 3.1.

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (3.7) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 3.4. *Нехай для системи (3.7) виконуються умови Припущення 3.1, для функцій $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ при всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}^{k_2}$, відповідно, виконуються оцінки*

$$\left\| \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i} - \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0} \right\| < \min\{\alpha, M_i\},\ \ i = 1,2,$$

де

$$a_i > \frac{2\left\| \dfrac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}\right\|^2}{\lambda_{\min}\left(\dfrac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0} + \left(\dfrac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)},\ \ i = 1,2,$$

$P \subseteq \Omega_p$, де область Ω_p визначається з (3.4) і для всіх $p \in P$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$, де $\varepsilon^* = \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2)}{\lambda_{\max}(P_3P_3^T)}$, матриця $B = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & I^{-1}_{a_1a_2}\end{pmatrix}$ стійка. Тоді система (3.7) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^{k_1} \mid \|r_1\| \le c_1,\ c_1 > 0\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^{k_2} \mid \|r_2\| \le c_2,\ c_2 > 0\}$, для всіх $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$.

Доведення. При виконанні умов Теореми 3.4, для системи (3.1), з якої визначається стан рівноваги системи (3.7), виконуються всі умови Теореми 3.1. Отже, для всіх $(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де Ω_p визначається з умови (3.4), а Ω_{r_1} і Ω_{r_2} такі, як в умові теореми, існує єдиний стан рівноваги системи рівнянь (3.7). Очевидно, що він існує і для всіх

$(p, r_1, r_2) \in P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$. Покажемо, що для всіх значень параметрів з цієї області вказаний стан рівноваги буде глобально асимптотично стійкий.

Нехай (p, r_1, r_2) – довільні значення параметрів з області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$ і $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – відповідний їм стан рівноваги системи рівнянь (3.7). Розглянемо матричнозначну функцію (див. [149, 150]):

$$V(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x, y, \varepsilon) \\ v_{21}(x, y, \varepsilon) & v_{22}(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

де $v_{11}(x) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e)$, $v_{22}(y) = \varepsilon (y - y^e)^T P_2 (y - y^e)$, $v_{21}(x, y, \varepsilon) = v_{12}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon (x - x^e)^T P_3 (y - y^e)$. Утворимо скалярну функцію

$$v(x, y, \varepsilon) = \eta^T V(x, y, \varepsilon) \eta, \; \eta^T = (1, 1). \tag{3.23}$$

Враховуючи, що для елементів матричнозначної функції (3.22) мають місце оцінки

$$v_{11}(x) \geq \lambda_{\min}(P_1) \|x - x^e\|^2 \text{ при всіх } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_{22}(y, \varepsilon) \geq \varepsilon \lambda_{\min}(P_2) \|y - y^e\|^2 \text{ при всіх } y \in \mathbb{R}^m, \; \varepsilon \in (0, 1],$$

$$v_{12}(x, y, \varepsilon) \geq -\varepsilon (\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{\frac{1}{2}} \|x - x^e\| \|y - y^e\|$$

$$\text{при всіх } x \in \mathbb{R}^n, \; y \in \mathbb{R}^m, \; \varepsilon \in (0, 1],$$

для скалярної функції (3.23) має місце наступна оцінка:

$$v(x, y, \varepsilon) \geq u^T H^T A(\varepsilon) H u, \text{ при всіх } (x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0, 1],$$

де $u^T = (\|x - x^e\|, \|y - y^e\|)$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A(\varepsilon) = \left(\begin{array}{cc} \lambda_{\min}(P_1) & -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{\frac{1}{2}} \\ -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{\frac{1}{2}} & \varepsilon\lambda_{\min}(P_2) \end{array} \right). \tag{3.24}$$

При всіх $\varepsilon < \varepsilon^*$ матриця (3.24), очевидно, додатно визначена, тобто скалярна функція $v(x,y,\varepsilon)$ додатно визначена за Ляпуновим для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

Визначимо похідну функції (3.23) по часу в силу системи (3.7):

$$\dot{v}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(3.7)} = -2\Big(\sigma_1 - \sigma_1^e - \frac{1}{a_1}(f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^e))\Big)^T (f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^e)) -$$

$$- 2\Big(\sigma_2 - \sigma_2^e - \frac{1}{a_2}(f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^e))\Big)^T (f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^e)) + z^T B(p,\mu) z, \tag{3.25}$$

де $\sigma_1^e = c_{11}(p)x^e + c_{12}(p)y^e + r_1$, $\sigma_2^e = c_{21}(p)x^e + c_{22}(p)y^e + r_2$,
$a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – деякі числа,
$z^T = \Big((x - x^e)^T, (y - y^e)^T, (f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^e))^T, (f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^e))^T\Big)$,

При $i = 1, 2$ розглянемо величини

$$\Big(\sigma_i - \sigma_i^e - \frac{1}{a_i}(f_i(\sigma_i) - f_i(\sigma_i^e))\Big)^T (f_i(\sigma_i) - f_i(\sigma_i^e)) =$$

$$= (\sigma_i - \sigma_i^e)^T \left(I^{k_i \times k_i} - \frac{1}{a_i} \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} \right)^T \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} (\sigma_i - \sigma_i^e) =$$

$$= (\sigma_i - \sigma_i^e)^T \left(\frac{1}{2} \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} \right)^T \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a_i} \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} \right)^T \frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} \right) (\sigma_i - \sigma_i^e) =$$

$$= (\sigma_i - \sigma_i^e)^T \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i = 0} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i = 0} \right)^T \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} + \left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i} \right)^T \right) \right) (\sigma_i - \sigma_i^e) +$$

$$+(\sigma_i-\sigma_i^e)^T\left(\frac{1}{2}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a_i}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}\right)(\sigma_i-\sigma_i^e)=$$

$$=(\sigma_i-\sigma_i^e)^T H_i(\sigma_i-\sigma_i^e), \tag{3.26}$$

де $\tilde{\sigma}_i$ – деяка точка відповідного простору. Згідно теореми Вейля (див. [76]), враховуючи що $\lambda_{\min}(-A)=-\lambda_{\max}(A)\geq-\rho(A)\geq-\|A\|$, де $\rho(A)$ – спектральний радіус A, отримаємо наступну оцінку:

$$\lambda_{\min}(H_i)\geq\frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)-$$

$$-\frac{1}{a_i}\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}\right\|^2-\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}-\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)-$$

$$-\frac{1}{a_i}\left(\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}-\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|+\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|\right)^2-$$

$$-\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}-\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|. \tag{3.27}$$

Легко бачити, що якщо $a_i>\dfrac{2\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|^2}{\lambda_{\min}\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)}$ і $\left\|\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\tilde{\sigma}_i}-\frac{df_i(\sigma_i)}{d\sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right\|<M_i$ (див. позначення перед Теоремою 3.4) при всіх $\sigma_i\in\mathbb{R}^{k_i}$, $i=1,2$, то остання величина в оцінці (3.27) додатня. Отже $\lambda_{\min}(H_i)>0$ і з (3.26) слідує, що $\left(\sigma_i-\sigma_i^e-\frac{1}{a_i}(f_i(\sigma_i)-f_i(\sigma_i^e))\right)^T(f_i(\sigma_i)-f_i(\sigma_i^e))>0$, $i=1,2$, при всіх $\sigma_1\in\mathbb{R}^{k_1}$, $\sigma_2\in\mathbb{R}^{k_2}$, відповідно. Матрицю B з (3.25) можна записати у вигляді блочної матриці $B = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & I_{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix}$. Стійкість матриці B для всіх $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$, забезпечує від'ємність величини $z^T B(\varepsilon) z$ в оцінці (3.25) для всіх $z \in \mathbb{R}^7$, окрім рівноважних значень змінних.

Таким чином, при виконанні умов теореми, згідно (3.25), похідна функції $v(x, y, \varepsilon)$ в силу системи (3.7) від'ємна для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$. Отже, функція $v(x, y, \varepsilon)$ є функцією Ляпунова, яка в силу теореми Барбашина-Красовського (див. [3]) дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ системи (3.7). Так як (p, r_1, r_2) довільна точка області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, то система (3.7) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Теорему доведено.

Приклад 3.2. В якості прикладу застосування Теореми 3.4 розглянемо систему вигляду (3.7), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}^1$, $r_1 \in \mathbb{R}^1$, $r_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$A_{11}(p) = \begin{pmatrix} 2 + p^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_{12}(p) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ p & -20 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 1 & \tan p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -4 + p^5 \sin p & 0 \\ p^2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$q_1(p) = \begin{pmatrix} \sin p + p \\ 0.1 \end{pmatrix}, \; q_2(p) = \begin{pmatrix} 0.01 + p & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$c_{11}(p) = \begin{pmatrix} -0.01 & p \end{pmatrix}, \; c_{12}(p) = \begin{pmatrix} p & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$c_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0.01\cos p & 0 \\ p & 0.01 \end{pmatrix}, \; c_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0.01 & p \\ 0 & 0.01\cos p \end{pmatrix}.$$

Нелінійні функції $f_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ неперервно диференційовні, відповідно, на $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, і такі, что $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} = 1$, $\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Виберемо значення параметра p^* рівним 0. Визначимо матриці $D_{11}(p)$, $D_{22}(p)$, $D(p)$ і переконаємось, що дана система задовольняє умовам Припущення 3.1. Бачимо, що матриця $D_{11}(p^*)$ нестійка і застосувати векторну функцію Ляпунова, як у Прикладі 3.1, не вдасться. Згідно Теореми 3.1, якщо функції $f_1(\sigma_1)$ і $f_2(\sigma_2)$ такі, що $\left|\dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0}\right| \le 5.503$, для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^1$, $\left\|\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2} - \dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0}\right\| \le 5.503$, для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^2$, то для всіх $(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \le 0.1\}$ $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^1 \mid |r_1| \le c_1\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \|r_2\| \le c_2\}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується.

Виберемо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

і утворимо матричнозначну функцію вигляду (3.22). Виберемо $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ ($a_1 > 1$, $a_2 > 1$, де 1 – нижня оцінка для a_i, яка визначається в умові Теореми 3.4) і обрахуємо $M_1 = 0.236$, $M_2 = 0.372$. Визначимо $\varepsilon^* = 0.6$ і переконаємось, що матриця B стійка для всіх $p \in P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \le 0.1\}$, $0 < \varepsilon \le 0.37$. Отже, якщо функції $f_1(\sigma_1)$ і $f_2(\sigma_2)$ задовольняють оцінкам $\left|\dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1} - \dfrac{df_1(\sigma_1)}{d\sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0}\right| \le 0.23$, для всіх $\sigma_1 \in \mathbb{R}^1$, і

$\left\| \left.\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\right|_{\sigma_2} - \left.\dfrac{df_2(\sigma_2)}{d\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} \right\| \leq 0.37$, для всіх $\sigma_2 \in \mathbb{R}^2$, то система, що досліджується, згідно Теоремі 3.4, глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, де $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in \mathbb{R}^1 \mid |r_1| \leq c_1\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in \mathbb{R}^2 \mid \|r_2\| \leq c_2\}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, при всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.37]$.

Вибравши $f_1(\sigma_1) = -0.0575 \sin 2\sigma_1 + 1.115\sigma_1$ і
$f_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -0.185 \sin \sigma_{2_1} + 1.185\sigma_{2_1} \\ -0.185 \sin \sigma_{2_2} + 1.185\sigma_{2_2} \end{pmatrix}$, $\sigma_2^T = (\sigma_{2_1}\ \ \sigma_{2_2})$, переконаємось, що ці функції задовольняють отриманим секторним умовам. На Рис. 3.2 представлені графіки, які ілюструють поведінку змінних $x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи, що розглядається, при $p = 0.07$, $\varepsilon = 0.3$, $r_1 = -250$, $r_2^T = (10,\ 20)$, $x_0^T = (25,\ -25)$, $y_0^T = (15,\ -20)$. Стан рівноваги, який відповідає значенням параметрів, що наведені вище, $x^e = (-13.726,\ -7.306)^T$, $y^e = (-3.329,\ -1.744)^T$.

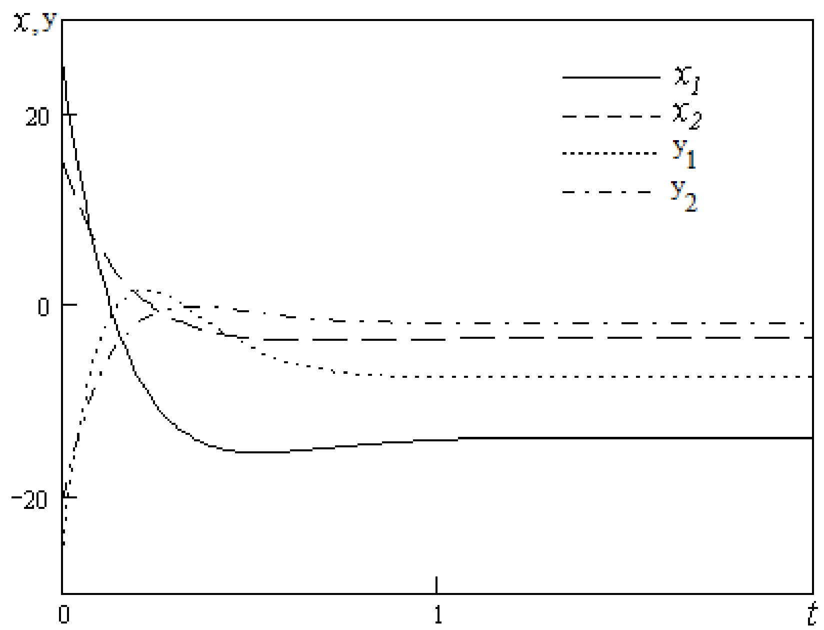


Рис. 3.2 – Поведінка змінних. Приклад 3.2

3.3 Достатні умови глобальної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги у випадку відсутності потрібної інформації про динамічні характеристики підсистем

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + \varepsilon A_{12}(p)y + q_1(p)\varphi(r + C(p)x), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(p)x + \varepsilon A_{22}(p)y + q_2(p)\varphi(r + C(p)x), \end{cases} \tag{3.28}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}^k$ – корегуючий вектор, матриці $A_{11}(p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $q_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C(p) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – нелінійна функція, яка неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^k$ і така, що $\varphi(0) = 0$, $\left.\dfrac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = I^{k\times k}$, де $I^{k\times k}$ – одинична матриця відповідної розмірності, $\varepsilon \in (0, 1]$. Вважаємо, що для системи (3.28) справедлива теорема про існування та єдиність розв’язку початкової задачі.

Зауважимо, що система (3.28) має нерухомий стан рівноваги в початку координат для всіх значень параметра p, якщо корегуючий вектор рівний 0. Однак, якщо це не так, то стан рівноваги стає рухомим через зміну значень параметрів p та r. Властивості стійкості цього стану рівноваги також будуть залежати від вказаних параметрів. Крім того, застосувати для дослідження властивостей стійкості рухомого стану рівноваги результати розділу 2 не вдасться, оскільки немає відомостей про динамічні характеристики “виродженої” та “швидкої” підсистем початкової системи диференціальних рівнянь.

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – деяка стала матриця. Введемо наступні позначення:

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)x + q_2(p)\varphi(r + C(p)x)),$$

$$A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p),$$

$$q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p),$$

$$K_0(p,u) = A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u}C(p),$$

$$K_1(p,u) = A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u}C(p),$$

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{2\|(K_0(p^*,0))^{-1}\|} - \max\limits_{p\in\Omega_p}\|K_0(p,0) - K_0(p^*,0)\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|)},$$

$$M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) = \left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)^T P_1 +$$

$$+P_1\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right) +$$

$$+P_3A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right) +$$

$$+\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)^T\left(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_3^T,$$

$$N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) = A_{12}^T(p)P_1 +$$

$$+P_2A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right),$$

$$N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) = P_1A_{12}(p) + 2\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)^T P_3 + 2P_3A_{22}(p) +$$

$$+2P_3A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)A_{12}(p) +$$

$$+\left(A_0(p) + q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)^T\left(A_{21}(p) + q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_2,$$

$$L(p,\tilde{\tilde{u}}) = A_{12}^T(p)P_3 + P_3^TA_{12}(p) + A_{22}^T(p)P_2 + P_2A_{22}(p) +$$

$$+A_{12}^T(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)^T(A_{22}^{-1}(p))^TP_2+$$

$$+P_2A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)A_{12}(p),$$

$$\Delta_i(u,p)=(q_i(p)-q_i(p^*))\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)(C(p)-C(p^*))+$$

$$+(q_i(p)-q_i(p^*))\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)C(p^*)+$$

$$+(q_i(p)-q_i(p^*))\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}(C(p)-C(p^*))+(q_i(p)-q_i(p^*))\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}C(p^*)+$$

$$+q_i(p^*)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)C(p^*)+q_i(p^*)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}(C(p)-C(p^*))+$$

$$+q_i(p^*)\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right)(C(p)-C(p^*)),\ i=0,1,$$

$$\beta_i(p,\alpha)=\alpha\|q_i(p)-q_i(p^*)\|\|C(p)-C(p^*)\|+\alpha\|C(p^*)\|\|q_i(p)-q_i(p^*)\|+$$

$$+\|q_i(p)-q_i(p^*)\|\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\|C(p^*)\|+\alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p)-C(p^*)\|+$$

$$+\alpha\|q_i(p^*)\|\|C(p^*)\|+\|q_i(p^*)\|\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\|C(p)-C(p^*)\|+$$

$$+\|q_i(p)-q_i(p^*)\|\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\|C(p)-C(p^*)\|,\ i=0,1,$$

$$\gamma_0(p,\alpha)=\|A_0-A_0(p^*)\|+\beta_0(p,\alpha),$$

$$\gamma_1(p,\alpha)=\|A_{21}-A_{21}(p^*)\|+\beta_1(p,\alpha),$$

$$A(p,\alpha)=\lambda_{\max}(M(p^*,0,0))+2\|P_1\|\gamma_0(p,\alpha)+$$

$$+2\|P_3\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+$$

$$+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)+\|K_0(p^*,0)\|\gamma_1(p,\alpha)+\|K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)\|\Big]+$$

$$+2\|P_3A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)+\|K_0(p^*,0)\|\gamma_1(p,\alpha)\Big],$$

$$B(p,\alpha)=\lambda_{\max}(L(p^*,0))+2\|P_3\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+2\|P_2\|\|A_{22}(p)-A_{22}(p^*)\|+$$

$$+2\|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p^*)\|+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\gamma_1(p,a)\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|\Big]+$$

$$+2\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{12}(p^*)\|\Big],$$

$$C(p,\alpha)=\frac{1}{2}\|N_1(p^*,0,0)+N_2^T(p^*,0,0)\|+\|P_1\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|+$$

$$+\|P_3\|\|A_{22}(p)-A_{22}(p^*)\|+\|P_3\|\gamma_0(p,\alpha)+$$

$$+\|P_3\|\|A_{12}(p)-A_{12}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p^*)\|+$$

$$+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big]+$$

$$+\|P_3\|\|A_{12}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|+$$

$$+\gamma_1(p,\alpha)\|A_{22}^{-1}(p^*)\|+\|K_1(p^*,0)\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big]+$$

$$+\|P_2\|\|A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\|+$$

$$+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)+\|K_1(p^*,0)\|\|K_0(p^*,0)\|\Big]+$$

$$+\|P_2A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big[\gamma_1(p,\alpha)\gamma_0(p,\alpha)+\gamma_1(p,\alpha)\|K_0(p^*,0)\|+\|K_1(p^*,0)\|\gamma_0(p,\alpha)\Big].$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (3.28) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 3.5. *Нехай для системи (3.28) виконуються умови Припущення 2.4, для функції $\varphi(u)$ при всіх $u\in\mathbb{R}^k$ виконується оцінка*

$$\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u-\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\|\le\alpha,$$

область $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \le b\}$ *визначається із співвідношення (2.15), для матриць* P_1, P_2, P_3 *справедливе співвідношення*

$$\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2) - \lambda_{\max}(P_3 P_3^T) > 0 \tag{3.29}$$

і для всіх $p \in P \subseteq (\Omega_p \cap \Omega_p 1)$, *де область* $\Omega_p 1$ *визначається згідно Леми 2.3, вірні нерівності*

$$A(p,\alpha) < 0, \;\; A(p,\alpha)B(p,\alpha) - C^2(p,\alpha) > 0. \tag{3.30}$$

Тоді система (3.28) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_r$, *де* $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^k \mid \|r\| \le c\}$, $c > 0$, *для всіх* $\varepsilon \in (0, 1]$.

Доведення. При виконанні умов Теореми 3.5, для системи (3.6), з якої визначається стан рівноваги системи (3.28), виконуються всі умови Теореми 3.2. Отже, для всіх $(p, r) \in (\Omega_p \cap \Omega_p 1) \times \Omega_r$, де область Ω_p визначається з умови (2.15), область $\Omega_p 1$ визначається згідно Леми 2.3, а область Ω_r така, як в умові теореми, існує єдиний стан рівноваги системи рівнянь (3.28). Очевидно, що він існує і для всіх $(p, r) \in P \times \Omega_r$. Покажемо, що для всіх значень параметрів з цієї області вказаний стан рівноваги буде глобально асимптотично стійкий.

Нехай (p, r) – довільні значення параметрів з області $P \times \Omega_r$ і $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ – відповідний їм стан рівноваги системи рівнянь (3.28). Розглянемо матричнозначну функцію (див. [149, 150])

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x, y, \varepsilon) \\ v_{21}(x, y, \varepsilon) & v_{22}(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

де $v_{11}(x) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e)$, $v_{22}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^2 (y - \Phi(x))^T P_2 (y - \Phi(x))$, $v_{12}(x, y, \varepsilon) = v_{21}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon (x - x^e)^T P_3 (y - \Phi(x))$. За допомогою вектора

$\eta^T = (1,\ 1)$ утворимо скалярну функцію

$$v(x,y,\varepsilon) = \eta^T V(x,y,\varepsilon)\eta. \tag{3.32}$$

Враховуючи, що для елементів матричнозначної функції (3.31) мають місце оцінки

$$v_{11}(x) \geq \lambda_{\min}(P_1)\|x - x^e\|^2 \text{ при всіх } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_{22}(y,\varepsilon) \geq \varepsilon^2 \lambda_{\min}(P_2)\|y - \Phi(x)\|^2 \text{ при всіх } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \varepsilon \in (0,1],$$

$$v_{12}(x,y,\varepsilon) \geq -\varepsilon \left(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T)\right)^{\frac{1}{2}} \|x - x^e\|\|y - \Phi(x)\|$$

$$\text{при всіх } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \varepsilon \in (0,1],$$

для скалярної функції (3.32) справедливе наступне співвідношення:

$$v(x,y,\varepsilon) \geq u^T A(\varepsilon) u \text{ при всіх } (x,y,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0,1],$$

де $u^T = (\|x - x^e\|\ \|y - \Phi(x)\|)$,

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{\frac{1}{2}} \\ -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{\frac{1}{2}} & \varepsilon^2 \lambda_{\min}(P_2) \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

При виконанні умови (3.29), матриця (3.33) додатно визначена при всіх $\varepsilon \in (0,1]$, тобто скалярна функція $v(x,y,\varepsilon)$ додатно визначена за Ляпуновим при всіх $\varepsilon \in (0,1]$.

Знайдемо повну похідну функції (3.32) по часу в силу системи (3.28)

$$\dot{v}(x,z,\varepsilon)\Big|_{(3.28)} = \dot{x}^T P_1(x - x^e) + (x - x^e)^T P_1 \dot{x} +$$

$$+2\varepsilon \dot{x}^T P_3(y - \Phi(x)) + 2\varepsilon(x - x^e)^T P_3 \left(\dot{y} - \frac{d\Phi(x)}{dx}\right) +$$

$$+\varepsilon^2\left(\dot{y}-\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)^T P_2(y-\Phi(x))+\varepsilon^2(y-\Phi(x))^T P_2\left(\dot{y}-\frac{d\Phi(x)}{dx}\right). \quad (3.34)$$

Враховуючи, що

$$\dot{x}=A_{11}(p)x+\varepsilon A_{12}(p)y+q_1(p)\varphi(u)=$$

$$=\left(A_0(p)+q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)(x-x^e)+\varepsilon A_{12}(p)(y-\Phi(x));$$

$$\dot{y}-\frac{d\Phi(x)}{dx}=A_{22}(p)(y-\Phi(x))+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)\times$$

$$\times\left(A_0(p)+q_0(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{u}}C(p)\right)(x-x^e)+$$

$$+A_{22}^{-1}(p)\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{\tilde{\tilde{u}}}C(p)\right)A_{12}(p)(y-\Phi(x)),$$

де $\tilde{u}$ і $\tilde{\tilde{u}}$ – деякі значення змінної u з простору $\mathbb{R}^k$, із (3.34) отримаємо наступне співвідношення:

$$\dot{v}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(3.28)}=(x-x^e)^T M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x-x^e)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon(y-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})+N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon(x-x^e)^T(N_1^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})+N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(y-\Phi(x))+$$

$$+\varepsilon^2(y-\Phi(x))^T L(p,\tilde{\tilde{u}})(y-\Phi(x)). \quad (3.35)$$

Перетворимо $M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})$ наступним чином:

$$M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})=M(p^*,0,0)+(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))^T P_1+P_1(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+$$

$$+2P_3(A_{22}^{-1}(p)-A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+$$

$$+2P_3(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*, 0)(K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0))+$$

$$+2P_3(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0))K_0(p^*, 0)+$$

$$+2P_3(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*, 0)K_0(p^*, 0)+$$

$$+2P_3A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0))(K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0))+$$

$$+2P_3A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*, 0)(K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0))+$$

$$+ 2P_3A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0))K_0(p^*, 0). \tag{3.36}$$

Скориставшись виразом (3.36), отримаємо оцінку квадратичної форми:

$$(x - x^e)^T M(p, \tilde{u}, \tilde{\tilde{u}})(x - x^e) \leq$$

$$\leq \Bigg[\lambda_{\max}(M(p^*, 0, 0)) + 2\|P_1\|\|K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0)\|+$$

$$+2\|P_3\|\|A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*)\Big(\|K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0)\|+$$

$$+\|K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0)\| + \|K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p^*, 0)\|+$$

$$+\|K_1(p^*, 0)K_0(p^*, 0)\|\Big) + 2\|P_3A_{22}^{-1}(p^*)\|\Big(\|K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0)\|+$$

$$+\|K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0)\|+$$

$$+ \|K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0)\|\|K_0(p^*, 0)\|\Big)\Bigg]\|x - x^e\|^2. \tag{3.37}$$

Враховуючи, що

$$K_0(p, \tilde{u}) - K_0(p^*, 0) = (A_0 - A_0(p^*)) + \Delta_0(\tilde{u}, p),$$

$$K_1(p, \tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*, 0) = (A_{21} - A_{21}(p^*)) + \Delta_1(\tilde{u}, p),$$

тобто мають місце оцінки

$$\|K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0)\| \le \|A_0 - A_0(p^*)\| + \beta_0(p,\alpha) = \gamma_0(p,\alpha),$$

$$\|K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0)\| \le \|A_{21} - A_{21}(p^*)\| + \beta_1(p,\alpha) = \gamma_1(p,\alpha)$$

і функція $\varphi(u)$ така, що $\left\|\frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0}\right\| \le \alpha$ при всіх $u \in \mathbb{R}^k$, остаточно отримаємо для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ оцінку

$$(x - x^e)^T M(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})(x - x^e) \le A(p,\alpha)\|x - x^e\|^2. \tag{3.38}$$

Перетворимо величину $L(p,\tilde{\tilde{u}})$ наступним чином:

$$L(p,\tilde{\tilde{u}}) = L(p^*,0) + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T P_3 + P_3^T(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) +$$

$$+(A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_2 + P_2(A_{22}(p) - A_{22}(p^*)) +$$

$$+(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T (A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 +$$

$$+(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T (K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T (A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 +$$

$$+P_2 A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) +$$

$$+P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) +$$

$$+(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 +$$

$$+(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2 +$$

$$+P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) +$$

$$+P_2 A_{22}^{-1}(p^*)K_1(p^*,0)(A_{12}(p) - A_{12}(p^*)) +$$

$$+P_2 A_{22}^{-1}(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))A_{12}(p^*) +$$

$$+P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))K_1(p^*,0)A_{12}(p^*)+$$

$$+A_{12}^T(p^*)K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2+$$

$$+A_{12}^T(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2+$$

$$+P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))A_{12}(p^*)+$$

$$+A_{12}^T(p^*)(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T P_2.$$

Враховуючи позначення, які були введені вище, отримаємо оцінку квадратичної форми для всіх $y \in \mathbb{R}^m$ у вигляді

$$(y - \Phi(x))^T L(p,\tilde{\tilde{u}})(y - \Phi(x)) \le B(p,\alpha)\|y - \Phi(x)\|^2. \tag{3.39}$$

Величину $\dfrac{1}{2}(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))$ представимо наступним чином:

$$\frac{1}{2}(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}) + N_2^T(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})) =$$

$$= \frac{1}{2}(N_1(p^*,0,0) + N_2(p^*,0,0)) + (A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T P_1+$$

$$+(A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_3^T + P_3^T(K_0(p,\tilde{u}) - K_0(p^*,0))+$$

$$+(A_{12}(p) - A_{12}(p^*))^T\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T + K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p^*))^T\Big]P_3^T+$$

$$+A_{12}^T(p^*)\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T+$$

$$+(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))^T(A_{22}^{-1}(p^*))^T + K_1^T(p^*,0)(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))^T\Big]P_3^T+$$

$$+P_2(A_{22}^{-1}(p) - A_{22}^{-1}(p^*))\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}}) - K_1(p^*,0))K_0(p^*,0) + K_1(p^*,0)K_0(p^*,0)+$$

$$+(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))\Big]+$$

$$+P_2A_{22}^{-1}(p^*)\Big[(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))+$$

$$+(K_1(p,\tilde{\tilde{u}})-K_1(p^*,0))K_0(p^*,0)+K_1(p^*,0)(K_0(p,\tilde{u})-K_0(p^*,0))\Big].$$

Враховуючи позначення, які були введені вище, при всіх $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$ справедлива оцінка білінійної форми:

$$\frac{1}{2}(y-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})+N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e)\le C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|y-\Phi(x)\|. \tag{3.40}$$

Очевидно, що аналогічно можна отримати наступну оцінку, що має місце при всіх $x\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}^m$:

$$\frac{1}{2}(y-\Phi(x))^T(N_1(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}})+N_2(p,\tilde{u},\tilde{\tilde{u}}))(x-x^e)\le C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|y-\Phi(x)\|. \tag{3.41}$$

Таким чином, для похідної функції (3.32) по часу в силу системи (3.28), враховуючи (3.35), (3.38)-(3.41), при всіх $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $\varepsilon\in(0,1]$ справедлива оцінка

$$\frac{dv(x,y,\varepsilon)}{dt}\Big|_{(3.28)}\le$$

$$\le A(p,\alpha)\|x-x^e\|^2+\varepsilon C(p,\alpha)\|x-x^e\|\|y-\Phi(x)\|+$$

$$+\varepsilon C(p,\alpha)\|y-\Phi(x)\|\|x-x^e\|+\varepsilon^2B(p,\alpha)\|y-\Phi(x)\|^2=$$

$$=(\|x-x^e\|,\|y-\Phi(x)\|)D(p,\alpha,\varepsilon)(\|x-x^e\|,\|y-\Phi(x)\|)^T, \tag{3.42}$$

де

$$D(p,\alpha,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A(p,\alpha) & \varepsilon C(p,\alpha)\\ \varepsilon C(p,\alpha) & \varepsilon^2B(p,\alpha)\end{pmatrix}.$$

Матриця $D(p,\alpha,\varepsilon)$ при виконанні умови (3.30) від'ємно визначена для вибраного $p \in P$ і всіх $\varepsilon \in (0,1]$, тобто $\left.\frac{dv(x,y,\varepsilon)}{dt}\right|_{(3.28)} < 0$ для всіх нерівноважних значень змінних $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ і всіх $\varepsilon \in (0,1]$. Таким чином, $v(x,y,\varepsilon)$ є функцією Ляпунова, яка в силу теореми Барбашина–Красовського (див. [3]) дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $((x^e)^T\ (y^e)^T)^T$. Оскільки (p,r) довільна точка області $P \times \Omega_r$, то система (3.28) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області, для всіх $\varepsilon \in (0,1]$.

Теорему доведено.

Приклад 3.3. В якості прикладу застосування Теореми 3.5 розглянемо систему вигляду (3.28), де $x, y \in \mathbb{R}^2$, $p, r \in \mathbb{R}^1$,

$$A_{11}(p) = \begin{pmatrix} -2.3+p^2 & 0 \\ 0 & -2.218 \end{pmatrix},\ A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ p & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 2.5 & 10p \\ 0 & -26.5 \end{pmatrix},\ A_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0.35+\tan(p) & 0 \\ 0 & 0.35 \end{pmatrix},$$

$$q_1(p) = \begin{pmatrix} 0.001 \\ \sin(p) \end{pmatrix},\ q_2(p) = \begin{pmatrix} -0.35+p \\ 0 \end{pmatrix}\ C(p) = (82,\ p^2).$$

Нелінійна функції $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^1$ і така, що $\varphi(0) = 0$, $\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} = 1$.

Виберемо значення параметра p^* рівним 0. Утворивши матрицю $K_0(p,u)$ переконаємось, що виконуються умови Припущення 2.4. З Теореми 3.2 слідує, що якщо функція $\varphi(u)$ така, що

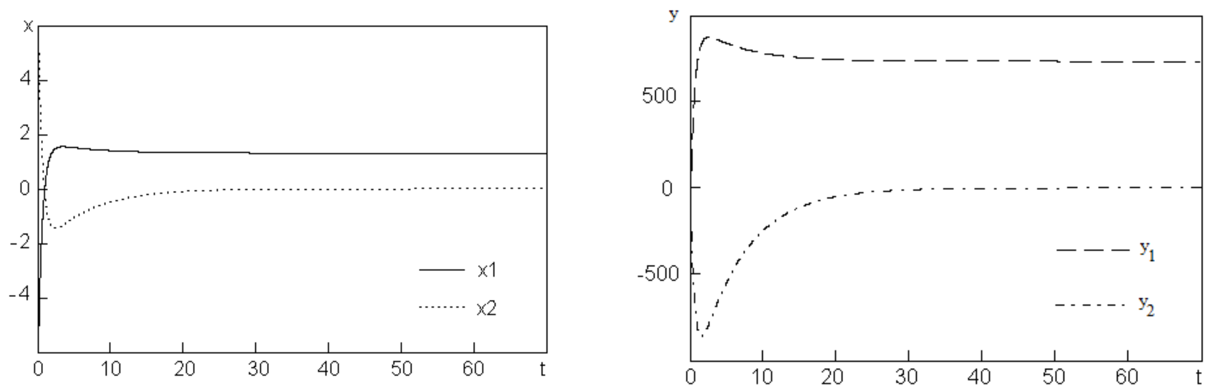
$$\left\| \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u} - \left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u=0} \right\| \leq 0.02,$$

для всіх $u \in \mathbb{R}^1$, то для всіх $(p, r) \in \Omega_p \times \Omega_r$, де $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \le 0.002\}$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^1 \mid |r| < c\}$, $c > 0$, існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується.

Виберемо матриці $P_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{pmatrix}$ і утворимо скалярну функцію вигляду (3.32). Переконаємось, що для вибраних матриць виконується співвідношення (3.29) і для області $P = \{p \in \mathbb{R}^1 \mid |p| \le 0.002\}$ та величини $\alpha = 0.003$ справедливі оцінки (3.30). Таким чином, якщо функція $\varphi(u)$ при всіх $u \in \mathbb{R}^1$ задовольняє оцінку

$$\left\| \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_u - \frac{d\varphi(u)}{du}\Big|_{u=0} \right\| \le 0.003,$$

то система, що досліджується, згідно Теореми 3.5, глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P \times \Omega_r$, де $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^1 \mid |r| < c\}$, $c > 0$, для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.



а) б)

Рис. 3.3 – Поведінка змінних. Приклад 3.3

Вибравши $\varphi(u) = -0.0015\sin(r + 82x_1 + p^2x_2) + 1.0015(r + 82x_1 + p^2x_2)$, переконаємось, що функція задовольняє отриману секторну умову. На Рис. 3.3 представлені графіки, які ілюструють поведінку змінних

$x^T = (x_1,\ x_2)$, $y^T = (y_1,\ y_2)$ системи, що розглядається, при $p = 0.002$, $\varepsilon = 0.1$, $r = -25$, $x_0^T = (-5,\ 5)$, $y_0^T = (100,\ -200)$.

3.4 Результати та висновки

Звичний підхід до аналізу різнотемпових систем диференціальних рівнянь полягає у розділенні рухів на “швидкі” та “повільні” і подальший їх аналіз згідно відповідних шкал. Цей підхід, запропонований Тихоновим та згодом розвинутий та вдосконалений Васильєвою, Бутузовим, Красовським, Градштейном та ін. (див. [9, 16, 17, 33, 69]), передбачає можливість виділення відповідних підсистем та наявність певних відомостей про їх динамічні характеристики. В протилежному випадку застосування вказаного підходу стикається зі значними труднощами. В розділі 3 для їх подолання застосовано метод функцій Ляпунова.

Підхід, запропонований у розділі 2, який дає можливість оцінити область у просторі параметрів системи, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується, адаптовано до класів неточних різнотемпових систем типу Лур’є–Постнікова, які не допускають виділення “швидкої” та “виродженої” підсистем через те, що неможливо аналітично розв’язати відповідні алгебраїчні рівняння. Як і для підходу, запропонованого у розділі 2, відповідні оцінки областей і оцінки на нелінійності, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому відомому значенні параметра.

Якщо в системі диференціальних рівнянь, що розглядається, лінійні наближення підсистем початкової системи стійкі при деякому значенні параметра, то запропоновано спосіб побудови векторної функції Ляпунова, метод порівняння з якою дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості початкової системи та встановити область такої стійкості у просторі її параметрів. У випадку, коли вказані лінійні наближення нестійкі, запропоновано спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова, використання якої дозволяє отримати аналогічні результати. Даний підхід, також, дозволяє отримати оцінку інтервалу зміни параметра, що визначає відношення швидкостей “швидких” та “повільних” рухів.

Для випадку, коли початкова система диференціальних рівнянь спеціального вигляду допускає виділення “швидкої” та “виродженої” підсистем, але вони не мають динамічних характеристик, потрібних для застосування підходу, розглянутого у розділі 2, запропоновано спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова, використання якої дозволяє встановити достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості початкової системи та встановити область такої стійкості у просторі її параметрів для всіх значень параметра, що визначає відношення швидкостей “швидких” та “повільних” рухів, з інтервалу $(0,\ 1]$.

Основні результати цього розділу викладено в роботах [47, 49, 80].

Розділ 4

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ПОБУДОВИ КЕРУВАННЯ НЕТОЧНИМИ РІЗНОТЕМПОВИМИ СИСТЕМАМИ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ

Даний розділ присвячено розвитку прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості та побудові керування неточними різнотемповими системами диференціальних рівнянь в загальному вигляді.

Загальний вигляд функцій, які входять до складу систем, що розглядаються в цьому розділі, унеможливлює застосування методу розділення рухів різнотемпових систем, який базується на результатах Тихонова та його послідовників (див. [9, 69]), оскільки цей метод потребує наявності в явному вигляді розв'язку деякого рівнняння, який в контексті загального вигляду відповідної функції та її нелінійності отримати досить складно. Альтернативним і найбільш загальним методом дослідження нелінійних систем, до яких відносяться і різнотемпові системи, що розглядаються в цьому розділі, є другий (прямий) метод Ляпунова (див. [40]). Він дозволяє встановити динамічні характеристики системи, яка досліджується, не знаходячи її розвязку, що для нелінійних систем практично завжди являє собою суттєву складність, а також не вдаючися до її лінеаризації, що у випадку, наприклад, дослідження глобальної стійкості не приведе до бажаного результату. Однак, на практиці, застосування цього методу ускладнюється відсутністю регулярних методів побудови відповідної функції. Тому вдосконалення існуючих та розробка нових методик та способів побудови функцій Ляпунова для різних класів нелінійних систем є актуальною та важливою задачею.

В підрозділі 4.1 запропоновано спосіб оцінки області у просторі параметрів систем вказаних типів, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги таких систем. Зауважимо, що на відміну від розділів 2 та 3, де таку область було знайдено з умов збіжності ітераційного процесу, в цьому розділі оцінку шуканої області отримано з оцінок областей невиродженості матриць, від яких залежать розвязкі відповідних рівнянь.

В підрозділі 4.2 встановлено достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості різнотемпової системи диференціальних рівнянь відносно певної області у просторі її параметрів. Оскільки ніяких відомостей про стійкість лінійних наближень відповідних рівнянь початкової системи, які б дозволили побудувати компоненти векторної функції Ляпунова, нема, то для дослідження стійкості всієї системи було застосовано матричнозначну функцію Ляпунова.

