

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА**

**Панкратьєв Сергій Анатолійович**

УДК: 539.3

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН  
ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН  
З ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**А в т о р е ф е р а т**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

**Київ – 2018**

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України

**Науковий керівник:**

доктор фізико-математичних наук, професор  
**ГРИГОРЕНКО Олександр Ярославович**,  
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
завідувач відділом обчислювальних методів

**Офіційні опоненти:**

доктор фіз.-мат. наук, професор  
**МОЛЬЧЕНКО Леонід Васильович**,  
Миколаївський національний університет  
ім. В.О. Сухомлинського,  
завідувач кафедри фізики та математики

канд. фіз.-мат. наук, доцент  
**РОЖОК Лілія Степанівна**,  
Національний транспортний університет,  
доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки

Захист відбудеться «18» грудня 2018 р. о 13:30 годині на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 26.166.01 при Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України.

Автореферат розісланий «2» листопада 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,  
д.ф.-м.н.



**Жук О.П.**

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Як конструктивні елементи різноманітних виробів, частин механізмів та споруд на сьогодні пластини широко застосовуються практично в усіх галузях: будівництві, машинобудуванні, приладобудуванні, транспорті. Постійно зростаючі вимоги до міцності, надійності, стійкості до впливу зовнішніх факторів з одночасним обмеженням ваги та вартості виготовлення технічних виробів обумовлюють безперервний пошук нових матеріалів, що передбачає, у тому числі, проведення розрахунків міцності та надійності відповідних елементів новостворюваних та існуючих конструкцій, потребує отримання інформації щодо їх напружено-деформованого стану у тих чи інших умовах експлуатації.

Вдосконалення та поява нових композитних матеріалів з суттєвою анізотропією та неоднорідністю властивостей постійно розширює коло актуальних задач, у тому числі щодо розрахунків міцності та надійності. Це, в свою чергу, ставить нові питання щодо описання поведінки пластин та оболонок, потребує створення нових моделей, методів або перевірки існуючих в нових умовах та з використанням сучасних методів досліджень.

Для розв'язання задач статички пластин існує ряд розроблених методів, які, в залежності від форми пластин, характеру навантаження та умов закріплення, дозволяють отримати наближені, а в деяких випадках і точні, розв'язки. Це, в першу чергу, стосується задач для пластин з такою відносно простою формою як круг чи прямокутник та найчастіше передбачає використання класичної моделі теорії пластин або припущення, що матеріал є ізотропним. У той же час зростаючі вимоги до точності розрахунків зумовлюють зростання популярності уточнених моделей, що враховують вплив поперечного зсуву. Задачі з пластинами більш складної форми (трапеція, паралелограм) вимагають використання спеціальних прийомів, застосування для описання вихідної області неортогональних систем координат, та в загальному випадку призводять до значних труднощів математичного та обчислювального характеру. Кількість таких робіт, що розглядають ортотропні пластини складної форми з використанням уточнених моделей є дуже обмеженою, що робить проведення досліджень у цьому напрямку актуальною задачею.

Представлена дисертаційна робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану ортотропних пластин складної форми, які розглядаються з використанням некласичної моделі типу Тимошенка, що базується на гіпотезі прямої лінії. Форма чотирикутних пластин приймається у вигляді довільного опуклого чотирикутника, що є актуальним в сучасних умовах постійного ускладнення новостворюваних конструкцій, має теоретичний інтерес і практичне значення.

В роботі використовуються сучасні ефективні чисельні методи розв'язання крайових задач, а запропонований на їх основі підхід для розв'язання практичних задач механіки може бути використаний у подальших дослідженнях.

**Мета і задачі дослідження.** Основною метою дослідження є розробка підходу, що дозволяє розв'язувати задачі про напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника із застосуванням уточненої моделі. Для досягнення цієї мети необхідно виконати ряд завдань, а саме:

- на основі уточненої моделі пластин типу Тимошенка отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь, що описує напружено-деформований стан ортотропних пластин складної форми;
- використовуючи відповідне відображення вихідної чотирикутної області на квадрат, побудувати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь, що описують НДС ортотропних пластин для випадку довільного опуклого чотирикутника;
- розробити розрахункову схему, що дозволить ефективно проводити чисельний аналіз НДС чотирикутних пластин складної форми;
- провести тестування розробленого підходу з використанням інших наближених та аналітичних методів;
- провести аналіз меж застосування підходу, наявності обмежень на значення параметрів задач та розрахункової схеми;
- використовуючи розроблені інструменти дослідження, проаналізувати вплив геометричних, механічних параметрів на НДС чотирикутних пластин при різних умовах закріплення і навантаження.

*Об'єктом дослідження* є згин ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника.

*Предметом дослідження* є напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника.

*Методи дослідження.* Напружено-деформований стан пластин досліджується за допомогою рівнянь рівноваги відносно статично еквівалентних напруженням моментів та зусиль. Для запису системи рівнянь використано уточнену модель типу Тимошенка, що спирається на гіпотезу прямолінійного елемента. Описання складної вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника відбувається за рахунок її відображення у квадрат в іншій системі координат.

Розрахункова схема чисельного аналізу НДС використовує метод сплайн-колокації для зниження розмірності вихідної двовимірної крайової задачі та метод дискретної ортогоналізації для її подальшого розв'язання.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у тому, що:

- з вихідних рівнянь рівноваги уточненої теорії пластин, що ґрунтується на гіпотезі прямолінійного елемента, виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника;
- розроблено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статички ортотропних чотирикутних пластин із різними варіантами закріплення сторін під дією поверхневого навантаження, який використовує сплайн-апроксимацію розв'язків в одному з координатних напрямків та метод дискретної ортогоналізації для розв'язання отриманої в такий спосіб системи диференціальних рівнянь високого порядку; на основі відповідного алгоритму створено програмний комплекс для проведення чисельних розрахунків на ПК;
- проведено розв'язання ряду задач відповідного класу, де досліджено вплив геометричних, механічних параметрів на розподіл полів напружень та

переміщень за різних умов закріплення пластин під дією рівномірного та нерівномірного навантаження; показано особливості впливу взаємної орієнтації осей ортотропії, країв пластини та напрямку зміни навантаження на параметри НДС.

**Теоретичне і практичне значення отриманих результатів.** Теоретична цінність дисертаційної роботи полягає у застосуванні уточненої моделі пластин типу Тимошенка до аналізу НДС ортотропних пластин складної форми, що у поєднанні з відображенням вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника на квадратну область дозволяє проводити аналіз НДС пластин зазначеного класу. Застосування методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації дозволяє розробити новий підхід для дослідження ізотропних та ортотропних пластин складної форми та провести аналіз розподілу полів переміщень та напружень в широких межах зміни механічних та силових параметрів.

Практична цінність розробленої розрахункової схеми полягає у можливості її використання для розв'язання широкого кола задач аналізу НДС пластин складної форми, задач оптимізації, що передбачають змінну форму, орієнтацію пластини або осей пружної симетрії матеріалу. Отримані числові значення переміщень і напружень можуть бути використані для тестування та порівнянь результатів інших досліджень. Розроблений програмний комплекс можна застосовувати у науково-дослідних організаціях як готовий інструмент для проведення розрахунків міцності та надійності елементів конструкцій.

**Особистий внесок здобувача.** В роботах [1, 5, 7], опублікованих у співавторстві з науковим керівником та С.М. Яремченком, дисертанту належить виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів; науковому керівнику належить постановка задач і обговорення результатів, С.М. Яремченко брав участь в обговоренні результатів. В роботах [4, 10] дисертанту належить виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів; науковому керівнику та С.М. Яремченку належить постановка задач і обговорення результатів.

Роботи [2, 3] опубліковані у співавторстві з науковим керівником; йому належить постановка задач і обговорення результатів, дисертанту — виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів. В роботах [6, 9] О.Я. Григоренку належить постановка задач і обговорення результатів, Пінчук Т.І. — обговорення результатів; виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів виконано дисертантом.

В роботах [8, 11] дисертантом самостійно досліджено особливості застосування запропонованого чисельно-аналітичного підходу для розв'язання задач статички для пластин у формі дельтоїдів та виконано тестування підходу на ряді задач, щодо яких відомі наближені розв'язки, отримані іншими методами.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на

- Міжнародній науково-практичній конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, Україна, 22–24 вересня 2016 р.;
- 5th International conference "Nonlinear dynamics — 2016", Kharkov, Ukraine, 27–30 September, 2016;
- XVII Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», Дніпродзержинськ, Україна, 17–20 квітня 2017 р.;
- XVIII Міжнародній конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI-2017), Київ, Україна, 24–26 травня 2017 р.;
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, Україна, 22–25 травня 2018 р.

