

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Панкратьєв Сергій Анатолійович

УДК 539.3

## ДИСЕРТАЦІЯ

Напружено-деформований стан чотирикутних пластин  
з ортотропних матеріалів

01.02.04 — механіка деформівного твердого тіла  
113 — прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне  
джерело

С.А. Панкратьєв

Науковий керівник: Григоренко Олександр Ярославович,  
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2018

## АНОТАЦІЯ

*Панкратьєв С.А.* Напружено-деформований стан чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» (113 — Прикладна математика). — Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена аналізу напружено-деформованого стану ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника під дією поверхневого навантаження. Розв'язуюча система рівнянь отримана з використанням уточненої моделі пластин типу Тимошенка, що спирається на гіпотезу прямолінійного елемента.

Описання складної форми вихідної чотирикутної області здійснюється за допомогою відображення на область у формі одиничного квадрата у новій системі координат. У поєднанні з використанням методу сплайн-колокації для зниження розмірності крайової задачі та методом дискретної ортогоналізації для розв'язання останньої, це дало можливість створити завершений чисельно-аналітичний підхід та відповідну розрахункову схему для аналізу впливу механічних, геометричних та силових параметрів при різних умовах закріплення країв пластини.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному. З вихідних рівнянь рівноваги уточненої теорії пластин, що ґрунтується на гіпотезі прямолінійного елемента, виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника. Розроблено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статички ортотропних чотирикутних пластин із різними варіантами закріплення сторін під дією поверхневого навантаження, який використовує

сплайн-апроксимацію розв'язків в одному з координатних напрямків та метод дискретної ортогоналізації для розв'язання отриманої в такий спосіб системи диференціальних рівнянь високого порядку. На основі відповідного алгоритму створено програмний комплекс для проведення чисельних розрахунків на ПК. Проведено розв'язання ряду задач відповідного класу, де досліджено вплив геометричних, механічних параметрів на розподіл полів напружень та переміщень за різних умов закріплення пластин під дією рівномірного та нерівномірного навантаження; показано особливості впливу взаємної орієнтації осей ортотропії, країв пластини та напрямку зміни навантаження на параметри напружено-деформованого стану.

Вступна частина роботи присвячена обґрунтуванню актуальності питань, що розглядаються у дисертації. У ній зазначено мету, об'єкт, предмет та завдання дослідження, розкрито наукову новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Наведено дані про особистий внесок здобувача, апробацію роботи та перелік публікацій автора.

До складу дисертаційної роботи входять чотири розділи. У першому розділі проведено огляд наукових праць, присвячених розв'язанню задач статички пластин з ортотропних матеріалів. Особливу увагу приділено порівнянню відомих підходів до розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин різної геометрії, характеристикам запропонованих аналітичних та чисельних методів аналізу.

У другому розділі наведено основні співвідношення уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямої лінії. На основі рівнянь рівноваги елементу серединної поверхні ортотропної прямокутної пластини у поєднанні з геометричними співвідношеннями, які враховують наявність поперечного зсуву, та співвідношеннями пружності отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних відносно функцій прогину та двох кутів.

Наведено математичні вирази та описано схему відображення вихідної області у декартовій системі координат на область у формі квадрата в іншій

системі координат, що дозволяє розглядати пластини складної геометрії за рахунок зміни коефіцієнтів розв'язувальної системи рівнянь. Виведено розв'язувальну систему рівнянь для ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника та відповідні вирази для кількох варіантів граничних умов двовимірної крайової задачі.

У третьому розділі викладено розроблену методику розв'язання двовимірних крайових задач про напружено-деформований стан чотирикутних пластин складної форми. Запропонований підхід базується на зниженні розмірності двовимірної крайової задачі застосуванням методу сплайн-колокації. Метод передбачає апроксимацію розв'язків в одному з координатних напрямків за допомогою лінійних комбінацій В-сплайнів. Це також дозволяє точно задовільнити граничні умови вздовж осі апроксимації за рахунок підбору відповідних коефіцієнтів. Для підвищення точності апроксимації використано відому схему розміщення точок колокації, що передбачає парну кількість вузлів рівномірної сітки.

Отримана у такий спосіб двоточкова крайова задача з системою звичайних диференціальних рівнянь високого порядку розв'язується методом дискретної ортогоналізації. На основі викладеної схеми створено алгоритм та відповідне програмне забезпечення для ПК, що дозволяє проводити розрахунки для практичних задач статички при різних значеннях механічних та геометричних параметрів.

Четвертий розділ присвячено оцінкам достовірності результатів розв'язання задач за допомогою запропонованого підходу та дослідженню напружено-деформованого стану ізотропних, ортотропних пластин різної геометрії при різних варіантах закріплення сторін, орієнтації осей ортотропії в умовах рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження. Зазначено, що достовірність результатів досягається коректністю постановки задачі, застосуванням теоретично обґрунтованої механіко-математичної моделі, проведенням чисельних розрахунків з достатньою та контрольованою

індуктивними прийомами точністю, а також тестуванням підходу на задачах, щодо яких відомі точні або наближені розв'язки.

Тестування запропонованого підходу з використанням перетворення координат проведено за допомогою розв'язання задачі про напружено-деформований стан прямокутної пластини з ізотропного матеріалу в умовах жорсткого та шарнірного закріплення сторін та сталого рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Прямокутна форма пластини дозволяє отримати розв'язок як безпосередньо в вихідних координатах, так і з використанням перетворення координат, що зводить вихідну область до квадрата.

Оскільки усі параметри розрахунків прийнято однаковими, включаючи кількість точок інтегрування, параметри сплайн-функцій, розташування та кількість точок колокації та ін., розв'язки задачі з перетворенням вихідної області та без нього повинні мати однакові значення прогину, що буде підтвердженням коректності запропонованої методики. За результатами розрахунків отримані значення прогину, що для обох розглянутих випадків закріплення сторін пластини при використанні чисел подвійної точності практично співпадають до останніх значущих розрядів.

Для перевірки запропонованого підходу за допомогою відомих аналітичних розв'язків деяких задач розглянуто прямокутну шарнірно оперту ізотропну пластину під дією поверхневого навантаження, що зосереджене в окремих частинах поверхні. У випадку шарнірного обпирання є можливість розв'язання задачі за допомогою запису аналітичних виразів для функцій прогину, кутів та навантаження через їх розклади у подвійні ряди Фур'є. Тому для порівняння результатів розв'язку задачі за допомогою запропонованого підходу було використано наближений розв'язок із врахуванням перших 600 членів ряду, який вважався за точний. В усіх розрахованих точках спостерігається практичне співпадіння результатів, отриманих аналітично та чисельно: різниця між значеннями становить менше одного

відсотка, що свідчить про достатньо високу точність отриманого чисельного розв'язку.

Запропонований підхід було також перевірено при розв'язанні ряду задач про пластини у формі трапецій та паралелограмів з жорстким закріпленням під дією сталого рівномірно розподіленого навантаження, щодо яких відомі розв'язки за допомогою методу скінчених елементів, отримані іншими авторами. Порівняння числових значень максимального прогину для усіх варіантів задач показало відносну різницю в межах одиниць відсотків, що дозволяє говорити про узгодженість результатів.

З метою визначення значень параметрів методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації, що забезпечують отримання стійкого розв'язку, для кожної з розглянутих задач були проведені обчислення з різною кількістю точок колокації та точок інтегрування. Для остаточних розрахунків застосовувалися такі значення параметрів методів, що забезпечують не менше п'яти достовірних знаків для функції прогину.

Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ізотропних матеріалів виконано на прикладі пластин сталої товщини, форма яких змінюється від квадрата до рівнобічного трикутника таким чином, що площа відповідної фігури залишається без змін. Нормальне поверхневе навантаження розподілене рівномірно, бокові сторони трапецій закріплені жорстко, а основи вільні. Достовірність результатів, отриманих використанням сплайн-колокації, перевірено порівнянням з даними розрахунків за методом скінчених елементів. Отримані результати представлені на графіках у вигляді ізоліній поверхонь функції прогину.

Для дослідження напружено-деформованого стану ортотропних матеріалів розглянуто задачу з пластиною у формі трапеції з жорстким закріплення бокових сторін та вільними основами. Розрахунки проведено для трьох варіантів орієнтації осей ортотропії: з максимальним модулем пружності вздовж осі  $Ox$ ,  $Oy$  та для умовно ізотропного матеріалу. Проведено аналіз форми поверхонь функції прогину, її перерізів та значень

максимального прогину, що дозволяє робити певні висновки про вплив параметрів ортотропії на характеристики напружено-деформованого стану.

Оскільки запропонований підхід передбачає використання відображення вихідної області незалежно від її початкової орієнтації в область у формі квадрата, це дало можливість провести аналіз впливу орієнтації осей ортотропії матеріалу відносно сторін пластини на характер напружено-деформованого стану. Для цього розглянуто ортотропні пластини сталою товщиною у формі рівнобічної трапеції із змінним співвідношенням основ та поверхневим навантаженням, що розподілене рівномірно. Розглянуто два матеріали: пластик, армований скловолокном із співвідношенням шарів 2/1 та вуглепластик CFRP. Показано варіанти форми пластин та кути повороту, де досягаються максимальні значення прогину.

Вплив геометричних параметрів досліджено на ряді задач з ізотропними пластинами у формі дельтоїду із жорстким закріпленням сторін. Змінним параметром прийнято кут між двома суміжними сторонами одиничної довжини. Величину кутів розглянуто в межах як малих ( $1^\circ$ – $15^\circ$ ), так і великих ( $165^\circ$ – $179^\circ$ ) значень.

Комплексний вплив геометричних параметрів та співвідношення пружних сталих ортотропних матеріалів на характер напружено-деформованого стану в умовах змінного навантаження було розглянуто ряд задач для пластин у формі трапеції, близької до трикутника, ромба та квадрата. Поверхнєве навантаження прийнято таким, що змінюється лінійно. Для кожного з п'яти випадків сполучень форми пластини і розподілу навантаження розглянуто по три варіанти пружних сталих матеріалу: з  $E_{max}$  вздовж осі  $Oy$ , вздовж  $Ox$ , та псевдо ізотропний матеріал. Зроблено висновки щодо оптимальної форми та орієнтації пластини, які супроводжуються мінімальними значеннями прогину. Проведено порівняння впливу орієнтації осей ортотропії на вигляд поверхонь функції прогину та розподіл інтенсивності напружень на поверхні.

Отримані результати розв'язання задач, розроблений на основі запропонованого чисельно-аналітичного підходу алгоритм та відповідний програмний комплекс можуть бути використані у подальшому для розв'язання широкого кола інших задач, оцінки міцності та надійності відповідних елементів конструкцій.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, чотирикутна пластина, ортотропний матеріал, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації, перетворення координат.

## SUMMARY

*Pankratiev S.A.* Stress-strain state of quadrangular orthotropic plates. — Manuscript.

Thesis for a candidate degree in physics and mathematics (Ph.D.) in specialty 01.02.04 — "Mechanics of a deformable solid" (113 — Applied Mathematics). — S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine.

The dissertation is devoted to the analysis of the stress-strain state of orthotropic plates in the form of an arbitrary convex quadrilateral deformed by the action of the surface load. The resolving system of equations is obtained using a refined model of the Timoshenko type plates, which relies on the hypothesis of a rectilinear element.

The description of the complex form of the investigated quadrangular area is carried out by means of mapping onto a region in the form of a unit square in a new coordinate system. Combined with the use of the spline-collocation method to reduce the dimensionality of the boundary value problem and the discrete orthogonalization method for solving the latter, it has made it possible to develop a complete numerical-analytical approach and an appropriate calculation scheme for analysing the influence of mechanical, geometric and force parameters under different conditions of the plate's edges fixing.



The scientific novelty of the results is as follows. From the initial equations of equilibrium of the refined theory of plates, based on the hypothesis of a rectilinear element, the resolving system of differential equations in partial derivatives that describes the stress-strain state of orthotropic plates in the form of an arbitrary convex quadrilateral is derived. The numerical-analytical approach to solving the static problems of orthotropic quadrangular plates with numerous ways of fastening the sides under the action of the surface load, which uses spline-approximation of solutions in one of the coordinate directions and the method of discrete orthogonalization for solving the obtained in this way system of differential equations of high order, is developed. Based on the corresponding algorithm, a software complex for conducting numerical calculations on a PC was created. A number of problems of the corresponding class have been solved, where the influence of geometrical, mechanical parameters on the distribution of stress and displacement fields under various conditions of fastening of plates under the action of uniform and uneven loading is investigated; the features of the influence of the mutual orientation of the orthotropic axes, the edges of the plate and the direction of the load change on the parameters of the stress-strain state are shown.

The introductory part of the work is devoted to the substantiation of the relevance of the issues considered in the dissertation. It outlines the purpose, object, subject and task of the study, reveals the scientific novelty, the theoretical and practical significance of the results. The data on the personal contribution of the applicant, the testing of the work and the list of publications by the author are given.

The dissertation consists of four sections. The first section presents an overview of scientific works devoted to solving problems of static deformation of orthotropic plates. Particular attention is paid to the comparison of known approaches to solving the problems of the stress-deformed state of plates of different geometries, the characteristics of the proposed analytical and numerical methods of analysis.

In the second section, the basic equations of the refined theory of the plates, which is based on the hypothesis of the straight line, are given. On the basis of the equilibrium equations of the element of the middle surface of the orthotropic rectangular plate in combination with the geometric relations taking into account the existence of a transverse shear, and the elasticity relations, a resolving system of second order differential equations in partial derivatives was obtained with respect to the functions of deflection and two angles. The mathematical expressions are described and the scheme of mapping the initial region in the Cartesian coordinate system to the region in the form of a square in another coordinate system is described, which allows us to consider the plates of complex geometry by changing the coefficients of the resolving system of equations. The resolving system of equations for orthotropic plates in the form of an arbitrary convex quadrilateral as well as the corresponding expressions for several variants of the boundary conditions of a two-dimensional boundary value problem is derived.

The third section describes the developed methodology for solving two-dimensional boundary-value problems of the stress-strain state of quadrilateral plates of complex shape. The proposed approach is based on the reduction of the dimension of a two-dimensional boundary-value problem using the spline-collocation method. The method involves the approximation of solutions in one of the coordinate directions with the help of linear combinations of B-splines. It also allows satisfying the boundary conditions along the approximation axis precisely by selecting appropriate coefficients. To improve the accuracy of the approximation, we use the known scheme of placing the points of collocation, which involves a pair number of units of a uniform grid.

The thus obtained two-point boundary value problem with the system of ordinary differential equations of high order is solved by the method of discrete orthogonalization. Based on the above scheme, an algorithm and corresponding software for the PC are created that allows to make calculations for practical

problems of static analysis at different values of mechanical and geometric parameters.