Підрозділ 4.3 присвячено розширенню результатів підрозділу 4.2 на випадок великомасштабності системи, яка досліджується. В цьому випадку, окрім “звичних” труднощів, які виникають при дослідженні великомасштабних систем, додаються труднощі, пов’язані із наявністю декількох параметрів при старших похідних відповідних рівнянь (див. [18]). Розглядається випадок, коли такі параметри взаємно не зв’язані, тому початкова система має декілька істотно незалежних часових шкал. Розбивши вектори стану системи на субвектори, великомасштабна система розглядається у вигляді сукупності взаємозв’язаних підсистем. Для встановлення достатніх умов глобальної параметричної асимптотичної стійкості початкової системи застосовується скалярна функція Ляпунова у вигляді суми функцій, які будуються для незалежних підсистем згідно результатів підрозділу 4.2.

В підрозділі 4.4 запропоновано спосіб побудови керування для параметричної стабілізації системи, що розглядалася у підрозділі 4.2, у випадку її параметричної нестійкості. Вказано спосіб вибору матриць керування і спосіб побудови векторної функції Ляпунова, за допомогою якої встановлено глобальну параметричну асимптотичну стійкість початкової системи при запропонованому керуванні.

4.1 Методика оцінки області існування єдиного стану рівноваги системи диференціальних рівнянь в просторі її параметрів

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)x + A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1 x + K_2 y), \\ 0 = A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1 x + K_2 y), \end{cases} \tag{4.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ – змінні, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$ – деякі їх фіксовані значення, $p \in \mathbb{R}^l$ – векторний параметр, матриці $A_{11}(x, y, p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(x, y, p) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(x, y, p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(x, y, p) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ мають елементи, які неперервно залежать від x, y, p, матриці $B_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, мають елементи, які неперервно залежать від p, $K_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{k\times m}$ – деякі сталі матриці.

Припущення 4.1. *Система рівнянь (4.1) така, що*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що при цьому значенні параметра існує розв'язок $x = x^*$, $y = y^*$ цієї системи;

(2) існують такі додатні числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta < +\infty$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}(x, y, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*)\| \le \alpha, \quad \|A_{12}(x, y, p) - A_{12}(x^*, y^*, p^*)\| \le \beta,$$

$$\|A_{21}(x,y,p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|\le\gamma,\quad \|A_{22}(x,y,p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\|\le\delta$$

для всіх $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $p\in P\subseteq\mathbb{R}^l$;

(3) матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1$ *і*

$$A=A_{22}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_2-\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\times$$

$$\times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)$$

невироджені.

Позначимо

$$M(\alpha)=$$

$$=\frac{\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|^2(\alpha+\max\limits_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)}{1-\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha+\max\limits_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)}$$

і сформулюємо та доведемо теорему, яка дозволить встановити область $P\subseteq\mathbb{R}^l$, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний розвязок системи рівнянь (4.1).

Теорема 4.1. *Нехай система рівнянь (4.1) задовольняє умовам Припущення 4.1 і справедливі співвідношення*

$$\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|(\alpha+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)<1, \quad (4.2)$$

$$\|A^{-1}\|\Big(\delta+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\|A^{-1}\|\Bigg[\Big(\gamma+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)M(\alpha)\times$$

$$\times\Big(\beta+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\Big(\beta+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\|+$$

$$+\Big(\gamma+\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\|+$$

$$+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)\|M(\alpha)\Big(\beta+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)\|\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\|\times$$

$$\times\Big(\beta+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+\|(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)\times$$

$$\times\|M(\alpha)\|(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\|\Bigg]<1. \qquad (4.3)$$

Тоді для всіх значень параметра p з області P існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.1).

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p з області P і розглянемо систему (4.1) при цьому значенні параметра. Так як матриця $A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1$ невироджена, то можемо представити матрицю $A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1$ наступним чином:

$$A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1=A_{11}(x^*,y^*,p^*)+$$

$$+(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1+B_1(p^*)K_1=$$

$$=\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)\Big(I^{n\times n}+\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big]\Big),$$

де $I^{n\times n}$ – одинична матриця відповідної розмірності, звідки слідує, що невиродженість початкової матриці еквівалентна невиродженості матриці

$$I^{n\times n}+\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big],$$

що має місце, якщо виконується співвідношення

$$\Big\|\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big]\Big\|<1.$$

Враховуючи оцінку

$$\Big\|\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)+(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big]\Big\|\leq$$

$$\leq\Big\|\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big\|\times$$

$$\times\Big(\|A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\|+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|\Big)\leq$$

$$\leq\Big\|\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big\|(\alpha+\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_1\|)$$

і співвідношення (4.2) отримаємо, що матриця $A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1$ невироджена при всіх значеннях $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$ і вибраному значенні параметра p. Це означає, що з першого рівняння системи (4.1) змінна x виражається наступним чином:

$$x=-\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1\Big)^{-1}\Big((A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)y+C_1(p)\Big).$$

Підставивши цей вираз у друге рівняння системи (4.1), отримаємо після деяких перетворень співвідношення, з якого визначається змінна y:

$$\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_2 - (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1} \times$$

$$\times (A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2)\Big) y =$$

$$= \Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1\Big)\Big(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1\Big)^{-1} C_1(p) - C_2(p).$$

Існування розв'язку цього рівняння при деяких значеннях змінних $\tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ та вибраному значенні параметра p еквівалентно невиродженості матриці

$$A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_2 - (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1) \times$$

$$\times (A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2).$$

Перепишемо цю матрицю в наступному вигляді:

$$A\Bigg(I^{m\times m} + A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)) + (B_2(p) - B_2(p^*))K_2 +$$

$$+ (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2) -$$

$$- (A_{21}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1} \times$$

$$\times (A_{12}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_2)\Big)\Bigg).$$

Так як матриця A невироджена згідно умов Припущення 4.1, то невиродженість матриці, що розглядається, слідує з невиродженості матриці

$$I^{m\times m} + A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)) + (B_2(p) - B_2(p^*))K_2 +$$

$$+ (A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1(p)K_2) -$$

$$- (A_{21}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^{-1} \times$$

$$\times(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\Big),$$

що має місце, якщо виконується оцінка

$$\Big\| A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_2+$$

$$+(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)-$$

$$-(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\times$$

$$\times\,(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\Big)\Big\|<1. \tag{4.4}$$

Оцінимо величину норми у лівій частині співвідношення (4.4). Розглянемо різницю

$$(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)-$$

$$-(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\times$$

$$\times(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)=$$

$$=\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times$$

$$\times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+$$

$$+\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times$$

$$\times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$+\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+$$

$$+\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times$$

$$\times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+$$

$$+\Big[(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big]\times$$

$$\times\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+$$

$$+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times$$

$$\times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+$$

$$+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big[(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*))+(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big]+$$

$$+\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times$$

$$\times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big). \tag{4.5}$$

Тоді, враховуючи (4.5), можемо оцінити величину норми в лівій частині нерівності (4.4).

$$\Bigg\|A^{-1}\Big((A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*))+(B_2(p)-B_2(p^*))K_2+$$

$$+(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1)(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2)-$$

$$-(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1)(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\times$$

$$\times(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2)\Big)\Bigg\|\leq$$

$$\leq \|A^{-1}\|\Big(\delta+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_2\|\Big)+\|A^{-1}\|\Bigg[\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times$$

$$\times\Big[(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big]\times$$

$$\times\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$

$$\times\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times$$

$$\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$

$$\times\Big\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big\|+\Big(\gamma+\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\|K_1\|\Big)\times$$

$$\times\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\Big\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big\|+$$

$$+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$

$$\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$

$$\times\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$

$$\times\Big\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\Big(\beta+\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\|K_2\|\Big)+$$

$$+\Big\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big\|\times$$

$$\times\Big\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\Big\|\times$$

$$\times\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)\Bigg]. \tag{4.6}$$

Оцінимо величину

$$\left\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\right\|.$$

Нехай $A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1=(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)+E$. Тоді, згідно формули 5.8.2 з [76] і (4.2)

$$\left\|(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}\right\|=$$

$$=\left\|(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1)^{-1}-(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1+E)^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq M(\alpha). \tag{4.7}$$

Таким чином, з (4.3), (4.6), (4.7) та оцінок на норми матриць з Припущення 4.1 слідує, що оцінка (4.4) виконується для вибраного значення параметра p та всіх знченнях змінних $\tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, тобто існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.1). Оскільки p довільне значення параметра з області P, то при виконанні умов Теореми 4.1 для всіх значень параметра p з області P існує єдиний розвязок системи рівнянь (4.1).

Теорему доведено.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0=A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x+A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y+C_1(p), \\ 0=A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y+C_2(p), \end{cases} \tag{4.8}$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$ – змінні, $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}}\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}}\in\mathbb{R}^m$ – деякі їх фіксовані значення, $p\in\mathbb{R}^l$ – векторний параметр, матриці $A_{11}(x,y,p)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{12}(x,y,p)\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $A_{21}(x,y,p)\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A_{22}(x,y,p)\in\mathbb{R}^{m\times m}$ мають елементи, які неперервно залежать від x,y,p, матриці $C_1(p)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $C_2(p)\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ мають елементи, які неперервно залежать від p.

Припущення 4.2. *Система рівнянь (4.8) така, що*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що при цьому значенні параметра існує розв'язок $x = x^*$, $y = y^*$ цієї системи;

(2) існують такі додатні числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta < +\infty$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}(x,y,p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\| \leq \alpha, \quad \|A_{12}(x,y,p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| \leq \beta,$$

$$\|A_{21}(x,y,p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\| \leq \gamma, \quad \|A_{22}(x,y,p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\| \leq \delta$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$;

(3) матриці $A_{11}(x^*,y^*,p^*)$ і

$$A = A_{22}(x^*,y^*,p^*) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)A_{12}(x^*,y^*,p^*)$$

невироджені.

Позначимо
$$M(\alpha) = \frac{\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|^2\alpha}{1 - \|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\alpha}$$
і сформулюємо та доведемо теорему, яка дозволить встановити область $P \subseteq \mathbb{R}^l$, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний розвязок системи рівнянь (4.8).

Теорема 4.2. *Нехай система рівнянь (4.8) задовольняє умовам Припущення 4.2 і справедливі співвідношення*

$$\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\alpha < 1, \tag{4.9}$$

$$\|A^{-1}\|\delta + \|A^{-1}\|\Bigg[\gamma M(\alpha)\beta + \gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta + \gamma M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| +$$

$$+\gamma\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\| + \|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|\|A_{11}^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\beta +$$

$$+\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)\|M(\alpha)\beta+\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)M(\alpha)\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)\|\Bigg]<1. \tag{4.10}$$

Тоді для всіх значень параметра p з області P існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.8).

Доведення. Доведення Теореми 4.2 повторює доведення Теореми 4.1, якщо матриці K_1 та K_2 нульові відповідних розмірностей.

Розглянемо систему рівнянь у вигляді сукупності підсистем

$$\begin{cases} 0=F_i(X_i,Y_i,p)+f_i(x,y,p), \\ 0=G_i(X_i,Y_i,p)+g_i(x,y,p),\ i=\overline{1,r}, \end{cases} \tag{4.11}$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$ – змінні, $x=(X_1^T,\ldots,X_r^T)^T$, $X_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $n_1+\ldots+n_r=n$, $y=(Y_1^T,\ldots,Y_r^T)^T$, $Y_i\in\mathbb{R}^{m_i}$, $m_1+\ldots+m_r=m$, векторні функції $F_i(X_i,Y_i,p)\in\mathbb{R}^{n_i}$, $G_i(X_i,Y_i,p)\in\mathbb{R}^{m_i}$ неперервно диференційовні по змінним X_i, Y_i і неперервно залежні від векторного параметра $p\in\mathbb{R}^l$, векторні функції $f_i(x,y,p)\in\mathbb{R}^{n_i}$, $g_i(x,y,p)\in\mathbb{R}^{m_i}$ неперервно диференційовні по змінним x, y і неперервно залежні від векторного параметра $p\in\mathbb{R}^l$.

Припущення 4.3. *Система рівнянь (4.11) така, що*

(1) існує значення параметра $p^*\in P\subseteq\mathbb{R}^l$ таке, що при цьому значенні параметра існує розв'язок $x=x^*$, $y=y^*$ цієї системи;

(2) існують такі додатні числа $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij},\delta_{ij}<+\infty$, що виконуються оцінки

$$\Big\|\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\Big\|\le\alpha_i,\ \Big\|\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\Big\|\le\beta_i,$$

$$\Big\|\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\Big\|\le\gamma_i,\ \Big\|\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\Big\|\le\delta_i,$$

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \alpha_{ij}, \ \left\| \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \beta_{ij},$$

$$\left\| \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \gamma_{ij}, \ \left\| \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \delta_{ij}$$

для всіх $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i, j = \overline{1, r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$;

(3) матриця

$$A(x^*, y^*, p^*) = \begin{pmatrix} M(x^*, y^*, p^*) & N(x^*, y^*, p^*) \\ L(x^*, y^*, p^*) & Q(x^*, y^*, p^*) \end{pmatrix},$$

де $M_{ii}(x, y, p) = \dfrac{\partial F_i(X_i, Y_i, p)}{\partial X_i} + \dfrac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial X_i}$, $M_{ij}(x, y, p) = \dfrac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial X_j}$,
$N_{ii} = \dfrac{\partial F_i(X_i, Y_i, p)}{\partial Y_i} + \dfrac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial Y_i}$, $N_{ij}(x, y, p) = \dfrac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial Y_j}$,
$L_{ii}(x, y, p) = \dfrac{\partial G_i(X_i, Y_i, p)}{\partial X_i} + \dfrac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial X_i}$, $L_{ij}(x, y, p) = \dfrac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial X_j}$,
$Q_{ii}(x, y, p) = \dfrac{\partial G_i(X_i, Y_i, p)}{\partial Y_i} + \dfrac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial Y_i}$, $Q_{ij}(x, y, p) = \dfrac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial Y_j}$,
$i, j = \overline{1, r}$, $i \neq j$, *невироджена.*

Позначимо

$$\Delta = \Bigg(\sum_{i=1}^{r} n_i(\alpha_i + \alpha_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \alpha_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i(\beta_i + \beta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \beta_{ij}^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} m_i(\gamma_i + \gamma_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \gamma_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i(\delta_i + \delta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \delta_{ij}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

і сформулюємо та доведемо теорему, яка дозволить встановити область $P \subseteq \mathbb{R}^l$, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний розвязок системи рівнянь (4.11).

Теорема 4.3. *Нехай система рівнянь (4.11) задовольняє умовам При-*

пущення 4.3 і справедливе співвідношення

$$\|A^{-1}(x^*, y^*, p^*)\|\Delta < 1. \tag{4.12}$$

Тоді для всіх значень параметра p з області P існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.11).

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p з області P. Для рівнянь i-ої підсистеми, використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа, отримано представлення

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, p)} X_i + \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, p)} Y_i + \tilde{c}_{1i}(p) + \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} X_i + \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} Y_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} Y_j + \hat{c}_{1i}(p),$$

$$0 = \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i, p)} X_i + \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i, p)} Y_i + \tilde{\tilde{c}}_{2i}(p) + \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} X_i + \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} Y_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} Y_j + \hat{\hat{c}}_{2i}(p), \ \ i = \overline{1, r},$$

де $\tilde{x} = (\tilde{X}_1^T, \ldots, \tilde{X}_r^T)^T$, $\tilde{y} = (\tilde{Y}_1^T, \ldots, \tilde{Y}_r^T)$, $\tilde{\tilde{x}} = (\tilde{\tilde{X}}_1^T, \ldots, \tilde{\tilde{X}}_r^T)^T$,
$\tilde{\tilde{y}} = (\tilde{\tilde{Y}}_1^T, \ldots, \tilde{\tilde{Y}}_r^T)^T$ – деякі точки відповідних просторів, $\tilde{c}_{1i}(p) = F_i(0, 0, p)$, $\hat{c}_{1i}(p) = f_i(0, 0, p)$, $\tilde{\tilde{c}}_{2i}(p) = G_i(0, 0, p)$, $\hat{\hat{c}}_{2i}(p) = g_i(0, 0, p)$ або, що те саме,

$$0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, p)} + \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} \right) X_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, p)} + \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} \right) Y_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\tilde{x}, \tilde{y}, p)} Y_j + c_{1i}(p),$$

$$0 = \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i, p)} + \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} \right) X_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i, p)} + \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)} \right) Y_i +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)}X_j+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)}Y_j+c_{2i}(p),\ i=\overline{1,r},$$

де $c_{1i}(p)=\tilde{c}_{1i}(p)+\hat{c}_{1i}(p)$, $c_{21}(p)=\tilde{\tilde{c}}_{2i}(p)+\hat{\hat{c}}_{2i}(p)$.

Використовуючи отримані представлення, перепишемо сукупність підсистем (4.11) у вигляді матричного рівняння

$$A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)z=C(p),$$

де

$$A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)=\begin{pmatrix} M(\tilde{x},\tilde{y},p) & N(\tilde{x},\tilde{y},p)\\ L(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) & Q(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\end{pmatrix},$$

$z^T=(x^T,y^T)=(X_1^T,\ldots,X_r^T,Y_1^T,\ldots,Y_r^T)$,
$C(p)^T=\Big(c_{11}(p)^T,\ldots,c_{1r}(p)^T,c_{21}(p)^T,\ldots,c_{2r}(p)^T\Big)$, з якого слідує, що якщо для деяких $\tilde{x},\tilde{\tilde{x}}$ з $\mathbb{R}^n$, $\tilde{y},\tilde{\tilde{y}}$ з $\mathbb{R}^m$, та вибраному значенні параметра p з області P визначена матриця $A^{-1}(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)$, то існує єдиний розв'язок системи (4.11).

Оскільки матриця $A(x^*,y^*,p^*)$ невироджена, то представимо матрицю $A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)$ у наступному вигляді:

$$A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)=A(x^*,y^*,p^*)+\Big(A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\Big)=$$

$$=A(x^*,y^*,p^*)\bigg(I^{2r\times 2r}+A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\Big(A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\Big)\bigg),$$

де $I^{2r\times 2r}$ – одинична матриця розмірності $2r\times 2r$. З отриманого співвідношення слідує, що невиродженість матриці $A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)$ еквівалентна невиродженості матриці

$$I^{2r\times 2r}+A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\Big(A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\Big),$$

що буде мати місце, якщо виконується співвідношення

$$\Big\|A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\Big(A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\Big)\Big\|<1. \qquad (4.13)$$

Розглянемо норму різниці матриць $\|A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\|$. Для блочної матриці, наприклад, розміру 2×2 з блоками розмірностями $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$, $m\times m$ має місце наступна оцінка

$$\left\|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\|_2 \le \left\|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\|_E =$$

$$=\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2+\sum_{i,j=1}^{m}d_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\big(SpA^TA+SpB^TB+SpC^TC+SpD^TD\big)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\big(n\|A\|_2^2+n\|B\|_2^2+m\|C\|_2^2+m\|D\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

де $\|\cdot\|_2$ – спектральна, а $\|\cdot\|_E$ – евклідова норма відповідної матриці. Очевидно, що вказана оцінка буде мати місце і для більшої кількості блоків. Таким чином, для блочної матриці $A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)$ має місце наступна оцінка її норми:

$$\|A(\tilde{x},\tilde{\tilde{x}},\tilde{y},\tilde{\tilde{y}},p)-A(x^*,y^*,p^*)\|_2\le$$

$$\le\Bigg(\sum_{i=1}^{r}n_i\Big\|\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{r} n_i \Big\| \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \Big\| \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \Big\| \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i \Big\| \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i \Big\| \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \Big\| \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \Big\| \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\Big\|_2^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \Bigg(\sum_{i=1}^{r} n_i(\alpha_i+\alpha_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \alpha_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i(\beta_i+\beta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \beta_{ij}^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i(\gamma_i+\gamma_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \gamma_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i(\delta_i+\delta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \delta_{ij}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} = \Delta. \tag{4.14}$$

Тоді, оскільки

$$\Big\| A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\Big(A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)\Big)\Big\| \leq$$

$$\leq \|A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\| \|A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)\|,$$

то враховуючи (4.12) та (4.14) отримаємо, що співвідношення (4.13) виконується для вибраного значення параметра p, тому існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.11) при цьому значенні параметра. Оскільки p довільне значення параметра з області P, то для всіх значень параметра з цієї області існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4.11).

Теорему доведено.

4.2 Достатні умови глобальної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, p), \\ \varepsilon \dot{y} = f_2(x, y, p), \end{cases} \tag{4.15}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – зміні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Вважаємо, що для системи (4.15) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Відмітимо, що стан рівноваги даної системи є рухомим. Рухомість стану рівноваги, тобто зміна його координат x та y, викликана зміною значень параметра. Крім того, зауважимо, що внаслідок нелінійності відповідних функцій виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем в загальному вигляді неможливо.

Використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для функцій

$f_1(x,y,p)$ і $f_2(x,y,p)$, систему (4.15) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y + C_1(p), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y + C_2(p), \end{cases} \tag{4.16}$$

де

$$A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}}, \quad A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}},$$

$$A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}}, \quad A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}},$$

$C_1(p) = f_1(0,0,p)$, $C_2(0,0,p) = f_2(0,0,p)$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$ – деякі точки відповідних просторів.

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стала матриця. Введемо наступні позначення:

$$A(\alpha,\gamma) = \lambda_{\max}\Big(A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_1 + P_1A_{11}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_2^T +$$

$$+P_2A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big) + 2\|P_1\|\alpha + 2\|P_2\|\gamma,$$

$$B(\beta,\delta,\varepsilon) = \lambda_{\max}\Big(A_{22}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + P_3A_{22}(x^*,y^*,p^*) + \varepsilon A_{12}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 +$$

$$+\varepsilon P_2^T A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big) + 2\|P_3\|\delta + 2\varepsilon\|P_2\|\beta,$$

$$C(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \Big\|P_1A_{12}(x^*,y^*,p^*) + P_2A_{22}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 +$$

$$+\varepsilon A_{11}(x^*,y^*,p^*)P_2\Big\| + \|P_1\|\beta + \|P_2\|\delta + \varepsilon\|P_2\|\alpha + \|P_3\|\gamma.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (4.15) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 4.4. *Нехай для системи (4.16), до якої зводиться система (4.15), виконуються умови Припущення 4.2, справедливі співвідношення*

(4.9), (4.10) і для всіх $0 < \varepsilon \le \varepsilon^* < \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_3)}{\lambda_{\max}(P_2P_2^T)}$ *вірні оцінки*

$$A(\alpha,\gamma) < 0, \tag{4.17}$$

$$A(\alpha,\gamma)B(\beta,\delta,\varepsilon) - C^2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) > 0. \tag{4.18}$$

Тоді система (4.15) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P *для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

Доведення. Оскільки для системи вигляду (4.8), з якої визначається стан рівноваги системи (4.16) виконуються умови Теореми 4.2, то для всіх значень параметра p з області P існує єдиний стан рівноваги системи (4.16), а отже, очевидно, системи (4.15).

Нехай p – довільне значення параметра з області P і $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ відповідний йому стан рівноваги системи (4.15). Розглянемо матричнозначну функцію наступного вигляду (див. [149, 150])

$$V(x,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\varepsilon) \\ v_{21}(x,y,\varepsilon) & v_{22}(y,\varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

де $v_{11}(x) = (x - x^e)^T P_1 (x - x^e)$, $v_{22}(y,\varepsilon) = \varepsilon (y - y^e)^T P_3 (y - y^e)$, $v_{21}(x,y,\varepsilon) = v_{12}(x,y,\varepsilon) = \varepsilon (x - x^e)^T P_2 (y - y^e)$, $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стала матриця. Вибравши вектор $\eta^T = (1,1)$, слідуючи [149], утворимо скалярну функцію

$$v(x,y,\varepsilon) = \eta^T V(x,y,\varepsilon)\eta. \tag{4.20}$$

Враховуючи, що для елементів матричнозначної функції (4.19) мають місце оцінки $v_{11}(x) \ge \lambda_{\min}(P_1)\|x - x^e\|^2$, при всіх $x \in \mathbb{R}^n$,
$v_{22}(y,\varepsilon) \ge \mu\lambda_{\min}(P_3)\|y - y^e\|^2$, при всіх $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$,

$v_{12}(x,y,\varepsilon) \geq -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2}\|x-x^e\|\|y-y^e\|$, при всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1]$, для скалярної функції (4.20) має місце наступна оцінка
$v(x,y,\varepsilon) \geq u^T A(\varepsilon)u$, при всіх $(x,y,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0,1]$,
де $u^T = (\|x-x^e\|, \|y-y^e\|)$,

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2} \\ -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_2P_2^T))^{1/2} & \varepsilon\lambda_{\min}(P_3) \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

При всіх $\varepsilon < \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_3)}{\lambda_{\max}(P_2P_2^T)}$ матриця (4.21) додатно визначена, тобто скалярна функція (4.20) додатно визначена за Ляпуновим.

Знайдемо похідну функції (4.20) по часу в силу системи (4.15).

$$\dot{v}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(4.15)} = \Big(f_1(x,y,p) - f_1(x^e,y^e,p)\Big)^T P_1(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_1\Big(f_1(x,y,p)-f_1(x^e,y^e,p)\Big)+2(x-x^e)^T P_2\Big(f_2(x,y,p)-f_2(x^e,y^e,p)\Big)+$$

$$+2\varepsilon\Big(f_1(x,y,p)-f_1(x^e,y^e,p)\Big)^T P_2(y-y^e)+\Big(f_2(x,y,p)-f_2(x^e,y^e,p)\Big)^T P_3(y-y^e)+$$

$$+(y-y^e)^T P_3\Big(f_2(x,y,p)-f_2(x^e,y^e,p)\Big), \tag{4.22}$$

де $f_1(x^e,y^e,p) = 0,\ f_2(x^e,y^e,p) = 0$.

Використовуючи співідношення

$$f_1(x,y,p) - f_1(x^e,y^e,p) = A_{11}(x^*,y^*,p^*)(x-x^e) + A_{12}(x^*,y^*,p^*)(y-y^e)+$$

$$+\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)(x-x^e)+\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)(y-y^e),$$

$$f_2(x,y,p) - f_2(x^e,y^e,p) = A_{21}(x^*,y^*,p^*)(x-x^e) + A_{22}(x^*,y^*,p^*)(y-y^e)+$$

$$+\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)(x-x^e)+\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)(y-y^e),$$

які отримані за допомогою формули скінченних приростів Лагранжа, з (4.22) отримаємо

$$\dot{v}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(4.15)} = (x-x^e)^T\Big[A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_1 + P_1A_{11}(x^*,y^*,p^*)+$$

$$+\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_1 + P_1\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+P_2A_{21}(x^*,y^*,p^*) + A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_2^T + \Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2+$$

$$+P_2\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)\Big](x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T\Big[A_{22}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + P_3A_{22}(x^*,y^*,p^*)+$$

$$+\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_3 + P_3\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\varepsilon\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2 + \varepsilon P_2^T\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\varepsilon A_{12}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 + \varepsilon P_2A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big](y-y^e)+$$

$$+(x-x^e)^T\Big[P_1A_{12}(x^*,y^*,p^*) + P_1\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+P_2A_{22}(x^*,y^*,p^*) + P_2\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\varepsilon A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 + \varepsilon\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2+$$

$$+A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + \Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_3\Big](y-y^e)+$$

$$+(y-y^e)^T\Big[P_1A_{12}(x^*,y^*,p^*) + P_1\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+P_2A_{22}(x^*,y^*,p^*) + P_2\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\varepsilon A_{11}^T(x^*,y^*,p^*)P_2 + \varepsilon\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p) - A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_2+$$

$$+A_{21}^T(x^*,y^*,p^*)P_3 + \Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p) - A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_3\Big]^T(x-x^e) \le$$

$$\leq (\|x - x^e\|, \|y - y^e\|) D(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) (\|x - x^e\|, \|y - y^e\|)^T, \tag{4.23}$$

де

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \begin{pmatrix} A(\alpha, \gamma) & C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \\ C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) & B(\beta, \delta, \varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Згідно співвідношень (4.17), (4.18), матриця (4.24) від'ємно визначена для вибраного p і всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, тобто похідна функції (4.20) по часу в силу системи (4.15) від'ємна для всіх $(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon^*]$, окрім рівноважних значень змінних. Отже, функція (4.20) є функцією Ляпунова, яка в силу теореми Барбашина-Красовського (див. [3]) дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ системи (4.15). Так як p довільна точка області P, то система (4.15) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Теорему доведено.

Приклад 4.1. В якості прикладу застосування Теореми 4.4, розглянемо неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь четвертого порядку зі скалярним параметром

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 20y_1 - 0,2\cos(x_1 + y_1 + p) + 0,2, \\ \dot{x}_2 = 0,8x_2 - 20,2y_2 + \arctan(0,2(x_2 + y_2)) + \pi p^5, \\ \varepsilon \dot{y}_1 = x_1 - 4y_1 + 0,2\sin^2(p) \ln \dfrac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}}{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 1}}, \\ \varepsilon \dot{y}_2 = x_2 - 4,2y_2 - 0,2\cos(px_2) + \arctan(0,2y_2) + 0,2. \end{cases} \tag{4.25}$$

Система (4.25) при $p^* = 0$ має стан рівноваги $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$ і для похідних функцій, що входять до її складу, виконуються рівності

$$A_{11}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Крім того $A(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Для всіх $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $p \in [-1, 1]$ справедливі оцінки

$$\|A_{11}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{11}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leq \alpha,$$

$$\|A_{12}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{12}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leq \beta,$$

$$\|A_{21}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{21}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leq \gamma,$$

$$\|A_{22}(x_1, x_2, y_1, y_2, p) - A_{22}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*, p^*)\| \leq \delta,$$

де $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.12$. Тобто всі умови Припущення 4.2 виконуються.

Побудуємо матричнозначну функцію вигляду (4.19), де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

і визначимо верхню оцінку для величини малого параметра: $\varepsilon < 0.6$. Для системи (4.25) виконуються співвідношення (4.9), (4.10), (4.17), (4.18) при всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.32]$. Отже, згідно Теореми 4.2, система (4.25) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P = \{p \in \mathbb{R} |\ |p| \leq 1\}$. Нижче, на Рис. 4.1 представлені графіки, які ілюструють поведінку розв'язків системи (4.25) при значеннях параметра $p = 0.9$, $\varepsilon = 0.23$ і початкових значеннях змінних $x_{1_0} = 70$, $x_{2_0} = 25$, $y_{1_0} = -30$, $y_{2_0} = -50$.

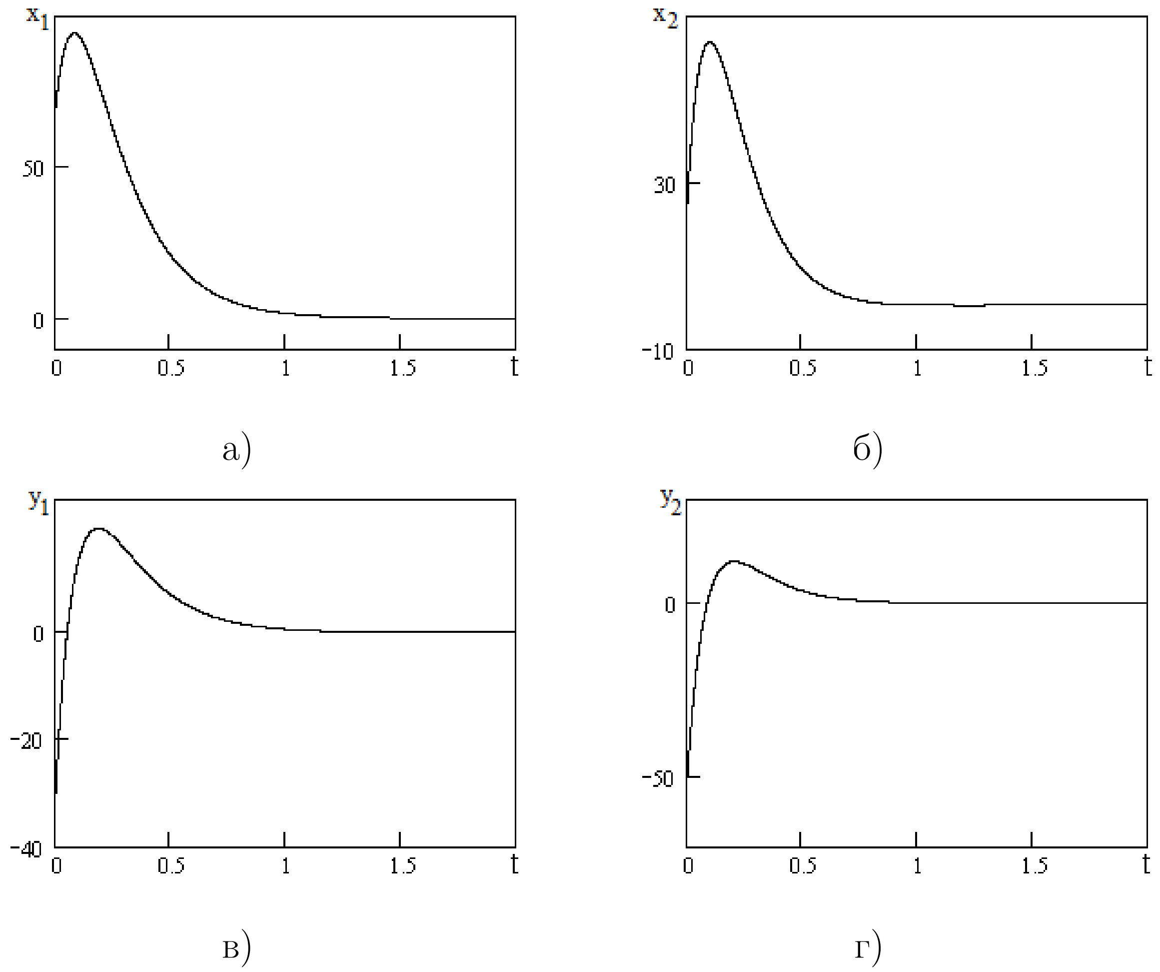


Рис. 4.1 – Поведінка змінних. Приклад 4.1

4.3 Достатні умови глобальної асимптотичної стійкості рухомого стану рівноваги великомасштабної системи

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову великомасштабну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{F}(x, y, p), \\ \varepsilon_i \dot{Y}_i = \bar{G}_i(x, y, p), \; i = \overline{1, r}, \end{cases} \tag{4.26}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $y = (Y_1^T, \ldots, Y_r^T)^T$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ – субвектори вектора y, $m_1 + \ldots + m_r = m$, $\bar{F}(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{G}_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^{m_i}$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, r}$. Вважаємо, що для системи (4.26) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Оскільки параметри ε_i взаємно не пов'язані, то система (4.26) має r істотно незалежних часових шкал, тобто градуювання часової шкали нерівномірне.

Зауважимо, що стан рівноваги даної системи є рухомим. Рухомість стану рівноваги, тобто зміна його координат x та y, викликана зміною значень параметра.

Представимо систему (4.26) як сукупність r взаємозв'язаних різнотемпових підсистем

$$\begin{cases} \dot{X}_i = F_i(X_i, Y_i, p) + f_i(x, y, p), \\ \varepsilon_i \dot{Y}_i = G_i(X_i, Y_i, p) + g_i(x, y, p), \end{cases} \tag{4.27}$$

де $x = (X_1^T, \ldots, X_r^T)^T$, $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – субвектори вектора x, $n_1 + \ldots + n_r = n$, $\bar{F} = (\bar{F}_1^T, \ldots, \bar{F}_r^T)^T$, $\bar{F}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – субвектори вектора $\bar{F}$, функції $F_i(X_i, Y_i, p) = \bar{F}_i(0, \ldots, X_i, \ldots, 0, \ldots, Y_i, \ldots, 0, p)$ та $G_i(X_i, Y_i, p) = \bar{G}_i(0, \ldots, X_i, \ldots, 0, \ldots, Y_i, \ldots, 0, p)$ описують динаміку підсистем, $f_i(x, y, p) = \bar{F}_i(x, y, p) - F_i(X_i, Y_i, p)$ та $g_i(x, y, p) = \bar{G}_i(x, y, p) - G_i(X_i, Y_i, p)$ – функції взаємодії.

Нехай для деякого значення параметра p система (4.26) має стан рівноваги $\Big((x^e)^T, (y^e)^T\Big)$, $x^e = \Big((X_1^e)^T, \ldots, (X_r^e)^T\Big)^T$, $y^e = \Big((Y_1^e)^T, \ldots, (Y_r^e)^T\Big)^T$, так що

$$\begin{cases} 0 = F_i(X_i^e, Y_i^e, p) + f_i(x^e, y^e, p), \\ 0 = G_i(X_i^e, Y_i^e, p) + g_i(x^e, y^e, p), \ i = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{4.28}$$

Зауважимо, що з (4.28) не слідує

$$\begin{cases} 0 = F_i(X_i^e, Y_i^e, p), \\ 0 = G_i(X_i^e, Y_i^e, p), \ i = \overline{1, r}, \end{cases}$$

тобто $\left((X_i^e)^T, (Y_i^e)^T\right)$ не обов'язково є станом рівноваги i-ої незалежної різнотемпової підсистеми. Визначимо функції

$$\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) = F_i(X_i, Y_i, p) - F_i(X_i^e, Y_i^e, p),$$

$$\tilde{f}_i(x, y, p) = f_i(x, y, p) - f_i(x^e, y^e, p),$$

$$\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) = G_i(X_i, Y_i, p) - G_i(X_i^e, Y_i^e, p),$$

$$\tilde{g}_i(x, y, p) = g_i(x, y, p) - g_i(x^e, y^e, p), \ i = \overline{1, r}$$

і розглянемо сукупність підсистем

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) + \tilde{f}_i(x, y, p), \\ \varepsilon_i \dot{Y}_i = \tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) + \tilde{g}_i(x, y, p), \ i = \overline{1, r}, \end{cases} \tag{4.29}$$

де $\tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p) = 0$, $\tilde{f}_i(x^e, y^e, p) = 0$, $\tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p) = 0$, $\tilde{g}_i(x^e, y^e, p) = 0$ при всіх $i = \overline{1, r}$ і яка, очевидно, має однакові розв'язки з системою (4.27) при однакових початкових умовах. Таким чином, разом із системою (4.27) будемо досліджувати систему (4.29).

Нехай $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $P_{i3} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ – стала матриця, $i = \overline{1, r}$,

$$N = \begin{pmatrix} K & L \\ L^T & M \end{pmatrix}, \; K, L, M \in \mathbb{R}^{r \times r},$$

$$K_{ii} = \lambda_{\max}\Bigg[\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)}\right)^T P_{i1} + P_{i1}\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} +$$

$$+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2}\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} +$$

$$+\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\right)^T P_{i1} + P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} +$$

$$+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\Bigg] +$$

$$+2\alpha_i\|P_{i1}\| + 2\alpha_{ii}\|P_{i1}\| + 2\gamma_i\|P_{i2}\| + 2\gamma_{ii}\|P_{i2}\|,$$

$$K_{ij} = K_{ji} = \left\|P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\right\| + \alpha_{ij}\|P_{i1}\| + \gamma_{ij}\|P_{i2}\|,$$

$$M_{ii} = \lambda_{\max}\Bigg[\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)}\right)^T P_{i3} + P_{i3}\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} +$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)}\right)^T P_{i2} + \varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} +$$

$$+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\right)^T P_{i3} + P_{i3}\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} +$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\right)^T P_{i2} + \varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)}\Bigg] +$$

$$+2\delta_i\|P_{i3}\| + 2\delta_{ii}\|P_{i3}\| + 2\varepsilon_i\beta_i\|P_{i2}\| + 2\varepsilon_i\beta_{ii}\|P_{i2}\|,$$

$$M_{ij} = M_{ji} = \left\| P_{i3} \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + \varepsilon_i P_{i2}^T \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| + \delta_{ij}\|P_{i3}\| + \varepsilon_i \beta_{ij}\|P_{i2}\|,$$

$$L_{ii} = \left\| P_{i1} \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + P_{i1} \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} \right)^T P_{i3} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right)^T P_{i3} +$$

$$+ P_{i2} \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + P_{i2} \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} +$$

$$\left. + \varepsilon_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} \right)^T P_{i2} \right\| +$$

$$+ \varepsilon_i \alpha_i \|P_{i2}\| + \varepsilon_i \alpha_{ii} \|P_{i2}\| + \beta_i \|P_{i1}\| + \beta_{ii} \|P_{i1}\| +$$

$$+ \gamma_i \|P_{i3}\| + \gamma_{ii} \|P_{i3}\| + \delta_i \|P_{i2}\| + \delta_{ii} \|P_{i2}\|,$$

$$L_{ij} = \left\| P_{i1} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i2} \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| + \beta_{ij}\|P_{i1}\| + \delta_{ij}\|P_{i2}\| +$$

$$+ \left\| P_{j3} \frac{\partial g_j}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + \varepsilon_j P_{j2}^T \frac{\partial f_j}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| +$$

$$+ \gamma_{ji} \|P_{j3}\| + \varepsilon_j \alpha_{ji} \|P_{j2}\|, \ i, j = \overline{1, r}, \ i \neq j.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (4.26) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 4.5. *Нехай для сукупності підсистем (4.27), яка еквівалентна системі (4.26), виконуються умови Припущення 4.3, справедливе співвідношення (4.12) і для всіх* $0 < \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^* < \dfrac{\lambda_{\min}(P_{i1})\lambda_{\min}(P_{i3})}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_{i2}P_{i2}^T)}$, $i = \overline{1, r}$ *матриця N стійка. Тоді система (4.26) глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P для всіх* $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$, $i = \overline{1, r}$.