У повному обсязі дисертація доповідалася і була підтримана на семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., професора Григоренка О.Я, семінарі секції за напрямком «Механіка оболонкових систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України Я.М. Григоренка.

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць, з яких 5 — у виданнях за фахом, що входять до списку видань, затвердженого МОН України, у тому числі 2 — у зарубіжних виданнях; 6 — матеріалів та тез доповідей міжнародних конференцій.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами темами.** Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано у відповідності з науковими темами: 1.3.1.382-12 «Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури» (№ ДР 0112U000249, 2012–2016); 1.3.1.401-16 «Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування» (№ ДР 0115U005709, 2016–2020); 1.3.1.410-17 «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем за допомогою нових підходів на основі різних моделей» (№ ДР 0117U000700, 2017–2021).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел із 147 найменувань та одного додатку. Обсяг дисертаційної роботи — 143 сторінки друкованого тексту. У роботі міститься 36 рисунків.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ**

У **вступі** обґрунтовано актуальність питань, яким присвячена дисертаційна робота, зазначено її мету, об'єкт, предмет та завдання дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Наведено дані про особистий внесок здобувача, апробацію роботи та перелік публікацій автора.

У першому розділі проведено огляд наукових праць, присвячених розв'язанню задач статички пластин з ортотропних матеріалів. Особливу увагу приділено порівнянню відомих підходів до розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин різної геометрії, характеристикам запропонованих аналітичних та чисельних методів аналізу.

Важливу роль у розробці загальної теорії пластин та оболонок зіграли праці С.О. Амбарцумяна, В.З. Власова, О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, О.Л. Гольденвейзера, М.О. Кільчевського, Л. Лібреску, А.І. Лур'є, А. Лява, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, Е. Рейснера, С.П. Тимошенка, Ю.М. Шевченка та ін. Класична модель теорії пластин та оболонок на основі гіпотез Кірхгофа-Лява відкрила можливість для розв'язання багатьох практичних задач з достатньо високою точністю. Між тим, у деяких випадках зумовлена зазначеними гіпотезами похибка стає суттєвою, що вимагає застосування моделей з менш жорсткими припущеннями.

Спроби врахувати ті чи інші фактори призвели до появи великої кількості підходів до побудови уточнених моделей, що спираються на ідею врахування поперечного зсуву. Дослідження оболонок по уточненій теорії проведено в роботах В.А. Баженова, О.І. Беспалової, В.Д. Будака, А.Т. Василенка, Г.Д. Гавриленка, Е.І. Григолюка, О.Я. Григоренка, Н.А. Гук, В.І. Гуляєва, Я.О. Жука, В.О. Заруцького, В.Г. Карнаухова, В.І. Козлова, В.Д. Кубенка, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, П.З. Лугового, В.Ф. Мейша, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Л.В. Мольченка, Н.І. Ободан, Б.Л. Пелеха, В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова, І.К. Сенченкова, Н.В. Сметанкіної, В.І. Сторожева, І.Ю. Хоми, Л.П. Хорошуна, І.С. Чернишенка, К.І. Шнеренка, М.О. Шульги, О.М. Шупікова та ін. Розгляд анізотропних пластин та питань дослідження композитних матеріалів, поєднань теорії пружності та руйнування, практичних методів чисельного аналізу можна знайти у роботах С. Нгу.

Незважаючи на значні успіхи, що досягнуто в області розрахунку пластин та оболонок, більшість досліджень залишається присвяченою класичним задачам, де серединна поверхня описується простими аналітичними виразами, а її контури співпадають з координатними лініями в обраній системі координат. Хоча подібні пластини та оболонки широко застосовуються в техніці, вони часто не можуть бути прийняті за основу схеми розрахунку багатьох елементів сучасних конструкцій. Розробка методів розрахунку пластин і оболонок, форма серединної поверхні і конфігурація межі яких не може бути легко описана аналітичними виразами, вимагає приділення уваги також питанням так званої параметризації поверхонь та досліджуваних областей. Ці питання розглядалися у роботах таких вчених як О.Я. Григоренко, М.С. Корнішин, М.М. Крюков, В.М. Паймушин та ін.

В цілому, аналіз існуючих робіт показав, що більшість досліджень в області статички пластин складної геометрії присвячена розгляду класичної моделі для відносно простих випадків навантаження. Дослідження в уточненій постановці найчастіше проводилися для випадку ізотропних матеріалів сталої товщини та переважно з простою формою пластин, а для розв'язання задач використовувалися наближені методи, що передбачають дискретизацію вихідної області. У зв'язку з цим виникає потреба у подальшому розвитку існуючих підходів статичного аналізу, що дозволило б розглядати анізотропні матеріали з використанням уточнених

моделей і проводити розрахунки для пластин із зміною механічних та геометричних параметрів у широких межах.

У **другому розділі** наведено основні співвідношення уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямої лінії. На основі рівнянь рівноваги елемента серединної поверхні ортотропної прямокутної пластини складено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних відносно функцій прогину та двох кутів.

Наведено схему відображення вихідної області у декартовій системі координат на область у формі квадрата в іншій системі координат, що дозволяє розглядати пластини складної геометрії за рахунок зміни коефіцієнтів розв'язувальної системи рівнянь. Виведено розв'язувальну систему рівнянь для ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника та відповідні вирази для граничних умов двовимірної крайової задачі.

Розглядається задача про згин нетонкої ортотропної пластини товщиною  $h$ . Нехай в декартовій системі координат  $x, y$  пластина, серединна поверхня якої має форму прямокутника, знаходиться під дією поверхневого навантаження  $q = q(x, y)$ . Використовуючи замість напружень статично еквівалентні моменти та перерізуючі зусилля  $i$ , таким чином, здійснюючи перехід до двовимірної постановки задачі, рівняння рівноваги елемента серединної поверхні можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

де  $Q_x, Q_y$  — перерізуючі зусилля;  $M_x, M_y$  — згинаючі моменти;  $M_{xy}, M_{yx}$  — скручуючі моменти;  $q = q(x, y)$  — поверхневе навантаження. У випадку ортотропної пластини, вісі ортотропії якої співпадають з координатними лініями, співвідношення пружності записуються через деформації згину координатної поверхні  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  як

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, \quad M_y = D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \\ M_{xy} &= M_{yx} = 2D_{66}\kappa_{xy}, \quad Q_x = K_1\gamma_x, \quad Q_y = K_2\gamma_y \end{aligned} \quad (2)$$

У свою чергу, деформації згину координатної поверхні можна визначити через кути повороту нормалі без врахування поперечного зсуву  $\theta_x, \theta_y$ , кути повороту нормалі спричинені поперечним зсувом  $\gamma_1, \gamma_2$  та повні кути повороту прямолінійного елемента  $\psi_x, \psi_y$  як

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \\ \gamma_x &= \psi_x - \theta_x, \quad \gamma_y = \psi_y - \theta_y, \\ -\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

Приймаючи за  $E_i, G_{ij}, \nu_i$  відповідно модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона, коефіцієнти жорсткості  $K_i, D_{ij}$  визначаються як



$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_{12} = \nu_y D_{11}, \\
D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_{66} = G_{12} h^3 / 12, \\
K_1 &= \frac{5}{6} h G_{13}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{23}
\end{aligned} \tag{4}$$

Підставляючи вирази для деформацій (3) та коефіцієнтів жорсткості (4) у (2), а співвідношення (2) у систему рівнянь (1), отримуємо розв'язувальну систему рівнянь відносно прогину  $w$  та двох кутів  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ , що має місце для прямокутної пластини сталої товщини  $h = \text{const}$  у вихідній декартовій системі координат  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}
K_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -q \\
D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - K_1 \psi_x - K_1 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\
D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - K_2 \psi_y - K_2 \frac{\partial w}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Граничні умови на сторонах пластини  $x = \text{const}$  у випадку жорсткого закріплення мають вигляд

$$w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \tag{6}$$

для шарнірного закріплення —

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \quad \psi_y = 0, \tag{7}$$

а для вільного краю —

$$\begin{aligned}
Q_x = K_1 \gamma_x = K_1 (\psi_x - \theta_x) = K_1 \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \rightarrow \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
M_x = D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y = D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) &= 0 \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0, \\
M_{xy} = 2D_{66} \kappa_{xy} = D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) &= 0 \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

На сторонах пластини  $y = \text{const}$  граничні умови записуються аналогічно.

Система розв'язувальних рівнянь (5) разом з обраними граничними умовами на кожній стороні пластини у вигляді (6), (7) або (8) складає двовимірну крайову задачу відносно функцій прогину  $w(x, y)$  та кутів  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$ .