The fourth section is devoted to the estimations of the reliability of the results of solving problems with the help of the proposed approach and the study of the stress-strain state of isotropic, orthotropic plates of different geometries with various ways of fixing the sides, orientation of the orthotropic axes in terms of uniform and non-uniform surface load. It is noted the reliability of the results is achieved by the correctness of the problem statement, the application of the theoretically substantiated mechanical and mathematical model, numerical calculations with sufficient and controlled by inductive methods accuracy, and testing of the approach on problems for which exact or approximate solutions are known.

The testing of the proposed approach that uses the transformation of coordinates was carried out by solving the problem of the strained-strain state of a rectangular plate made of isotropic material under conditions of hard and hinged fixing of the sides and a uniform uniformly distributed surface load. The rectangular shape of the plate allows you to get the solution both directly in the source coordinates, and using the transformation of the coordinates, which reduces the initial area to the square.

Since all the parameters of the calculations are assumed to be the same, including the number of integration points, the parameters of the spline functions, the location and the number of points of collocation, etc., the solutions of the problem with the transformation of the initial area and without it should have the same deflection values, which will confirm the correctness of the proposed methodology. In the result of the calculations, the deflection values are obtained that for both considered cases of fixing the sides of the plate practically coincide up to the last significant digits when using double-precision numbers.

To verify the proposed approach using known analytical solutions of some problems, a rectangular hinged isotropic plate under the action of the surface load, which is concentrated in separate parts of the surface, is considered. In the case of

a hinged fastening, there is the possibility of solving a problem by writing analytic expressions for deflection functions, angles and loading through their decompositions in double Fourier series. Therefore, to compare the results of the solution of the problem with the proposed approach, an approximate solution was used taking into account the first 600 members of the series, which was considered accurate. In all calculated points, the practical coincidence of the analytical and numerical results is obtained: the difference between the values is less than one percent, which indicates a sufficiently high accuracy of the resulting numerical solution.

The proposed approach was also tested by solving a number of problems about plates in the form of trapezes and parallelograms with a rigid fastening under the action of a stable uniformly distributed load, for which known solutions are obtained by other authors using the finite element method. Comparison of numerical values of maximum deflection for all variants of tasks revealed a relative difference within the limits of units of interest, which allows to speak about the consistency of the results.

In order to determine the values of the parameters of the spline-collocation and discrete orthogonalization methods that provide a stable solution, for each of the considered problems calculations were performed with a different number of points of collocation and integration. For final calculations, the values of the parameters of methods that provide more than five authentic signs for the function of the deflection were used.

The investigation of the stress-strain state of quadrilateral isotropic plates is made on the example of the plates of constant thickness, the shape of which varies from square to equilateral triangle in such a way that the area of the corresponding figure remains unchanged. The normal surface load is evenly distributed, the sides of the trapezoid are fixed rigidly, and the bases are free. The reliability of the results obtained by spline collocation was verified by comparison with finite element method calculations. The obtained results are presented on the graphs in the form of surfaces of the deflection function.

To study the stress-strain state of orthotropic materials, the problem with a plate in the form of a trapezoid with a rigid fixing of lateral sides and free bases is considered. Calculations were made for three variants of the orientation of the orthotropy axes: with a maximum elastic modulus along the axis  $Ox$ ,  $Oy$  and for a conditionally isotropic material. An analysis of the shape of the surface of the deflection function, its cross sections and the values of the maximum deflection is made, which allows us to make certain conclusions about the influence of orthotropy parameters on the characteristics of the stress-strain state.

Since the proposed approach involves the use of the mapping of the source region regardless of its initial orientation in the square-shaped region, it has made it possible to analyse the influence of orientation of the orthotropy axes of the material relative to the sides of the plate on the nature of the stress-strain state. For this purpose, orthotropic plates are considered in the form of an equilateral trapezoid with a variable ratio of bases and a superficial load distributed uniformly. Two materials are considered: plastic reinforced with fiberglass with the ratio of layers 2 to 1 and CFRP. The variants of the shape of the plates and the angles of rotation are shown, where the maximum values of the deflection are reached.

The influence of geometric parameters was investigated on a number of problems with isotropic plates in the form of a deltoid with rigid fixing of the sides. A variable is the angle between two adjacent sides of a unit length. The magnitude of the angles is considered within the limits of both small ( $1^\circ$ – $15^\circ$ ) and large ( $165^\circ$ – $179^\circ$ ) values.

The complex influence of geometrical parameters and the ratio of elastic steady orthotropic materials to the character of the stress-strain state under the conditions of the alternating load was considered on a number of problems for plates in the form of a trapezoid close to the triangle, rum and square. The superficial load is considered to be changing linearly. For each of the five cases of combinations of plate shape and load distribution, three versions of elastic solid materials are considered: with  $E_{max}$  along the axis  $Oy$ , along  $Ox$ , and pseudo isotropic material. Conclusions are made regarding the optimal shape and

orientation of the plate, which are accompanied by the minimum values of the deflection. A comparison of the influence of the orientation of the orthotropic axes on the appearance of the surfaces of the deflection function and the distribution of the intensity of stresses on the surface was carried out.

The obtained results of the solution of the considered problems, the algorithm and corresponding program complex developed on the basis of the proposed numerical-analytical approach can be used in the future for solving a vast range of other problems, assessing the strength and reliability of the corresponding structural elements.

**Keywords:** stress-strain state, quadrilateral plates, orthotropic materials, spline-collocation method, discrete orthogonalization method, coordinate transformation.

Список публікацій здобувача:

1. Grigorenko A.Ya. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 3. – p. 326–333.
2. Григоренко А.Я. О напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы из изотропных материалов при переменной нагрузке / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Прикл. механика.* – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 47–54.
3. Григоренко О.Я. Особливості напружено-деформованого стану пластин складної форми з ортотропних матеріалів / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* – 2016. – № 3. – С. 35–38.
4. Григоренко О.Я. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини із застосуванням сплайнів на нерівномірних сітках / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.М. Яремченко // *Віс-*

- ник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 29–34.
5. Григоренко А.Я. Особенности подхода к решению задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко // Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 51–60.
  6. Григоренко О.Я. Чисельний аналіз статичного деформування чотирикутних пластин різної геометрії [Електронний ресурс] / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – С. 17–18. Режим доступу: [www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018)
  7. Grigorenko A.Ya. Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30. – Kharkov: KhPI, 2016. – p. 287–293.
  8. Панкратьев С.А. Особливості чисельно-аналітичного підходу до статичного аналізу складних чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів // Матеріали міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», 18–20 квітня, 2017. – Дніпро, Кам'янське, 2017. – С. 25.
  9. Григоренко О.Я. Особливості застосування чисельного підходу до аналізу деформації пластин складної форми / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // Тези доповідей XVIII Міжнародної конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 24–26 травня 2017 р. – Київ: КНУ, 2017. – С. 117.

10. Григоренко А.Я. О применении неравномерных сеток для сплайнов в задачах о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко // Развитие инновационной деятельности в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 118.
11. Панкратьев С.А. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы // Развитие инновационной деятельности в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 128.



## ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ .....	1
ЗМІСТ .....	16
ВСТУП .....	19
РОЗДІЛ 1    ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ З РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ ПЛАСТИН З ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ .....	26
1.1. Загальні характеристики підходів до розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин різної геометрії .....	26
1.2. Методи розв'язання задач статки пластин .....	30
1.2.1. Аналітичні підходи .....	30
1.2.2. Чисельні підходи .....	31
1.3. Висновки до першого розділу .....	36
РОЗДІЛ 2    ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН .....	37
2.1. Загальні рівняння уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента .....	37
2.2. Описання вихідної області за допомогою переходу до нової системи координат .....	41
2.3. Розв'язувальні рівняння для чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів у новій системі координат .....	43
2.4. Особливості задач про напружено-деформований стан для випадку чотирикутних пластин з ізотропного матеріалу .....	49
2.5. Висновки до другого розділу .....	50
РОЗДІЛ 3    РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СТАТИКИ ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ .....	51

3.1. Деякі відомості про сплайн-функції. Основні положення методу сплайн-колокації .....	51
3.2. Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою сплайн-апроксимації невідомих функцій в одному з координатних напрямків .....	56
3.3. Розв'язання одновимірної крайової задачі методом дискретної ортогоналізації.....	67
3.4. Алгоритми для дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів з використанням запропонованого чисельно-аналітичного підходу .....	71
3.4. Приклади розв'язання задач про напружено деформований стан пластин різної форми.....	77
3.5. Висновки до третього розділу .....	82
<b>РОЗДІЛ 4 ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН З ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ .....</b>	<b>84</b>
4.1. Деякі оцінки достовірності результатів розв'язання класів задач, що розглядаються.....	84
4.2. Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ізотропних матеріалів.....	100
4.3. Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів.....	104
4.4. Аналіз впливу геометричних та механічних параметрів пластин на розподіл полів напружень та переміщень .....	112
4.5. Висновки до четвертого розділу .....	123
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>125</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>127</b>
<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>141</b>

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.....	141
--	-----

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Як конструктивні елементи різноманітних виробів, частин механізмів та споруд на сьогодні пластини широко застосовуються практично в усіх галузях: будівництві, машинобудуванні, приладобудуванні, транспорті. Постійно зростаючі вимоги до міцності, надійності, стійкості до впливу зовнішніх факторів з одночасним обмеженням ваги та вартості виготовлення технічних виробів обумовлюють безперервний пошук нових матеріалів, що передбачає, у тому числі, проведення розрахунків міцності та надійності відповідних елементів новостворюваних та існуючих конструкцій, потребує отримання інформації щодо їх напружено-деформованого стану у тих чи інших умовах експлуатації.

Вдосконалення та поява нових композитних матеріалів, де суттєва анізотропія та неоднорідність властивостей є скоріше нормою ніж винятком, постійно розширює коло задач, у тому числі щодо розрахунків міцності на надійності. Це, в свою чергу, ставить нові питання щодо описання поведінки пластин та оболонок, потребує нових теорій, моделей, методів або перевірки існуючих в нових умовах та з використанням сучасних методів досліджень.

Для розв'язання задач статички пластин існує ряд розроблених методів, які, в залежності від форми, характеру навантаження та умов закріплення, дозволяють отримати наближені або навіть точні розв'язки. Це, в першу чергу, стосується задач для пластин з такою відносно простою формою як круг чи прямокутник та найчастіше передбачає використання класичної моделі теорії пластин або розгляд ізотропного матеріалу. У той же час зростаючі вимоги до точності розрахунків зумовлюють зростання популярності уточнених моделей, що враховують вплив поперечного зсуву. Задачі з пластинами більш складної форми (трапеція, паралелограм) вимагають використання спеціальних прийомів, застосування для описання вихідної області неортогональних систем координат, та в загальному випадку

призводять до значних труднощів математичного та обчислювального характеру. Кількість таких робіт, що розглядають ортотропні пластини складної форми з використанням уточнених моделей є дуже обмеженою.

Саме тому, враховуючи вище зазначені особливості, дисертаційна робота присвячена дослідженню ортотропних пластин, які розглядаються з використанням неklasичної моделі типу Тимошенка, що базується на гіпотезі прямої лінії. Форма чотирикутних пластин приймається у вигляді довільного опуклого чотирикутника, що є актуальним в сучасних умовах постійного ускладнення новостворюваних конструкцій, має теоретичний інтерес і практичне значення.

В роботі використовуються сучасні ефективні чисельні методи розв'язання крайових задач, а запропонований на їх основі підхід для розв'язання практичних задач механіки може бути використаний у подальших дослідженнях, має суттєвий потенціал для оптимізації та інтеграції з іншими інструментами чисельного аналізу.

**Мета і задачі дослідження.** Основною метою дослідження є розробка підходу, що дозволить розв'язувати задачі про напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника. Для досягнення цієї мети треба необхідно ряд завдань, а саме:

- 1) на основі уточненої моделі пластин типу Тимошенка отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь, що описує напружено-деформований стан ортотропних прямокутних пластин;
- 2) використовуючи відповідне відображення вихідної чотирикутної області на одиничний квадрат, отримати модифіковану розв'язувальну систему диференціальних рівнянь, що описують НДС ортотропних пластин у вигляді довільного опуклого чотирикутника;
- 3) розробити розрахункову схему, що дозволить ефективно проводити чисельний аналіз НДС чотирикутних пластин складної форми;

- 4) провести тестування розробленого підходу, використовуючи наявні дані про розв'язок схожих задач з використанням інших наближених та аналітичних методів;
- 5) провести аналіз меж застосування підходу, наявності обмежень на значення параметрів задач та розрахункової схеми;
- 6) використовуючи розроблені інструменти дослідження, проаналізувати вплив геометричних, механічних параметрів на НДС чотирикутних пластин при різних умовах закріплення і навантаження.

*Об'єктом дослідження* є згин ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника.

*Предметом дослідження* є напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника.

*Методи дослідження.* Напружено-деформований стан пластин досліджується за допомогою рівнянь рівноваги відносно статично еквівалентних напруженням моментів та зусиль. Для запису системи рівнянь використано уточнену модель типу Тимошенка, що спирається на гіпотезу прямолінійного елемента. Описання складної вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника відбувається за рахунок її відображення у одиничний квадрат в іншій системі координат.

Розрахункова схема чисельного аналізу НДС використовує метод сплайн-колокації для зниження розмірності вихідної двовимірної крайової задачі та метод дискретної ортогоналізації для розв'язання останньої.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у тому, що:

- 1) з вихідних рівнянь рівноваги уточненої теорії пластин, що ґрунтується на гіпотезі прямолінійного елемента, виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника;
- 2) розроблено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статички ортотропних чотирикутних пластин із різними варіантами

закріплення країв під дією поверхневого навантаження, який використовує сплайн-апроксимацію розв'язків в одному з координатних напрямків та метод дискретної ортогоналізації для розв'язання отриманої в такий спосіб системи диференціальних рівнянь високого порядку; на основі відповідного алгоритму створено програмний комплекс для проведення чисельних розрахунків на ПК;

- 3) проведено розв'язання ряду задач відповідного класу, де досліджено вплив геометричних, механічних параметрів на розподіл полів напружень та переміщень за різних умов закріплення пластин під дією рівномірного та нерівномірного навантаження; показано особливості впливу взаємної орієнтації осей ортотропії, країв пластини та напрямку зміни навантаження на параметри НДС.

#### **Теоретичне і практичне значення отриманих результатів.**

Теоретична цінність дисертаційної роботи полягає у застосуванні уточненої моделі пластин типу Тимошенка до аналізу НДС ортотропних пластин складної форми, що у поєднанні з відображенням вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника на область у формі одиничного квадрата дозволяє проводити аналіз НДС пластин зазначеного класу. Застосування методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації дозволяє створити закінчену розрахункову схему для розв'язання задач з можливістю зміни геометричних, механічних та силових параметрів в широких межах.