Доведення. Оскільки для сукупності підсистем вигляду (4.11), з якої визначається стан рівноваги сукупності підсистем (4.27) виконуються умови Теореми 4.3, то для всіх значень параметра p з області P існує єдиний стан рівноваги сукупності підсистем (4.27), а отже, очевидно, системи (4.26).

Нехай p – довільне значення параметра з області P і $\big((x^e)^T, (y^e)^T\big)^T$ – відповідний йому стан рівноваги системи (4.26). При деякому i з множини $\{1, \dots, r\}$ розглянемо матричнозначну функцію (див. [149, 150])

$$V_i(X_i, Y_i, \varepsilon_i) = \begin{pmatrix} v_{11}(X_i) & v_{12}(X_i, Y_i, \varepsilon_i) \\ v_{21}(X_i, Y_i, \varepsilon_i) & v_{22}(Y_i, \varepsilon_i) \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

де $v_{11}(X_i) = (X_i - X_i^e)^T P_{i1}(X_i - X_i^e)$, $v_{22}(Y_i, \varepsilon_i) = \varepsilon_i(Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e)$, $v_{21}(X_i, Y_i, \varepsilon_i) = v_{12}(X_i, Y_i, \varepsilon_i) = \varepsilon_i(X_i - X_i^e)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e)$, $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $P_{i3} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ – стала матриця. Вибравши вектор $\eta^T = (1, 1)$, слідуючи [149], утворимо скалярну функцію

$$v_i(X_i, Y_i, \varepsilon_i) = \eta^T V_i(X_i, Y_i, \varepsilon_i)\eta. \tag{4.31}$$

Так як для елементів матричнозначної функції (4.30) мають місце оцінки
$v_{11}(X_i) \geq \lambda_{\min}(P_{i1})\|X_i - X_i^e\|^2$ при всіх $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$,
$v_{22}(Y_i, \varepsilon_i) \geq \varepsilon_i \lambda_{\min}(P_{i3})\|Y_i - Y_i^e\|^2$ при всіх $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\varepsilon_i \in (0, 1]$,
$v_{12}(X_i, Y_i, \varepsilon_i) \geq -\varepsilon_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2}\|X_i - X_i^e\|\|Y_i - Y_i^e\|$ при всіх $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\varepsilon_i \in (0, 1]$,
то для скалярної функції (4.31) справедлива оцінка
$v(X_i, Y_i, \varepsilon_i) \geq u^T A_i(\varepsilon_i) u$ при всіх $(X_i, Y_i, \varepsilon_i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \times (0, 1]$, де
$u^T = (\|X_i - X_i^e\|, \|Y_i - Y_i^e\|)$,

$$A_i(\varepsilon_i) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_{i1}) & -\varepsilon_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2} \\ -\varepsilon_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2} & \varepsilon_i \lambda_{\min}(P_{i3}) \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Знайдемо похідну функції (4.31) по часу в силу i-ої підсистеми (4.29).

$$\dot{v}_i(X_i, Y_i, \varepsilon_i)\Big|_{(4.29)} = \Big(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big)^T P_{i1}(X_i - X_i^e) +$$

$$+\Big(\tilde{f}_i(x, y, p) - \tilde{f}_i(x^e, y^e, p)\Big)^T P_{i1}(X_i - X_i^e) +$$

$$+(X_i - X_i^e)^T P_{i1}\Big(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big) +$$

$$+(X_i - X_i^e)^T P_{i1}\Big(\tilde{f}_i(x, y, p) - \tilde{f}_i(x^e, y^e, p)\Big) +$$

$$+\Big(\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big)^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e) +$$

$$+\Big(\tilde{g}_i(x, y, p) - \tilde{g}_i(x^e, y^e, p)\Big)^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e) +$$

$$+(Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}\Big(\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big) +$$

$$+(Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}\Big(\tilde{g}_i(x, y, p) - \tilde{g}_i(x^e, y^e, p)\Big) +$$

$$+2\varepsilon_i\Big(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e) +$$

$$+2\varepsilon_i\Big(\tilde{f}_i(x, y, p) - \tilde{f}_i(x^e, y^e, p)\Big)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e) +$$

$$+ 2(X_i - X_i^e)^T P_{i2}\Big(\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\Big) +$$

$$+2(X_i - X_i^e)^T P_{i2}\Big(\tilde{g}_i(x, y, p) - \tilde{g}_i(x^e, y^e, p)\Big), \tag{4.33}$$

де враховано, що

$$\tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p) + \tilde{f}_i(x^e, y^e, p) = 0,$$

$$\tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p) + \tilde{g}_i(x^e, y^e, p) = 0.$$

Використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для відповідних різниць, з (4.3) отримаємо

$$\dot{v}_i(X_i,Y_i,\varepsilon_i)\Big|_{(4.29)} = (X_i-X_i^e)^T\left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + P_{i1}\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2}\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} +$$

$$+P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} +$$

$$+2P_{i1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) + 2P_{i1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) +$$

$$+2P_{i2}\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) +$$

$$\left. +2P_{i2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](X_i-X_i^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(X_i-X_i^e)^T\left[P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) + \right.$$

$$\left. +P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](X_j-X_j^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(X_j-X_j^e)^T\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + \right.$$

$$\left. +\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T\right](X_i-X_i^e) +$$

$$+(X_i-X_i^e)^T\left[P_{i1}\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + P_{i1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) + \right.$$

$$+P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+P_{i2}\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i2}\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+$$

$$+P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+(Y_i-Y_i^e)^T\Bigg[P_{i1}\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+$$

$$+P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+P_{i2}\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i2}\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+$$

$$+P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg]^T(X_i-X_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_j-Y_j^e)^T\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1}+\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T\right](X_i-X_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(X_i-X_i^e)^T\left[P_{i1}\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i1}\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+\right.$$

$$\left.+P_{i2}\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i2}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](Y_j-Y_j^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(X_j-X_j^e)^T\left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\right](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_i-Y_i^e)^T\left[P_{i3}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+\varepsilon_i P_{i2}^T\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](X_j-X_j^e)+$$

$$+(Y_i-Y_i^e)^T\Bigg[\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+P_{i3}\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+P_{i3}\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+$$

$$+2P_{i3}\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+2P_{i3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+2\varepsilon_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+2\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\Bigg](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_j-Y_j^e)^T\Bigg[\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\varepsilon_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\Bigg](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_i-Y_i^e)^T\Bigg[P_{i3}\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+\varepsilon_i P_{i2}^T\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}+\varepsilon_i P_{i2}^T\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg](Y_j-Y_j^e). \quad (4.34)$$

Розглянемо скалярну функцію

$$V(x,y,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{r}v_i(X_i,Y_i,\varepsilon_i),\ \varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)^T, \tag{4.35}$$

утворену з функцій (4.31), які побудовані за допомогою матричнозначних функцій (4.30). При всіх $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$, $i = \overline{1, r}$, матриці (4.32) додатно визначені, тобто скалярні функції (4.31) додатно визначені за Ляпуновим. Очевидно, що функція (4.35) також додатно визначена за Ляпуновим. Для похідної функції $V(x, y, \varepsilon)$ в силу сукупності підсистем (4.29), тобто в силу початкової системи, враховуючи (4.34), отримаємо оцінку

$$\dot{V}(x, y, \varepsilon)\Big|_{(4.29)} \leq \zeta^T N \zeta, \tag{4.36}$$

де $\zeta^T = \Big(\|X_1 - X_1^e\|, \ldots, \|X_r - X_r^e\|, \|Y_1 - Y_1^e\|, \ldots, \|Y_r - Y_r^e\|\Big)$. Так як матриця N від'ємно визначена, то похідна (4.36) від'ємна для всіх $(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \prod\limits_{i=1}^{r} (0, \varepsilon_i^*]$, окрім рівноважних значень змінних. Отже функція (4.35) є функцією Ляпунова, яка дозволяє в силу теореми Барбашина-Красовського (див. [3]) встановити глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги $\Big((x^e)^T, (y^e)^T\Big)^T$. Так як p довільна точка області P, то система (4.26) глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Теорему доведено.

Приклад 4.2. В якості прикладу застосування Теореми 4.5, розглянемо неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь 8-го порядку вигляду (4.26) зі скалярним параметром, де $r = 2$, $x \in \mathbb{R}^4$, $y = (Y_1^T, Y_2^T)^T$, $Y_1 \in \mathbb{R}^2$, $Y_2 \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon_1 \in (0, 1]$, $\varepsilon_2 \in (0, 1]$. Розбивши вектор x на субвектори X_1 і X_2 наступним чином: $x = (X_1^T, X_2^T)^T$, $X_1 \in \mathbb{R}^2$, $X_2 \in \mathbb{R}^2$, представимо початкову систему у вигляді (4.27), де

$$F_1(X_1, Y_1, p) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5x_1 + 0.2x_2 - 90y_1 + 0.2y_2 - 0.15\cos(p(x_1 + y_1)) + 0.15 \\ 0.1x_1 + 0.35x_2 + 0.1y_1 - 90.15y_2 + \arctan(0.15(x_2 + y_2)) + 20p^3 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x,y,p)=\begin{pmatrix} 0.1x_3-0.3x_4-1.2y_3+0.6y_4+ \\ +0.15p^2\ln(x_3+\sqrt{x_3^2+1})(y_3+\sqrt{y_3^2+1}) \\ 0.4x_3+0.5x_4+0.4y_3-0.25y_4-0.15\cos(px_4)+ \\ +\arctan(0.15y_4)+0.15\cos(p) \end{pmatrix},$$

$$G_1(X_1,Y_1,p)=\begin{pmatrix} 29.85x_1-x_2-2y_1+0.2y_2+\arctan(0.15(x_1+p)) \\ x_1+30x_2-0.3y_1-2y_2-0.15\cos(x_2)+ \\ +0.15(1-e^{-p^2})\ln(y_2+\sqrt{x_2^2+1})+0.15 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x,y,p)=\begin{pmatrix} 2x_3+0.3x_4+0.6y_3+0.1y_4-0.15\cos(x_3+y_3)+0.15e^p \\ 0.1x_3-x_4+y_4-0.15p\cos(x_4+y_4) \end{pmatrix},$$

$$F_2(X_2,Y_2,p)=\begin{pmatrix} x_3+0.5x_4-60y_3+0.15\sin^2(p)\ln\dfrac{x_3+\sqrt{x_3^2+1}}{y_3+\sqrt{y_3^2+1}} \\ 0.85x_4+0.2y_3-60.15y_4+\arctan(0.15(x_4+y_4))+ \\ +\ln(p^2+1) \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y,p)=\begin{pmatrix} x_1+0.5x_2+0.85y_1-0.1y_2+ \\ +0.15p^4\ln(x_1+\sqrt{x_1^2+1})+\arctan(0.15y_1) \\ -0.8x_1-0.65x_2-0.4y_1+0.85y_2+ \\ +\arctan(0.15(x_2+y_2))+5p^2 \end{pmatrix},$$

$$G_2(X_2,Y_2,p)=\begin{pmatrix} 20x_3+0.2x_4-2.15y_3+0.1y_4+\arctan(0.15y_3+1-\pi^p) \\ 0.3x_3+20x_4+0.1y_3-2y_4-0.15\sin(p)\cos(x_4) \end{pmatrix},$$

$$g_2(x,y,p)=\begin{pmatrix} 0.3x_1+0.2x_2+y_1+y_2+ \\ +0.15\dfrac{p^2}{1+p^2}\ln(x_1+\sqrt{x_1^2+1})(y_1+\sqrt{y_1^2+1}) \\ -x_1-0.7x_2+y_1-y^2- \\ -0.15\cos(x_2+y_2)+0.15(p^{15}+1) \end{pmatrix}.$$

Дана система має при $p^*=0$ стан рівноваги $x^*=0$, $y^*=0$. Для похідних функцій, що входять до її складу, для всіх значень параметра з області $P=[-1,\ 1]$ справедливі оцінки на величини норм з константами $\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=\delta_i=0.15$, $\alpha_{ii}=\beta_{ii}=\gamma_{ii}=\delta_{ii}=0$, $i=1,2$, $\alpha_{ij}=\beta_{ij}=\gamma_{ij}=\delta_{ij}=0.15$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. Крім того, матриця $A(x^*,y^*,p^*)$ невироджена. Тобто виконуються всі умови Припущення 4.3. Побудуємо матричнозначні функції вигляду (4.30) для підсистем, де $P_{11}=P_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $P_{12}=P_{22}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $P_{13}=P_{23}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ і визначимо верхні оцінки для величин малих параметрів. Оскільки отримано $\varepsilon_1=\varepsilon_2=3$, то будемо розглядати $\varepsilon_1\in(0,1]$ і $\varepsilon_2\in(0,1]$. Для матриці A і величин, що фігурують в оцінках норм похідних функцій, які входять до складу системи, виконується співвідношення (4.12) і матриця N стійка для всіх $\varepsilon_1\in(0,\ 0.02]$, $\varepsilon_2\in(0,\ 0.03]$. Отже, згідно Теореми 4.5, система, що розглядається, глобально параметрично асимптотично стійка відносно області $P=[-1,\ 1]$.

На Рис. 4.2 представлені графіки, які ілюструють поведінку роз'вязків системи при $p=0.9$, $\varepsilon_1=0.015$, $\varepsilon_2=0.025$ і початкових значеннях змінних $x_0^T=(10,\ 45,\ -39,\ 75)$, $y_0^T=(210,\ -50,\ -25,\ 15)$.

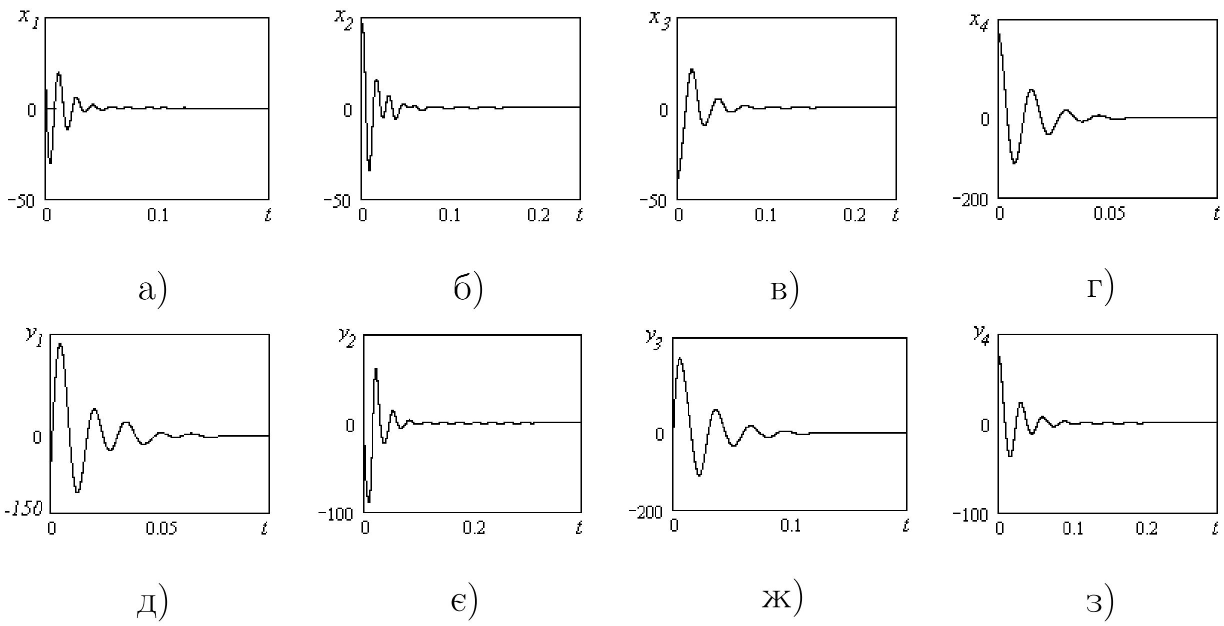


Рис. 4.2 – Поведінка змінних. Приклад 4.2

4.4 Спосіб побудови керування

Розглянемо нелінійну неточну різнотемпову систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, p), \\ \varepsilon \dot{y} = f_2(x, y, p), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи в момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Зауважимо, що стан рівноваги даної системи є рухомим. Рухомість стану рівноваги, тобто зміна його координат x та y, викликана зміною значення параметра. Введемо в систему керування таким чином, щоб забезпечити глобальну асимптотичну стійкість її рухомого стану рівноваги. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, p) + B_1(p)u, \\ \varepsilon\dot{y} = f_2(x, y, p) + B_2(p)u, \end{cases} \tag{4.37}$$

де матриці $B_1(p) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B_2(p) \in \mathbb{R}^{m\times k}$ мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра p. Керування $u \in \mathbb{R}^k$ будемо розглядати у вигляді $u = K_1x + K_2y$, де $K_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{k\times m}$ деякі сталі матриці. Вважаємо, що для системи (4.37) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для функцій $f_1(x, y, p)$ та $f_2(x, y, p)$ в околі нульових значень змінних x та y, систему (4.37) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)x + A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p)y + C_1(p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)x + A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)y + C_2(p) + B_2(p)(K_1x + K_2y), \end{cases} \tag{4.38}$$

де

$$A_{11}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) = \frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}}, \quad A_{12}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) = \frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}\\ y=\tilde{y}}},$$

$$A_{21}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) = \frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}}, \quad A_{22}(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) = \frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}\\ y=\tilde{\tilde{y}}}},$$

$C_1(p) = f_1(0, 0, p)$, $C_2(0, 0, p) = f_2(0, 0, p)$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$– деякі точки відповідних просторів.

Нехай матриці K_1 та K_2 вибрані таким чином, що матриці $A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1$ та $A_{22}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_2$ стійкі, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, $P_1^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2^* \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці, які є розв'язками алгебраїчних рівнянь Ляпунова

$$(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1)^T P_1^* + P_1^*(A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1) = -Q_1,$$

$$(A_{22}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_2)^T P_2^* + P_2^*(A_{22}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_2) = -Q_2,$$

відповідно. Ці розв'язки, очевидно, існують внаслідок вибору матриць K_1 та K_2. Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови глобальної параметричної асимптотичної стійкості системи (4.37) при керуванні u відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 4.6. *Нехай відносно системи (4.38) виконуються умови Припущення 4.1, матриці K_1 та K_2 вибрані таким чином, що матриці $A_{11}(x^*, y^*, p^*) + B_1(p^*)K_1$ та $A_{22}(x^*, y^*, p^*) + B_2(p^*)K_2$ стійкі, функції $f_1(x, y, p)$ та $f_2(x, y, p)$ задовольняють обмеженням*

$$\left\| \frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial x}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_1(x, y, p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \alpha_1 <$$

$$< \min \left\{ \alpha, \frac{\lambda_{\min}(Q_1) - 2\|P_1^*\|\|K_1\| \max\limits_{p\in P} \|B_1(p) - B_1(p^*)\|}{2\|P_1^*\|} \right\} \tag{4.39}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$,

$$\left\| \frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial y}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial f_2(x, y, p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\| \le \delta_1 <$$

$$< \min \left\{ \delta, \frac{\lambda_{\min}(Q_2) - 2\|P_2^*\|\|K_2\| \max\limits_{p\in P} \|B_2(p) - B_2(p^*)\|}{2\|P_2^*\|} \right\} \tag{4.40}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ і виконуються співвідношення (4.2), (4.3),

$$2\|P_1^*\|\|K_1\| \max_{p\in P} \|B_1(p) - B_1(p^*)\| < \lambda_{\min}(Q_1), \tag{4.41}$$

$$2\|P_2^*\|\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|<\lambda_{\min}(Q_2), \tag{4.42}$$

$$AC>BD, \tag{4.43}$$

де

$$A=-\lambda_{\min}(Q_1)+2\|P_1^*\|\Big(\alpha_1+\|K_1\|\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big),$$

$$B=2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\|+\beta+\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big),$$

$$C=-\lambda_{\min}(Q_2)+2\|P_2^*\|\Big(\delta_1+\|K_2\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big),$$

$$D=2\|P_2^*\|\Big(\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\|+\gamma+\|K_1\|\max_{p\in P}\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big).$$

Тоді система (4.37) при керуванні $u=K_1x+K_2y$ глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P для всіх $\varepsilon\in(0,1]$.

Доведення. Оскільки для системи вигляду (4.1), з якої визначається стан рівноваги системи (4.38) виконуються умови Теореми 4.1, то для всіх значень параметра p з області P існує єдиний стан рівноваги системи (4.38), а отже, очевидно, системи (4.37). Нехай p – довільне значення параметра з області P і $((x^e)^T,(y^e)^T)^T$ – відповідний йому стан рівноваги. Розглянемо векторну функцію

$$V(x,y)=(v_1(x),v_2(y))^T, \tag{4.44}$$

де $v_1(x)=(x-x^e)^TP_1^*(x-x^e)$, $v_2(y)=(y-y^e)^TP_2^*(y-y^e)$ і оцінимо похідні її компонент по часу вздовж розв'язків системи (4.38). Для першої компоненти:

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(4.38)}=\dot{x}^TP_1^*(x-x^e)+(x-x^e)^TP_1^*\dot{x}=$$

$$=\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x+A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y+C_1(p)+B_1(p)(K_1x+K_2y)\Big)^TP_1^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^TP_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x+A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y+C_1(p)+B_1(p)(K_1x+K_2y)\Big)=$$

$$= (x-x^e)^T\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1\Big)^T P_1^*(x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2\Big)^T P_1^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_1\Big)(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_1^* + \Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1(p)K_2\Big)(y-y^e), \tag{4.45}$$

де враховано, що

$$A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)x^e + A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)y^e + C_1(p) + B_1(p)(K_1x^e+K_2y^e) = 0.$$

З (4.45) отримаємо

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(4.38)} = (x-x^e)^T\Bigg[\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)^T P_1^*+$$

$$+P_1^*\Big(A_{11}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_1\Big)\Bigg](x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T\Bigg[\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_1^*+$$

$$+P_1^*\Big(A_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{11}(x^*,y^*,p^*)\Big)+$$

$$+\Big((B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Big)^T P_1^* + P_1^*(B_1(p)-B_1(p^*))K_1\Bigg](x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T\Bigg[\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)^T P_1^*+$$

$$+\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)^T P_1^* + \Big((B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Big)^T P_1^*\Bigg](x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T\Bigg[P_1^*\Big(A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\Big)+$$

$$+P_1^*\Big(A_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}(x^*,y^*,p^*)\Big)+P_1^*(B_1(p)-B_1(p^*))K_2\Bigg](y-y^e)\leq$$

$$\leq\Big[-\lambda_{\min}(Q_1)+2\|P_1^*\|\Big(\alpha_1+\|K_1\|\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big)\Big]\|x-x^e\|^2+$$

$$+2\|P_1^*\|\Big(\|A_{12}(x^*,y^*,p^*)+B_1(p^*)K_2\|+$$

$$+\beta+\|K_2\|\|B_1(p)-B_1(p^*)\|\Big)\|x-x^e\|\|y-y^e\|. \qquad (4.46)$$

Продовжимо оцінку (4.46), враховуючи що

$$\lambda_{\min}(P_1^*)\|x-x^e\|^2\leq v_1(x)\leq\lambda_{\max}(P_1^*)\|x-x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_2^*)\|y-y^e\|^2\leq v_2(y)\leq\lambda_{\max}(P_2^*)\|y-y^e\|^2,$$

$$\frac{dv_1(x)}{dt}\Big|_{(4.38)}\leq A\frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)}+B\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)}. \qquad (4.47)$$

Для другої компоненти:

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(4.38)}=\dot{y}^TP_2^*(y-y^e)+(y-y^e)^TP_2^*\dot{y}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y+C_2(p)+B_2(p)(K_1x+K_2y)\Big)^TP_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^TP_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y+C_2(p)+B_2(p)(K_1x+K_2y)\Big)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_2\Big)^TP_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(x-x^e)^T\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1\Big)^TP_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^TP_2^*\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_2\Big)(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T P_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2(p)K_1\Big)(x-x^e), \qquad (4.48)$$

де враховано, що

$$A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)x^e+A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)y^e+C_2(p)+B_2(p)(K_1x^e+K_2y^e)=0.$$

З (4.48) отримаємо

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(4.38)}=\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Bigg[\Big(A_{22}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_2\Big)^TP_2^*+$$

$$+P_2^*\Big(A_{22}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_2\Big)\Bigg](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Bigg[\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)^TP_2^*+\Big((B_2(p)-B_2(p^*))K_2\Big)^TP_2^*+$$

$$+P_2^*\Big(A_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{22}(x^*,y^*,p^*)\Big)+P_2^*(B_2(p)-B_2(p^*))K_2\Bigg](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(x-x^e)^T\Bigg[\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)^TP_2^*+\Big((B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Big)^TP_2^*+$$

$$+\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)^TP_2^*\Bigg](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(y-y^e)^T\Bigg[P_2^*\Big(A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\Big)+$$

$$+P_2^*\Big(A_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}(x^*,y^*,p^*)\Big)+P_2^*(B_2(p)-B_2(p^*))K_1\Bigg](x-x^e)\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\Big[-\lambda_{\min}(Q_2)+2\|P_2^*\|\Big(\delta_1+\|K_2\|\|B_2(p)-B_2(p^*)\|\Big)\Big]\|y-y^e\|^2+$$

$$+\frac{2\|P_2^*\|}{\varepsilon}\Big(\|A_{21}(x^*,y^*,p^*)+B_2(p^*)K_1\|+$$

$$+ \gamma + \|K_1\|\|B_2(p) - B_2(p^*)\|\Big)\|x - x^e\|\|y - y^e\|. \tag{4.49}$$

Продовжимо оцінку (4.49), враховуючи що

$$\lambda_{\min}(P_1^*)\|x - x^e\|^2 \leq v_1(x) \leq \lambda_{\max}(P_1^*)\|x - x^e\|^2,$$

$$\lambda_{\min}(P_2^*)\|y - y^e\|^2 \leq v_2(y) \leq \lambda_{\max}(P_2^*)\|y - y^e\|^2.$$

$$\frac{dv_2(y)}{dt}\Big|_{(4.38)} \leq \frac{1}{\varepsilon}C\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)} + \frac{1}{\varepsilon}D\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)}. \tag{4.50}$$

Таким чином, з оцінок (4.47), (4.50), для похідної векторної функції (4.44) в силу системи (4.38) справедлива оцінка відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(4.38)} \leq \begin{pmatrix} A\frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)} + B\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)} \\ \frac{1}{\varepsilon}C\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)} + \frac{1}{\varepsilon}D\frac{v_1^{\frac{1}{2}}(x)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_1^*)}\frac{v_2^{\frac{1}{2}}(y)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(P_2^*)} \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Скориставшись нерівністю $-az^2+bz \leq -\frac{a}{2}z^2+\frac{b^2}{2a}$, яка вірна для всіх $z \in \mathbb{R}$, якщо $a > 0$, продовжимо оцінку (4.51):

$$\frac{dV(x,y)}{dt}\Big|_{(4.38)} \leq MV(x,y),$$

де

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{A}{\lambda_{\min}(P_1^*)} & \frac{B^2}{\lambda_{\min}(P_2^*)(-A)} \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{D^2}{\lambda_{\min}(P_1^*)(-C)} & \frac{1}{\varepsilon}\frac{C}{\lambda_{\min}(P_2^*)} \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

Зауважимо, що з (4.41), (4.42) слідує, що $A < 0$ і $C < 0$.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{du}{dt} = Mu, \tag{4.53}$$

де матриця M задана в (4.52), а $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2_+$. Оскільки $A < 0$ і $C < 0$, то позадиагональні елементи матриці M додатні і функція $f(u) = Mu$ квазімонотонна відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$, тобто система (4.53) є системою порівняння для системи (4.38). При виконанні умови (4.43) матриця M стійка, тому стан рівноваги $u = 0$ системи (4.53) глобально асимптотично стійкий. Згідно принципу порівняння, стан рівноваги $((x^e)^T, (y^e)^T)^T$ системи (4.38) також глобально асимптотично стійкий. Так як p довільна точка області P, то система (4.38), а отже, очевидно, система (4.37), глобально параметрично асимптотично стійка відносно цієї області.

Оскільки вищесказане має місце для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$, то властивість глобальної параметричної асимптотичної стійкості зберігається для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.

Теорему доведено.

Приклад 4.3. В якості прикладу застосування запропонованої вище методики побудови керування, розглянемо стабілізацію неточної різнотемпової системи диференціальних рівнянь третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, p), \\ \varepsilon\dot{y} = f_2(x, y, p), \end{cases} \tag{4.54}$$

де $x = (x_1,\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^1$, $f_1(x, y, p) \in \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y, p) \in \mathbb{R}^1$. Введемо в систему (4.54) керування $u = K_1x + K_2y$ і розглянемо отриману систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,p) + B_1(p)(K_1x + K_2y), \\ \varepsilon\dot{y} = f_2(x,y,p) + B_2(p)(K_1x + K_2y), \end{cases} \tag{4.55}$$

де $K_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$,

$$B_1(p) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ \sin(p) & 1 \end{pmatrix}, \; B_2(p) = \begin{pmatrix} \cos(p) & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай система (4.55) при значенні параметра $p^* = 0$ має стан рівноваги $x^* = 0$, $y^* = 0$, а функції $f_1(x,y,p)$ та $f_2(x,y,p)$ такі, що

$$A_{11}(x^*,y^*,p^*) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12}(x^*,y^*,p^*) = \frac{\partial f_1(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}(x^*,y^*,p^*) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{22}(x^*,y^*,p^*) = \frac{\partial f_2(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} = 1.$$

З умови стійкості матриць $A_{11}(x^*,y^*,p^*) + B_1(p^*)K_1$ та $A_{22}(x^*,y^*,p^*) + B_2(p^*)K_2$ виберемо матриці $K_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0.2 \\ 0.1 & -2 \end{pmatrix}$ та

$K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ і переконаємось, що матриця A з Припущення 4.1 невироджена. З оцінок (4.2), (4.3) визначимо величини $\alpha = \delta = 0.101$, $\beta = \gamma = 0.1$ і область $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| < 0.14\}$ такі, що при виконанні для функцій $f_1(x, y, p)$, $f_2(x, y, p)$ оцінок

$$\|A_{11}(x, y, p) - A_{11}(x^*, y^*, p^*)\| \leq \alpha, \quad \|A_{12}(x, y, p) - A_{12}(x^*, y^*, p^*)\| \leq \beta,$$

$$\|A_{21}(x, y, p) - A_{21}(x^*, y^*, p^*)\| \leq \gamma, \quad \|A_{22}(x, y, p) - A_{22}(x^*, y^*, p^*)\| \leq \delta,$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^1$, $p \in P$, згідно Теореми 4.1 існує єдиний стан рівноваги системи (4.55).

Вибравши матриці $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, обрахуємо матриці $P_1 = \begin{pmatrix} 0.508 & 0.077 \\ 0.077 & 0515 \end{pmatrix}$, $P_2 = (0.5)$ із відповідних матричних рівнянь. Згідно співвідношень (4.39), (4.40) виберемо $\alpha_1 = \delta_1 = 0.1$. Співвідношення (4.2), (4.3) та (4.41)-(4.43) виконуються для всіх $p \in P$. Отже, згідно Теореми 4.6, система (4.55) при керуванні u глобально параметрично асимптотично стійка відносно області P для всіх $\varepsilon \in (0,\ 1]$. Таким чином, вказано клас функцій, який визначається оцінками на норми їх часткових похідних, керування, яке глобально параметрично асимптотично стабілізує систему (4.54) і область $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 0.14\}$ такої стабілізації.

Вибравши

$$f_1(x, y, p) = \begin{pmatrix} x_1 - 0.1\cos\left(x_1 + \dfrac{y}{\sqrt{2}} + p\right) + y + 0.1 \\ 0.9x_2 + 1000p^2 + \left(1 - \dfrac{0.1}{\sqrt{2}}\right) y + \arctan\left(0.1\left(x_2 + \dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$f_2(x, y, p) = x_1 + x_2 + y + p + 0.1 \ln \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} \right),$$

переконаємось, що функції належать визначеному класу. Зауважимо, що для цих функцій при значенні параметра $p = 0$ нульовий стан рівноваги системи (4.54) нестійкий.

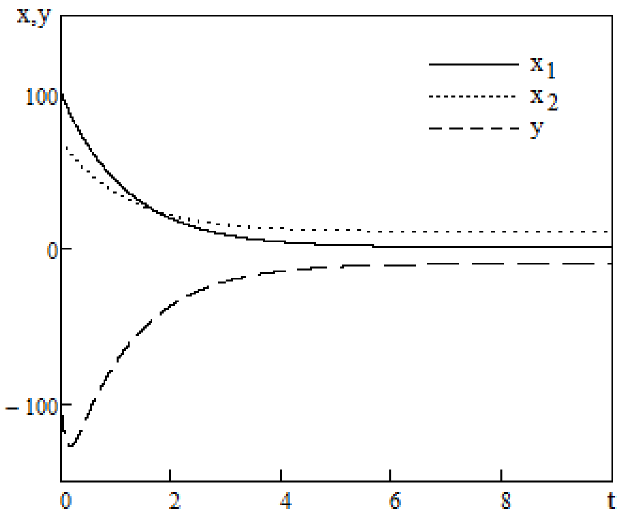


Рис. 4.3 – Поведінка змінних. Приклад 4.3

На Рис. 4.3 представлені графіки, які ілюструють поведінку розв'язків системи при $p = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $x_0 = (100,\ 70)^T$, $y_0 = -100$.

4.5 Результати та висновки

Загальний вигляд функцій, що входять до складу системи, та їх нелінійність ускладнюють застосування методу розділення рухів для дослідження поведінки розв'язків початкової системи. Метод функцій Ляпунова дає можливість зробити висновок про динаміку системи не розв'язуючи її, що значно спрощує аналіз суттєво нелінійних систем, інколи являючись єдиним можливим способом такого аналізу.

Запропоновано підхід, який дає можливість оцінити область у просторі параметрів системи, для всіх значень параметрів з якої існує єдиний стан рівноваги системи, що досліджується. Підхід засновано на оцінці областей невиродженості матриць, від яких залежать розвязкі відповідних рівнянь. Зауважимо, що висновок про існування розв'язку та оцінки відповідної області його існування потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому відомому значенні параметра.

При виконанні відносно системи певних припущень, ключовим з яких є обмеженість по нормі частинних похідних функцій, що входять до її складу, для неточної різнотемпової системи диференціальних рівнянь в загальному вигляді, застосовуючи матричнозначну функцію Ляпунова, встановлено достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості відносно знайденої області у просторі параметрів. Також вказано верхню межу інтервалу зміни значень параметра ε.

У випадку великомасштабності системи, яка досліджується, узагалнюючи спосіб побудови допоміжної функціїї, що був запропонований для системи без припущення про її великомасштабність, отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості початкової системи і вказана область такої стійкості у просторі параметрів системи. Знайдено оцінки на величини параметрів при старших похідних в рівняннях системи, для яких зберігається знайдена динамічна характеристика, що є важливим при аналізі різнотемпових систем.

У випадку параметричної нестійкості нелінійної неточної різнотемпової системи запропоновано керування, яке забезпечує її глобальну параметричну асимптотичну стійкість. Використовуючи метод порівняння з векторною функцією Ляпунова, визначено достатні умови такої стійкості, область у просторі парметрів системи, для значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається, спосіб вибору матриць керування і оцінки на величину параметра при старшій похідній в рівняннях системи.

Основні результати цього розділу викладено в роботах [46, 78, 79, 135].

Розділ 5

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТАНУ РІВНОВАГИ ТА ПОБУДОВИ КЕРУВАННЯ НЕТОЧНИМИ РІЗНОТЕМПОВИМИ СИСТЕМАМИ ТАКАГІ–СУГЕНО

Велика кількість механічних систем та виробничих процесів настільки складні, що відповідну математичну модель дуже складно чи взагалі неможливо побудувати. Однак, більшість з таких систем можливо представити у вигляді деякого "набору" математичних моделей, кожна з яких описує локальну динаміку загальної системи. Такий підхід, запропонований Такагі та Сугено (див. [180]), активно розвивається і застосовується в наш час (див. [96,181]). Нечіткі (англ. fuzzy) моделі, отримані з його допомогою, дозволяють точніше моделювати процес, враховуючи його локальні складові, а не "усереднено" описувати всю систему однією моделлю, як це робилося раніше. Підкреслимо, що побудова керування, яке здатне гарантувати бажану динамічну характеристику утвореної моделі, зокрема стійкість, а також отримання достатніх її, стійкості, умов, є важливими та актуальними задачами, а у випадках, коли системи керування пов'язані із безпекою людей або складними виробничими процесами, які схильні до втрати стійкості, взагалі розцінюються як критично важливі.

Класична теорія систем Такагі–Сугено, як відомо, розглядає нелінійні системи, які апроксимуються набором локальних лінійних систем, що пов'язані між собою правилами "якщо-то". Причому, клас нелінійних систем, які апроксимуються, достатньо широкий і лінійність локальних систем дозволяє застосувати для їх дослідження детально розроблені класичні методи, зокрема метод лінійних матричних нерівностей (англ. LMI). Однак, якщо початкова система істотно нелінійна, то кількість правил в моделі і, відповідно, розмірність методу LMI значно зростає, що ускладнює застосування цього методу. Саме тому, в останні роки активно развивається теорія систем Такагі–Сугено, де локальні системи вважаються нелінійними (див. [166, 170, 182]). Це дозволяє зменшити кількість правил в моделі, а також підвищити її акуратність, тобто адекватність початковій системі. Таким чином, актуальною задачею є розробка нових та вдосконалення існуючих методик дослідження динамічних характеристик систем типу Такагі–Сугено із нелінійними, зокрема різнотемповими, локальними системами.

В підрозділі 5.1 встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями у випадку стійкості лінійних наближень підсистем всіх локальних систем при певному значенні параметра. Ця властивість дає змогу застосувати для доведення асимптотичної стійкості стану рівноваги скалярну функцію Ляпунова, компоненти якої будуються згідно стійких наближень. Вказано спосіб оцінки області у просторі параметрів системи, для значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається.

В підрозділі 5.2 розглядається випадок, коли при певному значенні параметра серед лінійних наближень підсистем локальних систем існують нестійкі. При зробленому припущенні, спосіб побудови скалярної функції Ляпунова, запропонований у підрозділі 5.1, застосувати не вдається. Але використання матричнозначної функції Ляпунова дає можливість встановити достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями у вказаному випадку. Також вказано спосіб оцінки області у просторі параметрів системи, для значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається.

Підрозділ 5.3 присвячено побудові керування, яке забезпечує стійкість стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями. Розглянуто випадок, коли результати підрозділів 5.1, 5.2 для побудови функції Ляпунова застосувати не вдається, але при запропонованому керуванні досягається бажана динамічна характеристика системи відносно певної області у просторі її параметрів.

5.1 Достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги у випадку стійкості лінійних наближень підсистем всіх локальних систем

Розглянемо нечітку модель деякого механічного чи іншої природи процесу, для опису якої використаний набір нечітких предикатних правил у наступному вигляді

$$\begin{aligned} R_i: \quad & \text{якщо} \quad z_1(t) \in M_{i1} \quad \text{і} \quad \ldots \quad \text{і} \quad z_s(t) \in M_{is} \\ & \text{то} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_i(x, y, p), \\ \varepsilon \dot{y} = g_i(x, y, p), \end{cases} \quad i = \overline{1, r}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

де M_{ig} – нечіткі множини, що визначаються функціями приналежності $\overline{M}_{ig} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i = \overline{1, r}$, $g = \overline{1, s}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – змінні, що визначають стан системи (5.1) у момент часу $t \in \mathbb{R}_+$, $f_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ – нелінійні функції, які неперервно диференційовні по змінним x та y і неперервно залежні від векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $z_1(t), \ldots, z_s(t)$ – деякі системні змінні.

Припущення 5.1. *Функції* $f_i(x, y, p)$, $g_i(x, y, p)$ *такі, що* $f_i(0, 0, p) = 0$, $g_i(0, 0, p) = 0$, $i = \overline{1, r}$.

Враховуючи умову Припущення 5.1 і використовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа для функцій $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$, $i=\overline{1,r}$, системи (5.1) приведемо до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)y, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)y, \end{cases} \quad i=\overline{1,r}, \tag{5.2}$$

де

$$A_{11}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}_i\\ y=\tilde{y}_i}}, \quad A_{12}^i(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{x}_i\\ y=\tilde{y}_i}},$$

$$A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i\\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}}, \quad A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\tilde{\tilde{x}}_i\\ y=\tilde{\tilde{y}}_i}}, \quad i=\overline{1,r},$$

$\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y}_i \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\tilde{x}}_i \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^m$ – деякі точки відповідних просторів.