Наведені співвідношення та вирази граничних умов (6), (7), (8) справедливі для декартової системи координат та прямокутної форми пластин, сторони якої можна задати у вигляді  $x = \text{const}$  (або  $y = \text{const}$ ). З певними змінами аналогічним чином можна описати і прості об'єкти обертання, наприклад, диски, використовуючи полярну систему координат. Тобто, в загальному випадку, найчастіше розглядається розв'язання задач, де, як правило, досліджувана область має відносно просту форму, яка може бути задана у вигляді інтервалів значень змінних.

Описати довільну опуклу чотирикутну область (Рис. 1), що задана вершинами в точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  та  $(x_4, y_4)$ , можна за допомогою перетворення вихідних декартових координат  $x, y$  на площині у нові координати  $\xi, \eta$ , що задається виразом

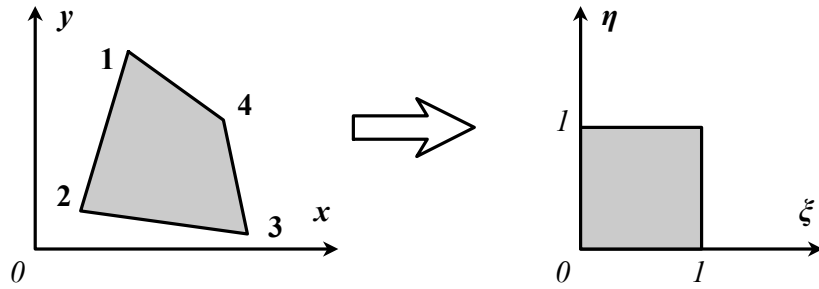


Рис. 1 — Перехід від вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника, що заданий координатами чотирьох точок, до одиничної області у новій системі координат.

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\xi} \quad (9)$$

де вектор  $\bar{x}$  має компоненти  $\{x, y\}$ , вектор  $\bar{\xi}$  — компоненти  $\{1, \xi, \eta, \xi\eta\}$ , а матриця переходу  $T$  розміром  $2 \times 4$  визначається координатами точок вершин чотирикутника вихідної області.

Щоб записати розв'язувальну систему рівнянь (5) у нових координатах  $\xi\eta$ , будемо використовувати вектор  $\bar{f}$  з 18 компонентами  $\left\{ \psi_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}, \psi_y, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$  та відповідну матрицю коефіцієнтів  $S$  розміром  $3 \times 18$ . Приймаючи такі позначення, рівняння (5) можна записати у матричному вигляді

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q} \quad (10)$$

де вектор правих частин  $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}$ .

Система рівнянь (10) у новій системі координат приймає вигляд

$$S^* \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^* \quad (11)$$

де  $\bar{f}^*$ ,  $\bar{q}^*$  — аналоги векторів  $\bar{f}$ ,  $\bar{q}$  у новій системі координат,  $S^*$  — матриця відповідних коефіцієнтів. Вираз (11) являє собою розв'язувальну систему рівнянь (5) у координатах  $\xi\eta$  та містить у собі інформацію, щодо вихідної форми досліджуваної чотирикутної пластини.

В загальному випадку граничні умови (6), (7) та (8) для пластини, сторони якої не є паралельними до ліній координатної сітки, повинні бути записані відносно відповідних прямих, що для довільного характеру можливої форми пластин становить певні труднощі. До того ж, вирази для граничних умов, що мають у складі похідні (шарнір, вільний край), мають бути змінені з урахуванням переходу до нових координат.

Для випадку жорсткого закріплення та довільно зорієнтованого краю отримуємо граничні умови у вигляді, аналогічному до (6):

$$w = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0 \quad (12)$$

Шарнірне закріплення (7) для краю, що паралельний до осі  $Oy$  вихідної системи координат, тобто після переходу до  $\xi\eta$  — на сторонах  $\xi = const$ , набуває вигляду

$$w = 0, \quad A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (13)$$

а вільний край (8), що паралельний до осі  $Oy$  вихідної системи координат, може бути заданий у  $\xi\eta$  на сторонах  $\xi = const$  як

$$\begin{aligned} \psi_x + A \frac{\partial w}{\partial \xi} + B \frac{\partial w}{\partial \eta} &= 0, \\ A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + \nu_y \left( C \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right) &= 0, \\ C \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + A \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Вирази  $A, B, C, D$  приймаються у значенні

$$\begin{aligned} A &= (t_{24}\xi + t_{23})/\chi, & B &= -(t_{24}\eta + t_{22})/\chi, \\ C &= -(t_{14}\xi + t_{13})/\chi, & D &= (t_{14}\eta + t_{12})/\chi \end{aligned} \quad (15)$$

з позначенням  $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\eta + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$ ;  $t_{ij}$  — елементи матриці переходу  $T$  (9).

Вихідна крайова задача для системи рівнянь (5) відносно функцій прогину  $w(x,y)$  та кутів  $\psi_x(x,y)$ ,  $\psi_y(x,y)$  з обраними умовами закріплення країв чотирикутної пластини у формі (6), (7) та (8) у новій системі координат  $\xi\eta$  приймає вигляд (11) відносно функцій прогину  $w(\xi,\eta)$  та кутів  $\psi_x(\xi,\eta)$ ,  $\psi_y(\xi,\eta)$ . Граничні умови задаються (12), (13) та (14) на сторонах  $\xi = const$  та  $\eta = const$  одиничної області у формі квадрата (Рис. 1).

У **третьому розділі** викладено розроблену методику розв'язання двовимірних крайових задач про напружено-деформований стан чотирикутних пластин складної форми. Запропонований підхід базується на зниженні розмірності двовимірної крайової задачі застосуванням методу сплайн-колокації та розв'язанні отриманої у такий спосіб двоточкової крайової задачі з системою звичайних диференціальних рівнянь високого порядку методом дискретної ортогоналізації. На основі викладеної схеми створено алгоритм та відповідне програмне забезпечення для ПК, що дозволяє проводити розрахунки для практичних задач статички при різних значеннях механічних та геометричних параметрів.

Для сплайн-апроксимації, що проводиться вздовж координати  $\eta$ , розв'язки записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta), \\ \psi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(\xi) \varphi_{xi}(\eta), \\ \psi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(\xi) \varphi_{yi}(\eta), \end{aligned} \quad (16)$$

де  $w_i(\xi)$ ,  $\psi_{xi}(\xi)$ ,  $\psi_{yi}(\xi)$  — шукані функції,  $\varphi_{wi}(\eta)$ ,  $\varphi_{xi}(\eta)$ ,  $\varphi_{yi}(\eta)$  — лінійні комбінації кубічних  $B$ -сплайнів, що наперед задовольняють обрані граничні умови на сторонах пластини  $\eta = const$  та побудовані на рівномірній розширеній сітці вузлів  $\Delta$ :  $\eta_{-3}, \dots, \eta_0, \dots, \eta_N, \dots, \eta_{N+3}$ .

При жорсткому закріпленні країв пластини  $\eta = const$  лінійні комбінації  $B_3$ -сплайнів будуються за схемою:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -4B_3^{-1} + B_3^0, & \varphi_1 &= B_3^{-1} - \frac{1}{2}B_3^0 + B_3^{+1}, & \varphi_i &= B_3^i, \\ \varphi_{N-1} &= B_3^{N+1} - \frac{1}{2}B_3^N + B_3^{N-1}, & \varphi_N &= -4B_3^{N+1} + B_3^N, \end{aligned} \quad (17)$$

що дозволяє задовільнити у точках  $\eta = \eta_0$  та  $\eta = \eta_N$  умови  $\varphi(\eta) = 0$ ,  $\varphi'(\eta) \neq 0$ . Закріплення типу шарнір відповідає схемі

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B_3^0, & \varphi_1 &= B_3^{-1} - \frac{1}{2}B_3^0 + B_3^{+1}, & \varphi_i &= B_3^i, \\ \varphi_{N-1} &= B_3^{N+1} - \frac{1}{2}B_3^N + B_3^{N-1}, & \varphi_N &= B_3^N, \end{aligned} \quad (18)$$

що означає у точках  $\eta = \eta_0$  та  $\eta = \eta_N$  виконання умови  $\varphi(\eta) \neq 0$ ,  $\varphi'(\eta) = 0$ . Нумерацію  $B_3$ -сплайнів наведено за номером центрального вузла. У випадку, коли на протилежних краях пластини задані різні граничні умови, використовується відповідна комбінація для функцій  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{N-1}, \varphi_N$  з набору (17) або (18).