Практична цінність розробленої розрахункової схеми полягає у можливості її використання для розв'язання широкого кола задач аналізу НДС пластин складної форми, задач оптимізації, що передбачають змінну форму, орієнтацію пластини або осей пружної симетрії матеріалу. Отримані числові значення розв'язків розглянутих задач можуть бути використані для тестування та порівнянь результатів інших досліджень. Розроблений програмний комплекс можна застосовувати у науково-дослідних організаціях

як готовий інструмент для проведення розрахунків міцності та надійності елементів конструкцій.

**Особистий внесок здобувача.** В роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником та С.М. Яремченком, дисертанту належить виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів; науковому керівнику належить постановка задач і обговорення результатів, С.М. Яремченко брав участь в обговоренні результатів.

У роботах, опублікованих у співавторстві з науковим керівником, останньому належить постановка задач і обговорення результатів, дисертанту — виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів. В роботах у співавторстві з О.Я. Григоренком та Пінчук Т.І. О.Я. Григоренку належить постановка задач і обговорення результатів, Пінчук Т.І. — обговорення результатів; виведення розв'язувальних рівнянь, методика розв'язування задач, побудова алгоритму і його реалізація в програмному комплексі на ПК, розв'язання конкретних задач і аналіз результатів виконано дисертантом.

Крім того, дисертантом самостійно досліджено особливості застосування запропонованого чисельно-аналітичного підходу для розв'язання задач статички для пластин у формі дельтоїдів та виконано тестування підходу на ряді задач, щодо яких відомі наближені розв'язки, отримані іншими методами.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на

- Міжнародній науково-практичній конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, Україна, 22–24 вересня 2016 р.;



- 5<sup>th</sup> International conference "Nonlinear dynamics — 2016", Kharkov, Ukraine, September 27–30, 2016;
- XVII Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», Дніпродзержинськ, Україна, 17–20 квітня 2017 р.;
- XVIII Міжнародній конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI-2017), Київ, Україна, 24–26 травня 2017 р.;
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, Україна, 22–25 травня 2018 р.

У повному обсязі дисертація доповідалася і була підтримана на семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., професора Григоренка О.Я, семінарі секції за напрямком «Механіка оболонкових систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України Я.М. Григоренка.

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць, з яких 5 — у виданнях за фахом, що входять до списку видань, затвердженого МОН України, у тому числі 2 — у зарубіжних виданнях; 6 — матеріалів та тез доповідей міжнародних конференцій.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами темами.** Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано у відповідності з науковими темами: 1.3.1.382-12 «Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури» (№ ДР 0112U000249, 2012–2016); 1.3.1.401-16 «Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування» (№ ДР 0115U005709, 2016–2020); 1.3.1.410-17 «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій

механічних систем за допомогою нових підходів на основі різних моделей» (№ ДР 0117U000700, 2017–2021).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел із 147 найменувань та одного додатку. Обсяг дисертаційної роботи — 143 сторінки друкованого тексту. У роботі міститься 36 рисунків.

Автор висловлює щире подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Григоренку Олександрю Ярославовичу за чітку постановку задачі, конструктивну критику та корисні поради при виконанні роботи.

# РОЗДІЛ 1

## ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ З РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ ПЛАСТИН З ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

### 1.1. Загальні характеристики підходів до розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин різної геометрії

Як елементи різноманітних конструкцій пластини мають широке застосування у будівництві, авіабудуванні, машинобудуванні, приладобудуванні та інших галузях, чим пояснюється незникаючий інтерес до методів і підходів їх дослідження. Визначення параметрів напружено-деформованого стану є одним з перших і важливих кроків на шляху отримання відповідей на актуальні питання щодо міцності та надійності вузлів машин та споруд, прогнозування їх поведінки при різних умовах навантаження. В свою чергу розробка ефективних та достатньо точних методів розв'язання крайових задач теорії пластин та оболонок є необхідною складовою для успішного розв'язання відповідних задач, що мають практичне значення.

Основою класичної теорії пластин вважаються роботи Кірхгофа, що поклав в основу своєї теорії припущення про відсутність деформації елемента нормалі. Її модифікація, яка зараз відома як теорія Кірхгофа-Лява [1], стала основою загальної теорії оболонок і отримала свій подальший розвиток завдяки працям С. А. Амбарцумяна [2], В. З. Власова [3], А. Л. Гольденвейзера [4], Я. М. Григоренка [5], О. М. Гузя [6], Н. А. Кільчевського [7], А. І. Лур'є [8], Х. М. Муштарі [9], В. В. Новожилова [10], С. П. Тимошенка [11], В. Флюге [12], К. Ф. Черних [13] та ін. Огляди різноманітних теорій пологих оболонок можна знайти в роботах Келедайна (C.R. Calladine) [14], Голда (P.L. Gould) [15], Гріна (A.E. Green) та Зерна (W. Zerna) [16], Ніордсона (F.I. Niordson) [17].

Класична модель теорії пластин та оболонок на основі гіпотез Кірхгофа-Лява відкрила можливість для розв'язання багатьох практичних задач з достатньо високою точністю. Між тим, у деяких випадках, особливо при розгляді композиційних матеріалів із значною анізотропією властивостей, в умовах наявності локальних навантажень, нетонких пластин та оболонок, зумовлена зазначеними гіпотезами похибка стає суттєвою, що вимагає застосування моделей з менш жорсткими припущеннями [18].

Спроби врахувати ті чи інші фактори призвели до появи великої кількості підходів до побудови уточнених моделей, що спираються на ідею врахування поперечного зсуву. Про це згадано, наприклад, у [19] при розгляді задачі про поперечні коливання балки. Серед інших, однією з найпопулярніших є уточнена модель, що спирається на гіпотезу прямолінійного елемента. Вона передбачає, що елемент нормалі до серединної поверхні після деформації залишається прямолінійним, але змінює своє положення на деякі кути.

В подальшому узагальнені теорії ізотропних та анізотропних пластин брали участь такі вчені як Амбарцумян [20], Болле [21], Гольденвейзер [22], Нагді [23], Рейснер [24], Хома [25] та ін. В роботах [26] та [27] розвинута теорія одношарових оболонок на основі гіпотези прямолінійного елемента та сформульована уточнена теорія трансверсально-ізотропних оболонок сталої товщини, що є завершеною, як і класична теорія.

Дослідження оболонок згідно уточненої теорії проведено в монографіях [28], [29], а у [30], [31] викладена прикладна теорія оболонок з урахуванням поперечних зсувів, що може бути застосована у технічних розрахунках конструкцій. Деякі задачі з використанням моделі типу Тимошенко розглянуті у [32], монографія [33] цілком присвячена уточненим теоріям оболонок. Анізотропним пластинам та питанням досліджень композитних матеріалів, поєднанню теорії пружності та руйнування, практичних методів чисельного аналізу присвячена робота [34].

Для розв'язання практичних задач необхідно не лише обрати відповідну модель теорії пружності, а й відповідні методи, що дозволять отримати розв'язок з достатньою точністю та за прийнятний час. Окремої уваги при цьому заслуговує питання зручного та якісного описання досліджуваної області, що відповідає формі пластини.

Історично, один з основних підходів, що використовувався для лінійних задач теорії оболонок, викладених у роботах Власова [3], Гольденвейзера [4], Лур'є [8], Новожилова [10] за часів, коли використання ЕОМ було недоступне, базується на методі комплексного перетворення рівнянь. Він дозволяє отримати розв'язок в елементарних функціях в результаті пониження розмірності вихідних рівнянь.