Припущення 5.2. *Системи рівнянь (5.2) такі, що:*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що для всіх $i=\overline{1,r}$ матриці $A_{11}^i(0,0,p^*)$, $A_{22}^i(0,0,p^*)$ стійкі;

(2) існують такі додатні числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i=\overline{1,r}$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \le \alpha_i, \quad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \le \beta_i,$$

$$\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \le \gamma_i, \quad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \le \delta_i,$$

для всіх $i=\overline{1,r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$.

Після приведення нечіткої моделі до чіткості центроїдним методом, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка описує повну динаміку початкової нечіткої моделі:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y \Big], \\ \varepsilon \dot{y} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y \Big], \end{cases} \tag{5.3}$$

де $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_s(t))^T$, $\mu_i(z(t)) = \dfrac{\omega_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} \omega_i(z(t))}$, $\omega_i(z(t)) = \prod\limits_{g=1}^{s} \overline{M}_{ig}(z_g(t))$.

Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) = 1$ і $\mu_i(z(t)) \geq 0$, $i = \overline{1,r}$. Вважаємо, що для системи (5.3) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Розглянемо системи лінійних матричних нерівностей

$$\Big(A_{11}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_1 \Big(A_{11}^i(0,0,p^*) \Big) < 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{5.4}$$

$$\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 + P_2 \Big(A_{22}^i(0,0,p^*) \Big) < 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{5.5}$$

де $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – симетричні додатно визначені матриці. Також позначимо

$$A_i(\alpha_i) = \lambda_{\max} \Big[\Big(A_{11}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0,0,p^*) \Big] + 2\alpha_i \|P_1\|,$$

$$B_i(\beta_i, \gamma_i) = \Big\| P_1 A_{12}^i(0,0,p^*) + \Big(A_{21}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 \Big\| + \|P_1\|\beta_i + \|P_2\|\gamma_i,$$

$$C_i(\delta_i) = \lambda_{\max} \Big[\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 + P_2 A_{22}^i(0,0,p^*) \Big] + 2\delta_i \|P_2\|,$$

$$D_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) = \begin{pmatrix} A_i(\alpha_i) & B_i(\beta_i, \gamma_i) \\ B_i(\beta_i, \gamma_i) & C_i(\delta_i) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (5.3) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 5.1. *Нехай функції $f_i(x, y, p)$, $g_i(x, y, p)$, $i = \overline{1, r}$, задовольняють умову Припущення 5.1, для систем (5.2), з яких утворена система (5.3), виконуються умови Припущення 5.2, системи лінійних матричних нерівностей (5.4), (5.5) сумісні, відповідно, на множині симетричних додатно визначених матриць P_1 і P_2, для величин α_i, β_i, γ_i, δ_i, виконуються співвідношення*

$$A_i(\alpha_i) < 0, \quad i = \overline{1, r}, \tag{5.7}$$

$$A_i(\alpha_i)C_i(\delta_i) - B_i^2(\beta_i, \gamma_i) > 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{5.8}$$

Тоді стан рівноваги $x = 0$, $y = 0$ системи (5.3) асимптотично стійкий відносно області P для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p з області P і розглянемо систему (5.3) при цьому значенні параметра. Побудуємо скалярну функцію

$$V(x, y, \varepsilon) = x^T P_1 x + \varepsilon y^T P_2 y, \tag{5.9}$$

використовуючи симетричні додатно визначені матриці P_1 і P_2, які є розв'язками систем лінійних матричних нерівностей (5.4) і (5.5), відповідно. Згідно припущення теореми, такі матриці існують. Очевидно, що ця функція додатно визначена за Ляпуновим для всіх $\varepsilon \in (0, 1]$. Знайдемо її похідну по часу в силу системи (5.3).

$$\dot{V}(x, y, \varepsilon)\Big|_{(5.3)} = \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} + \varepsilon \dot{y}^T P_2 y + \varepsilon y^T P_2 \dot{y} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y \Big] \right)^T P_1 x +$$

$$+x^T P_1 \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y \Big] \right) +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y \Big] \right)^T P_2 y +$$

$$+y^T P_2 \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y \Big] \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Bigg[x^T \Big[\Big(A_{11}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0,0,p^*) \Big] x +$$

$$+x^T \Big[\Big(A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) - A_{11}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_1 \Big(A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) - A_{11}^i(0,0,p^*) \Big) \Big] x +$$

$$+x^T \Big[P_1 A_{12}^i(0,0,p^*) + \Big(A_{21}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 \Big] y +$$

$$+x^T \Big[P_1 \Big(A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) - A_{12}^i(0,0,p^*) \Big) + \Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p) - A_{21}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 \Big] y +$$

$$+y^T \Big[\Big(A_{12}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_2 A_{21}^i(0,0,p^*) \Big] x +$$

$$+y^T \Big[\Big(A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p) - A_{12}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_1 + P_2 \Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p) - A_{21}^i(0,0,p^*) \Big) \Big] x +$$

$$+y^T \Big[\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 + P_2 A_{22}^i(0,0,p^*) \Big] y +$$

$$+y^T \Big[\Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}^i(0,0,p^*) \Big)^T P_2 + P_2 \Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) - A_{22}^i(0,0,p^*) \Big) \Big] y \Bigg].$$

Враховуючи Припущення 5.2, отримаємо наступну оцінку для похідної функції (5.9) по часу в силу системи (5.3):

$$\dot{V}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(5.3)} \le (\|x\|,\ \|y\|) \left[\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) D_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \right] (\|x\|,\ \|y\|)^T.$$

Згідно співвідношень (5.7), (5.8), матриці (5.6) від'ємно визначені для всіх $i = \overline{1,r}$. Так як $\mu_i(z(t)) \ge 0$ для всіх $z(t)$, $i = \overline{1,r}$, причому одночасна їх рівність нулю неможлива, то згідно теореми Вейля (див. [76]) матриця $\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))D_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$ від'ємно визначена для всіх $z(t)$. Тобто похідна функції (5.9) по часу в силу системи (5.3) від'ємна для всіх значень змінних $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ відмінних від нуля, всіх $\varepsilon \in (0, 1]$ і всіх значеннях $z(t)$. Отже, функція (5.9) є функцією Ляпунова, яка дозволяє в силу теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість (див. [3]) встановити асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи (5.3) для вибраного значення p і всіх $\varepsilon \in (0, 1]$. Так як p довільна точка з області P, то вказаний тип стійкості має місце для всіх значень параметра p з області P.

Теорему доведено.

Приклад 5.1. Розглянемо електричний ланцюг, зображений на Рис. 5.1, який містить тунельний діод (див. [97]). Тунельний діод хара-

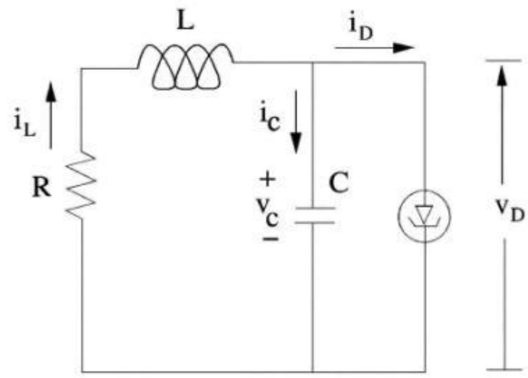


Рис. 5.1 – Електричний ланцюг, який містить тунельний діод

ктеризується наступним співвідношенням: $i_D(t) = 0.01V_D(t) + 0.05V_D^3(t)$. Вважаємо індуктивність катушки L малим “паразитним” параметром і введемо змінні $x_1(t) = V_C(t)$, $x_2(t) = i_L(t)$. Виберемо такі параметри ланцюга: $C = 100$ mF, $L = \varepsilon$ Гн, $R = (250 + p)$ Ом, тобто опір резистора відомий неточно.

Припустимо, що $|x_1| < 3$ і значення величини шуму настільки мале, що їм можливо знехтувати. Тоді нечітка модель, для опису електричного ланцюга, має вигляд:

$$
\begin{array}{ll}
\text{якщо } x_1 \in M_1, & \text{якщо } x_1 \in M_2, \\
\text{то } \begin{cases} \dot{x}_1 = -0.1x_1 + 10x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (250+p)x_2, \end{cases} & \text{то } \begin{cases} \dot{x}_1 = -4.6x_1 + 10x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (250+p)x_2, \end{cases}
\end{array}
\tag{5.10}
$$

де M_1 та M_2 нечіткі множини, що визначаються функціями приналежності $\overline{M}_1(x_1) = \dfrac{3-|x_1|}{3}$ та $\overline{M}_2(x_1) = \dfrac{|x_1|}{3}$, відповідно. Очевидно, що системи, з яких складається нечітка модель (5.10), задовольняють умовам Припущення 5.2, де $p^* = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 45$, $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 45\}$.

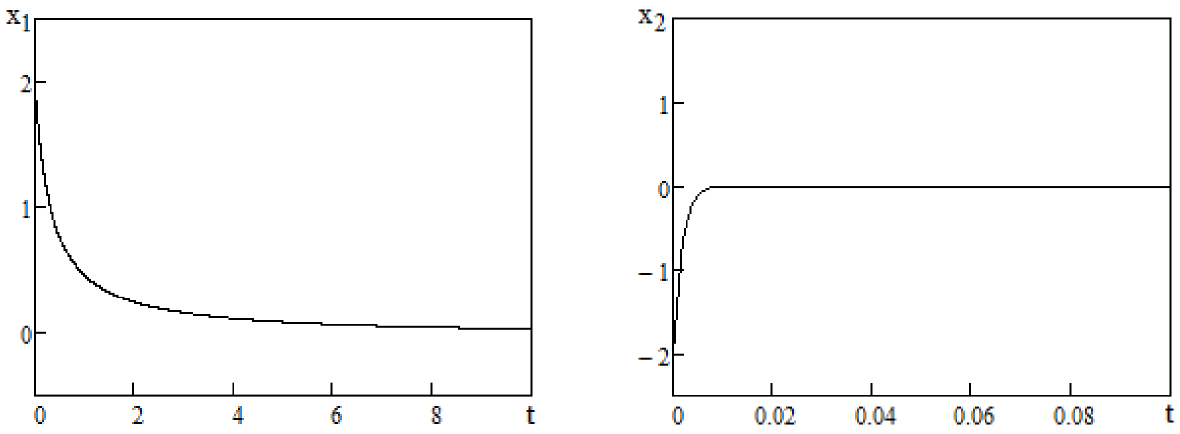
Після приведення до чіткості, отримаємо опис повної динаміки нечіткої моделі у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \mu_1(z(t))\Big[-0.1x_1 + 10x_2\Big] + \mu_2(z(t))\Big[-4.6x_1 + 10x_2\Big], \\
\varepsilon \dot{x}_2 = \mu_1(z(t))\Big[-x_1 - (250+p)x_2\Big] + \mu_2(z(t))\Big[-x_1 - (250+p)x_2\Big],
\end{cases}
\tag{5.11}
$$

де $z(t) = (x_1,\ x_2)^T$, $\mu_1(z(t)) = \dfrac{3-|x_1|}{3}$, $\mu_2(z(t)) = \dfrac{|x_1|}{3}$.

Системи лінійних матричних нерівностей (5.4), (5.5) сумісні при $P_1 = (1)$, $P_2 = (1)$, відповідно. Так як $A_1(\alpha_1) = -0.2$, $A_2(\alpha_2) = -9.2$, $B_1(\beta_1, \gamma_1) = 9$, $B_2(\beta_2, \gamma_2) = 9$, $C_1(\delta_1) = -410$, $C_2(\delta_2) = -410$ і співвідношення (5.7), (5.8) справедливі при $i = 1, 2$, то нульовий стан рівноваги систем (5.11) асимптотично стійкий для всіх p з P і всіх $\varepsilon \in (0, 1]$, згідно Теореми 5.1.

На Рис. 5.2 представлені графіки, які ілюструють поведінку розв'язків системи (5.11) при $p = 40$, $\varepsilon = 0.5$, $x_0 = (2, -2)^T$.



а) б)

Рис. 5.2 – Поведінка змінних. Приклад 5.1

5.2 Достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги у випадку нестійких підсистем локальних систем

Відносно систем (5.2) зробимо наступне припущення.

Припущення 5.3. *Системи рівнянь (5.2) такі, що:*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що для всіх $i = \overline{1,r}$ матриці $A_{22}^i(0,0,p^*)$ стійкі;

(2) серед матриць $A_{11}^i(0,0,p^*)$, $i = \overline{1,r}$, хоча б одна нестійка;

(3) існують такі додатні числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i = \overline{1,r}$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \le \alpha_i, \quad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \le \beta_i,$$

$$\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \le \gamma_i, \quad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \le \delta_i,$$

для всіх $i = \overline{1,r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$.

Нехай $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симетричні додатно визначені матриці,

$P_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – стала матриця. Введемо наступні позначення:

$$A_i(\alpha_i,\gamma_i) = \lambda_{\max}\Bigg[\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_1 + P_1 A^i_{11}(0,0,p^*) +$$

$$+P_3 A^i_{21}(0,0,p^*) + \Big(A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_3^T\Bigg] + 2\|P_1\|\alpha_i + 2\|P_3\|\gamma_i,$$

$$B_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon) = \Big\|P_1 A^i_{12}(0,0,p^*) + \varepsilon\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_3 + P_3 A^i_{22}(0,0,p^*) +$$

$$+\Big(A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_2\Big\| + \varepsilon\|P_3\|\alpha_i + \|P_1\|\beta_i + \|P_3\|\delta_i + \|P_2\|\gamma_i,$$

$$C_i(\beta_i,\delta_i,\varepsilon) = \lambda_{\max}\Bigg[\Big(A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)^T P_2 + P_2 A^i_{22}(0,0,p^*) + \varepsilon\Big(A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)^T P_3 +$$

$$+\varepsilon P_3 A^i_{12}(0,0,p^*)\Bigg] + 2\|P_2\|\delta_i + 2\varepsilon\|P_3\|\beta_i,$$

$$D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_i(\alpha_i,\gamma_i) & B_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon) \\ B_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon) & C_i(\beta_i,\delta_i,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (5.3) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 5.2. *Нехай функції $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$, $i=\overline{1,r}$, задовольняють умову Припущення 5.1, для систем (5.2), з яких утворена система (5.3), виконуються умови Припущення 5.3, система лінійних матричних нерівностей (5.5) сумісна на множині симетричних додатно визначених матриць P_2, для матриць P_1, P_2, P_3, величин α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, при всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon^*<\dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2)}{\lambda_{\max}(P_3P_3^T)}$ виконуються нерівності:*

$$A_i(\alpha_i,\gamma_i) < 0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{5.13}$$

$$A_i(\alpha_i, \gamma_i)C_i(\beta_i, \delta_i, \varepsilon) - B_i^2(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon) > 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{5.14}$$

Тоді стан рівноваги $x = 0$, $y = 0$ системи (5.3) асимптотично стійкий відносно області P для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$.

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p з області P і розглянемо систему (5.3) при цьому значенні параметра. Побудуємо матричнозначну функцію наступного вигляду (див. [149, 150]):

$$V(x, y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x, y, \varepsilon) \\ v_{12}(x, y, \varepsilon) & v_{22}(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

де $v_{11}(x) = x^T P_1 x$, $v_{22}(y, \varepsilon) = \varepsilon y^T P_2 y$, P_2 – розв'язок системи лінійних матричних нерівностей (5.5), $v_{12}(y, \varepsilon) = \varepsilon x^T P_3 y$. Вибравши вектор $\eta^T = (1, 1)$, слідуючи [149], утворимо скалярну функцію

$$v(x, y, \varepsilon) = \eta^T V(x, y, \varepsilon)\eta. \tag{5.16}$$

Враховуючи, що для елементів матричнозначної функції (5.15) мають місце оцінки

$$v_{11}(x) \geq \lambda_{\min}(P_1)\|x\|^2, \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_{22}(y, \varepsilon) \geq \varepsilon\lambda_{\min}(P_2)\|y\|^2, \text{ для всіх } y \in \mathbb{R}^m, \ \varepsilon \in (0, 1],$$

$$v_{12}(x, y, \varepsilon) \geq -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{1/2}\|x\|\|y\|, \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^m, \ \varepsilon \in (0, 1],$$

для скалярної функції (5.16) має місце оцінка

$$v(x, y, \varepsilon) \geq u^T A(\varepsilon)u,$$

для всіх $(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0, 1]$, де $u^T = (\|x\|,\ \|y\|)$,

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{1/2} \\ -\varepsilon(\lambda_{\max}(P_3 P_3^T))^{1/2} & \varepsilon\lambda_{\min}(P_2) \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

При всіх $\varepsilon < \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_3)}{\lambda_{\max}(P_2 P_2^T)}$ матриця (5.17) додатно визначена, тобто скалярна функція (5.16) додатно визначена за Ляпуновим.

Знайдемо похідну функції (5.16) по часу в силу системи (5.3).

$$\dot{v}(x, y, \varepsilon)\Big|_{(5.3)} = \dot{x}^T P_1 x + x^T P_1 \dot{x} + 2\varepsilon \dot{x}^T P_3 y + 2\varepsilon x^T P_3 \dot{y} + \varepsilon \dot{y}^T P_2 y + \varepsilon y^T P_2 \dot{y} =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y\Big]\Big)^T P_1 x +$$

$$+ x^T P_1 \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y\Big] +$$

$$+ 2\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y\Big]\Big)^T P_3 y +$$

$$+ 2x^T P_3 \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y\Big] +$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y\Big]\Big)^T P_2 y +$$

$$+ y^T P_2 \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z) \Bigg[x^T \Bigg(\Big(A_{11}^i(0, 0, p^*)\Big)^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0, 0, p^*) +$$

$$+ P_3 A_{21}^i(0, 0, p^*) + \Big(A_{21}^i(0, 0, p^*)\Big)^T P_3^T +$$

$$+\Big(A^i_{11}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_1+P_1\Big(A^i_{11}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)+$$

$$+P_3\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)+\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_3^T\Bigg)x+$$

$$+x^T\Bigg(P_1A^i_{12}(0,0,p^*)+\varepsilon\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+$$

$$+P_3A^i_{22}(0,0,p^*)+\Big(A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_2+$$

$$+P_1\Big(A^i_{12}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)+\varepsilon\Big(A^i_{11}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+$$

$$+P_3\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)+\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_2\Bigg)y+$$

$$+y^T\Bigg(P_1A^i_{12}(0,0,p^*)+\varepsilon\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+$$

$$+P_3A^i_{22}(0,0,p^*)+\Big(A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_2+$$

$$+P_1\Big(A^i_{12}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)+\varepsilon\Big(A^i_{11}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{11}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+$$

$$+P_3\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)+\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{21}(0,0,p^*)\Big)^T P_2\Bigg)^T x+$$

$$+y^T\Bigg(\Big(A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)^T P_2+P_2A^i_{22}(0,0,p^*)+$$

$$+\varepsilon\Big(A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+\varepsilon P_3A^i_{12}(0,0,p^*)+$$

$$+\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)^T P_2+P_2\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}}_i,\tilde{\tilde{y}}_i,p)-A^i_{22}(0,0,p^*)\Big)+$$

$$+\varepsilon\Big(A^i_{12}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)^T P_3+\varepsilon P_3\Big(A^i_{12}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i,p)-A^i_{12}(0,0,p^*)\Big)\Bigg)y\Bigg].$$

Враховуючи умови Припущення 5.3, отримаємо наступну оцінку для похідної функції (5.16) по часу в силу системи (5.3):

$$\dot{v}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(5.3)} \leq u^T\Big[\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z)D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon)\Big]u. \tag{5.18}$$

Згідно співвідношень (5.13), (5.14), матриці (5.12) від'ємно визначені для $i=\overline{1,r}$ і всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$. Так як $\mu_i(z(t))\geq 0$ для всіх $z(t)$, $i=\overline{1,r}$, причому одночасна їх рівність нулю неможлива, то згідно теореми Вейля (див. [76]) матриця $\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(z)D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\varepsilon)$ від'ємно визначена для всіх $z(t)$ і всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$. Тобто похідна функції (5.16) по часу в силу системи (5.3) від'ємна для всіх значень змінних $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$ відмінних від нуля, всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ і всіх значеннях $z(t)$. Отже, функція (5.16) є функцією Ляпунова, яка дозволяє в силу теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість (див. [3]) встановити асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи (5.3) для вибраного значення p і всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$. Так як p довільна точка з області P, то вказаний тип стійкості має місце для всіх значень параметра p з області P.

Теорему доведено.

Приклад 5.2. Розглянемо електричний ланцюг, зображений на Рис. 5.1, який містить тунельний діод (див. [97]). Тунельний діод характеризується наступним співвідношенням: $i_D(t)=-0.2V_D(t)+0.05V_D^3(t)$. Вважаємо індуктивність катушки L малим “паразитним” параметром і введемо змінні $x_1(t)=V_C(t)$, $x_2(t)=i_L(t)$. Виберемо такі параметри ланцюга: $C=100$ mF, $L=\varepsilon$ Гн, $R=(1+p)$ Ом, тобто опір резистора відомий неточно.

Припустимо, що $|x_1|<3$ і значення величини шуму настільки мале, що їм можливо знехтувати. Тоді нечітка модель, для опису електричного ланцюга, має вигляд:

$$\begin{array}{ll} \text{якщо } x_1 \in M_1, & \text{якщо } x_1 \in M_2, \\ \text{то} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 10x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (1+p)x_2, \end{cases} & \text{то} \begin{cases} \dot{x}_1 = 6.5x_1 + 10x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (1+p)x_2, \end{cases} \end{array} \tag{5.19}$$

де M_1 та M_2 нечіткі множини, що визначаються функціями приналежності $\overline{M}_1(x_1) = \dfrac{9 - x_1^2}{9}$ та $\overline{M}_2(x_1) = \dfrac{x_1^2}{9}$, відповідно. Очевидно, що системи, з яких складається нечітка модель (5.19), задовольняють умовам Припущення 5.3, де $p^* = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.1 = \delta$, $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \le 0.1\}$.

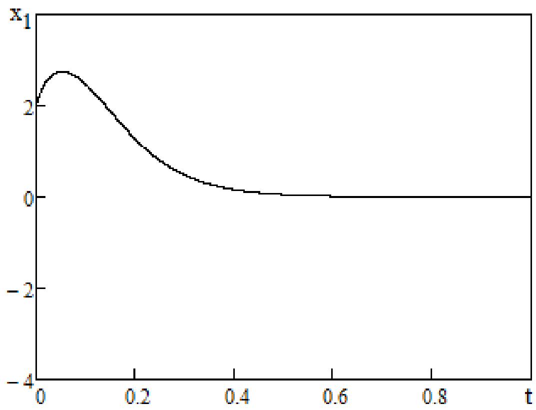
Після приведення до чіткості, отримаємо опис повної динаміки нечіткої моделі у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1(z(t))\Big[2x_1 + 10x_2\Big] + \mu_2(z(t))\Big[6.5x_1 + 10x_2\Big], \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \mu_1(z(t))\Big[-x_1 - (1+p)x_2\Big] + \mu_2(z(t))\Big[-x_1 - (1+p)x_2\Big], \end{cases} \tag{5.20}$$

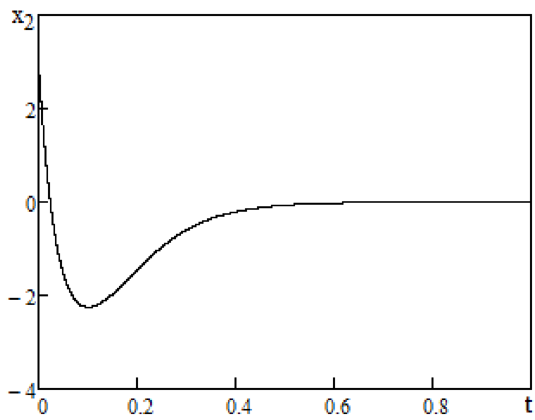
де $z(t) = (x_1,\ x_2)^T$, $\mu_1(z(t)) = \dfrac{9 - x_1^2}{9}$, $\mu_2(z(t)) = \dfrac{x_1^2}{9}$.

Система лінійних матричних нерівностей (5.5) сумісна при $P_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \end{pmatrix}$. Виберемо матриці $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ і визначимо верхню оцінку для величини ε: $\varepsilon^* < 0.1$. Так як $A_1(\alpha_1, \gamma_1) = -1.6$, $A_2(\alpha_2, \gamma_2) = -0.7$, $B_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon) = |1 - 2\varepsilon| + \delta$, $B_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon) = |1 - 6.5\varepsilon| + \delta$, $C_1(\beta_1, \delta_1) = C_2(\beta_2, \delta_2) = -2 + 20\varepsilon + 2\delta$ і співвідношення (5.13), (5.14), для $i = 1, 2$ справедливі при $\varepsilon \in (0,\ 0.038]$, то нульовий стан рівноваги системи (5.20) асимптотично стійкий для всіх p з P і всіх $\varepsilon \in (0,\ 0.038]$, згідно Теореми 5.2.

На Рис. 5.3 представлені графіки, які ілюструють поведінку розв'язків системи (5.20) при $p = 0.09$, $\varepsilon = 0.03$, $x_0 = (2,\ 3)^T$.



а)



б)

Рис. 5.3 – Поведінка змінних. Приклад 5.2

5.3 Спосіб побудови керування

Відносно систем (5.2) зробимо наступне припущення.

Припущення 5.4. *Системи рівнянь (5.2) такі, що:*

(1) існує значення параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ таке, що серед матриць $A_{22}^i(0,0,p^*)$, $i=\overline{1,r}$, хоча б одна нестійка;

(2) існують такі додатні числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i=\overline{1,r}$, що виконуються оцінки

$$\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \le \alpha_i, \quad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \le \beta_i,$$

$$\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \le \gamma_i, \quad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \le \delta_i,$$

для всіх $i=\overline{1,r}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$.

Введемо в системи (5.2) керування $u \in \mathbb{R}^k$ таким чином, що набір нечітких предикатних правил, для опису початкової нечіткої моделі, має наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
R_i: \quad & \text{якщо} \quad z_1(t) \in M_{i1} \quad \text{і} \quad \ldots \quad \text{і} \quad z_s(t) \in M_{is} \\
& \text{то} \quad \begin{cases} \dot{x} = A_{11}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, p)y + B_1^i(p)u, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}_i, \tilde{\tilde{y}}_i, p)y + B_2^i(p)u, \end{cases} \quad i = \overline{1, r},
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

де $B_1^i(p) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B_2^i(p) \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $i = \overline{1, r}$, мають елементи, які неперервно залежать від векторного параметра p.

Після приведення нечіткої моделі до чіткості центроїдним методом, отримаємо систему диференціальних рівнянь, яка описує повну динаміку початкової нечіткої моделі при керуванні u:

$$
\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{11}^i(\tilde{x}, \tilde{y}, p)x + A_{12}^i(\tilde{x}, \tilde{y}, p)y + B_1^i(p)u \Big], \\ \varepsilon\dot{y} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \Big[A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)x + A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p)y + B_2^i(p)u \Big], \end{cases}
\tag{5.22}
$$

де $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_s(t))^T$, $\mu_i(z(t)) = \dfrac{\omega_i(z(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r} \omega_i(z(t))}$, $\omega_i(z(t)) = \prod\limits_{g=1}^{s} \overline{M}_{ig}(z_g(t))$.

Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) = 1$ і $\mu_i(z(t)) \geq 0$, $i = \overline{1, r}$.

Нехай для опису керування використано набір нечітких предикатних правил

$$
\begin{aligned}
R_i: \quad & \text{якщо} \quad z_1(t) \in M_{i1} \quad \text{і} \quad \ldots \quad \text{і} \quad z_s(t) \in M_{is} \\
& \text{то} \quad u = K_1^i x + K_2^i y, \; i = \overline{1, r},
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

де $K_1^i \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $K_2^i \in \mathbb{R}^{k \times m}$ – деякі сталі матриці. Тоді система (5.22) із урахуванням (5.23) буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \Big[\Big(A_{11}^i(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1^i(p) K_1^j \Big) x + \\ + \Big(A_{12}^i(\tilde{x}, \tilde{y}, p) + B_1^i(p) K_2^j \Big) y \Big], \\ \varepsilon \dot{y} = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \Big[\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2^i(p) K_1^j \Big) x + \\ + \Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, p) + B_2^i(p) K_2^j \Big) y \Big]. \end{cases} \tag{5.24}$$

Вважаємо, що для системи диференціальних рівнянь (5.24) справедлива теорема про існування та єдиність розв'язку початкової задачі.

Розглянемо системи лінійних матричних нерівностей

$$\Big(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*) K_1^i \Big)^T P_1 + P_1 \Big(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*) K_1^i \Big) < 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{5.25}$$

$$\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*) K_2^i \Big)^T P_2 + P_2 \Big(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*) K_2^i \Big) < 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{5.26}$$

де $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – симетричні додатно визначені матриці,

$$D_{ij}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, \delta_1, \ldots, \delta_r, p) =$$

$$= \begin{pmatrix} L_{ij}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, p) & M_{ij}(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p) \\ M_{ij}(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p) & N_{ij}(\delta_1, \ldots, \delta_r, p) \end{pmatrix},$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \lambda_{\max} \Big[\Big(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*) K_1^j \Big)^T P_1 + P_1 \Big(A_{11}^i(0,0,p^*) + B_1^i(p^*) K_1^j \Big) +$$

$$+ \Big(A_{11}^j(0,0,p^*) + B_1^j(p^*) K_1^i \Big)^T P_1 + P_1 \Big(A_{11}^j(0,0,p^*) + B_1^j(p^*) K_1^i \Big) \Big] +$$

$$+ \|P_1\| \alpha_i + \|P_1\| \|K_1^j\| \|B_1^i(p) - B_1^i(p^*)\| + \|P_1\| \alpha_j + \|P_1\| \|K_1^i\| \|B_1^j(p) - B_1^j(p^*)\|,$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2}\lambda_{\max}\Big[\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*)K_2^j\Big)^T P_2 + P_2\Big(A_{22}^i(0,0,p^*) + B_2^i(p^*)K_2^j\Big) +$$

$$+\Big(A_{22}^j(0,0,p^*) + B_2^j(p^*)K_2^i\Big)^T P_2 + P_2\Big(A_{22}^j(0,0,p^*) + B_2^j(p^*)K_2^i\Big)\Big] +$$

$$+\|P_2\|\delta_i + \|P_2\|\|K_2^j\|\|B_2^i(p) - B_2^i(p^*)\| + \|P_2\|\delta_j + \|P_2\|\|K_2^i\|\|B_2^j(p) - B_2^j(p^*)\|,$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\Bigg[\Big\|P_1 A_{12}^i(0,0,p^*) + P_1 B_1^i(p^*)K_2^j +$$

$$+\Big(A_{21}^i(0,0,p^*)\Big)^T P_2 + \Big(K_1^j\Big)^T \Big(B_2^i(p^*)\Big)^T P_2 +$$

$$+P_1 A_{12}^j(0,0,p^*) + P_1 B_1^j(p^*)K_2^i + \Big(A_{21}^j(0,0,p^*)\Big)^T P_2 + \Big(K_1^i\Big)^T \Big(B_2^j(p^*)\Big)^T P_2\Big\| +$$

$$+\|P_1\|\beta_i + \|P_1\|\|K_2^j\|\|B_1^i(p) - B_1^i(p^*)\| + \|P_1\|\beta_j + \|P_1\|\|K_2^i\|\|B_1^j(p) - B_1^j(p^*)\| +$$

$$+\|P_2\|\gamma_i + \|P_2\|\|K_1^j\|\|B_2^i(p) - B_2^i(p^*)\| + \|P_2\|\gamma_j + \|P_2\|\|K_1^i\|\|B_2^j(p) - B_2^j(p^*)\Bigg].$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка визначає достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи (5.24) відносно певної області у просторі параметрів.

Теорема 5.3. *Нехай функції $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$, $i=\overline{1,r}$, задовольняють умову Припущення 5.1, для систем (5.2), з яких утворена система (5.24), виконуються умови Припущення 5.4, існують такі матриці K_1^i, K_2^i, $i=\overline{1,r}$, що системи лінійних матричних нерівностей (5.25), (5.26) сумісні, відповідно, на множині симетричних додатно визначених матриць P_1 і P_2, для всіх значень параметра $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ і для величин α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, виконуються співвідношення*

$$\lambda_{\max}\Big(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\Big) < 0, \tag{5.27}$$

$$\lambda_{\max}\Big(L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\Big)\cdot\lambda_{\max}\Big(N(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)\Big) -$$

$$-\max\Big\{\lambda^2_{\min}\Big(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\Big),$$
$$\lambda^2_{\max}\Big(M(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\Big)\Big\}>0. \tag{5.28}$$

Тоді стан рівноваги $x=0$, $y=0$ системи (5.24) асимптотично стійкий відносно області P для всіх $\varepsilon\in(0,1]$.

Доведення. Виберемо довільне значення параметра p з області P і розглянемо систему (5.24) при цьому значенні параметра. Побудуємо скалярну функцію
$$V(x,y,\varepsilon)=x^TP_1x+\varepsilon y^TP_2y, \tag{5.29}$$
використовуючи симетричні додатно визначені матриці P_1 і P_2, які є розв'язками систем лінійних матричних нерівностей (5.25) і (5.26), відповідно. Згідно припущення теореми, такі матриці існують. Очевидно, що ця функція додатно визначена за Ляпуновим для всіх $\varepsilon\in(0,1]$. Знайдемо її похідну по часу в силу системи (5.24).

$$\dot V(x,y,\varepsilon)\Big|_{(5.24)}=\dot x^TP_1x+x^TP_1\dot x+\varepsilon\dot y^TP_2y+\varepsilon y^TP_2\dot y=$$
$$=\left(\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Bigg[\Big(A^i_{11}(\tilde x,\tilde y,p)+B^i_1(p)K^j_1\Big)x+\right.$$
$$\left.+\Big(A^i_{12}(\tilde x,\tilde y,p)+B^i_1(p)K^j_2\Big)y\Bigg]\right)^TP_1x+$$
$$+x^TP_1\left(\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Bigg[\Big(A^i_{11}(\tilde x,\tilde y,p)+B^i_1(p)K^j_1\Big)x+\right.$$
$$\left.+\Big(A^i_{12}(\tilde x,\tilde y,p)+B^i_1(p)K^j_2\Big)y\Bigg]\right)+$$
$$+\left(\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Bigg[\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde x},\tilde{\tilde y},p)+B^i_2(p)K^j_1\Big)x+\right.$$

$$+\Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2^i(p)K_2^j\Big)y\Big]\Big)^T P_2y+$$

$$+y^T P_2\Bigg(\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Big[\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2^i(p)K_1^j\Big)x+$$

$$+\Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2^i(p)K_2^j\Big)y\Big]\Bigg)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Big[x^T\Big[\Big(A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^i(p)K_1^j\Big)^T P_1+$$

$$+P_1\Big(A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^i(p)K_1^j\Big)\Big]x+$$

$$+x^T\Big[P_1A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^j\Big)^T\Big(B_2^i(p)\Big)^T P_2\Big]y+$$

$$+y^T\Big[P_1A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^j\Big)^T\Big(B_2^i(p)\Big)^T P_2\Big]^T x+$$

$$+y^T\Big[\Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2^i(p)K_2^j\Big)^T P_2+P_2\Big(A_{22}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B_2^i(p)K_2^j\Big)\Big]y\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))\Big[x^T\Big[\Big(A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^i(p)K_1^j\Big)^T P_1+$$

$$+P_1\Big(A_{11}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^i(p)K_1^j\Big)+$$

$$+\Big(A_{11}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^j(p)K_1^i\Big)^T P_1+P_1\Big(A_{11}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)+B_1^j(p)K_1^i\Big)\Big]x+$$

$$+x^T\Big[P_1A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^j\Big)^T\Big(B_2^i(p)\Big)^T P_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^j(p)K_2^i+\Big(A_{21}^j(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^i\Big)^T\Big(B_2^j(p)\Big)^T P_2\Big]y+$$

$$+y^T\Big[P_1A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^i(p)K_2^j+\Big(A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^j\Big)^T\Big(B_2^i(p)\Big)^T P_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^j(p)K_2^i+\Big(A_{21}^j(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K_1^i\Big)^T\Big(B_2^j(p)\Big)^T P_2\Big]^T x+$$

$$+y^T\Big[\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^i_2(p)K^j_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^i_2(p)K^j_2\Big)+$$

$$+\Big(A^j_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^j_2(p)K^i_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^j_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^j_2(p)K^i_2\Big)\Big]y\Bigg]. \quad (5.30)$$

Враховуючи оцінки

$$x^T\Big[\Big(A^i_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B^i_1(p)K^j_1\Big)^T P_1+P_1\Big(A^i_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B^i_1(p)K^j_1\Big)+$$

$$+\Big(A^j_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B^j_1(p)K^i_1\Big)^T P_1+P_1\Big(A^j_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)+B^j_1(p)K^i_1\Big)\Big]x\le$$

$$\le\Bigg[\lambda_{\max}\Big[\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)+B^i_1(p^*)K^j_1\Big)^T P_1+P_1\Big(A^i_{11}(0,0,p^*)+B^i_1(p^*)K^j_1\Big)+$$

$$+\Big(A^j_{11}(0,0,p^*)+B^j_1(p^*)K^i_1\Big)^T P_1+P_1\Big(A^j_{11}(0,0,p^*)+B^j_1(p^*)K^i_1\Big)\Big]+$$

$$+2\|P_1\|\|A^i_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A^i_{11}(0,0,p^*)\|+2\|P_1\|\|K^j_1\|\|B^i_1(p)-B^i_1(p^*)\|+$$

$$+2\|P_1\|\|A^j_{11}(\tilde{x},\tilde{y},p)-A^j_{11}(0,0,p^*)\|+2\|P_1\|\|K^i_1\|\|B^j_1(p)-B^j_1(p^*)\|\Bigg]\|x\|^2,$$

$$y^T\Big[\Big(A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^i_2(p)K^j_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^i_{22}(x,y,p)+B^i_2(p)K^j_2\Big)+$$

$$+\Big(A^j_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^j_2(p)K^i_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^j_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)+B^j_2(p)K^i_2\Big)\Big]y\le$$

$$\le\Bigg[\lambda_{\max}\Big[\Big(A^i_{22}(0,0,p^*)+B^i_2(p^*)K^j_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^i_{22}(0,0,p^*)+B^i_2(p^*)K^j_2\Big)+$$

$$+\Big(A^j_{22}(0,0,p^*)+B^j_2(p^*)K^i_2\Big)^T P_2+P_2\Big(A^j_{22}(0,0,p^*)+B^j_2(p^*)K^i_2\Big)\Big]+$$

$$+2\|P_2\|\|A^i_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A^i_{22}(0,0,p^*)\|+2\|P_2\|\|K^j_2\|\|B^i_2(p)-B^i_2(p^*)\|+$$

$$+2\|P_2\|\|A^j_{22}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A^j_{22}(0,0,p^*)\|+2\|P_2\|\|K^i_2\|\|B^j_2(p)-B^j_2(p^*)\|\Bigg]\|y\|^2,$$

$$x^T\Big[P_1A^i_{12}(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B^i_1(p)K^j_2+\Big(A^i_{21}(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\Big)^T P_2+\Big(K^j_1\Big)^T\Big(B^i_2(p)\Big)^T P_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)+P_1B_1^j(p)K_2^i+\left(A_{21}^j(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)\right)^TP_2+\left(K_1^i\right)^T\left(B_2^j(p)\right)^TP_2\Big]y\leq$$

$$\leq\Bigg[\Big\|P_1A_{12}^i(0,0,p^*)+P_1B_1^i(p^*)K_2^j+\left(A_{21}^i(0,0,p^*)\right)^TP_2+\left(K_1^j\right)^T\left(B_2^i(p^*)\right)^TP_2+$$

$$+P_1A_{12}^j(0,0,p^*)+P_1B_1^j(p^*)K_2^i+\left(A_{21}^j(0,0,p^*)\right)^TP_2+\left(K_1^i\right)^T\left(B_2^j(p^*)\right)^TP_2\Big\|+$$

$$+\|P_1\|\|A_{12}^i(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}^i(0,0,p^*)\|+\|P_1\|\|K_2^j\|\|B_1^i(p)-B_1^i(p^*)\|+$$

$$+\|P_1\|\|A_{12}^j(\tilde{x},\tilde{y},p)-A_{12}^j(0,0,p^*)\|+\|P_1\|\|K_2^i\|\|B_1^j(p)-B_1^j(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\|A_{21}^i(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}^i(0,0,p^*)\|+\|P_2\|\|K_1^j\|\|B_2^i(p)-B_2^i(p^*)\|+$$

$$+\|P_2\|\|A_{21}^j(\tilde{\tilde{x}},\tilde{\tilde{y}},p)-A_{21}^j(0,0,p^*)\|+\|P_2\|\|K_1^i\|\|B_2^j(p)-B_2^j(p^*)\|\Bigg]\|x\|\|y\|,$$

з (5.30) отримаємо:

$$\dot{V}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(5.24)}\leq$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))u^TD_{ij}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p)u, \tag{5.31}$$

де $u=(\|x\|,\ \|y\|)^T$. Оцінку (5.31) можемо переписати наступним чином:

$$\dot{V}(x,y,\varepsilon)\Big|_{(5.24)}\leq$$

$$\leq u^T\tilde{D}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p,\mu)u, \tag{5.32}$$

де

$$\tilde{D}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\delta_1,\ldots,\delta_r,p,\mu)=$$

$$=\begin{pmatrix}\mu^TL(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,p)\mu & \mu^TM(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\mu\\ \mu^TM(\beta_1,\ldots,\beta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_r,p)\mu & \mu^TN(\delta_1,\ldots,\delta_r,p)\mu\end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, p) = \Big(L_{ij}\Big)_{i,j=1}^{r}$, $M(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p) = \Big(M_{ij}\Big)_{i,j=1}^{r}$, $N(\delta_1, \ldots, \delta_r, p) = \Big(N_{ij}\Big)_{i,j=1}^{r}$ – симетричні матриці розмірності $r \times r$, $\mu^T = (\mu_1(z(t)), \ldots, \mu_r(z(t)))$.