Для зменшення похибки апроксимації точки колокації  $\alpha_k, k = (\overline{0, N}), N = 2n + 1$  розташовуємо за схемою  $\alpha_{2i} = \eta_{2i} + t_1 h$ ,  $\alpha_{2i+1} = \eta_{2i} + t_2 h$ ,  $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ , де  $h = \eta_{2i+1} - \eta_{2i}$  — крок сітки вузлів сплайнів,  $i = 0, \dots, n$ .

Вимагаючи, щоб співвідношення (16) задовольняли систему диференціальних рівнянь (11) в усіх точках колокації, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь  $6(N+1)$  порядку відносно невідомих  $w_i(\xi), \psi_{xi}(\xi), \psi_{yi}(\xi)$ , яку можна подати у нормальному вигляді Коші

$$\bar{F}' = Y(\xi) \cdot \bar{F} + \bar{Z}(\xi) \quad (19)$$

Під  $\bar{F}$  розуміємо  $\{\bar{\psi}_x, \bar{\psi}'_x, \bar{\psi}_y, \bar{\psi}'_y, \bar{w}, \bar{w}'\}^T$ , де кожен з векторів  $(\bar{\psi}_x, \bar{\psi}'_x, \dots)$  має, у свою чергу,  $N+1$  елементів, відповідно до кількості точок колокації,  $Y(\xi)$  — матриця коефіцієнтів,  $\bar{Z}(\xi)$  — вектор-стовпчик правої частини з  $6(N+1)$  компонентів.

Підставивши (16) в обрані граничні умови, будемо мати вирази для граничних умов для системи (19), які в узагальненому вигляді можна записати як

$$\begin{aligned} B_1 \bar{F} &= \bar{b}_1, & \xi &= \xi_1 = 0, \\ B_2 \bar{F} &= \bar{b}_2, & \xi &= \xi_2 = 1, \end{aligned} \quad (20)$$

де  $B_1, B_2$  та  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  — відповідно прямокутні матриці порядку  $3(N+1) \times 6(N+1)$  та задані вектори. Розв'язок вихідної задачі, таким чином, зводиться до розв'язку крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (19) з граничними умовами (20).

Маючи розв'язки сформульованої у такий спосіб двоточної крайової задачі та підставляючи їх у вирази для шуканих функцій (16), за допомогою властивостей сплайн-функцій можна розрахувати значення шуканих функцій, моментів та перерізуючих зусиль, що

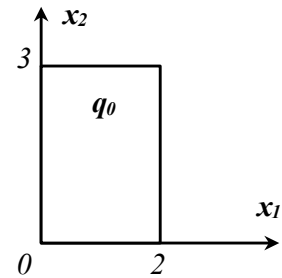


Рис. 2 — Пластина під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження  $q = q_0$ .

визначають напружено-деформований стан всієї вихідної області.

**Четвертий розділ** присвячено оцінкам достовірності результатів розв'язання задач за допомогою запропонованого підходу та дослідженню НДС ізотропних, ортотропних пластин різної геометрії при різних варіантах закріплення сторін, орієнтації осей ортотропії в умовах рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження. Зазначено, що достовірність результатів досягається коректністю постановки задачі, застосуванням теоретично обґрунтованої механіко-математичної моделі, проведенням чисельних розрахунків з достатньою та контрольованою індуктивними прийомами точністю, а також тестуванням підходу на задачах, щодо яких відомі точні або наближені розв'язки.

Тестування запропонованого підходу з використанням перетворення координат проведено за допомогою розв'язання задачі про НДС прямокутної пластини (рис. 2) з ізотропного матеріалу розмірами  $2 \times 3$ ,  $h = 0,1$  в умовах жорсткого та шарнірного закріплення сторін. Лінійні розміри тут і надалі подано у відносних одиницях. Поверхнєве навантаження  $q = q_0$  є сталим та рівномірно розподіленим. Прямокутна форма пластини дозволяє отримати розв'язок як безпосередньо в координатах  $x_1, x_2$ , так і з використанням перетворення координат, що зводить вихідну область до квадрата.

Оскільки усі параметри розрахунків прийнято однаковими, включаючи кількість точок інтегрування, параметри сплайн-функцій, розташування та кількість точок колокації та ін., розв'язки задачі з перетворенням вихідної області та без нього повинні мати однакові значення прогину, що буде підтвердженням коректності запропонованої методики. За результатами розрахунків отримані значення прогину  $w' = wE/q_0$ , що для обох розглянутих випадків закріплення сторін пластини при використанні чисел подвійної точності співпадають до 11 знаку.

Для перевірки запропонованого підходу за допомогою відомих аналітичних розв'язків деяких задач розглянемо прямокутну шарнірно оперту ізотропну ( $\nu = 0,3$ ) пластину зі сторонами  $a = 2$  та  $b = 3$  товщиною  $a/40$  під дією поверхневого навантаження  $q = q(x,y)$ , що зосереджене в окремих частинах поверхні (рис. 3). Для полегшення порівняння значення прогину рахуємо для семи точок та використовуємо нормовану величину  $w' = wE/q_0$ .

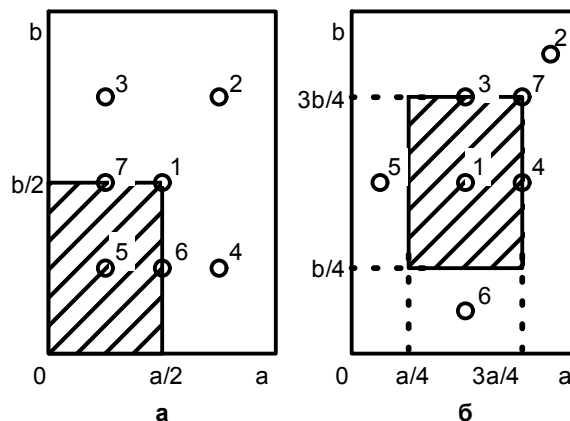


Рис. 3 — Варіанти розподілу навантаження  $q = q_0$  (заштрихована частина) по поверхні пластини та розташування контрольних точок обчислення прогину  $w$ .

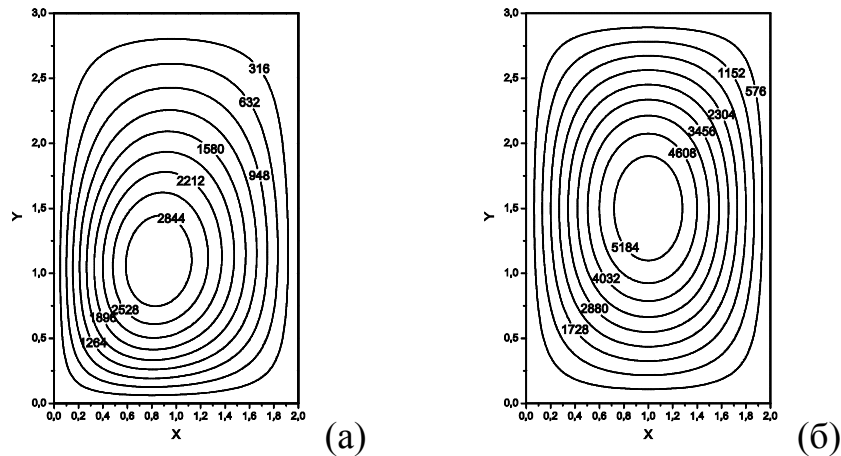


Рис. 4 — Вигляд поверхні функції прогину  $w'(x,y)$ , отриманої на основі аналітичного розв'язку, для обох варіантів навантаження відповідно до рис. 3.

У випадку шарнірного обпирання є можливість розв'язання задачі за допомогою запису аналітичних виразів для функцій прогину  $w$ , кутів  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  та навантаження  $q$  через їх розклади у подвійні ряди Фур'є. Тому для порівняння результатів розв'язку задачі за допомогою запропонованого підходу було використано наближений розв'язок із врахуванням перших 600 членів ряду, який вважаємо за точний.

Загальний вид поверхонь функції прогину, що відповідають розглянутим випадкам навантаження, зображено на рис. 4. В усіх контрольних точках спостерігається практичне співпадіння результатів, отриманих аналітично та чисельно: різниця між значеннями становить менше одного відсотка, що свідчить про достатньо високу точність чисельного розв'язку.