Наближені розв'язки задач в аналітичному вигляді також отримувалися завдяки нехтуванню малими членами в основних рівняннях. Це, значною мірою, стосується відносно простих задач з простою формою об'єктів та лише при деяких визначених умовах закріплення і навантаження.

Якісно інші можливості з'явилися з появою ЕОМ спочатку як спеціалізованого інструменту, а пізніше і у вигляді персонального помічника дослідника. Розв'язки раніше недосяжних задач, які раніше неможливо було знайти в аналітичному вигляді, відносно легко та за прийнятний час можна отримати чисельно. Водночас із збільшенням потужності комп'ютерних систем, постійно зростає і точність, що може бути досягнена чисельними методами, та дещо розмивається межа між наближеними та точними розв'язками.

Поява готових комерційних програм та спеціалізованих пакетів під різні класи прикладних задач ще більше спростила весь процес та знизила вимоги до ІТ-підготовки науковців, що було одним з важливіших критеріїв їх широкого та все зростаючого застосування. Проте широке застосування чисельних методів має і зворотну сторону. При розгляді задач все важливішим стає приділення уваги усім етапам отримання розв'язку, від обрання теорії та побудови математичної моделі до застосування адекватних

методів, алгоритмів, вибору чи написання програм і аналізу отриманих даних. При цьому усі компоненти ланцюга вкрай важливо розглядати комплексно, оскільки найдрібніша помилка чи неточність на будь-якому кроці здатна зіпсувати результат або привести до неправильних висновків.

У повній мірі ці вимоги актуальні і при розв'язанні задач теорії пластин та оболонок [35], [36]. Знаходження розв'язків задач про НДС пластин та оболонок при різних граничних умовах та з різними геометричними параметрами вимагає розв'язання крайових задач із змінними параметрами, що призводить, в свою чергу, до значних математичних і обчислювальних труднощів [37].

Незважаючи на значні успіхи, що досягнуто в області розрахунку пластин та оболонок, більшість досліджень залишається присвяченою класичним задачам, де серединна поверхня описується простими аналітичними виразами, а її контури співпадають з координатними лініями в обраній системі координат. До таких оболонок можна віднести замкнуті на незамкнуті оболонки обертання, пластини та оболонки з канонічною формою в плані (прямокутні, круглі та ін.). У якості прикладів таких задач можна привести розрахунок пластин у формі квадрата [38], правильного трикутника та шестикутника за допомогою використання апроксимуючих функцій [39]. Значна увага біла приділена пластинам у формі паралелограма [40], [41], [42], [43], та трапеції [44], [45], у тому числі з використанням відповідних перетворень координат [46], [47], [48], [49].

Хоча подібні пластини та оболонки широко застосовуються в техніці, вони часто не можуть бути прийняті за основу схеми розрахунку багатьох елементів сучасних конструкцій. Розробка методів розрахунку пластин і оболонок, форма серединної поверхні і конфігурація межі яких не може бути легко описана аналітичними виразами, вимагає приділення уваги також питанням так званої параметризації поверхонь та досліджуваних областей. Питанням параметризації для задач теорії оболонок цілком присвячена робота [50], а особливості чисельного розв'язання задач з використанням

відповідних перетворень розглянуті у роботі [51]. Використання перетворення координат для відображення вихідної області у вигляді чотирикутника також було продемонстровано [52] на прикладі пластин у формі ромбу з апроксимацією цільової функції поліномами та при розгляді задачі нелінійного статичного аналізу на основі класичної теорії пластин [53] та теорії Коссера [54] для дуже великих деформацій.

Описання складної форми пластин за допомогою R-функцій дозволило авторам роботи [55] розв'язати багато задач для ізотропних та анізотропних пластин в умовах складного навантаження.

## **1.2. Методи розв'язання задач статички пластин**

Як було зазначено раніше, усі існуючі методи розв'язання крайових задач теорії пластин та оболонки, відповідно, побудовані на їх основі підходи можна розділити на дві групи в залежності від необхідності у використанні специфічних алгоритмів та ЕОМ: аналітичні та чисельні. Розглянемо деякі особливості кожної з цих груп окремо.

### **1.2.1. Аналітичні підходи**

При розгляді аналітичних підходів до розв'язання задач статички пластин та оболонки перш за все необхідно відмітити обмеженість набору задач, щодо яких можливе застосування відповідних методів. Це пов'язано, з одного боку, із складністю рівнянь, що описують НДС, та особливістю задач при різних умовах закріплення і навантаження. Певні труднощі можуть виникати також у випадках, коли точний розв'язок є відомим, але для отримання конкретного результату потрібне сумування рядів, що досить повільно збігаються [32].

Серед найпростіших задач з відомими аналітичними розв'язками можна згадати задачі про НДС круглих та кільцевих пластин [56], прямокутних та трикутних ортотропних пластин [57], [58]. За деяких припущень

щодо розподілу поверхневого навантаження, відомий аналітичний розв'язок задачі про еліптичну пластину, затиснену по контуру [59]. Багато подібних задач, у тому числі для смуг та еліптичних дисків, було розглянуто і для анізотропних матеріалів [60].

В задачах про згин пластин прямокутної форми з шарнірним обпиранням зручно використовувати метод, де невідома функція прогину пластини розшуковуються у вигляді тригонометричного ряду, кожен член якого задовольняє граничним умовам [61]. Розкладу у подібний ряд потребує також функція навантаження, яке може бути при цьому як розподілене по поверхні так і зосереджене. За умови вибору відповідних тригонометричних функцій метод може бути використано для розв'язання задач як класичної, так і уточненої теорії пластин.

Серед праць, що поєднують у собі відомі розв'язки поширених задач пластин та оболонок, як точні, так і наближені, варто згадати монографії Авдоница [62], Безухова [63], Вайнберга [56], Вольміра [64], Колкунова [65], Тимошенка [11].

Обмеженість кола задач, що можуть бути повністю розв'язані аналітично, цілком характерна і для випадків використання уточнених моделей. Деякі наближені розв'язки задач про НДС круглих і прямокутних пластин в уточненій постановці розглянуто у роботах [29], [33]. Фундаментальні розв'язки співвідношень теорії тонких пружних оболонок побудовані у [66] методом двовимірного перетворення Фур'є.

### **1.2.2. Чисельні підходи**

Поява такого потужного інструменту як ЕОМ дозволила не тільки розв'язувати наявні задачі з підвищеною точністю і швидкістю, а навіть поклала початок для розвитку окремого напрямку в науці. В області механіки деформівного твердого тіла з'явилися роботи цілком присвячені чисельним методам розв'язання відповідних задач [67]. Варіаційна постановка задач



виявилися досить зручною для чисельних розрахунків, про що свідчить поява таких засобів аналізу як метод Рітца, Бубнова-Гальоркіна, та безліч їх модифікацій [37].

Оснований на варіаційній постановці задач, метод скінчених елементів (МСЕ) набув великого значення не в останню чергу за універсальність програмної реалізації та можливість повного автоматизування розрахунків. Теорії та застосуванню МСЕ для розв'язання задач пластин та оболонок присвячена велика кількість монографій [68], [69], [70], та безліч статей, а його застосування виходить далеко за межі задач теорії пружності. Лише той факт, що реалізація певних різновидів МСЕ входить до складу будь якого сучасного комерційного програмного пакету для інженерних розрахунків, говорить сам за себе. В задачах теорії пластин та оболонок метод було використано в роботах Постнова та його учнів [71], [72], Розіна [73], [74] де на основі МСЕ створені комплекси програм та розв'язаний ряд задач теорії оболонок. Застосування МСЕ для розрахунку оболонок подвійної кривизни наведено у роботі Александрова, Лашенікова, Шапошнікова та Смірнова [75], а у монографії [76] наведено розрахунок неоднорідних по товщині пологих оболонок та пластин.