Для елементів матриці (5.33) справедливі наступні оцінки:

$$\lambda_{\min}\Big(L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, p)\Big)\|\mu\|^2 \leq \mu^T\Big(L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, p)\Big)\mu \leq$$

$$\leq \lambda_{\max}\Big(L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, p)\Big)\|\mu\|^2,$$

$$\lambda_{\min}\Big(M(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p)\Big)\|\mu\|^2 \leq$$

$$\leq \mu^T\Big(M(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p)\Big)\mu \leq$$

$$\leq \lambda_{\max}\Big(M(\beta_1, \ldots, \beta_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, p)\Big)\|\mu\|^2,$$

$$\lambda_{\min}\Big(N(\delta_1, \ldots, \delta_r, p)\Big)\|\mu\|^2 \leq \mu^T\Big(N(\delta_1, \ldots, \delta_r, p)\Big)\mu \leq$$

$$\leq \lambda_{\max}\Big(N(\delta_1, \ldots, \delta_r, p)\Big)\|\mu\|^2.$$

Очевидно, що при виконанні нерівностей (5.27), (5.28), матриця (5.33) від'-ємно визначена для вибраного значення p і для всіх значень $\mu \in \mathbb{R}^r$. Це означає, в силу (5.32), що похідна по часу скалярної функції (5.29) в силу системи (5.24) від'ємна для вибраного p, всіх значень змінних $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, окрім нульових, всіх $\mu \in \mathbb{R}^r$ і всіх $\varepsilon \in (0, 1]$. Отже, функція (5.29) є функцією Ляпунова, яка дозволяє в силу теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість (див. [3]) встановити асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи (5.24). Так як p довільна точка з області P, то вказаний тип стійкості має місце для всіх значень параметра p з області P.

Теорему доведено.

Приклад 5.3. В якості прикладу застосування запропонованої методики, розглянемо стабілізацію нульового стану рівноваги нечіткої моделі, для опису якої використаний набір нечітких предикатних правил:

$$\begin{array}{ll} \text{якщо } x_1 \in M_1, & \text{якщо } x_1 \in M_2, \\ \text{то } \begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,p), \\ \varepsilon \dot{y} = g_1(x,y,p), \end{cases} & \text{то } \begin{cases} \dot{x} = f_2(x,y,p), \\ \varepsilon \dot{y} = g_2(x,y,p), \end{cases} \end{array} \tag{5.34}$$

де $x^T = (x_1,\ x_2) \in [-3,\ 3] \times \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^1$, $p \in \mathbb{R}^1$,

$$f_1(x,y,p) = \begin{pmatrix} 0.05 \sin x_1 + 0.95x_1 + 2y \\ x_2 + (1.5 + 0.75p)y \end{pmatrix},$$

$$f_2(x,y,p) = \begin{pmatrix} -3.1x_1 - 0.9y - 0.1 \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \\ (-4.3 + 0.1 \sin^2 p)x_2 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x,y,p) = -x_1 + (2 + 0.1 \sin p)x_2 - (1.1 + 0.1 \cos^2 p)y,$$

$$g_2(x,y,p) = (0.1e^{-p^2} - 2.1)x_1 + 0.5x_2 + 1.9y + 0.1 \arctan y,$$

M_1 та M_2 нечіткі множини, що визначаються функціями приналежності $\overline{M}_1(x_1) = 1 - \dfrac{|x_1|}{3}$ та $\overline{M}_2(x_1) = \dfrac{|x_1|}{3}$, відповідно. Нехай $p^* = 0$. Тоді

$$A^1_{11}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1_{12}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

$$A^1_{21}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^1_{22}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} -1.2 \end{pmatrix},$$

$$A^2_{11}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} -3.1 & 0 \\ 0 & -4.3 \end{pmatrix}, \quad A^2_{12}(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}^2(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^2(0,0,p^*) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

причому матриця $A_{22}^2(0,0,p^*)$ нестійка. Легко бачити, що для нечіткої моделі (5.34) виконуються всі умови Припущення 5.1 і Припущення 5.2, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0.1$, $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 0.12\}$.

Введемо керування $u \in \mathbb{R}^2$ за допомогою матриць

$$B_1^1(p) = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^1(p) = (1 \;\; -0.3 + p^5),$$

$$B_1^2(p) = \begin{pmatrix} 0.3\cos p & -0.1 \\ -0.3 & -0.6 \end{pmatrix}, \quad B_2^2(p) = (-0.5(1+p)^3 \;\; 1.9),$$

так що нечітка модель (5.34) матиме вигляд

$$\begin{array}{ll} \text{якщо } x_1 \in M_1, & \text{якщо } x_1 \in M_2, \\ \text{то} \begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y,p) + B_1^1(p)u, \\ \varepsilon\dot{y} = g_1(x,y,p) + B_2^1(p)u, \end{cases} & \text{то} \begin{cases} \dot{x} = f_2(x,y,p) + B_1^2(p)u, \\ \varepsilon\dot{y} = g_2(x,y,p) + B_2^2(p)u. \end{cases} \end{array} \tag{5.35}$$

Керування визначається наступним чином:

$$\begin{array}{ll} \text{якщо } x_1 \in M_1, & \text{якщо } x_1 \in M_2, \\ \text{то } u = K_1^1 x + K_2^1 y, & \text{то } u = K_1^2 x + K_2^2 y, \end{array} \tag{5.36}$$

де

$$K_1^1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad K_2^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

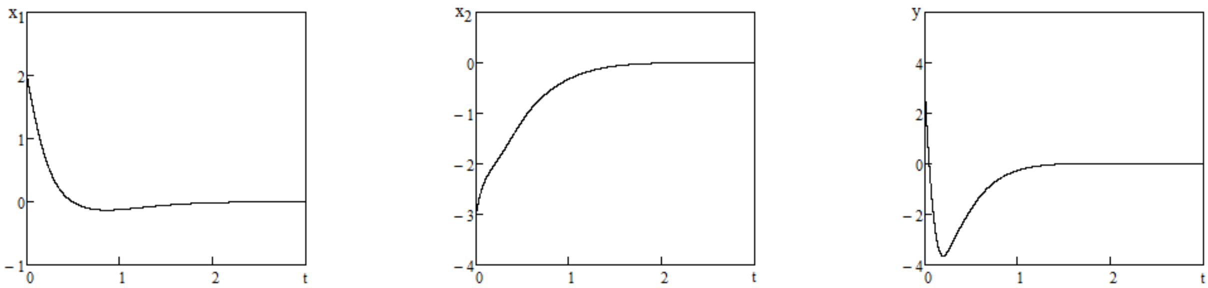
$$K_1^2 = \begin{pmatrix} -2.7 & 1 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши системи лінійних матричних нерівностей (5.25), (5.26), визначимо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \end{pmatrix}$$

і переконаємось, що співвідношення (5.27), (5.28) справедливі відносно області $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 0.12\}$, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = = \delta_2 = 0.1$. Тобто, згідно Теореми 5.3, нульовий стан рівноваги системи, яка описує повну динаміку нечіткої моделі (5.35) при керуванні (5.36), асимптотично стійкий для всіх значень параметра p з області P і всіх $\varepsilon \in (0, 1]$.

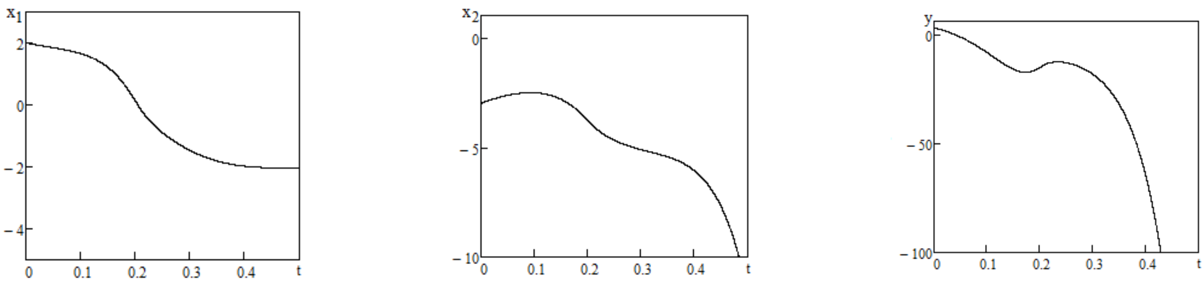
Поведінка розв'язків системи диференціальних рівнянь, яка отримана після приведення до чіткості нечіткої моделі (5.35) при керуванні (5.36), для значень параметрів $p = 0.1$, $\varepsilon = 0.06$ та початкових значеннях змінних $x_0 = (2,\ -3)^T$, $y_0 = 3$, зображена на Рис. 5.4.



а) б) в)

Рис. 5.4 – Поведінка змінних при керуванні. Приклад 5.3

Поведінка розв'язків цієї ж системи диференціальних рівнянь при тих же значеннях параметрів і початкових значеннях змінних, але без керування, зображено на Рис. 5.5.



а) б) в)

Рис. 5.5 – Поведінка змінних без керування. Приклад 5.3

5.4 Результати та висновки

В розділі 5 розглянуто застосування прямого методу Ляпунова до дослідження стійкості неточних систем типу Такагі–Сугено з нелінійними локальними системами, які мають вигляд різнотемпових систем диференціальних рівнянь, а також побудову керування для стабілізації таких систем.

У випадку, коли лінійні наближення підсистем всіх локальних систем стійкі при певному значенні параметра, запропоновано спосіб побудови скалярної функції Ляпунова в явному вигляді, компоненти якої будуються згідно стійких наближень. Використовуючи побудовану функцію, отримано достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено, область такої стійкості у просторі параметрів моделі та інтервал зміни параметра при старших похідних в рівняннях локальних систем.

Якщо деякі лінійні наближення підсистем локальних систем при певному значенні параметра нестійкі, то запропоновано спосіб побудови матричнозначної функції Ляпунова, використовуючи яку отримано достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено, область такої стійкості у просторі параметрів моделі та інтервал зміни параметра при старших похідних в рівняннях локальних систем.

У випадку, коли застосувати результати підрозділів 5.1, 5.2 для побудови функції Ляпунова не вдається, запропоновано керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено відносно певної області у просторі параметрів моделі та для всіх значень параметра при старших похідних в рівняннях локальних систем з інтервалу $(0, 1]$.

Зауважимо, що важливим результатом є те, що встановлені у всіх підрозділах достатні умови стійкості стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено з параметричними неточностями не залежать від вибору функцій приналежності нечітких множин. Також відмітимо, що запропоновані підходи не потребують розділення рухів на “швидкі” та “повільні”. Це, виходячи із загальності вигляду нелінійних функцій в локальних системах, становило б значні труднощі.

Основні результати цього розділу викладено в роботах [83, 86, 136].

Розділ 6

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕТОЧНИХ РІЗНОТЕМПОВИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Даний розділ присвячено застосуванню отриманих теоретичних результатів до дослідження механічних систем, математичні моделі яких можуть бути зведені до вигляду різнотемпових систем диференціальних рівнянь.

Розглядається клас робототехнічних систем, що відносяться до т.зв. "малоприводних" механічних систем (ММС) (див. [145]). ММС характеризуються тим, що кількість входів керування в таких системах менша числа степенів свободи, тобто є недостатньою для реалізації звичайних режимів роботи робота. Однак, з іншої сторони, такі системи мають цілий ряд суттєвих переваг у порівнянні зі звичайними, зокрема кращі енергетичні, масово-габаритні та вартісні показники. Застосовується метод побудови керування англ. Dynamic Surface Control (DSC) (див. [175,179]), однією з особливостей якого є те, що керування, яке побудовано за його допомогою, забезпечує збіжність траєкторій досліджуваної системи диференціальних рівнянь не до рівноважних значень змінних, а до деяких наперед заданих траєкторій, збіжність яких до рівноважних значень змінних постулюється. Також особливістю даного методу є застосування фільтрів, за допомогою яких операція диференціювання замінюється визначенням приросту диференційованої величини за фіксований проміжок часу (часова константа фільтру). Це дозволяє уникнути збільшення складності елементів системи диференціальних рівнянь, в тому числі і закону керування. Крім того, оскільки часові константи фільтрів можуть бути обраними фіксованими але як завгодно малими додатніми величинами, то початкова система диференціальних рівнянь природнім чином може бути представлена у вигляді різнотемпової, до якої можливо застосувати отримані теоретичні результати по побудові функцій Ляпунова і по встановленню за їх допомогою умов потрібних динамічних характеристик стаціонарних режимів роботи робота. Таким чином, з вищезазначеного слідує, що розвиток теорії ММС є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки, а розв'язання конкретних задач в рамках цієї теорії має важливе прикладне значення.

В підрозділі 6.1 розглядається задача побудови керування неточними "малоприводними" механічними системами. Застосовуючи перетворення змінних, математична модель вказаної механічної системи зводиться до каскадного вигляду. Застосовуючи метод побудови керування DSC, визначається в явному вигляді керування актуатором. Система диференціальних рівнянь, до якої зводиться початкова математична модель і з певного виду стійкості стану рівноваги якої слідує аналогічний тип стійкості стаціонарного режиму цієї моделі при запропонованому керуванні, має вигляд різнотемпової. Доведення факту стійкості проводиться методом функцій Ляпунова. Це дозволяє, зокрема, отримати оцінки області робастності побудованого керування, а також встановити обмеження на величину параметра, що визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів і входить явним чином до закону керування.

У пункті 6.1.1 розглядається глобальна стабілізація верхнього положення рівноваги маятника обертанням маховика (див. [178]). Отримано явний вигляд керування обертанням маховика, яке вирішує поставлену задачу, а також область робастності такого керування в просторі параметрів моделі.

У пункті 6.1.2 розглядається глобальна стабілізація стаціонарного режиму моделі, що має схожу математичну природу із моделлю супутника із подвійним обертанням (див. [193]) і також може застосовуватися в якості моделі механізму, призначеного для активного гасіння вібрацій, яка отримала назву TORA (англ. Translational Oscillator with Rotational Actuator). Запропоновано керування актуатором, яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість потрібного стаціонарного режиму та його робастність відносно певної області у просторі параметрів моделі.

У пункті 6.1.3 розглядається стабілізація стану рівноваги одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Жорсткість торсіонної пружини, яка моделює пружність трансмісії, вважається нелінійно залежною від зміщення, що відрізняється від звичної "лінійної" постановки такої задачі (див. [112]). Крім того розглядається навність демпфування при обертанні ланки маніпулятора та валу електродвигуна. Отримано явний вигляд керування обертанням електродвигуна, яке вирішує поставлену задачу, а також область робастності такого керування в просторі параметрів моделі.

У підрозділі 6.2 розглядається керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збурення (див. [151]). Запропоновано закон зміни напруги, що підводиться до двигуна, який забезпечує асимптотичне прямування кутової швидкості його обертання до бажаної незалежно від початкових значень змінних. Показана робастність такого керування та запропоновано спосіб оцінки області робастності у просторі параметрів моделі.

6.1 Способи побудови керування та дослідження глобальної стійкості малоприводних механічних систем

6.1.1 Маятник з маховиком

Розглянемо одноланковий маятник, який може обертатися у вертикальній площині. Вісь його обертання розташована горизонтально і закріплена на нерухомій основі. Вільний кінець маятника містить симетричний відносно центра маховик, з віссю обертання яка паралельна вісі обертання маятника і навколо якої маховик може повертатися в ту чи іншу сторону. Маховик приводиться до руху електродвигуном постійного струму, статор якого жорстко зкріплений з маятником, а вісь ротора жорстко зкріплена з віссю маховика. На Рис. 6.1 зображена схема маятника з маховиком, де O – точка підвісу маятника, C – центр маховика, q_1 – кут повороту маятника відносно вертикалі, q_2 – кут повороту маховика відносно маятника. Керування маятником відбувається за допомогою обертання маховика, яке задається електродвигуном, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, які прикладені до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає у стабілізації маятника в його верхньому стані рівноваги, в той час як маховик зупинить своє обертання.

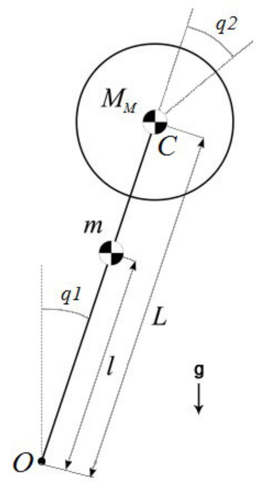


Рис. 6.1 – Маятник з маховиком

Введемо позначення: M_M – маса маховика, m – маса маятника, M_R – маса електродвигуна, J_m, J_M і J_R – моменти інерції маятника, маховика і ротора двигуна, відповідно, відносно їх осей обертання, L – довжина маятника, l – відстань від шарніру O до центру мас маятника, Δ – момент електромагнітних сил, які прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора. Вважаємо, що момент сил опору в шарнірі малий і їм можливо знехтувати. Тоді, використовуючи метод Лагранжа, рівняння руху системи "маятник-маховик" отримаємо (див. [73, 165]) у вигляді

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

де $J_1 = J_m + (M_M + M_R)L^2 + J_M + J_R$, $J_2 = J_M + J_R$,
$\omega = (ml + (M_M + M_R)L)g$, g – прискорення вільного падіння.

Вважаємо, що деякі чи, можливо, всі параметри моделі задані неточно, тобто числові величини, від яких залежать коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (6.1), неперервно залежать від чисельного векторного параметра, що належить деякій замкненій множині. В такому випадку, систему диференціальних рівнянь (6.1) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{pmatrix} J_1(p) & J_2(p) \\ J_2(p) & J_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega(p) \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

де $p \in P \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невід'ємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, тощо.

Ввівши безрозмірні змінні $\tau = t\sqrt{\dfrac{\omega(p)}{J_2(p)}}$, $\nu = \dfrac{\Delta}{\omega(p)}$, отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (6.2):

$$\begin{cases} \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 - \sin(q_1) = 0, \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \nu, \end{cases} \tag{6.3}$$

де диференціювання ведеться по безрозмірному часу τ. Нехай (див. [177]) $\nu = \alpha u + \beta$, де $\alpha = 1 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}$, $\beta = \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)} \sin(q_1)$, тоді заміною змінних

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)} \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ \eta_2 = q_1, \\ \eta_3 = \dot{q}_2 \end{cases} \tag{6.4}$$

система диференціальних рівнянь (6.3) приводиться до "каскадного" вигляду

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \sin(\eta_2), \\ \dot{\eta}_2 = \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)} \left(\eta_1 - \eta_3\right), \\ \dot{\eta}_3 = u. \end{cases} \tag{6.5}$$

З глобальної асимптотичної стійкості стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.5) при керуванні u, слідує аналогічна властивість системи диференціальних рівнянь (6.2) при керуванні Δ.

Для побудови керування, яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.5), використаємо техніку, запропоновану в [179], т.зв. Dynamic Surface Control. Розглянемо перше рівняння з (6.5). Нехай змінна η_2 змінюється по закону $\tilde{\eta}_2 = -\arctan(\eta_1)$. Тоді нульовій стан рівноваги диференціального рівняння

$$\dot{\eta}_1 = \sin(\tilde{\eta}_2) \tag{6.6}$$

глобально асимптотично стійкий. Цей факт легко встановити, розглянувши допоміжну функцію $V(\eta_1) = \dfrac{1}{2}\eta_1^2$ та її похідну по часу в силу (6.6) $\dot{V}(\eta_1)\Big|_{(6.6)} = \eta_1 \sin(\tilde{\eta}_2)$, які задовольняють усім умовам теореми 12.1 (див.

[3]) про глобальну асимптотичну стійкість. Очевидно, що якщо змінна η_2 асимптотично прямує до $\tilde{\eta}_2$, то змінна η_1, яка задається (6.5), асимптотично прямує до нуля незалежно від свого початкового значення.

Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_2 - \bar{\eta}_2, \tag{6.7}$$

де $\bar{\eta}_2$ – результат застосування фільтру до $\tilde{\eta}_2$, тобто

$$\tau\dot{\bar{\eta}}_2 + \bar{\eta}_2 = \tilde{\eta}_2, \quad \bar{\eta}_2(0) = \tilde{\eta}_2(0), \tag{6.8}$$

де τ_2 – довільна як завгодно мала додатна константа. Диференціюючи (6.7) по часу отримаємо, враховуючи (6.5), що

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_2 - \dot{\bar{\eta}}_2 = \frac{J_2(p)}{J_1(p)}(\eta_1 - \eta_3) - \dot{\bar{\eta}}_2,$$

звідки слідує, що якщо змінна η_3 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_3 = \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\Big(K_1 S_1 + \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_1 - \dot{\bar{\eta}}_2\Big),$$

де $K_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до нуля незалежно від свого початкового значення.

Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \tag{6.9}$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_3\dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3, \quad \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \tag{6.10}$$

де τ_3 – довільна, як завгодно мала додатна константа. Диференціюючи (6.9) по часу отримаємо, враховуючи (6.5), що

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_3 - \dot{\tilde{\eta}}_3 = u - \dot{\tilde{\eta}}_3.$$

Вибравши керування

$$u = \dot{\tilde{\eta}}_3 - K_2 S_2, \tag{6.11}$$

де $K_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні.

Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_2 - \tilde{\eta}_2 \tag{6.12}$$

і

$$z_2 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \tag{6.13}$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6.7) слідує, що

$$\eta_2 = S_1 + \bar{\eta}_2 = S_1 + (\bar{\eta}_2 - \tilde{\eta}_2) + \tilde{\eta}_2 = S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_2, \tag{6.14}$$

а з (6.9) слідує, що

$$\eta_3 = S_2 + \bar{\eta}_3 = S_2 + (\bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3) + \tilde{\eta}_3 = S_2 + z_2 + \tilde{\eta}_3 =$$

$$= S_2 + z_2 + \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\Big(K_1 S_1 + \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_1 - \dot{\tilde{\eta}}_2\Big). \tag{6.15}$$

Продовжимо перетворення $\dot{S}_1$ та $\dot{S}_2$. Для похідної S_1 по часу, із урахуванням значення $\tilde{\eta}_3$ і співвідношення (6.13), отримаємо:

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_2 - \dot{\tilde{\eta}}_2 = \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_3 - \dot{\tilde{\eta}}_2 =$$

$$= \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\Big((\eta_3 - \bar{\eta}_3) + (\bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3) + \tilde{\eta}_3\Big) - \dot{\tilde{\eta}}_2 =$$

$$= -K_1 S_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} S_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} z_2, \tag{6.16}$$

а для похідної S_2 по часу, із урахуванням вибраного керування у вигляді (6.11), справедливо:

$$\dot{S}_2 = -K_2 S_2. \tag{6.17}$$

Саме ж керування, із урахуванням (6.10) та (6.13), представимо в наступному вигляді:

$$u = \dot{\bar{\eta}}_3 - K_2 S_2 = \frac{\tilde{\eta}_3 - \bar{\eta}_3}{\tau_3} - K_2 S_2 = -\frac{z_2}{\tau_3} - K_2 S_2. \tag{6.18}$$

Визначимо похідні по часу похибок фільтрів. Приймаючи до уваги значення $\tilde{\eta}_2$ та співвідношення (6.8) і (6.14), диференціювання (6.12) по часу дає наступне значення для $\dot{z}_1$:

$$\dot{z}_1 = \dot{\bar{\eta}}_2 - \dot{\tilde{\eta}}_2 = \frac{\tilde{\eta}_2 - \bar{\eta}_2}{\tau_2} - \dot{\tilde{\eta}}_2 = -\frac{z_1}{\tau_2} + \frac{\sin(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1))}{1 + (\eta_1)^2}. \tag{6.19}$$

Враховуючи значення $\tilde{\eta}_3$ і використовуючи співвідношення (6.8), (6.10), (6.12), (6.14), (6.16), (6.19), рівняння, що визначає поведінку $\dot{z}_2$, отримаємо диференціюючи рівність (6.13) по часу в силу (6.5):

$$\dot{z}_2 = \dot{\bar{\eta}}_3 - \dot{\tilde{\eta}}_3 = -\frac{z_2}{\tau_3} - \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\Big(K_1 \dot{S}_1 + \frac{J_2(p)}{J_1(p)} \dot{\eta}_1 - \ddot{\bar{\eta}}_2\Big) =$$

$$= -\frac{z_2}{\tau_3} - \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\Bigg[K_1\Big(- K_1 S_1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} S_2 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)} z_2\Big) +$$

$$+ \frac{J_2(p)}{J_1(p)} \sin\Big(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)\Big) + \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{z_1}{\tau_2}\Big)\Bigg] =$$

$$= -\frac{z_2}{\tau_3} - \sin\Big(S_1 + z_1 - \arctan(\eta_1)\Big) + \frac{J_1(p)}{J_2(p)} K_1^2 S_1 + K_1 S_2 + K_1 z_2 +$$

$$+\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\frac{z_1}{\tau_2^2}-\frac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_2}\frac{\sin(S_1+z_1-\arctan(\eta_1))}{1+(\eta_1)^2}. \tag{6.20}$$

Таким чином, динаміка відхилення траєкторій системи диференціальних рівнянь (6.5) при керуванні (6.11) від траєкторій цієї системи, які асимптотично прямують до нульового стану рівноваги, описується диференціальними рівняннями (6.6), (6.16), (6.17), (6.19), (6.20), які утворюють систему

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \sin(S_1+z_1-\arctan(\eta_1)), \\ \dot{S}_1 = -K_1S_1-\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}S_2-\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}z_2, \\ \dot{S}_2 = -K_2S_2, \\ \dot{z}_1 = -\dfrac{z_1}{\tau_2}+F_1(\eta_1,S_1,z_1), \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{z_1}{\tau_3}+F_2(\eta_1,S_1,S_2,z_1,z_2), \end{cases} \tag{6.21}$$

де

$$F_1(\eta_1,S_1,z_1)=\frac{\sin(S_1+z_1-\arctan(\eta_1))}{1+(\eta_1)^2},$$

$$F_2(\eta_1,S_1,S_2,z_1,z_2)=-\sin\Big(S_1+z_1-\arctan(\eta_1)\Big)+$$

$$+\frac{J_1(p)}{J_2(p)}K_1^2S_1+K_1S_2+K_1z_2+\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\frac{z_1}{\tau_2^2}-\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\frac{1}{\tau_2}F_1(\eta_1,S_1,z_1).$$

Оскільки τ_2 та τ_3 можуть бути довільними додатними як завгодно малими величинами, то вважаючи τ_2, $K_1>0$, $K_2>0$ фіксованими константами, які можуть бути вибраними “зручними” в контексті поставленої задачі, а $\tau_3=\varepsilon$ – параметром, заміною змінних
$(\eta_1,S_1,S_2,z_1,z_2)^T \to (x_1,x_2,x_3,x_4,y)^T=(x,y)^T$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, система диференціальних рівнянь (6.21) може бути зведена до вигляду різно-

темпової

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2 + x_4 - \arctan(x_1)), \\ \dot{x}_2 = -K_1 x_2 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)} x_3 - \dfrac{J_2(p)}{J_1(p)} y, \\ \dot{x}_3 = -K_2 x_3, \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{x_4}{\tau_2} + F_1(x_1, x_2, x_4), \\ \varepsilon \dot{y} = -y + \varepsilon F_2(x, y). \end{cases} \tag{6.22}$$

Введемо позначення

$$A(p, K_1) = \frac{\left(\dfrac{J_2(p)}{J_1(p)}\right)^2}{2(K_1 - \dfrac{1}{2})}, \quad B(K_1) = 5 + \frac{1}{K_1 - \dfrac{1}{2}},$$

$$C(p, K_1, K_2, \tau_2) = K_1 + 2\left(1 + \frac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_2}\right)^2 + \frac{K_1^2}{2(K_2 - A(p, K_1))} +$$

$$+ \frac{2\left(\dfrac{J_1(p)}{J_2(p)} + \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)} K_1^2 + \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_2} + 1\right)^2}{K_1 - \dfrac{1}{2}} + \frac{\left(1 + \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_2^2} + \dfrac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_2}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{\tau_2} - B(K_1)\right)}.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка містить основний результат даного підрозділу.

Теорема 6.1. *Для всіх значень параметра p з області P існують такі константи керування $K_1 > \frac{1}{2}$, $K_2 > A(p, K_1)$ і такі часові константи фільтрів $0 < \tau_2 < \frac{1}{B(K_1)}$, $\tau_3 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{C(p, K_1, K_2, \tau_2)}$, що керування обертанням інерціального маховика вигляду (6.11) глобально стабілізує верхній стан рівноваги маятника.*

Доведення. Очевидно, що глобальна асимптотична стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.5) при керуванні (6.11) слідує з такого ж типу стійкості нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.22). Тому для доведення твердження теореми достатньо довести існування для всіх значень параметра p з області P констант керування $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ і часових константи фільтрів $\tau_2 > 0$, $\tau_3 = \varepsilon > 0$, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням, таких що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.22) глобально асимптотично стійкий.

Виберемо довільне значення параметра p^* з області P і константи керування K_1^*, K_2^* та часові константи фільтрів τ_2^*, ε^*, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням. Розглянемо систему (6.22) при вибраних величинах. Побудуємо скалярну функцію $V(x, y) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(0, 0) = 0$, вигляду

$$V(x, y) = \sqrt{1 + x_1^2} - 1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y^2). \tag{6.23}$$

Ця функція, очевидно, додатно визначена за Ляпуновим і нескінченно велика. Знайдемо її похідну по часу в силу системи (6.22).

$$\frac{dV(x, y)}{d\tau}\Big|_{(6.22)} = \frac{x_1 \dot{x}_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4 + y\dot{y} =$$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}}\Bigg(\frac{-x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}} + \cos\Big(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)\Big)x_2 +$$

$$+ \cos\Big(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)\Big)x_4\Bigg) + x_2\Bigg(-K_1^* x_2 - \frac{J_2(p^*)}{J_1(p^*)}x_3 - \frac{J_2(p^*)}{J_1(p^*)}y\Bigg) +$$

$$+ x_3(-K_2^* x_3) + x_4\Bigg(-\frac{x_4}{\tau_2} - \frac{x_1}{(1 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_2}{1 + x_1^2}\cos\Big(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)\Big) +$$

$$+ \frac{x_4}{1 + x_1^2}\cos\Big(\hat{x}_2 + \hat{x}_4 - \arctan(x_1)\Big)\Bigg) + y\Bigg(-\frac{y}{\varepsilon^*} + \frac{J_1(p^*)}{J_2(p^*)}(K_1^*)^2 x_2 + K_1^* x_3 + K_1^* y +$$

$$+\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}-\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)x_2-\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)x_4+$$

$$+\frac{J_1(p^*)}{J_2(p^*)}\frac{x_4}{(\tau_2^*)^2}+\frac{J_1(p^*)}{J_2(p^*)\tau_2^*}\frac{x_1}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{J_1(p^*)}{J_2(p^*)\tau_2^*}\frac{x_2}{1+x_1^2}\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)-$$

$$-\frac{J_1(p^*)}{J_2(p^*)\tau_2^*}\frac{x_4}{1+x_1^2}\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)\Bigg). \tag{6.24}$$

Тут використана формула скінченних приростів Лагранжа

$$\sin\Big(x_2+x_4-\arctan(x_1)\Big)=\sin\Big(-\arctan(x_1)\Big)+$$

$$+\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)x_2+\cos\Big(\hat{x}_2+\hat{x}_4-\arctan(x_1)\Big)x_4,$$

де x_2 та x_4 – деякі точки з $\mathbb{R}$. Також враховано, що $\sin\Big(-\arctan(x_1)\Big)=$ $=-\dfrac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}$.

Скориставшись нерівністю $-az^2+bz\le-\dfrac{a}{2}z^2+\dfrac{b^2}{2a}$, яка вірна для всіх $a,b,z\in\mathbb{R}$, $a>0$, із співвідношення (6.24) отримаємо оцінку для похідної функції (6.23) по часу в силу системи(6.22):

$$\frac{dV(x,y)}{d\tau}\Big|_{(6.22)}\le-\frac{x_1^2}{8(1+x_1^2)}-\frac{K_1^*-\frac{1}{2}}{8}x_2^2-\frac{K_2^*-A(p^*,K_1^*)}{2}x_3^2-$$

$$-\frac{\frac{1}{\tau_2^*}-B(K_1^*)}{2}x_4^2-\left(\frac{1}{\varepsilon^*}-C(p^*,K_1^*,K_2^*,\tau_2^*)\right)y^2,$$

з якої слідує, шо вказана похідна від'ємна для всіх значень змінних $x\in\mathbb{R}^4$, $y\in\mathbb{R}$, окрім нульових. Функція (6.23) задовольняє всім умовам теореми 12.1 (див. [3]) і дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.22) для вибраних значень параметрів. Оскільки p^* довільне значення параметра з області P, то для всіх інших значень параметра з цієї області також існують константи керування і часові константи фільтрів, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням, такі що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.22) глобально асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

Доведена теорема для всіх значеннях параметра p з області P постулює існування керування вигляду (6.11), яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість верхнього стану рівноваги маятника. Нехай для деякого значення параметра p^* з області P таке керування побудовано, тобто вибрані константи K_1^*, K_2^*, τ_2^*, $\tau_3^* = \varepsilon^*$. При виконанні нерівностей

$$\begin{cases} K_2^* > \max\limits_{p \in P_1} A(p, K_1^*), \\ \varepsilon^* < \dfrac{1}{\max\limits_{p \in P_1} C(p, K_1^*, K_2^*, \tau_2^*)}, \end{cases} \tag{6.25}$$

побудоване керування, очевидно, буде глобально асимптотично стабілізувати верхній стан рівноваги маятника для всіх значень параметра $p \in P_1 \subseteq P$, $p^* \in P_1$. Таким чином, нерівності (6.25) можливо використовувати для визначення області робастності керування (6.11).

Нехай K_1 та τ_2 вибрані таким чином, що $K_1 = \dfrac{1}{\tau_2}$. Тоді з (6.4) (6.14) та (6.15) слідує, що

$$x_2 + x_4 = S_1 + z_1 = \eta_2 + \arctan(\eta_1) = q_1 + \arctan\left(\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right),$$

$$x_3 + y = S_2 + z_2 = \eta_3 - \frac{J_1(p)}{J_2(p)}\left(\frac{J_2(p)}{J_1(p)}\eta_1 + K_1(x_2 + x_4)\right) =$$

$$= -\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\dot{q}_1 - \frac{J_1(p)}{J_2(p)}K_1\left(q_1 + \arctan\left(\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\right).$$

Виразивши величину $x_3(\tau)$ з (6.22) у вигляді $x_3(\tau) = x_3(0)\exp(-K_2\tau)$, отримаємо закон керування u, який явно залежить від фізичних характеристик початкової моделі, у вигляді

$$u = -K_2 x_3 - \frac{y}{\tau_3} = \left(-K_2 + \frac{1}{\tau_3}\right) x_3 - \frac{1}{\tau_2}(x_3 + y) =$$

$$= \left(-K_2 + \frac{1}{\tau_3}\right) x_3(0) \exp(-K_2 \tau) + \frac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_3}\dot{q}_1 +$$

$$+ \frac{J_1(p)K_1}{J_2(p)\tau_3}\left(q_1 + \arctan\left(\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\right)$$

або, переходячи до розмірних величин, закон керування Δ у вигляді

$$\Delta = \omega(p)\left(1 - \frac{J_2(p)}{J_1(p)}\right) \times$$

$$\times \Bigg[\left(-K_2 + \frac{1}{\tau_3}\right) x_3(0) \exp\left(-K_2 \sqrt{\frac{\omega(p)}{J_2(p)}} t\right) + \frac{J_1(p)}{J_2(p)\tau_3}\sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_1 +$$

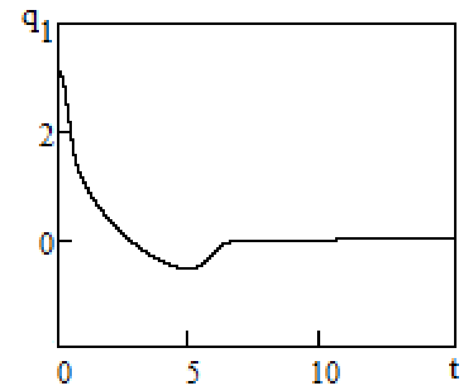
$$+ \frac{J_1(p)K_1}{J_2(p)\tau_3}\left(q_1 + \arctan\left(\frac{J_1(p)}{J_2(p)}\sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_1 + \sqrt{\frac{J_2(p)}{\omega(p)}}\dot{q}_2\right)\right)\Bigg] +$$

$$+ \omega(p)\frac{J_2(p)}{J_1(p)}\sin(q_1), \qquad (6.26)$$

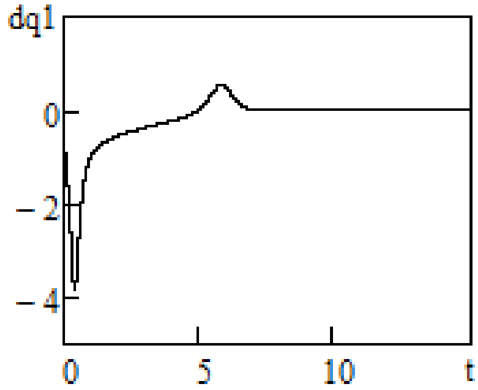
де диференціювання ведеться по часу t.

Зауважимо, що змінюючи величину $x_3(0)$, отримаємо різні закони керування, з яких можна вибрати найбільш прийнятний. Крім того, вигляд керування (6.26) можливо спростити, якщо вибрати K_2 та τ_3 таким чином, що $K_2 = \dfrac{1}{\tau_3}$.

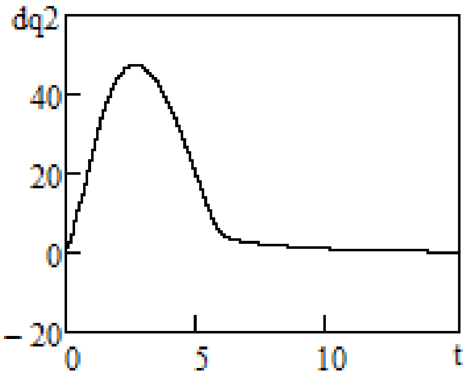
Приклад 6.1. В якості прикладу розглянемо модель маятника з маховиком, яка має такі параметри: $m = 0.04$кг, $L = 0.1$м, $M_M = 0.5$кг, $M_R = 0.94$кг, $J_R = 0.24 \times 10^{-4}$Н·м, $r = 0.28$м, $R = 0.3$м, де r і R, відповідно, внутрішній та зовнішній радіуси маховика, який близький до кільця. Момент інерції маховика можна розрахувати по формулі $J_m = \dfrac{M_M(r^2 + R^2)}{2}$, а момент інерції маятника – по формулі $J_m = \dfrac{mL^2}{3}$. Параметри керування можуть бути вибрані такими: $K_1 = \dfrac{1}{\tau_2} = 8$, $K_2 = 0.05$, $\tau_3 = 10^{-4}$. Відмітимо, що в контексті даної моделі, вибір параметрів K_2 та τ_3 таким чином, що $K_2 = \dfrac{1}{\tau_3}$, є недоцільним, оскільки при цьому накладаються занадто жорсткі вимоги на електродвигун. Нехай початкове положення маятника – його нижнії стан рівноваги. Вибравши $x_3(0) = -\dfrac{J_1}{J_2}K_1\pi$ переконаємось, що керування (6.26) стабілізує верхній стан рівноваги маятника. Поведінку розв'язків моделі представлено на Рис. 6.2.



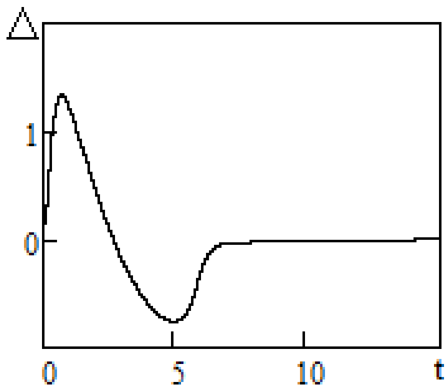
а)



б)



в)



г)

Рис. 6.2 – Поведінка змінних. Приклад 6.1

Нехай математична модель системи містить параметричні неточності. Наприклад, довжина маятника може змінюватись. В цьому випадку представимо її у вигляді $L(p) = (0.1 + p)$м. Враховуючи, що для значення параметра $p^* = 0$ відповідне керування (6.26) побудоване, тобто вибрані константи K_1^*, K_2^*, τ_2^*, $\tau_3^* = \varepsilon^*$ переконаємось, що для всіх значень параметра p з множини $[-0.02,\ 0.06]$ співвідношення (6.25) виконуються, тобто побудоване керування глобально асимптотично стабілізує верхній стан рівноваги маятника з маховиком при всіх значеннях параметра із вказаної множини. Повідінку розв'язків моделі при значенні параметра $p = 0.04$ і початковому положенні маятника в його нижньому стані рівноваги представлено на Рис. 6.3.