Запропонований підхід було застосовано для розв'язання ряду задач про пластини у формі трапецій та паралелограмів з жорстким закріпленням під дією сталого рівномірно розподіленого навантаження  $q = q_0$ , щодо яких відомі розв'язки за допомогою методу скінчених елементів, отримані іншими авторами. Порівняння числових значень максимального прогину для усіх варіантів задач показало

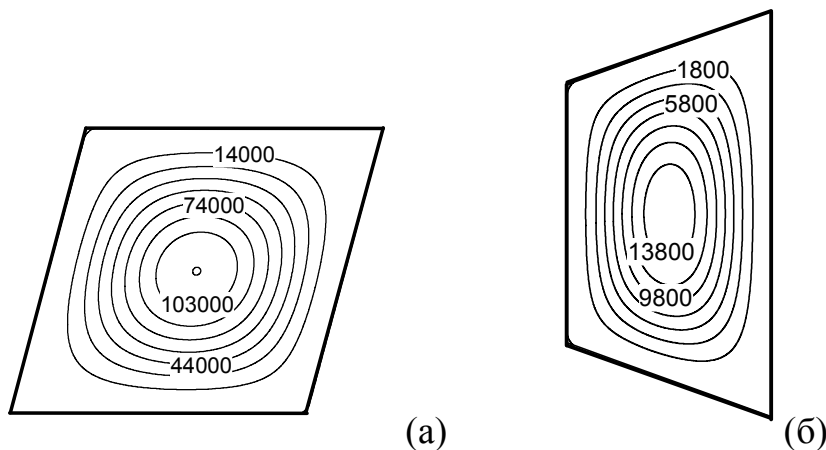


Рис. 5 — Вигляд розрахованих поверхонь функції прогину ізотропних пластин під дією рівномірного поверхневого навантаження із жорстким закріпленням сторін.

відносну різницю в межах одиниць відсотків, що дозволяє говорити про узгодженість результатів розв'язання задач за допомогою запропонованого підходу з даними інших наближених методів. Загальний вигляд поверхонь функції прогину для деяких з розглянутих пластин показаний на рис. 5.

З метою визначення значень параметрів методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації, а саме необхідної кількості пар точок колокації та точок інтегрування, що забезпечують отримання стійкого розв'язку, розглянуто задачу про НДС чотирикутної пластини з ортотропного матеріалу (рис. 6). Товщину пластини з вуглепластику (CFRP) прийнято  $h = 0,1$ ; поверхневе навантаження  $q = q_0$  розподілене рівномірно; пружні сталі мають значення  $E_1 = 2,11 E_0$ ,  $E_2 = 0,053 E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $G_{12} = G_{31} = 0,026 E_0$ ,  $G_{23} = 0,013 E_0$ . Розрахунки максимального значення прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q_0$  здійснено для різної кількості точок колокації та точок інтегрування  $N_x$ . Беручи до уваги, що форма обраної

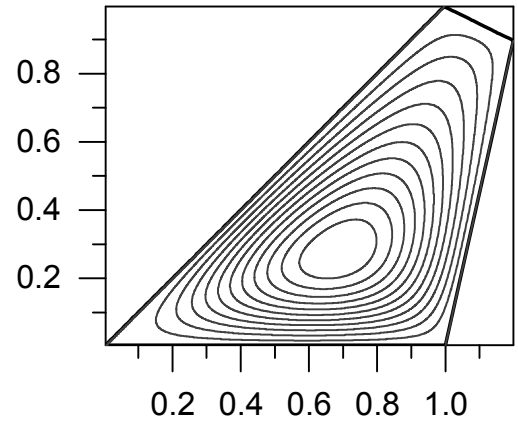


Рис. 6 — Вигляд поверхні функції прогину жорстко закріпленої пластини з вуглепластику під дією рівномірного навантаження

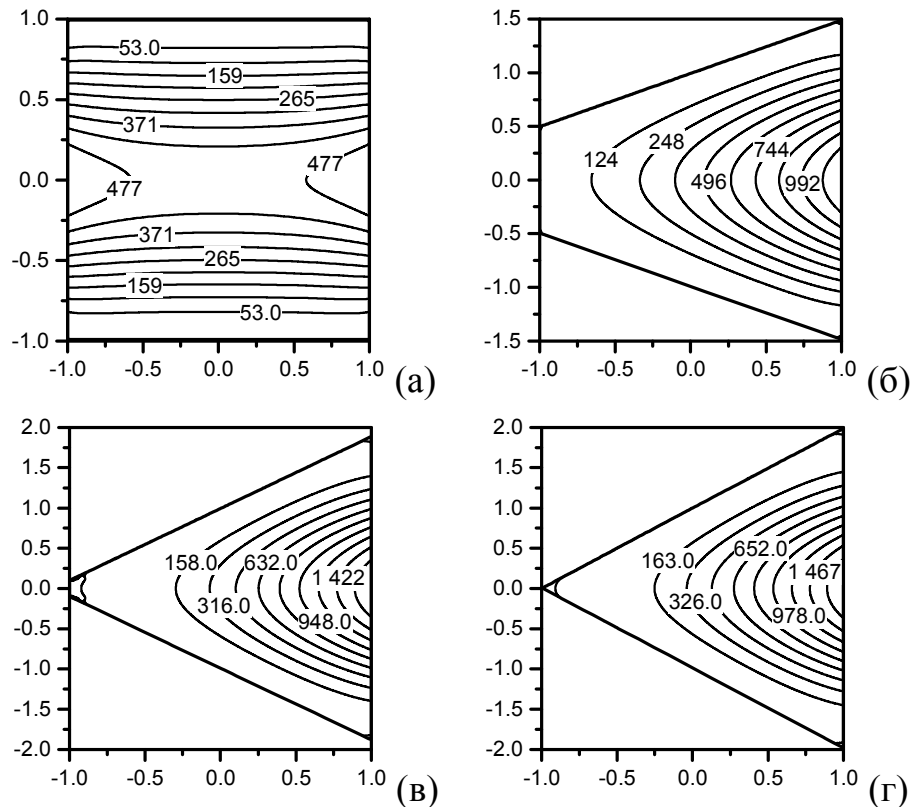


Рис. 7 — Загальний вигляд поверхонь функції прогину для чотирикутних пластин різної форми, з однаковою площею поверхні

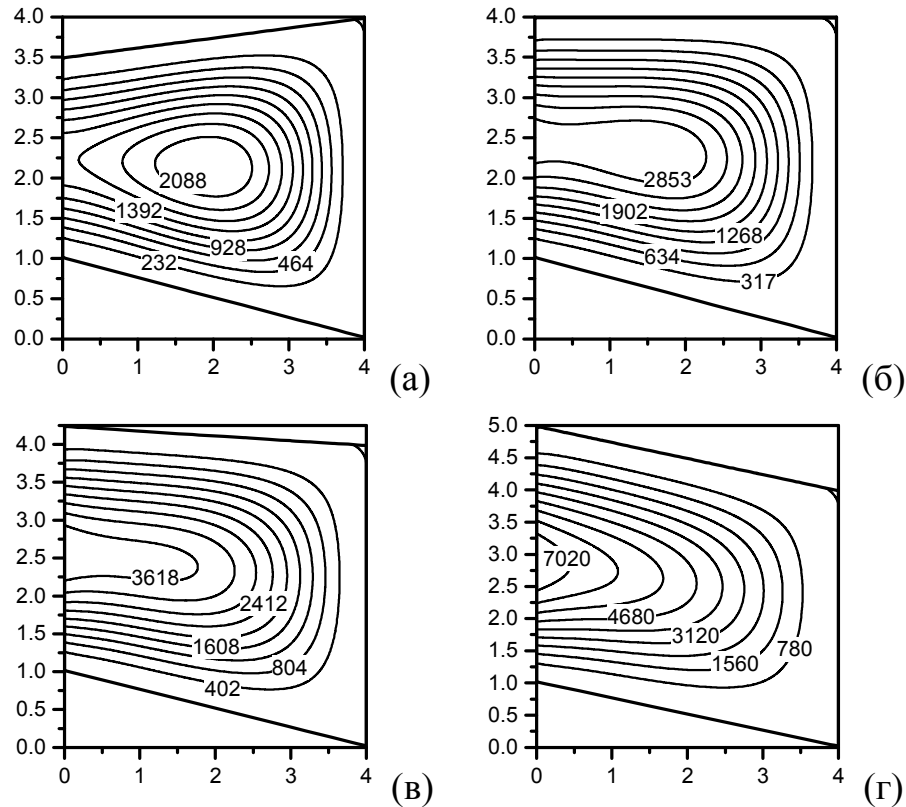


Рис. 8 — Загальний вигляд та ізолінії поверхонь функції прогину для пластин із різною довжиною вільного краю

пластини є чотирикутником загального вигляду, для подальших розрахунків обрані такі значення параметрів методів, що забезпечують не менше п'яти достовірних знаків для функції прогину.

Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ізотропних матеріалів виконано на прикладі пластин товщиною  $h = 0,1$ , форма яких змінюється від квадрата (рис. 7а) зі стороною  $a = 2$  через рівнобічні трапеції (рис. 7б,в) до рівнобічного трикутника (рис. 7г) таким чином, що площа відповідної фігури залишається сталою. Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; нормальне поверхневе навантаження  $q = q_0$  розподілене рівномірно; прогин подаємо у вигляді нормованої величини  $wE/q$ . Бокові сторони трапецій закріплені жорстко, а основи вільні. Достовірність результатів, отриманих використанням сплайн-колокації, перевірено порівнянням з даними розрахунків за методом скінчених елементів.

Отримані результати представлені на рис. 7 у вигляді ізоліній поверхонь функції прогину  $wE/q$ . Наведені лише поверхні, розраховані за допомогою підходу з використанням сплайн-колокації, зважаючи на практичне співпадіння перших трьох знаків для значень прогину та ідентичний характер розподілу полів деформації, що отримані двома різними способами.

Для інших чотирьох варіантів пластин (рис. 8) умови закріплення передбачають вільний край лише на стороні, що знаходиться на вісі  $Oy$ , а самі пластини відрізняються розташуванням однієї вершини чотирикутника. Це дозволяє прослідкувати зміни у поверхні функції прогину при переході від трапеції (рис. 8а) до



паралелограму (рис. 8г). Інші параметри пластин, умови навантаження і розрахунків повністю повторюють описані вище для пластин рис. 7.

Як і у випадку трапецій рис. 7, маємо збільшення значень максимального прогину із збільшенням довжини вільного краю пластини. Водночас розташування зони максимальної деформації змінюється з майже центру пластини (рис. 8а) на край (рис. 8г) з утворенням «сідловини» у проміжних варіантах (рис. 8б,в). Значення максимального прогину та координати відповідних точок, де він досягається, для вказаних варіантів розрахунку за допомогою сплайн-колокації та за методом скінчених елементів відрізняються лише у третьому-четвертому знаку, що свідчить про високий ступінь узгодженості отриманих результатів.

Для досліджень НДС ортотропних матеріалів розглянуто задачу з пластиною у формі трапеції (рис. 9) з жорстким закріплення бокових сторін та вільними основами. Вигляд поверхонь функції прогину та їх переріз при  $y = 0$  для матеріалу CFRP з відношенням  $E_1/E_2 \approx 40$ , представлені на рис. 10а;  $E_2/E_1 \approx 40$ , тобто після розвороту матеріалу на  $90^\circ$  із відповідними змінами для  $G_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  — на рис. 10в. Рис. 10б відповідає псевдо ізотропному матеріалу, з параметрами, що є середніми для розглянутого набору ( $E = (E_1 + E_2)/2$  і т.і.). З аналізу форми поверхонь функції прогину, її перерізів та значень максимального прогину видно, що зміна параметрів ортотропії значно впливає на характеристики НДС, навіть при однакових умовах закріплення і поверхневого навантаження.

Запропонований підхід передбачає використання відображення вихідної області незалежно від її початкової орієнтації в область  $y$  у формі квадрата. Це дає можливість провести аналіз впливу орієнтації осей ортотропії матеріалу відносно

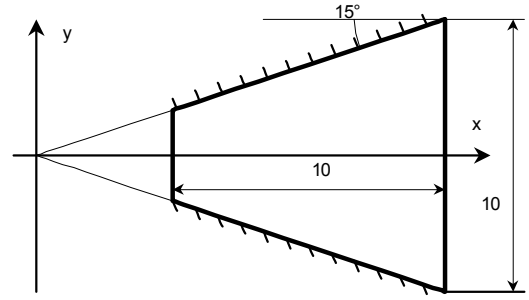


Рис. 9 — Геометричні параметри ортотропної пластини сталої товщини у формі рівнобічної трапеції

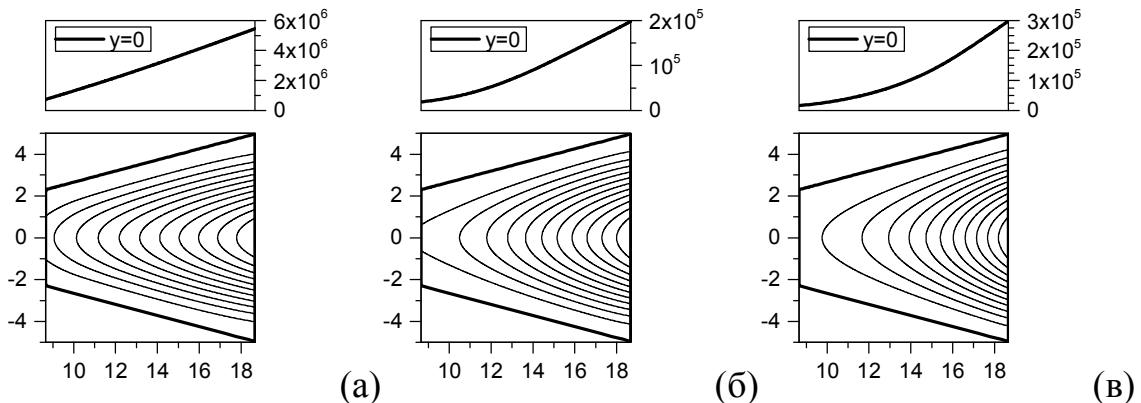


Рис. 10 — Вигляд поверхонь функції прогину та кривих перерізу при  $y = 0$  для пластини у формі рівнобічної трапеції: (а), (в) — ортотропний матеріал, (б) — псевдоізотропний матеріал

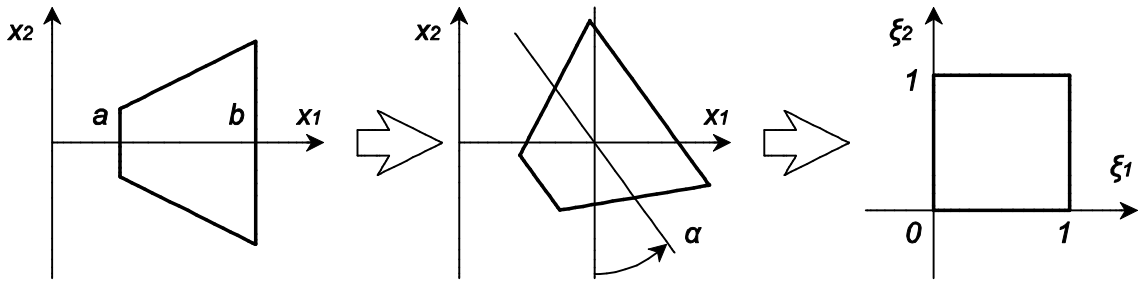


Рис. 11 — Схема дослідження впливу взаємного розташування осей ортотропії та сторін пластини у формі трапеції на розподіл полів переміщень

сторін пластини на характер НДС.

Схема розрахунку наведено на рис. 11. Розглянуто ортотропні пластини товщиною  $h = 0,1$  у формі рівнобічної трапеції із співвідношенням основ  $b/a$  від 1:1 (квадрат) до 10:1 (трапеція, близька по формі до трикутника). Висота трапеції та її площа  $S = 1,0$  залишається без змін для усіх розглянутих випадків форми. Поверхневе навантаження  $q(x,y) = q_0$  розподілене рівномірно. Розглянуто два ортотропних матеріали: пластик, армований скловолокном із співвідношенням шарів 2/1 ( $E_1 = 3,68E_0$ ,  $E_2 = 2,68E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,105$ ,  $G_{12} = 0,5E_0$ ,  $G_{23} = 0,41E_0$ ,  $G_{31} = 0,45E_0$ ) та полімер CFRP.

Встановлено, що максимальні значення прогину мають місце для пластини у формі квадрата при куті повороту  $45^\circ$ . Максимальний прогин для варіанту геометрії  $b/a = 3/1$  має місце при куті  $\alpha = 60^\circ$ , а  $b/a = 10/1$  — при  $\alpha = 90^\circ$  для обох матеріалів. Форма поверхні функції прогину для пластини з CFRP із значенням  $b/a = 3/1$  при куті повороту  $45^\circ$  неведена на рис. 12.

Вплив геометричних параметрів досліджено на ряді задач з ізотропними пластинами у формі дельтоїду (рис. 13) із жорстким закріпленням сторін. Змінним параметром прийнято кут  $\alpha$  між двома суміжними сторонами одиничної довжини. Величину кутів  $\alpha$  розглянуто в межах як малих, так і великих значень.