Одним з ефективних методів для розв'язання задач з рівняннями у часткових похідних, зокрема для задач теорії пластин у двовимірній постановці, є метод кінцевих різниць (МКР), що пропонує заміну похідних на деякі наближені вирази з кінцевими приростами функцій [77]. Застосуванню методу у теорії пружності сприяли роботи Варвака [78], Длугача [79], Дятловицького [80], Маркуса [81]. Широке застосування для розрахунку пологих оболонок метод отримав у роботах Назарова та його учнів [82], де було розглянуто деякі способи апроксимації диференціальних рівнянь для тих чи інших випадків деформації оболонок різних в умовах закріплення.

Для розв'язання двовимірних задач теорії оболонок та пластин у свій час широко застосовувався варіаційно-різнецевий метод [83], [84]. Метод використовувався у роботах Синявського, Угодчікова та його учнів [85]. За

допомогою методу Рітца та скінчених різниць шляхом запису шуканих функцій в переміщеннях Корнішиним отримано розв'язки ряду нелінійних задач теорії пластин та пологих оболонок [86].

В роботах Берга [87], Дунаєва [88], Корнішина [89] та ін. для розрахунку плит, що оперті на контурі, був успішно застосований метод колокації. Шукана функція при цьому апроксимується деяким послідовним рядом з невідомими коефіцієнтами, щодо якого вимагається задовільнення розв'язуваних рівнянь в окремих точках. Вихідна задача, таким чином, перетворюється у пошук невідомих коефіцієнтів апроксимуючих функцій, а точність отриманого розв'язку суттєво залежить від вибору виду цих функцій та кількості точок колокації. Про ефективність методу згадується, наприклад, у роботі [90], де за його допомогою розглядалася задача про коливання прямокутних пластин змінної товщини в уточненій постановці.

Для розв'язку диференціальних рівнянь широке застосування знайшов апарат сплайн-функцій [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], [98]. Їх застосування у чисельному аналізі зумовлене головним чином доброю збіжністю сплайнів по відношенню до досліджуваних функцій та простою реалізацією алгоритмів їх побудови на ЕОМ. Досвід застосування сплайн-функцій показує, що в усіх відомих випадках вдається досягти кращих результатів у порівнянні з класичним апаратом многочленів. Традиційно популярні у математичній фізиці метод колокації та варіаційний метод Рітца-Гальоркіна розв'язання крайових задач на базі многочленів мали значно обмежене застосування по причині значних обчислювальних труднощів. Перехід у цих методах на використання сплайнів дозволив суттєво спростити їх чисельну реалізацію та отримувати розв'язок з високим ступенем точності.

Модифікація методу колокації з використанням сплайнів різного порядку при розгляді задач пластин та оболонок знайшла широке застосування [99] у якості інструменту зниження розмірності системи розв'язувальних рівнянь для подальшого її розв'язання іншими чисельними методами. У сполученні з методом дискретної ортогоналізації було про-

демонстровано успішне застосування сплайн-апроксимації для задач про коливання прямокутних пластин [100], [101], пологих оболонок змінної товщини [102], задач статички та динаміки анізотропних пологих оболонок [103] та ін. Задачу про напружено-деформований стан ортотропних товстостінних пластин було розглянуто в тривимірній постановці [104], де сплайн-апроксимація була використана по двох з трьох координатних осей. Огляду класів задач, що були успішно розв'язані поєднанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації в межах класичної та уточненої теорії присвячена робота [105].

Високу точність показав підхід з використанням сплайн-апроксимації розв'язку в обох напрямках в задачі про стійкість тонких пластин [106]. У якості апроксимуючих функцій для переміщень сплайн-функції широко використовуються і в інших методах розв'язання задач пластин та оболонок [107]. Були запропоновані різні схеми поєднання сплайнів для задовільнення різноманітних граничних умов та збереження симетрії матриць відповідних коефіцієнтів [108].

У поєднанні з наближеним відображенням вихідної області у квадрат, автори роботи [109] запропонували за допомогою сплайнів розв'язувати задачі про згин класичних пластин практично довільної форми. Цей підхід отримав свій розвиток і для інших класів задач [110], [111]. Детальний огляд робіт щодо використання сплайн-функцій для розв'язання задач теорії пластин та оболонок надано у роботі [112].

Метод граничних елементів (МГЕ) що навіть розглядався у свій час як можлива заміна МСЕ, має в основі ідею зведення вихідних диференціальних рівнянь до інтегральних рівнянь на границі області, що розглядається. Незважаючи на наявність певних переваг, метод не отримав очікуваного розповсюдження не в останню чергу завдяки складності реалізації. Докладно питання застосування методу для розв'язання задач згину пластин та пологих оболонок довільного обрису розглянуто у монографії [113], де, зокрема, наведено результати розрахунків для ізотропних пластин у форті літери «Т»,

трапеції, правильного шестикутника, ортотропних пластин у формі круга, літери «Т» та трапеції. Серед інших робіт, що розкривають особливості методу та питання його практичного застосування можна назвати праці Бенерджи [114], Бреббія [115], [116], Вірюжського [117], Вентцеля [118], Крауча [119] та ін.

Застосування дискретних функцій дискретного змінного, так званих R-функцій, до розв'язання крайових задач призвело до появи відповідного методу. Він був успішно застосований для задач динаміки та статички пластин та передбачає можливість повної автоматизації розрахунків за допомогою ЕОМ. В роботі [120] наведено як теоретичні основи методу, так і приклади його практичного застосування. Позитивні результати отримані також для задач про вільні коливання пологих оболонок складної у плані форми [121].

Для розв'язання лінійних крайових задач за допомогою ЕОМ дуже ефективним виявився метод ортогональної прогонки [122], також відомий як метод дискретної ортогоналізації [99]. Його особливостями є використання процедури ортогоналізації проміжних векторів-розв'язків у дискретному наборі точок, що обумовлює стійкість методу при застосуванні на жорстких системах рівнянь. Також метод допускає проведення розрахунку в обох напрямках вздовж осі зміни аргументу шуканої функції, що у поєднанні з можливістю змінювати кількість точок ортогоналізації векторів дає зручний інструмент для контролю точності отриманих розв'язків.

Метод знайшов застосування не тільки при розгляді задач статички тонких та нетонких оболонок [123], але й при розгляді задач стійкості та коливань [124], [125]. Можливість розв'язання крайових задач для систем рівнянь із змінними коефіцієнтами обумовила його популярність у контексті розрахунків з неоднорідними матеріалами, пластинами та оболонками змінної товщини, в умовах складного навантаження [126].

### 1.3. Висновки до першого розділу

Спираючись на викладений огляд літератури, що охоплює історію появи та розвитку основних моделей теорії пластин та оболонки, а також основні підходи до розв'язання задач статичної пластин різної форми, слід відзначити наступне:

- більшість досліджень в області статичної пластин складної геометрії присвячена розгляду класичної моделі для відносно простих випадків навантаження;
- дослідження в уточненій постановці найчастіше проводились для випадку ізотропних матеріалів сталої товщини та переважно з простою формою пластин;
- для розв'язання задач статичної пластини складної геометрії найчастіше використовувалися наближені методи, що передбачають дискретизацію вихідної області.