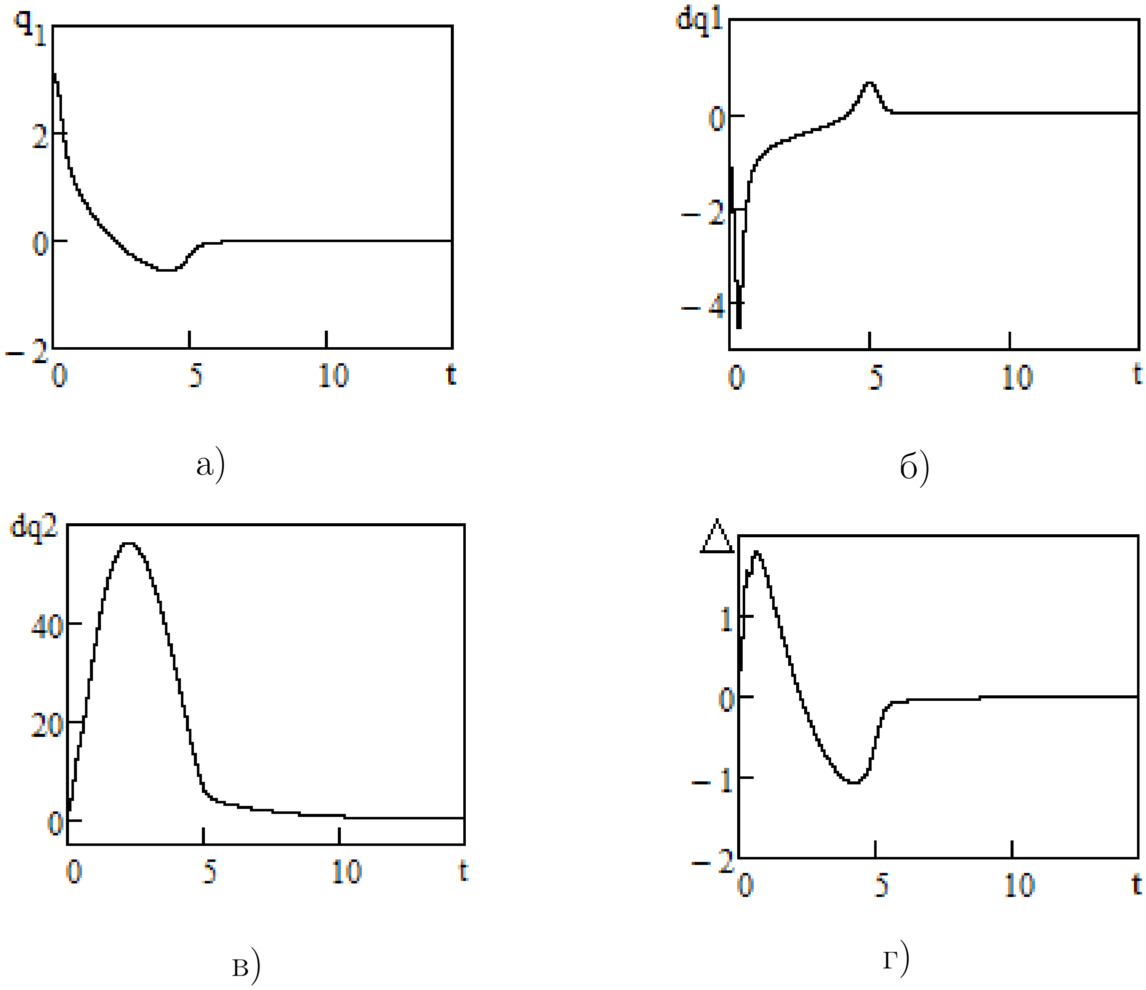


Рис. 6.3 – Поведінка змінних при $p = 0.04$. Приклад 6.1

6.1.2 Поступальний осцилятор із обертовим актуатором

Розглянемо конструкцію TORA (англ. Translational Oscillator with Rotational Actuator). Основою його є прикріплений до стіни за допомогою пружини возик, центр мас якого може рухатися у вертикальній площині XOY вздовж горизонтальної вісі OX. На возику розташований симетричний відносно центру маховик з точковою масою. Вісь обертання маховика, навколо якої він може здійснювати обертання в ту чи іншу сторону, перпендикулярна площині руху возика. Маховик приводиться до руху електродвигуном, статор якого жорстко зкріплений із возиком, а вісь ротора жорстко зкріплена з віссю маховика. На Рис. 6.4 зображено схему TORA, де q_1 – горизонтальне зміщення центру маховика C від його положення рівноваги O, q_2 – кут відхилення точкової маси від вертикалі.

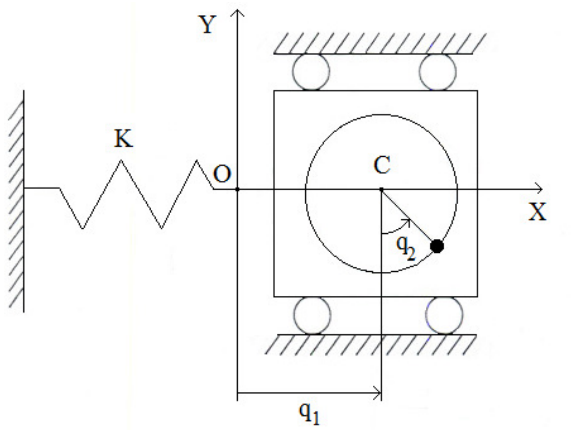


Рис. 6.4 – Схема TORA

Керування TORA відбувається за допомогою обертання ексцентрикового маховика, яке задається електродвигуном, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає в стабілізації TORA в його положенні рівноваги $q_1 = 0$, $q_2 = 0$.

Введемо позначення: m – точкова маса, M – маса возика, мотора і маховика, r – відстань між центром маховика і точковою масою, J – момент інерції маховика, K – жорсткість пружини, Δ – момент електромагнітних сил, що прикладені до ротора електродвигуна зі сторони статора.

Використовуючи метод Лагранжа, рівняння руху TORA отримаємо (див. [168]) у вигляді

$$\begin{cases} \Big(M+m\Big)\ddot{q}_1 + mr\Big(\ddot{q}_2\cos(q_2) - \dot{q}_2^2\sin(q_2)\Big) + Kq_1 = 0, \\ \Big(J+mr^2\Big)\ddot{q}_2 + mr\cos(q_2)\ddot{q}_1 + mgr\sin(q_2) = \Delta, \end{cases} \tag{6.27}$$

де g – прискорення вільного падіння.

Вважаємо, що деякі або, можливо, всі параметри моделі, тобто числові величини, від яких неперервно залежать коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (6.27), задані неточно і відомо лише про їх приналежніcь деякій замкненій множині. В такому випадку, систему диференціальних рівнянь (6.27) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{cases} \Big(M(p)+m(p)\Big)\ddot{q}_1 + m(p)r(p)\Big(\ddot{q}_2\cos(q_2) - \dot{q}_2^2\sin(q_2)\Big) + K(p)q_1 = 0, \\ \Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)\ddot{q}_2 + m(p)r(p)\cos(q_2)\ddot{q}_1 + m(p)gr(p)\sin(q_2) = \Delta, \end{cases} \tag{6.28}$$

де $p \subseteq P \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невідємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, тощо.

Ввівши безрозмірні змінні (див. [137])

$$\tilde{q}_1 = q_1\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{J(p)+m(p)r^2(p)}}, \quad \nu = \frac{M(p)+m(p)}{K(p)\Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)}\Delta,$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{K(p)}{M(p)+m(p)}}$$

і позначивши

$$\gamma(p) = \frac{m(p)r(p)}{\sqrt{\Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)\Big(M(p)+m(p)\Big)}},$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (6.28):

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_1 + \tilde{q}_1 - \varepsilon(p)\Big(\dot{q}_2^2 \sin(q_2) - \ddot{q}_2 \cos(q_2)\Big) = 0, \\ \ddot{q}_2 + \gamma(p)\cos(q_2)\ddot{\tilde{q}}_1 + \dfrac{m(p)gr(p)\Big(M(p)+m(p)\Big)}{K(p)\Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)}\sin(q_2) = \nu, \end{cases} \tag{6.29}$$

де диференціювання ведеться по узагальненому часу τ.

Слідуючи [168], скористаємось перетворенням керування та координат по таким правилам:

$$\begin{cases} \nu = \alpha(p,q_2)u + \beta(p,\tilde{q}_1,q_2,\dot{q}_2), \\ \eta_1 = \tilde{q}_1 + \gamma(p)\sin(q_2), \\ \eta_2 = \dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2), \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2, \end{cases} \tag{6.30}$$

де

$$\alpha(p,q_2) = 1 - \gamma^2(p)\cos^2(q_2),$$

$$\beta(p,\tilde{q}_1,q_2,\dot{q}_2) = \gamma^2(p)\dot{q}_2^2\sin(q_2)\cos(q_2) - \gamma(p)\cos(q_2)\tilde{q}_1 +$$

$$+\frac{m(p)gr(p)\Big(M(p)+m(p)\Big)}{K(p)\Big(J(p)+m(p)r^2(p)\Big)}\sin(q_2).$$

Тоді система диференціальних рівнянь (6.29) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \gamma\sin(\eta_3), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \tag{6.31}$$

Очевидно, що задача стабілізації стану рівноваги $q_1 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ керуванням Δ незалежно від величини початкових відхилень змінних від їх рівноважних значень еквівалентна задачі побудови керування u, яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги η_1, η_2, η_3, η_4 системи диференціальних рівнянь (6.31).

Для побудови керування, яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.31), застосуємо техніку, яка запропонована в [179], т. зв. Dynamic Surface Control. Розглянемо підсистему

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \gamma(p)\sin(\eta_3), \end{cases} \tag{6.32}$$

системи диференціальних рівнянь (6.31). Нехай змінна η_3 змінюється по закону $\tilde{\eta}_3 = -\arctan\left(\dfrac{\eta_2}{\sqrt{1+\eta_1^2+\eta_2^2}}\right)$. Тоді нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \gamma(p)\sin(\tilde{\eta}_3), \end{cases} \tag{6.33}$$

глобально асимптотично стійкий. Цей факт легко встановити, якщо розглянути допоміжну функцію

$$V(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}\Big(\eta_1^2 + \eta_2^2\Big)$$

та її похідну по часу в силу (6.33):

$$\dot{V}(\eta_1, \eta_2)\Big|_{(6.33)} = \gamma(p)\eta_2 \sin(\tilde{\eta}_3),$$

які задовольняють всім умовам теореми 12.1 (див. [3]). Тут враховано, що $\gamma(p) > 0$ для всіх p з P. Очевидно, що якщо змінна η_3 асимптотично прямує до $\tilde{\eta}_3$, то змінні η_1 і η_2, які задаються (6.32), асимптотично прямують до нуля незалежно від своїх початкових значень.

Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \tag{6.34}$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_1 \dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3, \quad \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \tag{6.35}$$

де τ_1 – довільна як завгодно мала додатна константа. Диференціюючи (6.34) по часу отримаємо, враховуючи (6.31), що

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3,$$

звідки слідує, що якщо зміна η_4 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3,$$

де $c_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до нуля незалежно від свого початкового значення.

Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \tag{6.36}$$

де $\bar{\eta}_4$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_4$, тобто

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4, \quad \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \tag{6.37}$$

де τ_2 – довільна, як завгодно мала додатна константа. Диференціюючи (6.36) по часу отримаємо, враховуючи (6.31), що

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4.$$

Вибравши керування

$$u = \dot{\bar{\eta}}_4 - c_2 S_2, \tag{6.38}$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні.

Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \tag{6.39}$$

і

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \tag{6.40}$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6.34) із урахуванням (6.39) слідує, що

$$\eta_3 = S_1 + \bar{\eta}_3 = S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_3, \tag{6.41}$$

а з (6.36) із урахуванням (6.40) слідує, що

$$\eta_4 = S_2 + \bar{\eta}_4 = S_2 + z_2 + \tilde{\eta}_4 = S_2 + z_2 - c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3 = S_2 + z_2 - c_1 S_1 - \frac{z_1}{\tau_1}. \tag{6.42}$$

Продовжимо перетворення $\dot{S}_1$ і $\dot{S}_2$. Для похідної S_1 по часу, із урахуванням значення $\tilde{\eta}_4$ і співвідношення (6.40), отримаємо:

$$\dot{S}_1 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \Big(\eta_4 - \bar{\eta}_4\Big) + \Big(\bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4\Big) + \tilde{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_3 = -c_1 S_1 + S_2 + z_2, \tag{6.43}$$

а для похідної S_2 по часу, із урахуванням вибраного керування у вигляді (6.38), справедливо:

$$\dot{S}_2 = -c_2 S_2. \tag{6.44}$$

Саме ж керування, із урахуванням (6.37) і (6.40), представимо в наступному вигляді:

$$u = \dot{\bar{\eta}}_4 - c_2 S_2 = \frac{\tilde{\eta}_4 - \bar{\eta}_4}{\tau_2} - c_2 S_2 = -\frac{z_2}{\tau_2} - c_2 S_2. \tag{6.45}$$

Визначимо похідні по часу похибок фільтрів. Приймаючи до уваги (6.35), диференціювання (6.39) по часу дає наступне значення для $\dot{z}_1$:

$$\dot{z}_1 = \dot{\bar{\eta}}_3 - \dot{\tilde{\eta}}_3 = -\frac{z_1}{\tau_1} - \dot{\tilde{\eta}}_3. \tag{6.46}$$

Враховуючи значення $\tilde{\eta}_4$ і використовуючи співвідношення (6.35), (6.37), (6.40), (6.43), (6.46), рівняння, що визначає поведінку $\dot{z}_2$, отримаємо диференціюючи рівність (6.40) по часу:

$$\dot{z}_2 = \dot{\hat{\eta}}_4 - \dot{\tilde{\eta}}_4 = -\frac{z_2}{\tau_2} + c_1\dot{S}_1 - \ddot{\tilde{\eta}}_3 =$$

$$= -\frac{z_2}{\tau_2} + c_1\Big(- c_1S_1 + S_2 + z_2\Big) + \frac{d}{dt}\Big(\frac{z_1}{\tau_1}\Big) =$$

$$= -\frac{z_2}{\tau_2} - c_1^2S_1 + c_1S_2 + c_1z_2 - \frac{z_1}{\tau_1^2} - \frac{\dot{\tilde{\eta}}_3}{\tau_1}. \tag{6.47}$$

Таким чином, динаміка відхилення траєкторій системи диференціальних рівнянь (6.31) при керуванні (6.38) від траєкторій цієї системи, які асимптотично прямують до нульового стану рівноваги, описується диференціальними рівняннями (6.32), (6.41), (6.43), (6.44), (6.46), (6.47), які утворюють систему

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \gamma(p)\sin(S_1 + z_1 + \tilde{\eta}_3), \\ \dot{S}_1 = -c_1S_1 + S_2 + z_2, \\ \dot{S}_2 = -c_2S_2, \\ \dot{z}_1 = -\dfrac{z_1}{\tau_1} - \dot{\tilde{\eta}}_3, \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{z_2}{\tau_2} + c_1S_2 + c_1z_2 - c_1^2S_1 - \dfrac{z_1}{\tau_1^2} - \dfrac{\dot{\tilde{\eta}}_3}{\tau_1}. \end{cases} \tag{6.48}$$

Оскільки τ_1 та τ_2 можуть бути довільними додатними як завгодно малими величинами, то вважаючи $\tau_1 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ фіксованими константами, а $\tau_2 = \varepsilon$ – параметром, заміною змінних
$(\eta_1, \eta_2, S_1, S_2, z_1, z_2)^T \to (x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2)^T = (x, y)^T$ система диференці-

альних рівнянь (6.48) може бути зведена до вигляду різнотемпової

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \gamma(p)\sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right), \\ \dot{x}_3 = -c_1x_3 + x_4 + y_2, \\ \dot{x}_4 = -c_2x_4, \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{y_1}{\tau_1} + F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p), \\ \varepsilon\dot{y}_2 = -y_2 + \varepsilon F_2(x,y,p), \end{cases} \tag{6.49}$$

де

$$G(x_1,x_2,p) = 1 + x_1^2 + x_2^2,$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p) = \frac{G(x_1,x_2,p)}{G(x_1,x_2,p)+x_2^2}\times$$

$$\times\left[\frac{-x_1 + \gamma(p)\sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma(p)x_2^2\sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)}{\left(\sqrt{G(x_1,x_2,p)}\right)^3}\right],$$

$$F_2(x,y,p) = c_1x_4 + c_1y_2 - c_1^2x_3 - \frac{y_1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1}F_1(x_1,x_2,x_3,y_1,p).$$

Введемо позначення

$$\Psi(p) = \frac{2\sqrt{2}}{\gamma(p)} + \frac{\gamma(p)}{\sqrt{2}},$$

$$A(p) = -1 + \frac{\gamma(p)\Psi(p)}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma^2(p)}{2},\ B(p) = \frac{\gamma^2(p)\Psi^2(p)}{2A(p)} + \gamma^2(p),$$

$$D(p, c_1) = \gamma(p) + 2\gamma^2(p) + 4\sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} + \frac{\gamma^2(p)\Psi^2(p)}{A(p)} +$$

$$+\frac{\gamma^2(p)}{A(p)}(1+\Psi(p)) + \frac{2\gamma^2(p)}{c_1 - B(p)},$$

$$E(p, c_1, \tau_1) = c_1 + \frac{8}{\tau_1^2}\sqrt{\frac{\Psi(p)+1}{2}} + \frac{2\gamma^2(p)}{A(p)\tau_1^2}(1+\Psi(p)) +$$

$$+\frac{\left(1 + c_1^2 + \dfrac{\gamma(p)}{\tau_1}\right)^2}{c_1 - B(p)} + \frac{c_1^2}{2\left(c_2 - \dfrac{1}{2(c_1 - B(p))}\right)} + \frac{\left(\dfrac{1}{\tau_1^2} + \dfrac{\gamma(p)}{\tau_1}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{\tau_1} - D(p, c_1)\right)}.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка містить основний результат даного підрозділу.

Теорема 6.2. *Для всіх значень параметра p з області P існують такі константи керування $c_1 > B(p)$, $c_2 > \dfrac{1}{2(c_1 - B(p))}$ і такі часові константи фільтрів $0 < \tau_1 < \dfrac{1}{D(p, c_1)}$, $\tau_3 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{E(p, c_1, \tau_1)}$, що керування обертанням інерціального маховика вигляду (6.38) глобально стабілізує нульовий стан рівноваги TORA.*

Доведення. Очевидно, що глобальна асимптотична стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.31) при керуванні (6.38) слідує з такого ж типу стійкості нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.49). Тому для доведення твердження теореми достатньо довести існування для всіх значень параметра p з області P констант керування $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і часових констант фільтрів $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = \varepsilon > 0$, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням, таких що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.49) глобально асимптотично стійкий.

Виберемо довільне значення параметра p^* з області P і константи керування c_1^*, c_2^* та часові константи фільтрів τ_1^*, ε^*, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням. Розглянемо систему (6.49) при вибраних величинах. Побудуємо скалярну функцію $V(x, y, p^*) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(0, 0, p^*) = 0$, вигляду

$$V(x, y, p^*) = 2\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p^*)} - 2 + \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2), \tag{6.50}$$

де $V_1(x_1, x_2, p^*) = \dfrac{\Psi(p^*)}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}$. Так як

$$\Psi(p^*) = \frac{2\sqrt{2}}{\gamma(p^*)} + \frac{\gamma(p^*)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma(p^*)} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\gamma(p^*)} + \frac{\gamma(p^*)}{\sqrt{2}}\right) > 1,$$

то

$$V_1(x_1, x_2, p^*) \geq \frac{(x_1^2 + x_2^2)(\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} - 1) + (x_1 + x_2)^2}{2\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}} \geq 0,$$

причому рівність нулю досягається тільки при $x_1 = x_2 = 0$. Отже, функція $V_1(x_1, x_2, p^*)$ приймає невід'ємні значення у всіх точках простору $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$, причому рівність нулю досягається тільки при $x_1 = x_2 = 0$, тобто функція (6.50) додатно визначена за Ляпуновим. Також вона, очевидно, нескінченно велика. Знайдемо її похідну по часу в силу системи (6.49).

$$\left.\frac{dV(x, y, p^*)}{dt}\right|_{(6.49)} = \frac{1}{\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p^*)}} \times$$

$$\times \left[\Psi(p^*)(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) + \frac{\dot{x}_1 x_2 + x_1\dot{x}_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p^*)}} - \frac{x_1 x_2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)}{\left(\sqrt{G(x_1, x_2, p^*)}\right)^3}\right] +$$

$$+ x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4 + y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 =$$

$$= \frac{x_2^2}{\sqrt{1 + V_1(x_1, x_2, p^*)}\sqrt{G(x_1, x_2, p^*)}}\left[1 - \psi(p^*)\gamma(p^*)\sqrt{\frac{G(x_1, x_2, p^*)}{G(x_1, x_2, p^*) + x_2^2}}\right] +$$

$$+\psi(p^*)\gamma(p^*)\frac{\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\right)\right)}{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p^*)}}(x_2x_3+x_2y_1)-$$

$$-\frac{x_1^2}{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p^*)}\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}+$$

$$+\frac{1-\dfrac{x_2^2}{G(x_1,x_2,p^*)}}{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p^*)}\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\left[\frac{-\gamma(p^*)x_1x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)+x_2^2}}+\right.$$

$$\left.+\gamma(p^*)\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\right)\right)(x_1x_3+x_1y_1)\right]-$$

$$-c_1^*x_3^2+x_3x_4+x_3y_2-c_2^*x_4^2-\frac{y_1^2}{\tau_1^*}+$$

$$+\frac{G(x_1,x_2,p^*)}{G(x_1,x_2,p^*)+x_2^2}\left[\frac{-x_1y_1}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}+\frac{1-\dfrac{x_2^2}{G(x_1,x_2,p^*)}}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\left(\frac{-\gamma(p^*)x_2y_1}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)+x_2^2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma(p^*)\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\right)\right)(x_3y_1+y_1^2)\right)\right]-$$

$$-\frac{y_2^2}{\varepsilon^*}+c_1^*x_4y_2+c_1^*y_2^2-(c_1^*)^2x_3y_2-\frac{y_1y_2}{(\tau_1^*)^2}+\frac{1}{\tau_1^*}\frac{G(x_1,x_2,p^*)}{G(x_1,x_2,p^*)+x_2^2}\times$$

$$\times\left[\frac{-x_1y_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}+\frac{1-\dfrac{x_2^2}{G(x_1,x_2,p^*)}}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\left(\frac{-\gamma(p^*)x_2y_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)+x_2^2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma(p^*)\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}}\right)\right)(x_3y_2+y_1y_2)\right)\right]. \quad (6.51)$$

Тут використана формула скінченних приростів Лагранжа

$$\sin\left(x_3+y_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)=$$

$$= \sin\left(-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right) +$$

$$+\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)(x_3+y_1),$$

де $\hat{x}_3$ і $\hat{y}_1$ – деякі точки з $\mathbb{R}$. Також враховано, що

$$\sin\left(-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right) = -\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)+x_2^2}}.$$

Скориставшись нерівністю $-az^2+bz \le -\frac{a}{2}z^2+\frac{b^2}{2a}$, яка вірна для всіх $a, b, z \in \mathbb{R}$, $a>0$, із співвідношення (6.51) отримаємо оцінку для похідної функції (6.50) по часу в силу системи (6.49):

$$\left.\frac{dV(x,y,p^*)}{dt}\right|_{(6.49)} \le \frac{-x_1^2}{32\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p^*)}\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}} -$$

$$-\frac{1}{16}\frac{x_2^2}{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p^*)}\sqrt{G(x_1,x_2,p^*)}} - \frac{c_1^*-B(p^*)}{8}x_3^2 -$$

$$-\frac{c_2^*-\dfrac{1}{2(c_1^*-B(p^*))}}{2}x_4^2 - \frac{\dfrac{1}{\tau_1^*}-D(p^*,c_1^*)}{2}y_1^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon^*}-E(p^*,c_1^*,\tau_1^*,\varepsilon^*)\right)y_2^2,$$

з якої слідує, що вказана похідна від'ємна для всіх значень змінних $x \in \mathbb{R}^4$, $y \in \mathbb{R}^2$, окрім нульових. Тут враховано, що $A(p^*)=1$,
$\left|\cos\left(\hat{x}_3+\hat{y}_1-\arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}\right)\right)\right| \le 1$, для всіх $\hat{x}_3$, $\hat{y}_1$, x_1, x_2 з $\mathbb{R}$, p з $\mathbb{R}^n$;

$$\frac{1}{\left(\sqrt{G(x_1,x_2,p)}\right)^n} \le 1, \quad \frac{1}{\left(\sqrt{G(x_1,x_2,p)+x_2^2}\right)^n} \le 1,$$

$\left|1-\frac{x_2^2}{G(x_1,x_2,p)}\right|^n \le 1$ для всіх x_1, x_2 з $\mathbb{R}$, p з $\mathbb{R}^n$, n з $\mathbb{N}$;

$$-\sqrt{\frac{G(x_1,x_2,p)}{G(x_1,x_2,p)+x_2^2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p)}}{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}} \le \frac{\Psi(p)+1}{2},$$

$\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p)}\right)^n} \leq 1$, $\dfrac{\sqrt{G(x_1,x_2,p)}}{\sqrt{1+V_1(x_1,x_2,p)}} \leq 1$ для всіх x з $\mathbb{R}^4$, y з $\mathbb{R}^2$, p з $\mathbb{R}^n$ і n з $\mathbb{N}$.

Функція (6.50) задовольняє всім умовам теореми 12.1 (див. [3]) і дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.49) для вибраного значення параметра. Оскільки p^* довільне значення параметра з області P, то для всіх інших значень параметра з цієї області також існують константи керування і часові константи фільтрів, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням, такі що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.49) глобально асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

Доведена теорема для всіх значень параметра p з області P постулює існування керування вигляду (6.38), яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги TORA. Нехай для деякого значення параметра p^* з області P таке керування побудовано, тобто вибрані константи c_1^*, c_2^*, τ_1^*, $\tau_2^* = \varepsilon^*$. При виконанні нерівностей

$$c_1^* > \max_{p\in P_1}(B(p)),\ c_2^* > \frac{1}{2\left(c_1^* - \max\limits_{p\in P_1}(B(p))\right)},$$

$$\tau_1^* < \frac{1}{\max\limits_{p\in P_1}(D(p,c_1^*))}, \varepsilon^* < \frac{1}{\max\limits_{p\in P_1}(E(p,c_1^*,\tau_1^*))} \tag{6.52}$$

побудоване керування, очевидно, буде глобально асимптотично стабілізувати нульовий стан рівноваги TORA для всіх значень параметра $p \in P_1 \subseteq P$, $p^* \in P_1$. Таким чином, нерівності (6.52) можливо використовувати для визначення області робастності керування (6.38).

Нехай c_1 і τ_1 вибрані таким чином, що $c_1 = \dfrac{1}{\tau_1}$. Тоді з (6.30), (6.41) та

(6.42) слідує, що

$$x_3 + y_1 = \eta_3 + \arctan\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1+\eta_1^2+\eta_2^2}}\right) =$$

$$= q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \gamma(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2))^2}}\right),$$

$$x_4 + y_2 = \eta_4 + c_1(x_3 + y_1) =$$

$$= \dot{q}_2 + c_1\left(q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \gamma(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2))^2}}\right)\right).$$

Виразивши величину $x_4(\tau)$ з (6.49) у вигляді $x_4(\tau) = x_4(0)\exp(-c_2\tau)$, отримаємо закон керування u, який явно залежить від фізичних характеристик початкової моделі, у вигляді

$$u = -c_2 x_4 - \frac{y_2}{\tau_2} = \left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4 - \frac{1}{\tau_2}(x_4 + y_2) =$$

$$= \left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4(0)\exp(-c_2\tau) - \frac{\dot{q}_2}{\tau_2} -$$

$$-\frac{c_1}{\tau_2}\left(q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \gamma(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{\tilde{q}}_1 + \gamma(p)\dot{q}_2\cos(q_2))^2}}\right)\right)$$

або, переходячи до розмірних величин, закон керування Δ у вигляді

$$\Delta = \frac{K(p)(J(p) + m(p)r^2(p))}{M(p) + m(p)} \times \Bigg[(1 - \gamma^2(p)\cos^2(q_2))\times$$

$$\times\left(\left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4(0)\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{K(p)}{M(p)+m(p)}}t\right) - \frac{c_1}{\tau_2}q_2 -\right.$$

$$-\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\frac{\dot{q}_2}{\tau_2}-\frac{c_1}{\tau_2}\arctan\left(\Lambda(p,q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)\right)\Bigg)+$$

$$+\gamma(p)\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}\sin(q_2)\cos(q_2)\dot{q}_2^2-\gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{J(p)+m(p)r^2(p)}}\cos(q_2)q_1+$$

$$+\frac{m(p)gr(p)(M(p)+m(p))\sin(q_2)}{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}\Bigg], \tag{6.53}$$

де

$$\Lambda(p,q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{\phi(p,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\left(\varphi(p,q_1,q_2)\right)^2+\left(\chi(p,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)\right)^2}},$$

$$\phi(p,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{M(p)+m(p)}{\sqrt{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}}\dot{q}_1+\gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\cos(q_2)\dot{q}_2,$$

$$\varphi(p,q_1,q_2)=\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{J(p)+m(p)r^2(p)}}q_1+\gamma(p)\sin(q_2),$$

$$\chi(p,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{M(p)+m(p)}{\sqrt{K(p)(J(p)+m(p)r^2(p))}}\dot{q}_1+\gamma(p)\sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{K(p)}}\cos(q_2)\dot{q}_2$$

і диференціювання ведеться по часу t.

Зауважимо, що змінюючи величину $x_4(0)$, отримаємо різні закони керування, з яких можна вибрати найбільш прийнятний. Крім того, вигляд керування (6.53) можливо спростити, якщо вибрати c_2 та τ_2 таким чином, що $c_2=\dfrac{1}{\tau_2}$.

Приклад 6.2. Проілюструємо отримані результати на прикладі конкретної моделі. Нехай параметри моделі такі: $M=10$кг, $m=1$кг, $r=1$м, $J=1$кг $\times$ м, $K=5\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$ Вважаємо, що величини виміряні точно, тобто не залежать від параметра. В цьому випадку, згідно умов Теореми 6.2, параметри керування можуть бути вибрані такими: $c_1^*=25$, $c_2^*=10^5$, $\tau_1^*=0.04$, $\tau_2^*=10^{-5}$. Згідно Теореми 6.2, нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.49) при вибраних значеннях параметрів буде глобально асимптотично стійкий або керування обертанням ексцентрикового маховика вигляду (6.38) глобально стабілізує нульовий стан рівноваги TORA.

Еволюція змінних q_1, q_2, їх швидкостей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ і керування Δ при початкових значеннях $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$ представлена на Рис. 6.5. Как видим, управление τ решает поставленную задачу стабилизации.

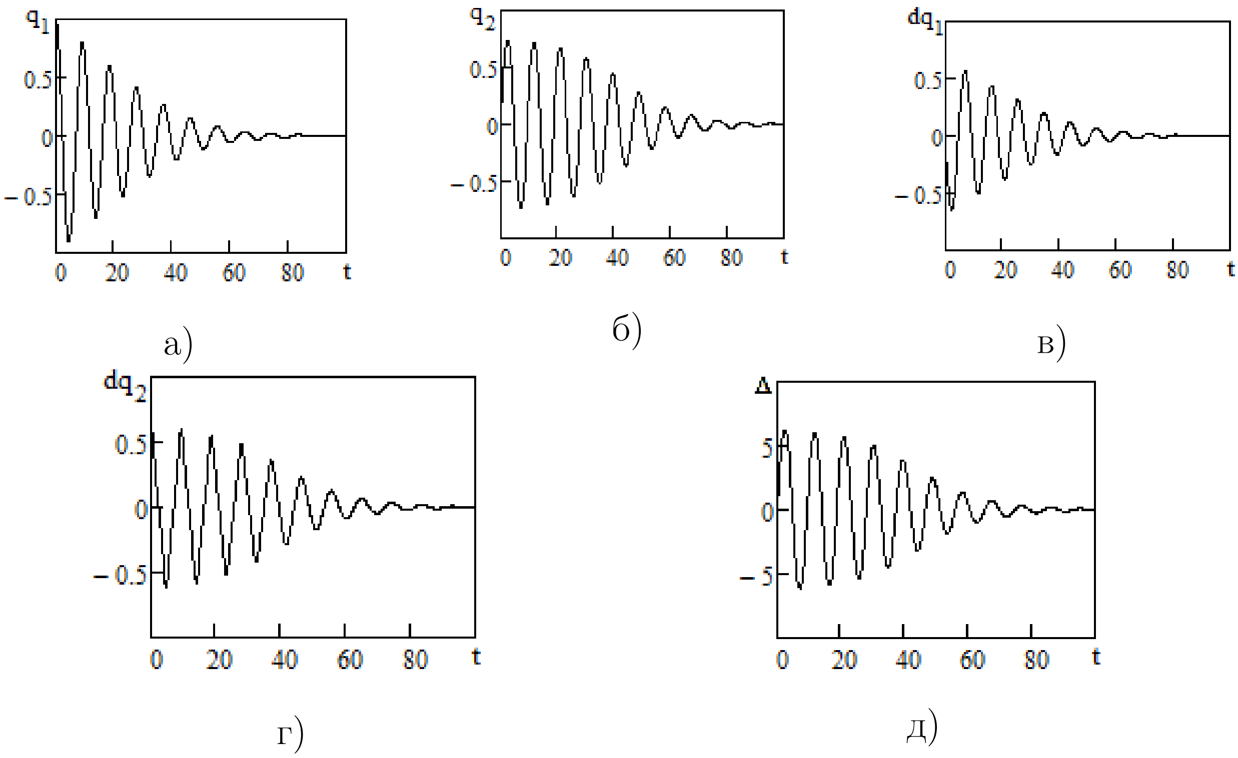


Рис. 6.5 – Поведінка змінних та керування. Приклад 6.2

Припустимо, що, наприклад, маса M задана неточно. В цьому випадку вважаємо її значення залежним від параметра: $M = (10 + p)$кг. Встановимо область P зміни параметра p, щоб побудоване керування глобально асимптотично стабілізувало нульовий стан рівноваги моделі при всіх значеннях параметра p з області P. Скориставшись співвідношеннями (6.52), така область знайдена у вигляді інтервала $p \in (-10, 17]$. На Рис. 6.6 представлена поведінка моделі при значенні параметра $p = -9$ і початкових значеннях змінних $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$. Як видно з малюнків, при меншій масі M стабілізація вказаним керуванням відбувається значно швидше.

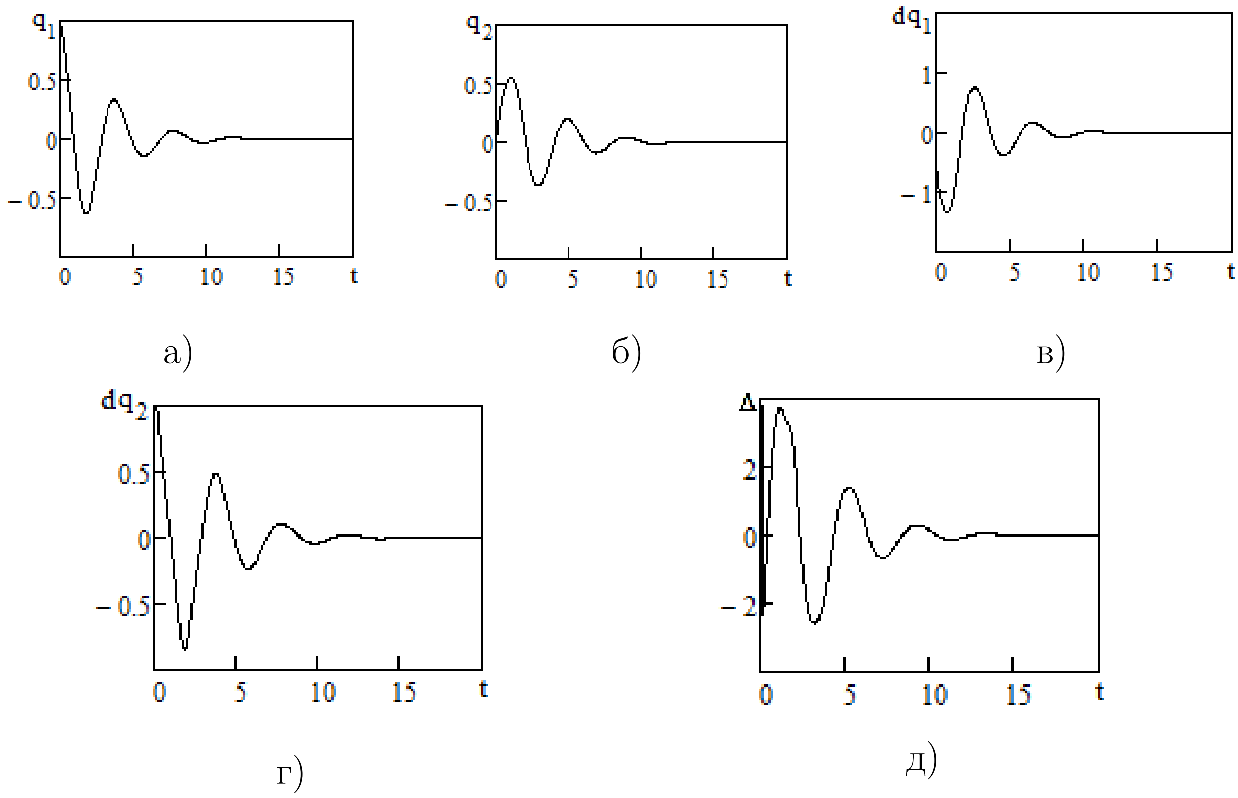


Рис. 6.6 – Поведінка змінних та керування при $p = -9$. Приклад 6.2

6.1.3 Одноланковий маніпулятор із пружним зчленуванням

Розглянемо конструкцію моделі одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням, що зображено на Рис. 6.7. Маніпулятор може здійснювати обертання у вертикальній площині навколо вісі OX у ту чи іншу сторону. Обертання задається електродвигуном і передається до маніпулятора через трансмісію, пружність якої моделюється торсіонною пружиною. Вісь ротора електродвигуна співпадає з віссю OX. Позначимо через q_1 кут відхилення маніпулятора від вертикалі і через q_2 – кут відхилення від вертикалі валу електродвигуна. Зауважимо, що через пружність трансмісії ці кути співпадають лише в окремих станах моделі. Керування маніпулятором відбувається шляхом обертання електродвигуна, тому керуючим параметром в системі вважаємо момент електромагнітних сил, які прикладені до ротора зі сторони статора. Задача керування полягає в стабілізації моделі в стані рівноваги $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$.

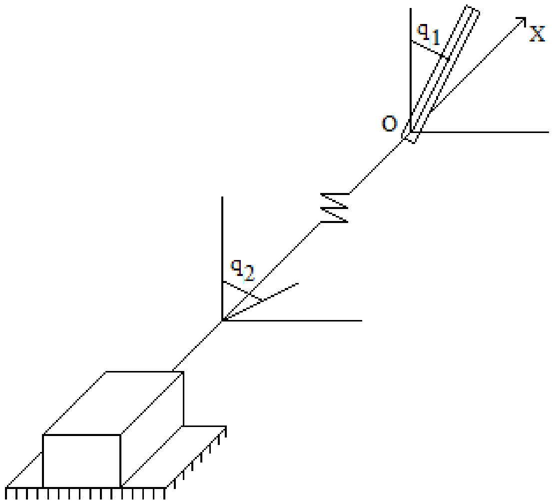


Рис. 6.7 – Одноланковий маніпулятор із пружним зчленуванням

Введемо позначення: m – маса ланки маніпулятора, l – відстань від точки O до центру мас ланки маніпулятора, g – прискорення вільного падіння, b_1 та b_2 – коефіцієнти демпфування при обертанні ланки маніпулятора та валу електродвигуна відповідно, J_1 – момент інерції ланки маніпулятора відносно вісі OX, J_2 – момент інерції валу електродвигуна, Δ – момент електромагнітних сил, прикладених до ротора електродвигуна зі сторони статора. Жорсткість K пружини вважаємо нелінійно залежною від зміщення: $K = K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3$, де K_1 і K_2 – коефіцієнти жорсткості.