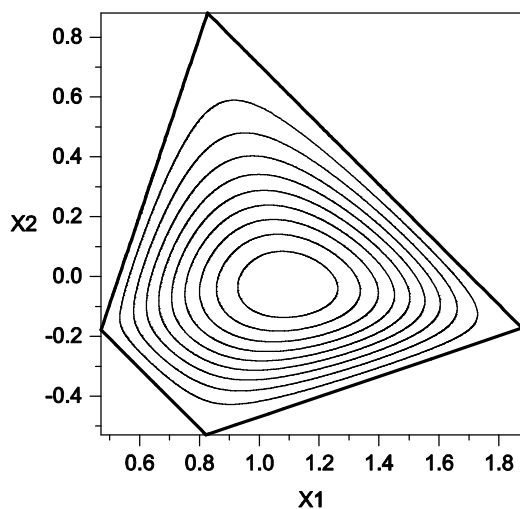


Рис. 12 — Вигляд поверхні  $w(x,y)$  для ортотропної пластини із CFRP при значенні кута її повороту  $45^\circ$

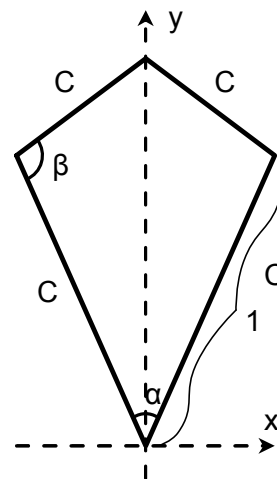


Рис. 13 — Пластина у формі дельтоїду із змінним кутом  $\alpha$  між двома сторонами одиничної довжини

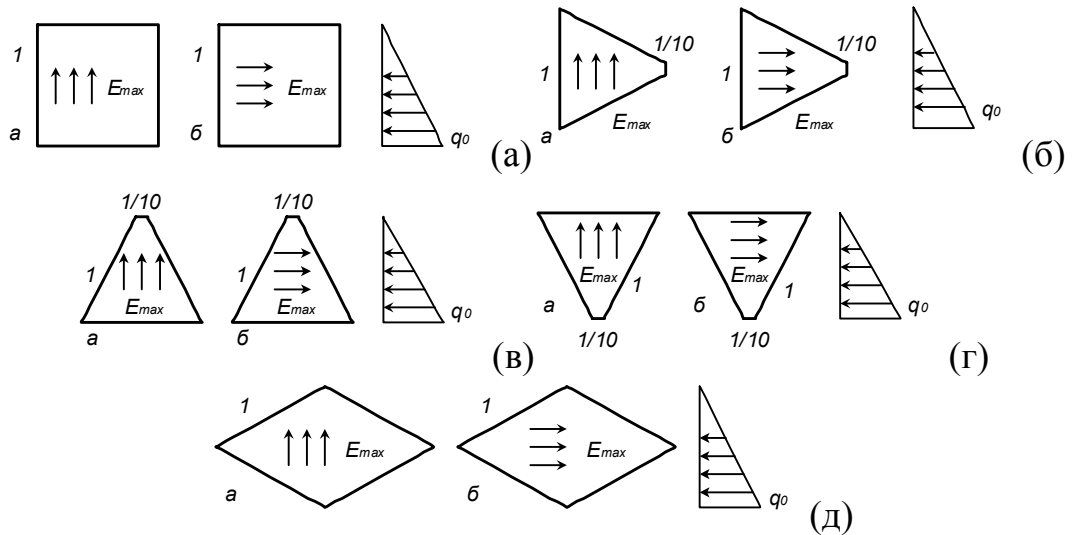


Рис. 14 — Розглянуті варіанти форми отротропних пластин, орієнтація осей ортотропії матеріалу та розподіл змінного поверхневого навантаження

Деформація пластин сталюї товщини  $h = 0,1$  відбувається за рахунок рівномірно розподіленого поверхневого навантаження  $q(x,y) = q_0$ . Матеріал пластин прийнято ізотропним,  $\nu = 0,3$ .

Розрахунки проведено для 10 значень кута  $\alpha$ , при цьому для усіх варіантів  $\alpha \geq 2^\circ$  задачі отримали розв'язки. Встановлено, що на малих кутах  $\alpha = 1^\circ - 15^\circ$  значення максимального прогину зростає одночасно із зростанням площі пластини, що сприймає поверхневе навантаження, а при наближенні форми пластини до трикутної ( $\alpha = 179^\circ$ , рис. 13в) зміна  $w_{max}E/q$  уповільнюється.

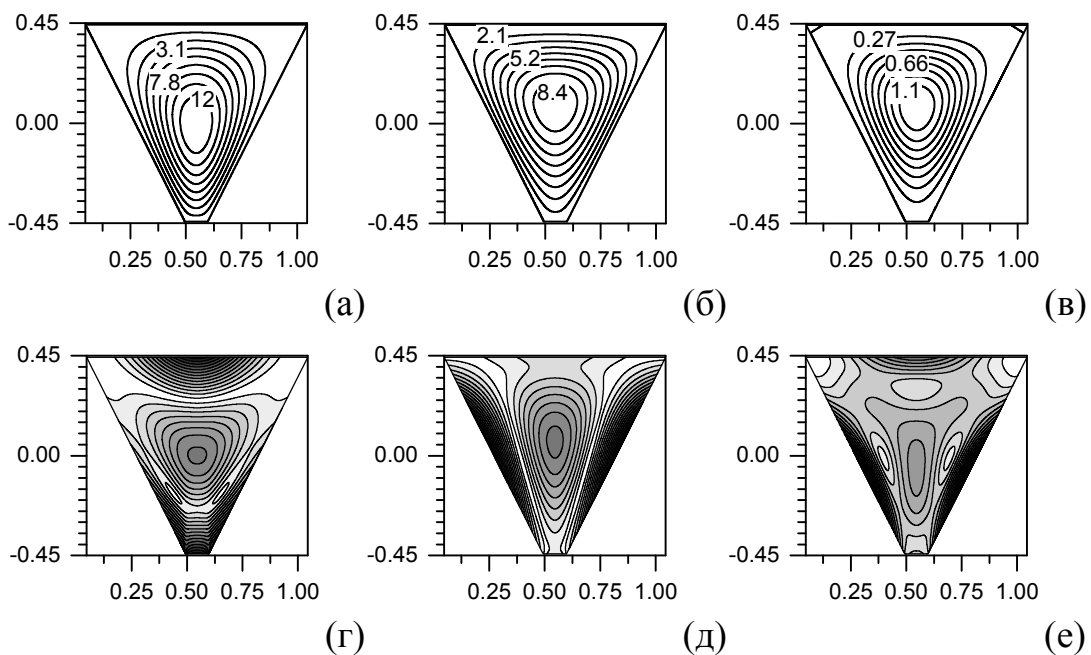


Рис. 15 — Загальний вигляд поверхні функції прогину (а–в) та інтенсивності напружень (г–е) для різних варіантів пружних сталей матеріалу пластин у формі трапеції, близької до трикутника

Комплексний вплив геометричних параметрів та співвідношення пружних сталих ортотропних матеріалів на характер НДС в умовах змінного навантаження було розглянуто ряд задач для пластин у формі трапеції, ромбу та квадрата, параметри яких показано на рис. 14. Поверхнєве навантаження змінюється лінійно від 0 у точці пластини з максимальним значенням координати  $y$  до свого максимального значення  $q_0$  у точці з мінімальним значенням координати  $y$ . Довжину сторін пластин у формі квадрата та ромбу обрано рівною одиниці, рівнобічні трапеції мають одиничну довжину бокових сторін та більшої основи. Для кожного з п'яти випадків сполучень форми пластини і розподілу навантаження розглянуто по три варіанти пружних сталих матеріалу: з розташування осей ортотропії вуглепластику CFRP з  $E_{max}$  вздовж вісі  $Oy$ , вздовж  $Ox$ , та псевдо ізотропного ( $E = (E_1 + E_2)/2$  и т.і.).

Результати розрахунків показали, що найменші значення максимального прогину  $w_{max}E/q_0$  та інтенсивності напружень  $\sigma_{i max}$  мають місце для пластини у формі трапеції близької до трикутника з варіантом орієнтації рис. 14г. Форма поверхонь функції прогину та інтенсивності напружень для цього варіанту задачі показано на рис. 15. При цьому для всіх варіантів орієнтації осей ортотропії поверхні функції прогину (рис. 15а-в) мають схожий вигляд на відміну від розподілу інтенсивності напружень на поверхні пластини  $z = h/2$  (рис. 15г-е), де спостерігаються суттєві зміни.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі представлено розроблений чисельно-аналітичний підхід для розв'язання задач статки ортотропних чотирикутних пластин складної форми на основі уточненої моделі типу Тимошенка. Підхід базується на використанні перетворення координат, що відображає вихідну область складної форми на область у формі квадрата, а також використанні поєднання методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації для розв'язку отриманої двовимірної крайової задачі з різними граничними умовами.