Використовуючи метод Лагранжа, рівняння руху моделі одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням отримаємо у вигляді (див. [112])

$$\begin{cases} J_1\ddot{q}_1 + b_1\dot{q}_1 + mgl\sin(q_1) + K_1(q_1 - q_2) + K_2(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ J_2\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 - K_1(q_1 - q_2) - K_2(q_1 - q_2)^3 = \Delta. \end{cases} \tag{6.54}$$

Вважаємо, що деякі або, можливо, всі параметри моделі задані неточно, тобто вони неперервно залежать від чисельного векторного параметра, який належить замкненій множині. Під “параметрами моделі” розуміються числові величини, від яких залежать коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (6.54). В такому випадку, систему диференціальних рівнянь (6.54) будемо розглядати у вигляді

$$\begin{cases} J_1(p)\ddot{q}_1 + b_1(p)\dot{q}_1 + m(p)gl(p)\sin(q_1) + K_1(p)(q_1 - q_2) + K_2(p)(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ J_2(p)\ddot{q}_2 + b_2(p)\dot{q}_2 - K_1(p)(q_1 - q_2) - K_2(p)(q_1 - q_2)^3 = \Delta. \end{cases} \tag{6.55}$$

де $p \subseteq P \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Вважаємо, що область P містить тільки допустимі значення параметрів. Допустимими вважаємо ті значення параметрів, при яких не виникає протиріч із фізичною природою величин, що входять до складу моделі, тобто з невідємністю мас, довжин, осьових моментів інерції, коефіцієнтів жорсткості та демпфування, тощо.

Нехай $\tau = \sqrt{\dfrac{K_1(p)}{J_2(p)}}t$ – узагальнений час. Тоді, позначивши

$$\nu = \frac{\Delta}{K_1(p)},\ B_1(p) = \frac{b_1(p)}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}},\ B_2(p) = \frac{b_2(p)}{\sqrt{K_1(p)J_2(p)}},$$

$$K(p) = \frac{K_2(p)}{K_1(p)},\ J(p) = \frac{J_2(p)}{J_1(p)},\ \gamma(p) = \frac{m(p)gl(p)}{K_1(p)},$$

отримаємо безрозмірну систему диференціальних рівнянь, де диференціювання відбувається по узагальненому часу τ, яка еквівалентна системі диференціальних рівнянь (6.55):

$$\begin{cases} J^{-1}(p)\ddot{q}_1 + B_1(p)\dot{q}_1 + \gamma(p)\sin(q_1) + \\ +(q_1 - q_2) + K(p)(q_1 - q_2)^3 = 0, \\ \ddot{q}_2 + B_2(p)\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(p)(q_1 - q_2)^3 = \nu. \end{cases} \tag{6.56}$$

Перетворимо керування та координати за такими правилами:

$$\begin{cases} \nu = u + B_2(p)\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - K(p)(q_1 - q_2)^3, \\ \eta_1 = q_1, \\ \eta_2 = \dot{q}_1, \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2. \end{cases} \tag{6.57}$$

Тоді система диференціальних рівнянь (6.56) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - \\ -K(p)J(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \gamma(p)J(p)\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u. \end{cases} \tag{6.58}$$

Для побудови керування, яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.58), використаємо техніку, що була запропонована в [179], т. зв. Dynamic Surface Control. Нехай $\tilde{\eta}_3$ – бажана траєкторія, до якої прямує змінна η_3 при керуванні u. Позначимо величину S_1 наступним чином:

$$S_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3, \tag{6.59}$$

де $\bar{\eta}_3$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_3$, тобто

$$\tau_1\dot{\bar{\eta}}_3 + \bar{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3,\ \bar{\eta}_3(0) = \tilde{\eta}_3(0), \tag{6.60}$$

де τ_1 – довільна додатня як завгодно мала константа. Продиференціювавши (6.59) по часу отримаємо, враховуючи (6.58), що

$$\dot{S}_1 = \dot{\eta}_3 - \dot{\bar{\eta}}_3 = \eta_4 - \dot{\bar{\eta}}_3,$$

звідки слідує, що якщо змінна η_4 асимптотично прямує до

$$\tilde{\eta}_4 = -c_1 S_1 + \dot{\bar{\eta}}_3, \tag{6.61}$$

де $c_1 > 0$ деяка константа, то величина S_1 асимптотично прямує до 0 незалежно від свого початкового значення.

Діючи аналогічно, позначимо величину S_2 наступним чином:

$$S_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4, \tag{6.62}$$

де $\bar{\eta}_4$ – результат застосування фільтра до $\tilde{\eta}_4$, тобто

$$\tau_2 \dot{\bar{\eta}}_4 + \bar{\eta}_4 = \tilde{\eta}_4, \;\; \bar{\eta}_4(0) = \tilde{\eta}_4(0), \tag{6.63}$$

де τ_2 – довільна додатня як завгодно мала констатнта. Продиференціювавши (6.62) по часу отримаємо, враховуючи (6.58), що

$$\dot{S}_2 = \dot{\eta}_4 - \dot{\bar{\eta}}_4 = u - \dot{\bar{\eta}}_4.$$

Обравши керування

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\bar{\eta}}_4, \tag{6.64}$$

де $c_2 > 0$ – деяка константа, забезпечимо асимптотичне прямування до нуля величини S_2 при довільному її початковому значенні.

Нехай

$$z_1 = \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 \tag{6.65}$$

та

$$z_2 = \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 \tag{6.66}$$

– похибки фільтрів. Тоді з (6.59) та (6.65) отримаємо, що

$$S_1 + z_1 = \eta_3 - \bar{\eta}_3 + \bar{\eta}_3 - \tilde{\eta}_3 = \eta_3 - \tilde{\eta}_3. \tag{6.67}$$

Аналогічно, з (6.62) та (6.66) отримаємо, що

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \bar{\eta}_4 + \bar{\eta}_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4. \tag{6.68}$$

Враховуючи співвідношення (6.60), (6.61), (6.65) та (6.67) і вибираючи $c_1 = \dfrac{1}{\tau_1}$, перетворимо (6.68) наступним чином:

$$S_2 + z_2 = \eta_4 - \tilde{\eta}_4 = \eta_4 + c_1 S_1 - \dot{\tilde{\eta}}_3 = \eta_4 + \frac{S_1}{\tau_1} + \frac{z_1}{\tau_1} = \eta_4 + \frac{1}{\tau_1}(\eta_3 - \tilde{\eta}_3). \tag{6.69}$$

Тоді, вибираючи $c_2 = \dfrac{1}{\tau_2}$ і враховуючи (6.63), (6.66), (6.69), з (6.64) отримаємо вираз для керування:

$$u = -c_2 S_2 + \dot{\tilde{\eta}}_4 = -c_2 S_2 - \frac{z_2}{\tau_2} = -\frac{1}{\tau_2}(S_2 + z_2) = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} + \frac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1\tau_2}. \tag{6.70}$$

Таким чином, оскільки τ_1 і τ_2 можуть бути довільними додатніми як завгодно малими величинами, то вважаючи τ_1 фіксованою константою, яка може бути вибраною "зручною" в контексті поставленої задачі, а $\tau_2 = \varepsilon$ – параметром, система диференціальних рівнянь (6.58) при керуванні (6.70) є різнотемповою і має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - K(p)J(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \gamma(p)J(p)\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \varepsilon\dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \dfrac{\eta_3}{\tau_1} + \dfrac{\tilde{\eta}_3}{\tau_1}. \end{cases} \tag{6.71}$$

Нехай $\tilde{\eta}_3 = -\tau_1\tau_2\eta_2$. Тоді керування (6.70) має вигляд

$$u = -\frac{\eta_4}{\tau_2} - \frac{\eta_3}{\tau_1\tau_2} - \eta_2, \tag{6.72}$$

а система диференціальних рівнянь (6.71) –

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -B_1(p)J(p)\eta_2 - J(p)(\eta_1 - \eta_3) - K(p)J(p)(\eta_1 - \eta_3)^3 - \gamma(p)J(p)\sin(\eta_1), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \varepsilon\dot{\eta}_4 = -\eta_4 - \dfrac{\eta_3}{\tau_1} - \varepsilon\eta_2. \end{cases} \tag{6.73}$$

Зауважимо, що при іншому виборі значення $\tilde{\eta}_3$ отримаємо інший вигляд керування (6.70). В даному випадку, вибір був зумовлений зручністю побудови відповідної функції Ляпунова для системи диференціальних рівнянь (6.73).

Введемо позначення

$$A(p) = B_1(p)J(p) - \frac{\gamma^2(p)J(p)}{2(1 - \gamma(p))} - 2,$$

$$B(p)=\frac{4\gamma^2(p)J(p)}{1-\gamma(p)}+\frac{(1+\gamma(p)J(p))^2}{B_1(p)J(p)-\dfrac{\gamma^2(p)J(p)}{2(1-\gamma(p))}-2},$$

$$C(p)=1+\frac{\gamma^2(p)J^2(p)}{2}+\frac{J(p)(B_1(p)+\gamma(p))^2}{1-\gamma(p)}+\frac{(B_1(p)J(p)-1)^2}{B_1(p)J(p)-\dfrac{\gamma^2(p)J(p)}{2(1-\gamma(p))}-2}.$$

Сформулюємо і доведемо теорему, яка містить основний результат даного підрозділу.

Теорема 6.3. *Для всіх значень параметра p з області P, які задовольняють співвідношення*

$$\gamma(p)<1, \tag{6.74}$$

$$A(p)>0, \tag{6.75}$$

існують такі часові константи фільтрів $0<\tau_1<\dfrac{1}{B(p)}$, $\tau_2=\varepsilon$, $0<\varepsilon<\min\left\{\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{\sqrt{C(p)}}\right\}$, що керування обертанням електродвигуна вигляду (6.72) глобально стабілізує нульовий стан рівноваги одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням.

Доведення. Очевидно, що задача стабілізації стану рівноваги $q_1=0$, $\dot q_1=0$, $q_2=0$, $\dot q_2=0$ керуванням Δ незалежно від величини початкових відхилень змінних від їх рівноважних значень еквівалентна задачі побудови керування u, яке забезпечить глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги η_1, η_2, η_3, η_4 системи диференціальних рівнянь (6.58). Так як із глобальної асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) слідує аналогічний тип стійкості нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.58) при керуванні (6.72), то для доведення твердження теореми достатньо показати існування для всіх значень параметрів p, які задовольняють обмеження з умови теореми, таких величин $\tau_1>0$, $\tau_2=\varepsilon>0$, при яких нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) глобально асимптотично стійкий.

Нехай множина $P_1 \subseteq P$ така, що для всіх p з P_1 виконуються оцінки (6.74), (6.75). Виберемо довільне значення параметра p^* з області P_1 і часові константи фільтрів τ_1^*, ε^*, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням. Розглянемо систему (6.73) при вибраних величинах.

Побудуємо скалярну функцію $V(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, p^*) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наступного вигляду:

$$V(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, p^*) = \frac{K(p^*)J(p^*)}{4}(\eta_1 - \eta_3)^4 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4)M(p^*, \tau_1^*, \varepsilon^*)(\eta_1 - \eta_3, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T, \tag{6.76}$$

де

$$\Psi(\tau_1^*, \varepsilon^*) = \frac{1}{\tau_1^*(\varepsilon^*)^2} - \frac{1}{\tau_1^*\varepsilon^*} + 1,$$

$$M(p^*, \tau_1^*, \varepsilon^*) = \begin{pmatrix} J(p^*)(1 + B_1(p^*)) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \Psi(\tau_1^*, \varepsilon^*) & \varepsilon^* \\ 0 & -1 & \varepsilon^* & \dfrac{1}{\varepsilon^*} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи критерій Сільвестра легко показати, що при виконанні умов

$$J(p^*)(1 + B_1(p^*)) > 2, \tag{6.77}$$

$$\Psi(\tau_1^*, \varepsilon^*)\Big(\frac{1}{\varepsilon^*} - 2\Big) > (\varepsilon^*)^2, \tag{6.78}$$

$$0 < \varepsilon^* < 1, \tag{6.79}$$

матриця $M(p^*, \tau_1^*, \varepsilon^*)$ додатньо визначена.

Покажемо, що для p^* нерівність (6.77) має місце. Це дійсно так, оскільки

$$J(p^*)(1+B_1(p^*))-2=\Big[J(p^*)B_1(p^*)-\frac{\gamma(p^*)^2J(p^*)}{2(1-\gamma(p^*))}-2\Big]+$$

$$+J(p^*)+\frac{\gamma(p^*)^2J(p^*)}{2(1-\gamma(p^*))}-2>0,$$

так як для p^* справедливі співвідношення (6.74), (6.75).

Покажемо, що при вибраних часових константах фільтрів τ_1^*, ε^* нерівності (6.78), (6.79) мають місце. Нерівність (6.79), очевидно, справедлива згідно умов теореми. Нерівність (6.78) представимо у вигляді

$$\frac{1}{\tau_1^*(\varepsilon^*)^3}(1-3\varepsilon^*+2(\varepsilon^*)^2)>2+(\varepsilon^*)^2-\frac{1}{\varepsilon^*}.$$

Так як $0<\tau_1^*$ і $0<\varepsilon^*\le\dfrac{1}{3}$ згідно умов теореми, то ліва частина цієї нерівності додатна, а права від'ємна. Отже, очевидно, що нерівність (6.78) виконується при вибраних часових константах фільтрів.

Таким чином, матриця $M(p^*,\tau_1^*,\varepsilon^*)$ додатньо визначена. Функція (6.76) приймає невід'ємні значення у всіх точках простору $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n$, причому рівність нулю досягається лише при $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta_4=0$, тобто функція (6.76) додатно визначена за Ляпуновим. Крім цього, вона, очевидно, нескінченно велика і спадна вцілому

Знайдемо похідну функції (6.76) по часу в силу системи диференціальних рівнянь (6.73).

$$\frac{dV(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,p^*)}{dt}\bigg|_{(6.76)}=K(p^*)J(p^*)(\eta_1-\eta_3)^3(\dot\eta_1-\dot\eta_3)+$$

$$+J(p^*)\Big(1+B_1(p^*)\Big)(\eta_1-\eta_3)(\dot\eta_1-\dot\eta_3)+\eta_2\dot\eta_2+\eta_2(\dot\eta_1-\dot\eta_3)+\dot\eta_2(\eta_1-\eta_3)+$$

$$+\Psi(\tau_1^*,\varepsilon^*)\eta_3\dot\eta_3+\frac{\eta_4\dot\eta_4}{\varepsilon^*}+\varepsilon^*\eta_3\dot\eta_4+\varepsilon^*\dot\eta_3\eta_4-\eta_2\dot\eta_4-\dot\eta_2\eta_4=$$

$$= -J(p^*)\Big(1+\gamma(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}\Big)(\eta_1-\eta_3)^2 - \Big(B_1(p^*)J(p^*)-2\Big)\eta_2^2 - \frac{\eta_3^2}{\tau_1^*} -$$

$$-\Big(\frac{1}{(\varepsilon^*)^2}-\varepsilon^*\Big)\eta_4^2 - K(p^*)J(p^*)(\eta_1-\eta_3)^4 - \gamma(p^*)J(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}(\eta_1-\eta_3)\eta_2 +$$

$$+\Big(B_1(p^*)J(p^*)-1\Big)\eta_2\eta_4 + J(p^*)\Big(-B_1(p^*)+\gamma(p^*)J(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}\Big)(\eta_1-\eta_3)\eta_4 -$$

$$-\Big(\varepsilon^*+\gamma(p^*)J(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}\Big)\eta_2\eta_3 - \gamma(p^*)J(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}(\eta_1-\eta_3)\eta_3 +$$

$$+\gamma(p^*)J(p^*)\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}\eta_3\eta_4. \tag{6.80}$$

Враховуючи, що $\left|\frac{\sin(\eta_1)}{\eta_1}\right| \leq 1$ для всіх $\eta_1 \in \mathbb{R}$ та скориставшись нерівністю

$$-az^2 + bz \leq -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a},$$

яка вірна для всіх $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ із співвідношення (6.80) отримаємо оцінку для похідної функції (6.76) по часу в силу системи диференціальних рівнянь (6.73):

$$\frac{dV(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,p^*)}{dt}\Big|_{(6.76)} \leq -\frac{J(p^*)(1-\gamma(p^*))}{8}(\eta_1-\eta_3)^2 - \frac{A(p^*)}{4}\eta_2^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau_1^*}-B(p^*)\Big)\eta_3^2 - \Big(\frac{1}{(\varepsilon^*)^2}-C(p^*)\Big)\eta_4^2 - K(p^*)J(p^*)(\eta_1-\eta_3)^4, \tag{6.81}$$

з якої слідує, що вказана похідна від'ємна для всіх значень змінних з $\mathbb{R}^4$, окрім нульових.

Функція (6.76) задовольняє всім умовам теореми 12.1 (див. [3]) і дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) для вибраних значень параметрів. Оскільки p^* довільне значення параметра з області P_1, то для всіх інших значень параметра з цієї області також існують константи керування і часові константи фільтрів, які задовольняють вказаним в умові теореми обмеженням, такі що нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) глобально асимптотично стійкий.

Теорему доведено.

Якщо для деякого значення параметра p^* з P_1 побудоване керування вигляду (6.72), яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.58), тобто вибрані константи фільтрів τ_1^*, $\tau_2^* = \varepsilon^*$, то враховуючи (6.57) та переходячи до розмірних величин, керування Δ, яке глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.54), отримаємо у вигляді

$$\Delta = K_1(p^*)\Bigg[-\sqrt{\frac{J_2(p^*)}{K_1(p^*)}}\frac{\dot{q}_2}{\varepsilon^*} - \frac{q_2}{\tau_1^*\varepsilon^*} - \sqrt{\frac{J_2(p^*)}{K_1(p^*)}}\dot{q}_1 + \\ + \frac{b_2(p^*)}{J_2(p^*)}\dot{q}_2 - (q_1 - q_2) - \frac{K_2(p^*)}{K_1(p^*)}(q_1 - q_2)^3\Bigg]. \tag{6.82}$$

Доведена теорема для всіх значень p з P_1 постулює існування керування вигляду (6.72), яке забезпечує глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.58). Нехай для деякого значення параметра p^* з P_1 таке керування побудоване, тобто вибрані константи фільтрів τ_1^*, $\tau_2^* = \varepsilon^*$. При виконанні нерівностей

$$\max_{p\in P_2}(\gamma(p)) < 1,\ 0 < \min_{p\in P_2}(A(p)),$$

$$\tau_1^* < \frac{1}{\max\limits_{p\in P_2}(B(p))},\ \varepsilon^* < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\max\limits_{p\in P_2}(C(p)^{1/2})}\right\}, \tag{6.83}$$

побудоване керування, очевидно, буде глобально стабілізувати нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) для всіх значень параметра p з області P_2, де $P_2 \subseteq P_1$, $p^* \in P_2$. Таким чином, нерівності

(6.83) можливо використовувати для визачення області робастності керування (6.72) або, що те саме, керування (6.82).

Приклад 6.3. Проілюструємо отримані результати на прикладі конкретної моделі. Нехай параметри моделі такі: $m = 1$кг, $l = 1.7$м, $g = 9.8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $b_1 = 30\frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}}$, $b_2 = 10\frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}}$, $J_1 = \frac{1}{3}ml^2$, $J_2 = 1\text{кг}^2$, $K_1 = 100\frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}^2}$, $K_2 = 10\frac{\text{кг} \times \text{м}^2}{\text{с}^2}$. Вважаємо, що значення величин є точними, тобто не залежать від параметра. В цьому випадку умови (6.74), (6.75) виконуються і згідно умов теореми параметри керування можуть бути такими: $\tau_1 = 0.6$, $\tau_2 = 0.2$. Згідно Теореми 6.3, нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.73) при обраних параметрах керування (6.72) буде глобально асимптотично стійким або керування $\Delta = -1000\dot{q}_1 - 4000\dot{q}_2 - 100q_1 - \frac{2200}{3}q_2 - 10(q_1 - q_2)^3$ глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.54). Еволюція змінних q_1 і q_2, їх швидкостей $\dot{q}_1$ і $\dot{q}_2$ та керування Δ при початкових значеннях $q_1 = 0$,

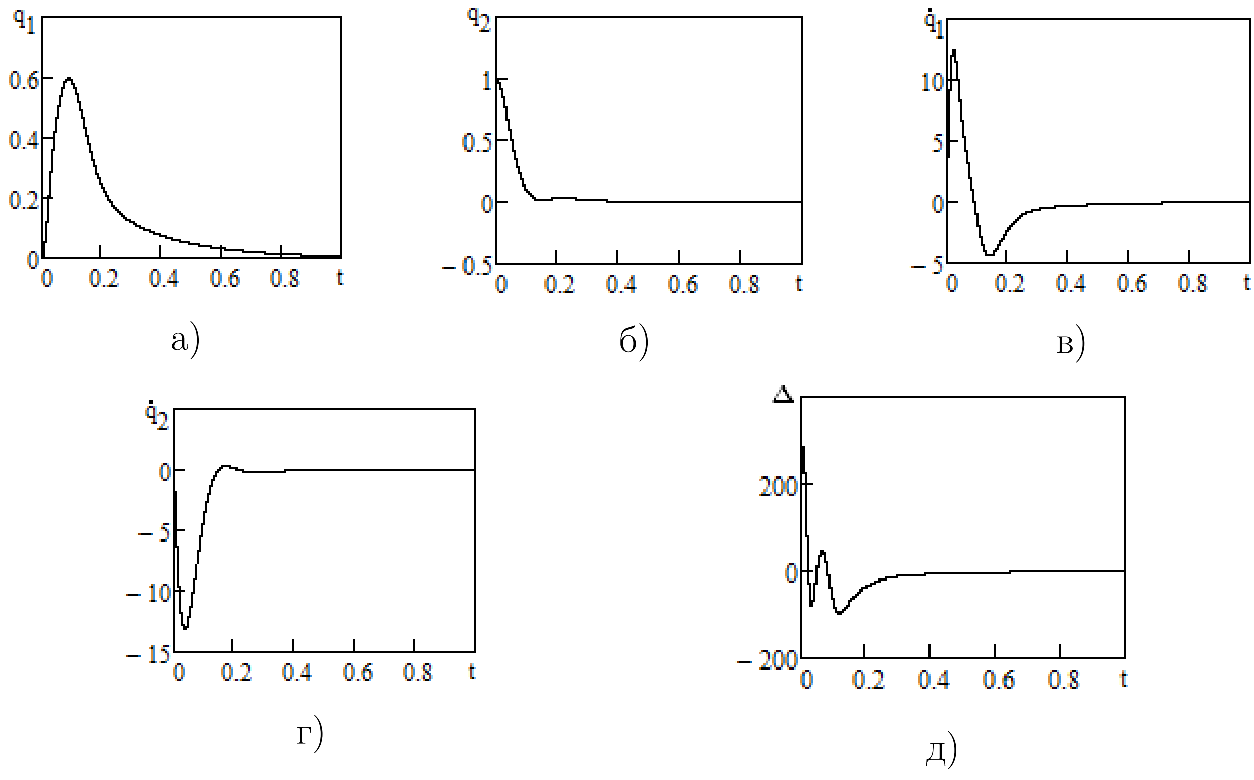


Рис. 6.8 – Поведінка змінних. Приклад 6.3

$q_2 = 1$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 1$ зображені на Рис. 6.8. Як бачимо, керування Δ вирішує поставлену задачу.

Припустимо, наприклад, що маса m задана неточно. В цьому випадку, вважаємо її величину залежною від параметра: $m = (1 + p)$кг. Визначимо область P_2 зміни параметра p, при всіх значеннях параметра з якої побудоване керування Δ глобально асимптотично стабілізує нульовий стан рівноваги моделі. Згідно співвідношень (6.83), такою областю може бути інтервал $[-0.35, 0.02]$. На Рис. 6.9 зображено поведінку моделі при $p = -0.3$ і початкових значеннях змінних $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 1$, $\dot{q}_2 = 0$.

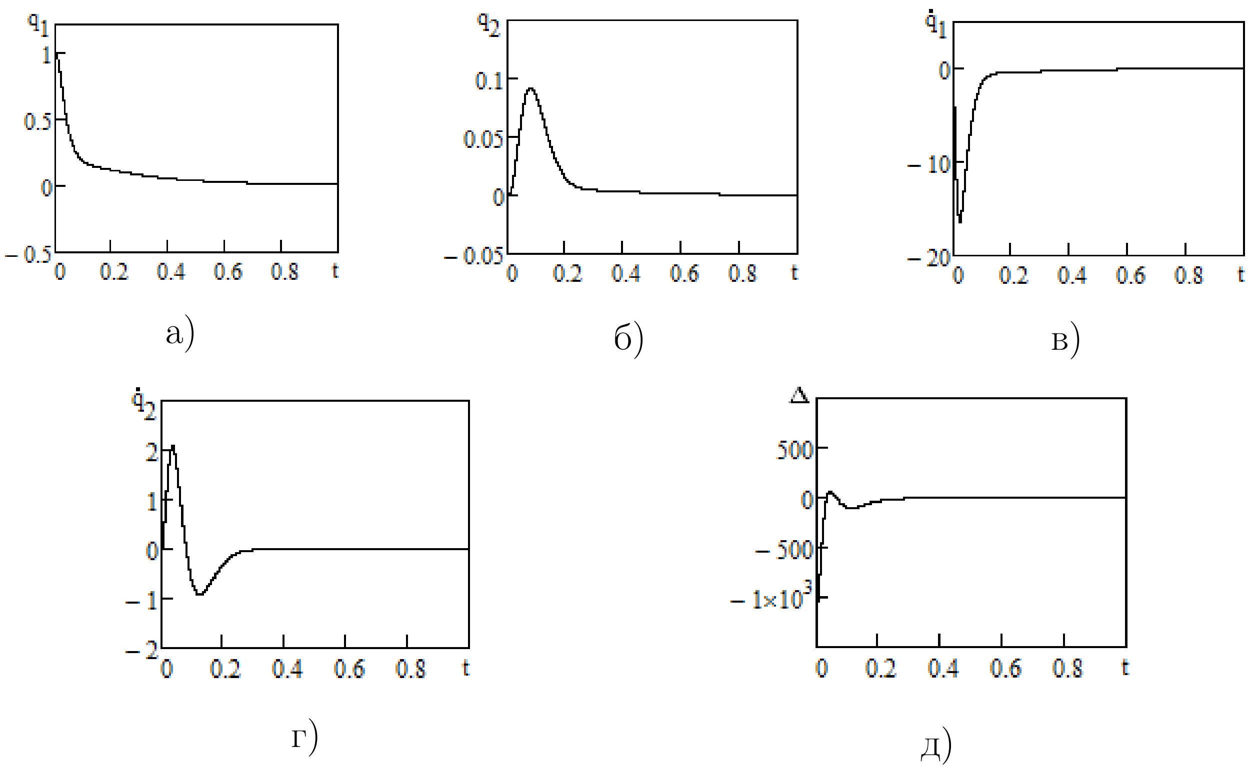


Рис. 6.9 – Поведінка змінних при $p = -0.3$. Приклад 6.3

6.2 Керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збудження

Двигун постійного струму послідовного збудження (ДПС ПЗ) представляє собою машину постійного струму, в якій обмотка збудження підключена последовно з обмоткою якоря (див. [1, 93]). Двигуни такого типу можуть развивати значний обертовий момент при невисокій швидкості обертання, чим зумовлено їх використання в якості двигунов для кранів, лифтів, електропоїздів (див. [144]), конвейєрів, автомобільних стартерів і.т.ін. Відмітимо, що при зменшенні навантаження на валу швидкість ДПС ПЗ буде збульшуватись, причому при відсутності навантаження (холостий хід) збільшення швидкості буде значним, що може призвести до руйнування двигуна. Таким чином, використання ДПС ПЗ є недоцільним там, де навантаження носить нерегулярний характер, часто змінюється чи потребує частого вмикання/вимикання двигуна.

Кріме того, очевидно, актуальною задачею є керування швидкістю обертання ДПС ПЗ і підтримка її постійного значення. Одним із способів такого керування є зміна величини напруги, що підводиться до двигуна, шляхом зміни опору в ланцюзі якоря. Недивлячися на те, що регулювання швидкості вказаним методом пов'язано із втратами енергії в реостаті регулювання, данний спосіб знаходить застосування в кранових установках та електровізках зогляду на свою простоту. Також ці механізми працюють зі значними перервами, що зменшує втрати енергії на нагрівання опорів реостатів.

Згідно [151], динаміка ДПС ПЗ описується системою диференціальних рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = -Ri - K_m L_f i\omega + V, \\ J\dfrac{d\omega}{dt} = K_m L_f i^2 - D\omega - M, \end{cases} \tag{6.84}$$

де i – сила тока в ланцюгу, ω – кутова швидкість обертання мотора, V – напруга, що подається на вхід, R – сумарній опір обмотки збудження і обмотки якоря, L – сумарна індуктивність обмотки збудження і обмотки якоря, L_f – індуктивність обмотки збудження, K_m – коефіцієнт противо-ЭРС,

J – момент інерції ротора, D – коефіцієнт в'язкого тертя, M – обертовий момент двигуна. Щоб визначити M, ДПС ПЗ обертає вал електродвигуна з постійними магнітами, яккий працює в режимі генератора і замкнений на зовнішньому опорі R_L. В цьому випадку $M = \dfrac{K_{mL}^2\omega}{R_{aL} + R_L}$, де R_{aL} – опір обмотки якоря, а K_{mL} – стала моменту електродвигуна з постійними магнітами.

Підставивши значення M в (6.84) і позначивши $y_1 = \omega$, $y_2 = i$, представимо (6.84) у вигляді

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dfrac{K_m L_f}{J} y_2^2 - \dfrac{D + \dfrac{K_{mL}^2}{R_{aL} + R_L}}{J} y_1, \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{R}{L} y_2 - \dfrac{K_m L_f}{L} y_1 y_2 + \dfrac{1}{L} V. \end{cases} \tag{6.85}$$

Згідно [106], позначимо $T_m = \dfrac{J}{D}$ і $T_e = \dfrac{L}{R}$ – механічна та електрична часові константи, відповідно, і введемо нову часову шкалу $\tau = \dfrac{t}{T_m}$. Тоді систему диференціальних рівнянь (6.85) приведемо до вигляду різнотемпової:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = \dfrac{K_m L_f}{D} y_2^2 - y_1 - \dfrac{K_{mL}^2}{(R_{aL} + R_L)D} y_1, \\ \varepsilon \dfrac{dy_2}{d\tau} = -y_2 - \dfrac{K_m L_f}{R} y_1 y_2 + \dfrac{1}{R} V, \end{cases} \tag{6.86}$$

де $\varepsilon = \dfrac{T_e}{T_m}$ – достатньо мале, оскільки звичайно $T_m \gg T_e$.

Позначимо $a = -1 - \dfrac{K_{mL}^2}{(R_{aL} + R_L)D}$, $b = \dfrac{K_m L_f}{D}$, $c = -\dfrac{K_m L_f}{R}$, $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ і припустимо, що параметри системи диференціальних рівнянь (6.86) визначені неточно, тобто величини a, b і c будемо вважати неперервно залежними від деякого значення скалярного параметра $p \in \mathbb{R}$, який належить замкненій множині $P \subset R$. Причому, константи T_e і T_m вважаємо незалежними від p, тобто величини J, D, L и R виміряні точно. Таким чином, з

(6.86) отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = a(p)y_1 + b(p)y_2^2, \\ \varepsilon\dfrac{dy_2}{d\tau} = -y_2 + c(p)y_1y_2 + \dfrac{1}{R}V. \end{cases} \tag{6.87}$$

Відносно величин $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$ і області P зробимо наступне припущення:

Припущення 6.1. *Нехай величини $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$ і область P такі, що $a(p) < 0$, $b(p) > 0$, $c(p) < 0$ для всіх p з області P.*

Потрібно знайти таку залежність, згідно які змінюється напруга, що подається на вхід ДПС ПЗ, щоб кутова швидкість обертання ДПС ПЗ прямувала до заданної величини $\overline{\omega}$ при $t \to \infty$. Нехай сила струму в ланцюзі ДПС ПЗ прямує до величини $I(p)$, $p \in P$, якщо $\omega \to \overline{\omega}$. Іншими словами, нехай $\Big(\overline{\omega}, I(p)\Big)$ – стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.87) при керуванні V. З першого рівняння системи диференціальних рівнянь (6.87) отримаємо, що рівноважне значення сили струму $I(p)$ рівне $\sqrt{\dfrac{-a(p)\overline{\omega}}{b(p)}}$, $p \in P$. Нехай напруга, яка подається на вхід ДПС ПЗ змінюється по закону, який має вигляд

$$V(p) = -RI(p)K + R(1 - c(p)\overline{\omega} + K)y_2, \; p \in P, \tag{6.88}$$

де $K < 0$ – деяка константа. Система диференціальних рівнянь (6.87) керуванням (6.88) приводиться до вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\tau} = a(p)y_1 + b(p)y_2^2, \\ \varepsilon\dfrac{dy_2}{d\tau} = (K - c(p)\overline{\omega})y_2 + c(p)y_1y_2 - I(p)K. \end{cases} \tag{6.89}$$

Легко переконатися, що точка $\Big(\overline{\omega}, I(p)\Big)$ є станом рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.89) для всіх значень параметра p з області P. Зробивши заміну змінних в системі диференціальних рівнянь (6.89) по формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \overline{\omega}, \\ x_2 = y_2 - I(p), \end{cases}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = a(p)x_1 + b(p)x_2^2 + 2b(p)I(p)x_2, \\ \varepsilon\dfrac{dx_2}{d\tau} = c(p)I(p)x_1 + c(p)x_1x_2 + Kx_2. \end{cases} \tag{6.90}$$

Система диференціальних рівнянь (6.90) має нульовий стан рівноваги при всіх значеннях параметра $p \in P$.

Сформулюємо і доведемо теорему яка містить основний результат даного підрозділу.

Теорема 6.4. *Нехай величини $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$ і множина $P \subset \mathbb{R}$ такі, що виконуються умови Припущення 6.1. Тоді для кожного значення параметра p з області P існує таке керування вигляду (6.88) з параметром керування $K < \dfrac{\overline{\omega}c(p)}{4}$, що кутова швидкість ДПС ПЗ, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь (6.87), керуванням (6.88) приводиться до заданої величини $\overline{\omega}$ при $t \to \infty$, незалежно від початкових значень змінних.*

Доведення. Очевидно, що з певного виду стійкості нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.90) слідує аналогічний вид стійкості стану рівноваги $\Big(\overline{\omega}, I(p^*)\Big)$ системи диференціальних рівнянь (6.89) або, що рівносильно, системи диференціальних рівнянь (6.87) при керуванні (6.88). Тому, для доведення твердження теореми, достатньо довести, що для всіх значень параметр p з області P нульовий стан рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.90) глобально асимптотично стійкий.

Виберемо довільне значення параметра p^* з області P і розглянемо систему диференціальних рівнянь (6.90) при цьому значенні параметра. Параметр керування K вважаємо таким, що задовольняє співвідношення $K < \dfrac{\overline{\omega} c(p^*)}{4}$, $K < 0$. Представимо систему диференціальних рівнянь (6.90) у псевдолінійному вигляді

$$\frac{dx}{d\tau} = A(x, p^*)x, \tag{6.91}$$

де $x = (x_1 \; x_2)^T$,

$$A(x, p^*) = \begin{pmatrix} a(p^*) & b(p^*)x_2 + 2b(p^*)I(p^*) \\ \dfrac{c(p^*)}{\varepsilon}x_2 + \dfrac{c(p^*)I(p^*)}{\varepsilon} & \dfrac{K}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо квадратичну функцію Ляпунова $U(x) = x^T P x$, де

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{b(p^*)\varepsilon}{c(p^*)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що при виконанні умов Припущення 6.1, величина $-\dfrac{b(p^*)\varepsilon}{c(p^*)}$ додатна і функція $U(x)$ додатно визначена за Ляпуновим. Крім того, ця функція нескінченно велика і зростаюча вцілому.

Обрахуємо похідну функції $U(x)$ по часу вздовж розв'язків системи диференціальних рівнянь (6.91)

$$\left.\frac{dU(x)}{d\tau}\right|_{(6.91)} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^T Px + x^T P \frac{dx}{d\tau} =$$

$$= x^T A^T(x, p^*) Px + x^T P A(x, p^*) x = x^T B(p^*) x,$$

де

$$B(p^*) = \begin{pmatrix} 2a(p^*) & b(p^*)I(p^*) \\ b(p^*)I(p^*) & -\dfrac{2Kb(p^*)}{c(p^*)} \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $a(p^*) < 0$, згідно критерію Сильвестра, достатньою умовою для від'ємної визначеності матриці $B(p^*)$ є виконання нерівності

$$\frac{-4Ka(p^*)b(p^*)}{c(p^*)} - b^2(p^*)I^2(p^*) > 0. \tag{6.92}$$

Підставивши в (6.92) рівноважне значення сили струму $I(p^*) = \sqrt{\dfrac{-a(p^*)\overline{\omega}}{b(p^*)}}$, отримаємо нерівність

$$\frac{-4a(p^*)b(p^*)}{c(p^*)}K + b(p^*)a(p^*)\overline{\omega} > 0,$$

яка, очевидно, виконується для вибраного значення параметра керування. Таким чином, функція $U(x)$ є функцією Ляпунова, яка в силу теореми 12.1 (див. [3]) дозволяє встановити глобальну асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.91), тобто нульового стану рівноваги системи диференціальних рівнянь (6.90).

Оскільки значення параметра p^* є довільним з області P, то, очевидно, для кожного значення параметра p з цієї області буде існувати таке керування вигляду (6.88) з параметром керування $K < \dfrac{\overline{\omega}c(p)}{4}$, що кутова швидкість ДПС ПЗ, поведінка якого описується системою диференціальних рівнянь (6.87), керуванням (6.88) приводиться до заданої величини $\overline{\omega}$ при $t \to \infty$, незалежно від початкових значень змінної.

Теорему доведено.

Приклад 6.3. В якості прикладу розглянемо керування кутовою швидкістю ДПС ПЗ, який має наступні числові параметри: $R = 7.2$Ом,

$L = 0.0917$Гн, $K_m L_f = 0.1236$Н $\cdot$ м/А^2, $J = 0.0007046$кг $\cdot$ м^2, $D = 0.0004$Н $\cdot$ м/(рад/с), $K_{mL} = 0.173$Н $\cdot$ м/А, $R_{aL} = 2.5$Ом, $R_L = 5$Ом. В цьому випадку, $T_m = 1.7615$с, $T_e = 0.012736$с, $\varepsilon = 0.0072$. Вважаємо, що величина $K_m L_f$ виміряна неточно і відомо, лише, про її приналежність деякій множині, тобто $K_m L_f = 0.1236 + p$, де $p \in P$. Тоді $a = -10.976$, $b(p) = \dfrac{0.1236 + p}{0.0004}$с$^{-1} \cdot$ А$^{-2}$, $c(p) = \dfrac{-0.1236 - p}{7.2}$с. Потрібно визначити керування V, яке забезпечить обертання ДПС ПЗ з кутовою швидкістю $\overline{\omega} = 2$об/с і множину значень параметра p, при яких рівноважна кутова швидкість обертання ДПС ПЗ не зміниться. Згідно Теореми 6.3, так як a не залежить від параметра p і є сталою від'ємною величиною, то множина P визначається з умов $b(p) > 0$, $c(p) < 0$ для всіх $p \in P$. Така множина отримана у вигляді інтервала $P = \{p \in \mathbb{R} \mid -0.1236 < p \leq 7.0764\}$. Оскільки $I(p) = \dfrac{0.0937}{\sqrt{0.1236 + p}}$, то з (6.88) отримаємо, що

$$V(p) = -7.2 \cdot \frac{0.0937}{\sqrt{0.1236 + p}} \cdot K + 7.2 \left(1 + \frac{0.1236 + p}{7.2} \cdot 2 + K\right) y_2,$$

де параметр керування $K = -\dfrac{2}{3}$ вибираємо згідно умов Теореми 6.3. Таким чином, остаточно, шукане керування має вигляд

$$V(p) = \frac{0.44976}{\sqrt{0.1236 + p}} + (2.6472 + 2p) y_2.$$

Згідно Теореми 6.3, для всіх p з P знайдене керування забезпечує обертання ДПС ПЗ з кутовою швидкістю $\overline{\omega} = 2$об/с.

На Рис. 6.10 показана еволюція кутової швидкості ДПС ПЗ, тобто поведінка змінної y_1 системи дифере нціальних рівнянь (6.87) при знайденому керуванні і початкових значеннях змінних $y_{0_1} = (5,\ 0.5)$, $y_{0_2} = (10,\ 1)$, $y_{0_3} = (20,\ 3)$, коли параметр p приймає значення $p_1 = 7$, $p_2 = 3$, $p_3 = -0.1$, відповідно.

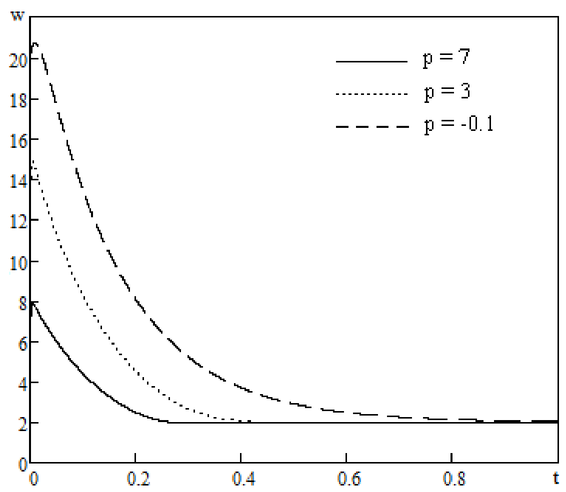


Рис. 6.10 – Еволюція кутової швидкості ДПС ПЗ при різних початкових значеннях змінних і різних значеннях параметра

На Рис. 6.11 показана еволюція кутової швидкості ДПС ПЗ, при послідовному застосуванні керувань $V(p)$, $K = -\dfrac{2}{3}$, $\overline{\omega} = 2$об/с,
$V_1(p) = \dfrac{2.337}{\sqrt{0.1236 + p}} + (-6.4584 + 6p)y_2$, $K = -2$, $\overline{\omega} = 6$об/с,
$V_2(p) = \dfrac{4.7468}{\sqrt{0.1236 + p}} + (-13.0404 + 11p)y_2$, $K = -3$, $\overline{\omega} = 11$об/с і початковому значенні змінної $y_0 = (0,\ 0.5)$, коли параметр p приймає значення $p = 7$.

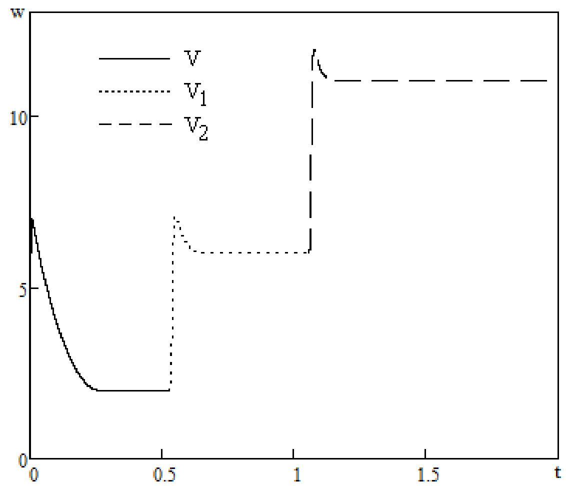


Рис. 6.11 – Еволюція кутової швидкості ДПС ПЗ при послідовному застосуванні різних керувань

6.3 Результати та висновки

Велика кількість механічних систем містять процеси, що протікають у відповідності до різних часових шкал (див. напр., [84, 151]). Математичними моделями таких систем є системи диференціальних рівнянь, що мають параметр при похідних у частині рівнянь, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів, або різнотемпові системи. В розділі 6 розглянуто застосування прямого методу Ляпунова до дослідження динамічних характеристик математичних моделей механічних систем, які мають вигляд неточних різнотемпових систем диференціальних рівнянь.

Для маятника з маховиком, застосовуючи метод DSC, побудоване керування обертанням маховика, яке глобально стабілізує верхній стан рівноваги маятника у той час, як маховик припинить своє обертання. Доведення цього факту відбувається за допомогою побудованої в явному вигляді функції Ляпунова. Це також дає змогу отримати оцінки на параметри керування, величину параметра, що визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів та область робастності побудованого керування. Зауважимо, що керування отримане в явному вигляді і має значно простіший вигляд, ніж, наприклад, в [73, 168], де питання збільшення складності вигляду керування становило значну проблему.

Для моделі, що отримала назву TORA, застосовуючи метод DSC, побудоване керування обертанням ексцентрикового маховика, що глобально стабілізує поступальний рух. Побудовано в явному вигляді функцію Ляпунова, яка дає змогу встановити глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги математичної моделі об’єкта, що розглядається, встановити область робастності керування в просторі параметрів моделі та оцінити величину параметра, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів. Підкреслимо значно простіший вигляд керування ніж в [168, 193] та можливість вар’ювати його вигляд для вибору оптимальних параметрів керуючого об'єкта.

Для одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням, де пружність трансмісії моделюється торсіонною пружиною і сила пружності вважається нелінійно залежною від зміщення, побудоване керування, яке забезпечує глобальну стабілізацію стану рівноваги механічної моделі. Зауважимо, що зазвичай, при аналізі такої моделі, сила пружності вважається лінійно залежною від зміщення. Але більшої адекватності математична модель набуває, якщо враховувати нелінійний характер згадуваної сили, що стає критичним, коли розглядаються великі навантаження чи інші пограничні режими функціонування механічної моделі. В цьому випадку звести відповідну математичну модель до лінійного вигляду не є можливим і задача побудови керування залишалася відкритою. Застосування методу DSC дало змогу побудувати відповідне керування, а використання прямого методу функцій Ляпунова – встановити його здатність глобально стабілізувати відповідний стан рівноваги механічної моделі. Отримано оцінки області робастності керування в просторі параметрів моделі та оцінку на величину параметра, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів.

Досліджено динаміку двигуна постійного струму послідовного збудження, яка задається різнотемповою системою диференціальних рівнянь. Зауважимо, що така форма системи диференціальних рівнянь є природньою, оскільки процеси, що відбуваються у ДПС ПЗ, мають різні часові шкали. Так час, за який змінюється сила струму в контурі, на декілька порядків менший, ніж час, за який відбувається зміна кутової швидкості обертання валу. Запропоновано керування, тобто закон зміни напруги, що подається на вхід ДПС ПЗ, яке забезпечує обертання валу із необхідною кутовою швидкістю. Показана робастність отриманого керування, що було проблемою при розгляді схожих задач (див. [106]). Також вказана область такої робастності у просторі параметрів моделі.

Зауважимо, що динаміка різнотемпових систем диференціальних рівнянь, які описують поведінку реальних механічних систем і розглядалися в цьому розділі, досліджувалася без розділу рухів на швидкі та повільні. Внаслідок суттєвої нелінійності деяких систем це б значно ускладнило їх дослідження. Крім того, використання методу функцій Ляпунова дозволило отримати область робастності керування та оцінки на величину параметра, який визначає відношення швидкостей швидких та повільних рухів, що є суттєвим, оскільки він явним чином входить до закону керування.

Основні результати цього розділу викладено в роботах [45, 82, 84, 85, 87–90].

ВИСНОВКИ

Отримані результати є інструментом аналізу практичних проблем, що виникають у різних галузях науки та техніки. Вони дозволяють робити висновок про якісну поведінку різних типів неточних різнотемпових моделей механічних систем на нескінченному часовому інтервалі у випадку, якщо внаслідок, наприклад, значної нелінійності моделі, що розглядається, застосування, зокрема, методу розділення змінних ускладнене. Крім того, достатні умови параметричної стійкості дають можливість максимально врахувати вплив неточних параметрів на динамічні характеристики моделей механічних систем, тобто точніше моделювати реальні задачі і, відповідно, точніше прогнозувати поведінку реальних механічних систем.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче.

1. Запропоновано новий підхід до визначення області, для значень параметрів з якої існує стан рівноваги неточних різнотемпових систем різних класів, як-то систем типу Лур'є–Постнікова у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем та у випадку неможливості такого розділення, нелінійних систем у загальному вигляді, в тому числі великомасштабних. Причому, відповідні оцінки областей і оцінки на нелінійності функцій, що входять до системи, потребують інформації про поведінку моделі лише при деякому фіксованому значенні параметра, що є суттєвою перевагою порівняно з відомими результатами.

2. Запропоновано узагальнення прямого методу Ляпунова для дослідження параметричної стійкості неточних нелінійних різнотемпових систем диференціальних рівнянь, що полягає у його розширенні на новий клас систем, які досліджуються, у нових способах побудови відповідних до-

поміжних функцій, які враховують рухомість стану рівноваги системи диференціальних рівнянь та наявність в ній параметра, що визначає відношення швидкостей "швидких" та "повільних" рухів, а також у нових умовах стійкості, отриманих за їх допомогою.

3. Для систем типу Лур'є–Постнікова, у випадку, коли вони допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем, отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості та параметричної нестійкості, які для систем такого класу дають можливість робити висновок про динаміку системи при всіх можливих типах динаміки вказаних підсистем без потреби відшукання рухомого стану рівноваги. У випадку, коли системи типу Лур'є–Постнікова не допускають виділення "швидкої" та "виродженої" підсистем або у випадку браку відомостей про динамічні характеристики вказаних підсистем, застосовуючи багатокомпонентні функції Ляпунова також отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості без потреби відшукання рухомого стану рівноваги.

4. Отримано достатні умови глобальної асимптотичної параметричної стійкості для неточних нелінійних різнотемпових систем в загальному вигляді, які не потребують відшукання рухомого стану рівноваги, як у припущенні про їх великомасштабність, так і без такого припущення, а також запропоновано спосіб побудови керування, що забезпечує глобальну асимптотичну параметричну стійкість неточної нелінійної різнотемпової системи в загальному вигляді відносно певної області у просторі параметрів системи у випадку її параметричної нестійкості.

5. Незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин встановлено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено із різнотемповими локальними

підсистемами у випадку як стійкості, так і нестійкості лінійних наближень локальних підсистем, а також область такої стійкості у просторі параметрів моделі. У випадку, коли застосувати отримані результати для побудови функції Ляпунова не вдається, запропоновано керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги нечіткої моделі типу Такагі–Сугено відносно певної області у просторі параметрів моделі незалежно від вибору функцій приналежності нечітких множин.

6. Розвинуто спосіб побудови керування для неточних малоприводних механічних систем, застосовуючи який отримано явні вигляди керування, що для всіх значень параметрів моделей з деяких областей забезпечують глобальну асимптотичну стійкість верхнього положення рівноваги маятника з маховиком, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги TORA, глобальну асимптотичну стійкість стану рівноваги маніпулятора із пружним зчленуванням. Також запропоновано керування, тобто закон зміни напруги, що подається на вхід двигуна постійного струму послідовного збудження, яке забезпечує обертання валу двигуна із необхідною кутовою швидкістю для всіх значень параметрів моделі з деякої області та незалежно від початкових значень змінних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алябьев, С.А., Горчаков, Е.В., Осипов, С.И., Ридель, Э.Э., Хлебников, В. Н. : Устройство и ремонт электровозов постоянного тока. Транспорт, Москва (1977)
2. Андронов, А.А., Витт, А.А., Хайкин, С.Э.: Теория колебаний. Наука, Москва (1981)
3. Барбашин, Е.А.: Введение в теорию устойчивости. Наука, Москва (1967)
4. Боголюбов, Н.Н., Зубарев, Д.Н.: Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле. Укр. мат. журн. **7**, 5-17 (1955)
5. Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, Москва (1974)
6. Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А.: Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям **1**, 93-154 (1963)
7. Васильева, А.Б.: Асимптотические формулы для решений обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, справедливые на полубесконечном промежутке. Доклады Академии наук СССР **142**(4), 769-772 (1962)
8. Васильева, А.Б.: О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Мат. сборник **28**(1), 131-146 (1951)

9. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф.: Асимптотические разложения решений сингулярных уравнений. Наука, Москва (1973)

10. Вишик, М.И., Люстерник, Л.А.: Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи математических наук, **12**(5(77)), 3-122 (1957)

11. Волосов, В.М.: Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением. Журнал вычислительной математики и математической физики **3**(1), 3-53 (1963)

12. Волосов, В.М.: Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Мат. сб. **30**(2), 245-270 (1952)

13. Волосов, В.М.: Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи математических наук **17:6**(108), 3-126 (1962)

14. Волосов, В.М., Моргунов, Б.И.: Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГу, Москва (1971)

15. Градштейн, И.С.: Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных. Мат. сб. **27**(1), 47-68 (1950)

16. Градштейн, И.С.: О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Мат. сб. **32**(3), 533-544 (1953)

17. Градштейн, И.С.: Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Мат. сб. **32**(2), 263-286 (1953)

18. Груйич, Л.Т., Мартынюк, А.А., Риббенс-Павелла, М.: Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Наукова думка, Киев (1984)

19. Гусев, Ю.М., Ефанов, В.Н., Крымский, В.Г., Рутковский, В.Ю.: Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов. Известия Российской академии наук. Теория и системы управления **1**, 3-23 (1991)

20. Гусев, Ю.М., Ефанов, В.Н., Крымский, В.Г., Рутковский, В.Ю.: Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов. Известия Российской академии наук. Теория и системы управления **2**, 3-30 (1991)

21. Демидович, Б.П.: Лекции по теории математической устойчивости. Наука, Москва (1967)

22. Жабко, А.П., Харитонов, В.Л.: Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов. Автоматика и телемеханика **10**, 125-134 (1994)

23. Железцов, Н. А.: К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Изв. высших учебных заведений. Радиофизика **1**(1), 67-78 (1958)

24. Железцов, Н.А., Родыгин, Л.В.: К теории симметричного мультивибратора. Докл. АН СССР **81**(3), 391-392 (1951)

25. Задирака, К.В.: О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы. Укр. мат. журн. **17**(1), 47-63 (1965)

26. Зевин, А.А., Филоненко Л.А.: Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей. Прикл. мат. и мех. **71**(6), 989-1003 (2007)

27. Иманалиев, М.И.: Асимптотические оценки решений задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при

производной. В: Доклады III Сибирской конференции по математике и механике, Томский ун-т, Томск, 1964

28. Иманалиев, М.И.: О периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. В: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, т. 1, с. 139-144. Фрунзе (1961)
29. Иманалиев, М.И.: О поведении решений систем интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. В: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, т. 2, с. 21-39. Фрунзе (1962)
30. Климушев, А.И.: Равномерная асимптотическая устойчивость систем линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Сиб. мат. журн. **5**(1), 94-101 (1964)
31. Климушев, А.И., Красовский, Н.Н.: Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Прикл. мат. и мех. **25**(4), 680-690 (1961)
32. Коллатц, Л.: Функциональный анализ и вычислительная математика. Мир, Москва (1969).
33. Красовский, Н.Н.: Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. Прикл. мат. и мех. **17**(6), 651-672 (1953)
34. Боголюбов, Н.Н., Крылов, Н.М.: Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, Киев (1937)
35. Боголюбов, Н.Н., Крылов, Н.М.: Новые методы нелинейной механики. Наукова Думка, Киев (1934)
36. Ларин, В.Б.: Стабилизация линейных систем с неопределенными параметрами. Прикл. мех. **34**(2), 92-100 (1998)
37. Ларин, В.Б., Алиев, Ф.А., Велиева, Н.И.: О проблеме надежной стаби-

лизации. Пробл. управл. и инф. **6**, 19-27 (1995)

38. Лурье, А.И., Постников, В.Н.: К теории устойчивости регулируемых систем. Прикл. матем. и мех. **8**(3), 246-248 (1944)

39. Лыкова, О.Б., Барис, Я.С. Приближенные интегральные многообразия. Наукова Думка, Киев (1944).

40. Ляпунов, А.М.: Собрание сочинений. Изд-во АН СССР, Москва (1956)

41. Мазко, А.Г.: Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем. Укр. мат. журн. **50**(10), 1341-1351 (1998)

42. Мазко, А.Г.: Матричные уравнения и неравенства в задачах локализации спектра. В: Вопросы аналитической механики и ее приложения, с. 203-215. Ин-т математики НАН Украины, Киев (1998)

43. Мартынюк, А.А.: Иерархические матричные функции Ляпунова и устойчивость решений неточниых систем. Труды Института Математики НАН Беларуси **4**, 109-114 (2000)

44. Мартынюк, А.А., Слынько, В.И.: О выборе параметров интервально устойчивой механической системы. Прикл. мех. **39**(9), 116-120 (2003)

45. Мартинюк, А.А., Хорошун, А.С.: До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 43-46 (2017)

46. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: К задаче стабилизации движения параметрической семьи нелинейных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **14**(2), 238-254 (2011)

47. Мартынюк, А.А., Хорошун А.С.: О методе векторних функций Ляпунова в задаче об абсолютной устойчивости неточних сингулярно возмущенных систем. В: Проблемы устойчивости и управления, с. 231-244. Физматлит, Москва (2013)

48. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической неустойчивости

сингулярно возмущенных систем. Автоматика и телемеханика **1**, 59-78 (2013)

49. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической стабилизации неточних сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **15**(3), 367-380 (2012)

50. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: Параметрическая устойчивость нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Прикл. мех. **46**(10), 106-121 (2010)

51. Мартынюк-Черниенко, Ю.А.: К теории устойчивости движения неточных систем. Доповіді НАН України **1**, 28-31 (1998)

52. Мартынюк-Черниенко, Ю.А.: О равномерной асимптотической устойчивости решений неточной системы относительно инвариантного множества. Докл. АН России **364**(2), 163-166 (1999)

53. Мартынюк-Черниенко, Ю.А.: Об устойчивости движения систем с неточными значениями параметров. Прикл. мех. **35**(2), 101-104 (1999)

54. Мартынюк-Черниенко, Ю.А.: Об устойчивости решений квазилинейной неточной системы. Укр. мат. журн. **51**(4), 458-465 (1999)

55. Миладжанов, В.Г.: Анализ устойчивости нелинейных систем при структурных возмущениях. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Институт механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины (1993)

56. Боголюбов, Н.Н., Митропольский, Ю.А.: Метод усреднения в нелинейной механике. Наукова думка, Киев (1971)

57. Митропольский, Ю.А.: Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Наука, Москва (1964)

58. Мищенко, Е.Ф.: Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры

при производных. Изв. ак. наук СССР. **21**(5), 627-654 (1957)

59. Мищенко, Е.Ф., Розов, Н.Х.: Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. Наука, Москва (1975)

60. Мустафаева Р.: (1996) Исследование интервальной устойчивости динамических систем и моделирование процессов водообмена. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Национальный Университет им. Т.Г.Шевченко (1975)

61. Понтрягин, Л.С.: Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. ак. наук СССР. **21**(5), 605-626 (1957)

62. Понтрягин, Л.С.: Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. В: Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 3, с. 570-577. Изд-во АН СССР, Москва (1958)

63. Понтрягин, Л.С., Родыгин, Л.В.: Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Докл. ак. наук СССР **132**(3), 537-540 (1960)

64. Разумихин, Б.С.: Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Сиб. мат. журн. **4**(1), 206-211 (1963)

65. Разумихин, Б.С.: Об устойчивости систем с малым множителем. Прикл. мат. и мех. **21**(4), 578-580 (1957)

66. Самойленко, А.М., Свищук, М.Я.: О расщеплении системы дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора. Укр. мат. журн. **37**(6), 751-756 (1985)

67. Тихонов, А.Н.: О зависимости решений дифференциальных уравнений

от малого параметра. Матем. сб. **22**(64), 193-204 (1948)

68. Тихонов, А.Н.: О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Матем. сб. **27**(69), 147-156 (1950)
69. Тихонов, А.Н.: Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб. **31**(3), 575-586 (1952)
70. Тупчиев, В.А.: Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производной. Докл. ак. наук СССР **143**(6), 1296-1299 (1962)
71. Тупчиев, В.А.: О существовании, единственности и асимптотике решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Докл. ак. наук СССР **142**(6), 1261-1264 (1962)
72. Тупчиев, В.А.: Об угловых решениях краевых задач с малым параметром при производной в системе уравнений первого порядка. Вестник МГУ **3** 17-23 (1963)
73. Формальский, А.М.: Управление движением неустойчивых объектов. ФИЗМАТЛИТ, Москва (2013)
74. Харитонов, В.Л.: Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений. Диф. ур. **14**(11), 2086-2088 (1978)
75. Хлебалин, Н.А.: Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней. В: Аналитические методы синтеза регуляторов, с. 92-98. Изд. Саратовского политех. ин-та, Саратов (1982)
76. Хорн, Р., Джонсон, Ч.: Матричный анализ. Мир, Москва (1989)
77. Хорошун, А.С.: Достаточные условия параметрической устойчивости квазилинейных механических систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Институт механики им. С.П. Тимо-

шенко НАН Украины (2008)

78. Хорошун, А.С.: Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **4**, 53-58 (2013)
79. Хорошун, А.С.: Об абсолютной устойчивости неточних крупномасштабных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **16**(4), 557-573 (2013)
80. Хорошун, А.С.: Об использовании многокомпонентных функций Ляпунова для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных механических систем. Прикл. мех. **50**(2), 115-133 (2014)
81. Хорошун, А.С.: О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **10**, 50-54 (2010)
82. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. Прикл. мех. **52**(5), 125-137 (2016)
83. Хорошун, А.С.: Об управлении неточными быстро-медленными системами Такаги-Сугено. Прикл. мех. **54**(4), 83-95 (2018)
84. Хорошун, А.С.: Об устойчивости горизонтального движения самолета. Прикл. мех. **52**(1), 134-144 (2016)
85. Хорошун, А.С.: Об устойчивости и управлении угловой скоростью вращения двигателя постоянного тока последовательного возбуждения. Прикл. мех. **52**(4), 122-129 (2016)
86. Хорошун, А.С.: Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги-Сугено. Случай устойчивых подсистем. Доповіді НАН України **4**, 64-69 (2014)
87. Хорошун, А.С.: О построении управления движением маятника враще-

нием инерциального маховика. Доповіді НАН України **4**, 41-46 (2018)

88. Хорошун, А.С.: О построении управления поступательным движением вращением эксцентрикового маховика. Доповіді НАН України 3, 53-58 (2018)

89. Хорошун, А.С.: О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика. Прикл. мех. **54**(5), 123-135 (2018)

90. Хорошун, А.С.: Про стабілізацію руху TORA. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 53-56 (2017)

91. Хусаинов, Д.Я., Мустафаева Р.: Робастная устойчивость систем с запаздыванием. Укр. мат. журн. **47**(6), 859-863 (1995)

92. Хусаинов, Д.Я., Шатырко, А.В.: Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Издательство Киевского университета, Киев (1997)

93. Шенфер, К.И.: Динамомашины и двигатели постоянного тока. ОНТИ, Москва-Ленинград (1937)

94. Aliev, F.A., Larin, V.B.: Generalized Lyapunov equation and factorization of matrix polynomials. Systems and control letters **21**(6), 485-491 (1993)

95. Aliev F.A., Larin V.B.: Optimization of linear control systems. Analytical methods and computational algorithms. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1998)

96. Assawinchaichote, W.: An LMI Approach of Robust H? Fuzzy State-Feedback Controller Design for HIV/AIDS Infection System with Dual Drug Dosages. World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering **6**(5), 681-686 (2012)

97. Assawinchaichote, W., Nguang, S.K.: H_∞ filtering for fuzzy singularly perturbed systems with pole placement constraints: an LMI approach. IEEE

Transactions on Signal Processing **52**(6), 1659-1667 (2004)

98. Astolfi, A.: Discontinuous control of nonholonomic systems. Systems and Control Letters **27**(1), 37-46 (1996)

99. Barmish, B., Leitmann, G.: On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions. IEEE Transactions on Automatic Control **27**(1), 153-158 (1982)

100. Bloch, A.M., Reyhanoglu, M., McClamroch, N.H.: Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. IEEE Transactions on Automatic control **37**(11), 1746-1757 (1992)

101. Bupp R.T., Bernstein D.S., Coppola V.T.: Vibration suppression of multimodal translational motion using a rotational actuator. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994

102. Chen, Y.H.: A new matching condition for nonlinear robust control design. Journal of dynamic systems measurement and control **117**(4), 453-458 (1995)

103. Chen, Y.H.: Design of robust controllers for uncertain dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic control **33**(5), 487-491 (1988)

104. Chen, W.H.: On relationship between quadratic and robust stability of uncertain systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC Affiliated Journal **9**(1), 51-58 (1999)

105. Chen, Y.H., Leitmann, G.: Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. International Journal of Control **45**(5), 1527-1542 (1987)

106. Choi, H.L., Shin, Y.S., Lim, J.T.: Control of nonlinear singularly perturbed systems using feedback linearisation. IEE Proceedings-Control Theory and Applications **152**(1), 91-94 (2005)

107. Corless, M.: Control of uncertain nonlinear systems. Journal of Dynamic

Systems Measurement and Control **115**(2B), 362-372 (1993)

108. Corless, M.: Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems. Journal of Optimization Theory and Applications **64**(3), 481-494 (1990)

109. Corless M., Leitmann G.: Deterministic Control of Uncertain System via a Constructive use of Lyapunov Stability Theory. Springer-Verlag, Berlin (1989)

110. Corless M., Leitmann G.: Exponential convergence for uncertain systems with component-wise bounded controllers: Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol.217, pp. 175-196. Springer-Verlag, London (1996)

111. De Luca A.: Dynamic Control of Robots with Joint Elasticity. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA, USA, 1988

112. Doelman R.B.: Feedback linearization control of a single link manipulator with joint elasticity. DCT rapporten. Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven (1991)

113. Erdelyi A.: On a nonlinear boundary value problem involving a small parameter. J. Austral. Math. Soc. **2**(4), 425-439 (1962)

114. Erdelyi A.: Singular perturbations. Bull. Amer. Math. Soc. **68**(4), 420-424 (1962)

115. Erdelyi, A.: Singular perturbations of boundary value problems involving ordinary differential equations. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics **11**(1), 105-116 (1963)

116. Fantoni I., Lozano R.: Nonlinear control for underactuated mechanical systems. Springer-Verlag, London (2001)

117. Fenichel, N.: Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. Journal of differential equations **31**(1), 53-98 (1979)

118. Friedrichs, K.O., Wasow, W.R.: Singular perturbations of non-linear oscillations. Duke Mathematical Journal **13**(3), 367-381 (1946)

119. Gardiner, J.D., Laub, A.J.: A generalization of the matrix-sign-function solution for algebraic Riccati equations. International Journal of Control **44**(3), 823-832 (1986)

120. Good, M.C., Sweet, L.M., Strobel, K.L.: Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control **107**(1), 53-59 (1985)

121. Gutman, S.: Uncertain dynamical systems–A Lyapunov min-max approach. IEEE Transactions on Automatic Control **24**(3), 437-443 (1979)

122. Haber, S., Levinson, N.: A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation. Proceedings of the American Mathematical Society **6**(6), 866-872 (1955)

123. Hale, J.K., Stokes, A.P.: Behavior of solutions near integral manifolds. Archive for Rational Mechanics and Analysis **6**(1), 133-170 (1960)

124. Hall, C.D.: Resonance capture in axial gyrostats. Journal of the Astronautical Sciences **43**(2), 127-138 (1995)

125. Harris, W.A.: Singular perturbations of a boundary value problem for a nonlinear system of differential equations. Duke Mathematical Journal **29**(3), 429-445 (1962)

126. Harris, W.A.: Singular perturbations of two point boundary problems. J. Math. and Mech. **11**(3), 371-382 (1962)

127. Heinen, J.A.: Sufficient conditions for stability of interval matrices. International Journal of Control **39**(6), 1323-1328 (1984)

128. Hoppensteadt F.C.: Asymptotic stability in singular perturbation problems. Journal of Differential Equations. **4**(3) 350-358 (1968)

129. Hoppensteadt F.C.: Singular perturbations on the infinite interval.

Dissertation, University of Wisconsin-Madison (1965)

130. Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.: Parametric stability. In: New Trends in Systems Theory, pp. 1-20. Birkhauser, Boston (1991)

131. Ivanenko V.I.: On the optimal criterion choice when facing uncertainty. In: Abstracts of the Ninth Workshop on Dynamics and Control, Rio de Ganeiro, 1996

132. Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P.V., Marino, R.: An extended direct scheme for robust adaptive nonlinear control. Automatica **27**(2), 247-255 (1991)

133. Keller J.B.: Rays, waves and asymptotics. Bull. Amer. Math. Soc. **84**, 727-750 (1978)

134. Kenney, C., Laub, A.J., Jonckheere, E.A.: Positive and negative solutions of dual Riccati equations by matrix sign function iteration. Systems and control letters **13**(2), 109-116 (1989)

135. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Novel approach to absolute parametric stability of the uncertain singularly perturbed systems. Communications in Applied Analysis **17**(3-4), 439-450 (2013)

136. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Takagi-Sugeno systems: The Case of Unstable Subsystems. Differential Equations and Dynamical Systems **23**(4), 423-431 (2015)

137. Kinsey, R.J., Mingori, D.L., Rand, R.H.: Nonlinear controller to reduce resonance effects during despin of a dual-spin spacecraft through precession phase lock. In: Proceedings of the Conference on Decision and Control, Tucson, (1992)

138. Kokotovic, P.V., Khalil, J.K., O'Reilly, J.: Singular perturbations methods in control. Analysis and design. Academic Press, New York (1986)

139. Kokotovic, P.V., O'Malley, R.E., Sannuti, P.: Singular perturbations and

order reduction in control theory-an overview. Automatica **12**(2), 123-132 (1976)

140. Lakshmikantham, V., Vatsala, A.S.: Stability of moving invariant sets. Advances in Nonlinear Dynamics **5**, 79-83 (1997)

141. Larin, V.B., Aliev, F.A.: J-spectral factorization of polynomial matrices. Automatica **33**(12), 2179-2182 (1997)

142. Leitmann, G.: Deterministic control of uncertain systems via a constructive use of Lyapunov stability theory. In: System Modelling and Optimization, pp. 38-55. Springer, Berlin, Heidelberg (1990)

143. Leitmann, G.: Guaranteed asymptotic stability for a class of uncertain linear dynamical systems. Journal of Optimization theory and applications **27**(1), 99-106 (1979)

144. Leonhard, W.: Control of electrical drives. Springer-Verlag, – Berlin (1996)

145. Liu, Y., Yu, H.: A survey of underactuated mechanical systems. IET Control Theory and Applications **7**(7), 921-935 (2013)

146. Lukyanova, T.A., Martynyuk, A.A.: Hierarchical Lyapunov functions for stability analysis of discrete-time systems with applications to the neural networks. Nonlinear Dynamics and System Theory **4**(1), 31-49 (2004)

147. Lukyanova, T.A., Martynyuk, A.A.: Robust Stability: Three Approaches for Discrete-Time Systems. Nonlinear Dynamics and System Theory **2**(1), 45-55 (2002)

148. Martynyuk, A.A.: Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics. Novel Approaches to Liapunov's Matrix Functions. Marcel Dekker, New York (2002)

149. Martynyuk, A.A.: Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. Marcel Dekker, New York (1998)

150. Martynyuk, A.A.: Uniform asymptotic stability of a singularly perturbed system via the Lyapunov matrix-function. Nonlinear Analysis: Theory

Methods and Applications **11**(1), 1-4 (1987)

151. Mehta, S., Chiasson, J.: Nonlinear control of a series DC motor: theory and experiment. IEEE Transactions on industrial electronics **45**(1), 134-141 (1998)
152. Nagumo, M.: Uber das Verhalten der Integrale von $\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0$ fur $\lambda \to 0$. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan **21**(8-11), 529-534 (1939)
153. Naidu, D.S., Calise, A.J.: Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: a survey. Journal of Guidance Control and Dynamics **24**(6), 1057-1078 (2001)
154. Ohta, Y., Siljak, D.D.: Parametric quadratic stabilizability of uncertain nonlinear systems. Systems and control letters **22**(6), 437-444 (1994)
155. Oleinik, O.A.: Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Amer. Math. Soc. Translations **26**(2), 95-172 (1963)
156. Oleinik, O.A.: Mathematical problems of boundary layer theory. Russian Mathematical Surveys **23**(3), 1-66 (1968)
157. Petersen, I.R., Anderson, B.D., Jonckheere, E.A.: A first principles solution to the nonsingular H_∞ control problem. International Journal of Robust and Nonlinear Control **1**(3), 171-185 (1991)
158. Petersen, I.R., Hollot, C.V.: A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica **22**(4), 397-411 (1986)
159. Prandtl, L.: Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: Proc. of III Intern. Math. Kongress, Heidelberg, 1904
160. Rotea, M.A., Khargonekar, P.P.: Stabilization of uncertain systems with norm bounded uncertainty. A control Lyapunov function approach. SIAM Journal on Control and Optimization **27**(6), 1462-1476 (1989)
161. Rothe, E.: Asymptotic solution of a boundary value problem. Iowa State College Journal of Science **13**(4), 369-372 (1939)

162. Rothe, E.: Uber asymptotische Entwicklungen bei gewissen nichtlinearen Randwertaufgaben. Compositio Math **3**, 310-327 (1936)

163. Rothe, E.: Uber asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta\Delta u + \lambda^k u = \lambda^k \psi$. Math. Annalen **109**, 267-272 (1933)

164. Rothe E. Zur Theorie des Skin-effekts. Z. Physik **83**, 184-186 (1933)

165. Qaiser, N., Iqbal, N., Hussain, A., Qaiser, N.: Exponential stabilization of the inertia wheel pendulum using dynamic surface control. Journal of Circuits Systems and Computers **16**(1), 81-92 (2007)

166. Rajesh, R., Kaimal, M.R.: T-S fuzzy model with nonlinear consequence and PDC controller for a class of nonlinear control systems. Applied Soft Computing **7**(3), 772-782 (2007)

167. Retchkiman, Z., Silva, G.: Stability analysis of singularly perturbed systems via vector Lyapunov methods. In: Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996

168. Olfati-Saber, R.: Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology (2001)

169. Saksena, V.R., O'reilly, J., Kokotovic, P.V.: Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976-1983. Automatica **20**(3), 273-293 (1984)

170. Sala, A., Arino, C.: Polynomial fuzzy models for nonlinear control: A Taylor series approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **17**(6), 1284-1295 (2009)

171. Siljak, D.D.: Connective stability of competitive equilibrium. Automatica **11**(4), 389-400 (1975)

172. Siljak D.D.: Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. North-Holland, New York (1978)

173. Siljak, D.D.: Parameter space methods for robust control design: a guided tour. IEEE Transactions on Automatic Control **34**(7), 674-688 (1989)

174. Silva, G., Dzul, F.A.: Parametric absolute stability of a class of singularly perturbed systems. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, USA, 1998

175. Song B., Hedrick J.K.: Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. Springer-Verlag, London (2011)

176. Spong, M.W.: Control of flexible joint robots: a survey. Coordinated Science Laboratory Report no. UILU-ENG-90-2203, DC-116, (1990)

177. Spong, M.W.: Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. IFAC Proceedings Volumes **29**(1), 2828-2832 (1996)

178. Spong, M.W., Corke, P., Lozano, R.: Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. Automatica **37**(11), 1845-1851 (2001)

179. Swaroop, D., Hedrick, J.K., Yip, P.P., Gerdes, J.C.: Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. IEEE transactions on automatic control **45**(10), 1893-1899 (2000)

180. Takagi, T., Sugeno, M.: Fuzzy identification of systems and its application to modeling and controll, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics **15**(1), 116-132 (1985)

181. Tanaka, K., Wang, H.O.: Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. John Wiley and Sons, New York (2001)

182. Tanaka, K., Yoshida, H., Ohtake, H., Wang, H.O.: A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. IEEE Transactions on Fuzzy systems **17**(4), 911-922 (2009)

183. Tomei, P.: A simple PD controller for robots with elastic joints. IEEE Transactions on automatic control **36**(10), 1208-1213 (1991)

184. Van der Pol, B.: LXXXVIII. On relaxation-oscillations. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **2**(11), 978-992 (1926)

185. Vishik, M.I., Lyusternik, L.A.: Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. Amer. Math. Soc. Transl. **20**, 239-364 (1962)

186. Wada, T., Ikeda, M., Ohta, Y., Siljak, D.D.: Parametric Absolute Stability of Lur'e Systems. Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers **7**, 142-149 (1994)

187. Wada, T., Ikeda, M., Ohta, Y., Siljak, D.D.: Parametric absolute stability of multivariable Lur'e systems: a Popov-type condition and application of polygon interval arithmetic. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **30**(6), 3713-3723 (1997)

188. Wan, C.J., Bernstein, D.S., Coppola, V.T.: Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. Nonlinear dynamics **10**(1), 49-62 (1996)

189. Wasow W.: On Boundary Layer Problems in the Theory of Ordinary Differential Equations. Dissertation, New York University (1941)

190. Wasow, W.: On the asymptotic solution of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter. Journal of Mathematics and Physics **23**(1-4), 173-183 (1944)

191. Wasow, W.: Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order. Communications on Pure and Applied Mathematics **9**(1), 93-113 (1956)

192. Daoyi, X.: Simple criteria for stability of interval matrices. International Journal of Control **41**(1), 289-295 (1985)

193. Yee R.K.: Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque. Master's Thesis, UCLA (1981)

194. Zhang, Y., Li, L., Cheng, B., Zhang, X.: An active mass damper using rotating actuator for structural vibration control. Advances in Mechanical Engineering **8**(7), 1-9 (2016)

195. Zhang, Y., Naidu, D.S., Cai, C., Zou, Y.: Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012. Int. J. Inf. Syst. Sci **9**(1), 1-36 (2014)

ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: Параметрическая устойчивость нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Прикл. мех. **46**(10), 106-121 (2010);

2. Хорошун, А.С.: О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **10**, 50-54 (2010);

3. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: К задаче стабилизации движения параметрической семьи нелинейных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **14**(2), 238-254 (2011);

4. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической стабилизации неточних сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **15**(3), 367-380 (2012);

5. Мартынюк, А.А., Хорошун А.С.: О методе векторних функций Ляпунова в задаче об абсолютной устойчивости неточних сингулярно возмущенных систем. В: Проблемы устойчивости и управления, с. 231-244. Физматлит, Москва (2013);

6. Мартынюк, А.А., Хорошун, А.С.: О параметрической неустойчивости сингулярно возмущенных систем. Автоматика и телемеханика **1**, 59-78 (2013);

7. Хорошун, А.С.: Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем. Доповіді НАН України **4**, 53-58 (2013);

8. Хорошун, А.С.: Об абсолютной устойчивости неточних крупномасштабных сингулярно возмущенных систем. Нелинейные колебания **16**(4),

557-573 (2013);

9. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Novel approach to absolute parametric stability of the uncertain singularly perturbed systems. Communications in Applied Analysis **17**(3-4), 439-450 (2013);

10. Хорошун, А.С.: Об использовании многокомпонентных функций Ляпунова для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных механических систем. Прикл. мех. **50**(2), 115-133 (2014);

11. Хорошун, А.С.: Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги–Сугено. Случай устойчивых подсистем. Доповіді НАН України **4**, 64-69 (2014);

12. Khoroshun, A.S., Martynyuk, A.A.: Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Takagi-Sugeno systems: The Case of Unstable Subsystems. Differential Equations and Dynamical Systems **23**(4), 423-431 (2015);

13. Хорошун, А.С.: Об устойчивости горизонтального движения самолета. Прикл. мех. **52**(1), 134-144 (2016);

14. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. Прикл. мех. **52**(5), 125-137 (2016);

15. Хорошун, А.С.: Об устойчивости и управлении угловой скоростью вращения двигателя постоянного тока последовательного возбуждения. Прикл. мех. **52**(4), 122-129 (2016);

16. Мартинюк, А.А., Хорошун, А.С.: До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 43-46 (2017);

17. Хорошун, А.С.: Про стабілізацію руху TORA. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки **4**, 53-56 (2017);

18. Хорошун, А.С.: О построении управления движением маятника вращением инерциального маховика. Доповіді НАН України **4**, 41-46 (2018);

19. Хорошун, А.С.: О построении управления поступательным движением вращением эксцентрикового маховика. Доповіді НАН України **3**, 53-58 (2018);

20. Хорошун, А.С.: О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика. Прикл. мех. **54**(5), 123-135 (2018);

21. Хорошун, А.С.: Об управлении неточными быстро-медленными системами Такаги-Сугено. Прикл. мех. **54**(4), 83-95 (2018);

22. Хорошун, А.С.: До теорії параметричної стійкості сингулярно збурених систем. В: Матеріали XIII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ (2010);

23. Хорошун, А.С.: О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. В: Материалы Международной научной конференции "Dynamical System Modeling and Stability Investigation", Киев (2015);

24. Хорошун, А.С.: Абсолютна параметрична стійкість неточних сингулярно збурених систем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків, Київ (2015);

25. Khoroshun, A.S.: The development of the theory of slow-fast dynamical systems with application in problems of stability and control of uncertain underactuated mechanical systems. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016);

26. Khoroshun, A.S.: On the global stability of large-scale uncertain slow-fast dynamical systems. In: Proceedings of the 5th International scientific conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Y. Lopatynsky, Kyiv (2016);

27. Хорошун, А.С.: О стабилизации движения неточных нелинейных сингулярно возмущенных систем. В: Материалы Международной научной конференции “Dynamical System Modeling and Stability Investigation”, Киев (2017);

28. Хорошун, А.С.: Стійкість неточних швидко-повільних систем Такагі-Сугено у випадку стійких підсистем. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції молодих математиків присвяченій 100-ій річниці академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського, Київ (2017);

29. Хорошун, А.С.: Про керування кутовою швидкістю обертання двигуна постійного струму послідовного збурення. В: Матеріали XVII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів “Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн”, Київ (2017);

30. Хорошун, А.С.: Стабілізація одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням. В: Матеріали XVIII Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів “Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн”, Київ (2018);

31. Хорошун, А.С.: Стабілізація поступальних рухів обертанням ексцентрікового маховика. В: Матеріали Міжнародної наукової конференції

“Сучасні проблеми механіки та математики” присвяченій Я. С. Підстригачу, Львів (2018).