На основі розробленого підходу проведено дослідження напружено-деформованого стану пластин з ізотропних та ортотропних матеріалів, що мають форму прямокутників, трапецій, паралелограмів, ромбів, дельтоїдів та чотирикутників загального вигляду, в умовах різного закріплення країв, рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження, для різних випадків взаємної орієнтації осей пружної симетрії, країв пластин та напрямків зміни механічних параметрів. При цьому отримано наступні конкретні результати:

- на основі вихідних рівнянь рівноваги уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента, та виразів перетворення координат побудовано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних, що описує напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника і у сполученні з виразами для обраних граничних умов складає двовимірну крайову задачу;
- розроблено методику розв'язання задач статки ортотропних чотирикутних пластин, що використовує метод сплайн-колокації для зниження розмірності відповідної крайової задачі та метод дискретної ортогоналізації для чисель-

ного розв'язку отриманої у таких спосіб системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку;

- використовуючи розроблений підхід, створено алгоритм та відповідний програмний комплекс, що дозволяє виконувати розрахунки для задач про НДС ізотропних та ортотропних чотирикутних пластин із різними варіантами комбінацій механічних і геометричних параметрів та умов закріплення країв;
- достовірність отриманих результатів забезпечено використанням обгрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, контрольованою точністю проведення розрахунків на базі індуктивних оцінок, тестуванням та порівнянням отриманих чисельних даних з результатами робіт, що використовують інші аналітичні та наближені методи;
- сформульовано та розв'язано ряд задач про НДС ізотропних та ортотропних чотирикутних пластин сталої товщини, деформація яких відбувається під дією рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження, в умовах різних видів закріплення країв, різних сполучень орієнтації осей ортотропії, країв та напрямків зміни навантаження, для пластин з різними геометричними параметрами тощо;
- отримані результати розрахунків та виявлені закономірності представлені на відповідних графіках та у таблицях.

Розроблений на основі запропонованого чисельно-аналітичного підходу алгоритм та відповідний програмний комплекс можуть бути використані у подальшому для розв'язання широкого кола практичних задач статички пластин складної форми, оцінки міцності та надійності відповідних елементів конструкцій.

### **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Grigorenko A.Ya. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 3. – p. 326–333.
2. Григоренко А.Я. О напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы из изотропных материалов при переменной нагрузке / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Прикл. механика.* – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 47–54.
3. Григоренко О.Я. Особенности напряжено-деформованного stanu пластин складної форми з ортотропних матеріалів / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* – 2016. – № 3. – С. 35–38.
4. Григоренко О.Я. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини із застосуванням сплайнів на нерівномірних сітках / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.М. Яремченко // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* – 2016. – № 2. – С. 29–34.
5. Григоренко А.Я. Особенности подхода к решению задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Прикл. механика.* – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 47–54.

- кратьев, С.Н. Яремченко // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 51–60.
6. Григоренко О.Я. Чисельний аналіз статичного деформування чотирикутних пластин різної геометрії [Електронний ресурс] / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – С. 17–18. Режим доступу: [www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018)
  7. Grigorenko A.Ya. Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30. – Kharkov: KhPI, 2016. – p. 287–293.
  8. Панкратьев С.А. Особливості чисельно-аналітичного підходу до статичного аналізу складних чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів // Матеріали міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», 18–20 квітня, 2017. – Дніпро, Кам'янське, 2017. – С. 25.
  9. Григоренко О.Я. Особливості застосування чисельного підходу до аналізу деформації пластин складної форми / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // Тези доповідей XVIII Міжнародної конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 24–26 травня 2017 р. – Київ: КНУ, 2017. – С. 117.
  10. Григоренко А.Я. О применении неравномерных сеток для сплайнов в задачах о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко // Развитие инновационной деятельности в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 118.
  11. Панкратьев С.А. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы // Развитие инновационной деятельности в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 128.

## АНОТАЦІЇ

*Панкратьев С.А.* Напружено-деформований стан чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 — «Механіка деформівного твердого тіла» (113 — Прикладна математика). — Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану ортотропних пластин складної форми із застосуванням уточненої моделі з врахуванням поперечного зсуву. Запропонований підхід передбачає відображення складної вихідної області на область у формі квадрата у новій системі координат. Розв'язувальну систему диференціальних рівнянь отримано з використанням рівнянь рівноваги, геометричних співвідношень та лінійних співвідношень пружності.

Зменшення розмірності двовимірної крайової задачі виконано за допомогою сплайн-апроксимації розв'язків по одному з координатних напрямків. Отримана двоточкова крайова задача розв'язана за допомогою методу дискретної ортогоналізації.

Проведено дослідження напружено-деформованого стану для ізотропних матеріалів різної форми. Отримані розв'язки задач порівняно з аналітичними, наближеними розв'язками за методом скінчених елементів або існуючими даними інших авторів. Досліджено вплив геометричних параметрів та параметрів ортотропії на характеристики напружено-деформованого стану, отримані розв'язки для ряду задач із різною орієнтацією осей ортотропії відносно сторін пластини. Продемонстровано одночасний вплив орієнтації осей ортотропії та контурів пластин різної форми в умовах неоднорідного поверхневого навантаження.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, чотирикутна пластинка, ортотропний матеріал, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації, перетворення координат.

*Панкратьев С.А.* Напряженно-деформированное состояние четырехугольных пластин из ортотропных материалов. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.02.04 — «Механика деформируемого твёрдого тела» (113 – Прикладная математика). – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Диссертационная работа посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния ортотропных пластин сложной формы с использованием уточненной модели. Предложенный подход предполагает отображение исследуемой области на область в форме квадрата в новой системе координат. Разрешающая система дифференциальных уравнений получена с использованием уравнений равновесия, геометрических соотношений и линейных соотношений упругости. Понижение размерности двумерной краевой задачи выполнено при помощи сплайн-аппроксимации искомых решений по одной из координатных осей. Полученная таким способом двухточечная краевая задача решена численным методом дискретной ортогонализации.

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния изотропных и ортотропных пластин различной формы. Полученные решения сравниваются с известными аналитическими, приближенными решениями задач на основе метода конечных элементов, данными других авторов. На примере пластин в форме дельтоидов и трапеций показано влияние геометрических параметров и параметров ортотропии на характеристики напряженно-деформированного состояния. Получены решения для задач с различной ориентацией осей ортотропии относительно сторон пластин, в том числе в условиях неравномерной нагрузки.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, четырехугольная пластинка, ортотропный материал, метод сплайн-коллокации, метод дискретной ортогонализации, преобразование координат.

*Pankratiev S.A.* Stress-strain state of quadrangular orthotropic plates. — Manuscript.

Thesis for a candidate degree in physics and mathematics (Ph.D.) in specialty 01.02.04 — "Mechanics of a deformable solid" (113 — Applied Mathematics). — S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine.

The dissertation is devoted to the study of the stress-strain state of orthotropic plates of complex shape with the use of a refined model that is based on the hypothesis of a rectilinear element and takes into account the transverse shear. The approach proposed involves mapping a complex initial area to a square in a new coordinate system.

The resolving system of second order differential equations in partial derivatives is obtained using equilibrium equations written relative to moments and cross-sectional forces that statically equivalent to stresses, geometric relations, and linear elastic correlations. The resolving system of the equations with respect to the function of deflection and two angles in conjunction with the expressions of the selected boundary conditions forms a two-dimensional boundary value problem, after the transformation of the coordinates formed in the rectangular domain. This makes it possible to reduce the dimension of the problem by using spline approximation of solutions in one of the coordinate directions and to solve the resulting two-point boundary-value problem for a high-order system of ordinary differential equations using the discrete orthogonalization method. The reliability of the results is provided by the correctness of the problem statement, using theoretically substantiated mathematical model, inductive accuracy estimates, and testing of the approach on the tasks for which exact or approximate solutions are known.

The study of the stress-strain state for isotropic materials of various shapes was carried out. Solutions of tasks, obtained utilizing the approach, are compared with analytical ones, approximate solutions by the finite element method and extant data of other authors. An analysis of the influence of geometric parameters on the distribution of displacement fields was studied on the example of plates in the form of deltoids.

In considering the problems of plates in the form of trapezium, the effect of geometric parameters and orthotropy parameters on the characteristics of the stress-strain state was also investigated. The solutions for a number of problems with different orientation of orthotropy axes relative to the sides of the plate were obtained.

The simultaneous influence of orthotropic axes orientation relative to the sides of plates with various shapes under non-uniform surface loading is demonstrated in the case of rigid fixation. Solutions for the deflection function and stress intensity at the surface are compared.

The results of calculations for the considered tasks, the revealed effects and regularities are presented in charts and tables.

**Keywords:** stress-strain state, quadrangular plate, orthotropic material, spline-collocation method, discrete orthogonalization method, coordinate transformation.