Приймаючи до уваги постійну появу нових композиційних матеріалів та зростаюче застосування елементів конструкцій саме із складною формою, можна говорити про наявність потреби у подальших дослідженнях напружено-деформованого стану анізотропних пластин при різних умовах закріплення та навантаження. При цьому все зростаючі вимоги до точності розрахунків і водночас висока доступність засобів чисельного розв'язання задач відкривають нові можливості для вдосконалення та реалізації існуючих теоретично обґрунтованих підходів.

## РОЗДІЛ 2

### ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

#### 2.1. Загальні рівняння уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента

В роботі розглядаються пластини з ортотропних матеріалів, для яких виконується узагальнений закон Гука. Деформація пластин відбувається під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження. Наведемо основні рівняння уточненої теорії типу Тимошенка, що застосовуються при описанні напружено-деформованого стану пластин.

Нехай в декартовій системі координат  $xuz$  пластина, серединна поверхня якої має форму прямокутника, знаходиться під дією поверхневого навантаження  $q = q(x, y)$ . Згідно з обраною моделлю уточненої теорії пластин, приймаємо гіпотезу прямої лінії, що означає прийняття припущення про відсутність викривлення та збереження довжини елемента нормалі до серединної поверхні після деформації. При цьому елемент нормалі також розгортається відносно координатних осей на деякі кути, у тому числі за рахунок поперечного зсуву.

З урахуванням вказаних припущень, переміщення  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  отримують лінійний закон розподілу по товщині та можуть бути записані у вигляді

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\psi_x(x, y)$$

$$u_y(x, y, z) = v(x, y) + z\psi_y(x, y)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y)$$

де  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — переміщення точок координатної поверхні в напрямках  $x$ ,  $y$ , та  $z$  відповідно,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  — повні кути повороту прямолінійного елемента. Вказані співвідношення доповнює статична гіпотеза про можливість знехтувати у

виразах для узагальненого закону Гука нормальними поперечними напруженнями  $\sigma_z$  у порівнянні з іншими напруженнями.

Використовуючи замість напружень статично еквівалентні моменти та перерізуючи зусилля і, таким чином, здійснюючи перехід до двовимірної постановки задачі згідно виразів

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz,$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz,$$

рівняння рівноваги елемента серединної поверхні можна записати у вигляді [127]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$
(2.1)

де  $Q_x$ ,  $Q_y$  — перерізуючі зусилля;  $M_x$ ,  $M_y$  — згинаючі моменти;  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$  — скручуючі моменти;  $q = q(x, y)$  — поверхневе навантаження. У випадку ортотропної пластини, осі ортотропії якої співпадають з лініями координатної сітки, співвідношення пружності записуються через деформації згину координатної поверхні  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$  як

$$M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, \quad M_y = D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \quad (2.2)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 2D_{66}\kappa_{xy}, \quad Q_x = K_1\gamma_x, \quad Q_y = K_2\gamma_y$$

У свою чергу, деформації згину координатної поверхні можна визначити через кути повороту нормалі без врахування поперечного зсуву  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , кути

повороту нормалі спричинені поперечним зсувом  $\gamma_1, \gamma_2$  та повні кути повороту прямолінійного елемента  $\psi_x, \psi_y$ :

$$\begin{aligned} e_x(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y) + z\kappa_x(x, y), \\ e_y(x, y, z) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y) + z\kappa_y(x, y), \\ e_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, y)}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y(x, y)}{\partial x} = \\ &= \varepsilon_{xy}(x, y) + 2z\kappa_{xy}(x, y), \\ e_{xz}(x, y, z) &= \psi_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \psi_x(x, y) - \theta_x = \gamma_x, \\ e_{yz}(x, y, z) &= \psi_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \psi_y(x, y) - \theta_y = \gamma_y, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \\ \gamma_x &= \psi_x - \theta_x, \quad \gamma_y = \psi_y - \theta_y, \\ -\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Приймаючи за  $E_i, G_{ij}, \nu_i$  відповідно модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона, коефіцієнти жорсткості  $K_i, D_{ij}$  визначаються як

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{12} = \nu_y D_{11}, \\ D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{66} = G_{12} h^3 / 12, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{13}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{23}$$

Підставляючи вирази для деформацій (2.3) та коефіцієнтів жорсткості (2.4) у (2.2), а співвідношення (2.2) у систему рівнянь (2.1), отримуємо розв'язуючу



систему рівнянь відносно прогину  $w$  та двох кутів  $\psi_x, \psi_y$ , що має місце для прямокутної пластини сталого товщини  $h = \text{const}$  у вихідній декартовій системі координат  $xuz$  [128], [129]:

$$K_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -q \quad (2.5)$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - K_1 \psi_x - K_1 \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - K_2 \psi_y - K_2 \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Граничні умови на сторонах пластини  $x = \text{const}$  у випадку жорсткого закріплення мають вигляд

$$w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (2.6)$$

для шарнірного обпирання —

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (2.7)$$

а для вільного краю [125] —

$$Q_x = K_1 \gamma_x = K_1 (\psi_x - \theta_x) = K_1 \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$M_x = D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y = D_{11} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0,$$

$$M_{xy} = 2D_{66} \kappa_{xy} = D_{66} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

На сторонах пластини  $y = \text{const}$  граничні умови записуються аналогічно.

Система розв'язуючих рівнянь (2.5) разом з обраними граничними умовами на кожній стороні пластини у вигляді (2.6), (2.7) або (2.8) складає

двовимірну крайову задачу відносно функцій прогину  $w(x,y)$  та кутів  $\psi_x(x,y)$ ,  $\psi_y(x,y)$ .

## 2.2. Описання вихідної області за допомогою переходу до нової системи координат

Наведені у п. 2.1. співвідношення та вирази граничних умов (2.6), (2.7), (2.8) справедливі для декартової системи координат та прямокутної форми пластин, сторони якої можна задати у вигляді  $x = const$  (або  $y = const$ ). З певними змінами аналогічним чином можна описати і прості об'єкти обертання, наприклад, диски, використовуючи полярну систему координат. Тобто, в загальному випадку класичні підходи до розв'язання задач зазвичай передбачають, що досліджувана область має відносно просту форму, яка може бути задана у вигляді інтервалів значень змінних. Так само і більшість методів, що традиційно застосовуються для практичних розрахунків, висувають певні очікування на форму досліджуваних об'єктів, а у випадку її невідповідності — застосування деяких заходів, адаптації методів чи параметризації області.

Описати довільну опуклу чотирикутну область (рис. 2.1), що задана вершинами в точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  та  $(x_4, y_4)$ , можна [51] за допомогою перетворення вихідних декартових координат  $xu$  на площині у нові координати  $\xi\eta$ , що задається виразом

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\xi} \quad (2.9)$$

де вектор  $\bar{x}$  має компоненти  $\{x, y\}$ , вектор  $\bar{\xi}$  — компоненти  $\{1, \xi, \eta, \xi\eta\}$ , а матриця переходу  $T$  розміром  $2 \times 4$  цілком визначається координатами точок:

$$T = \begin{bmatrix} x_2 & [x_3 - x_2] & [x_1 - x_2] & [x_4 - x_3 + x_2 - x_1] \\ y_2 & [y_3 - y_2] & [y_1 - y_2] & [y_4 - y_3 + y_2 - y_1] \end{bmatrix}$$

Хоча вирази для зворотного переходу від координат  $\xi\eta$  до  $xu$  є доволі простими, при спробі отримати у явному вигляді вирази  $\xi(x,y)$ ,  $\eta(x,y)$

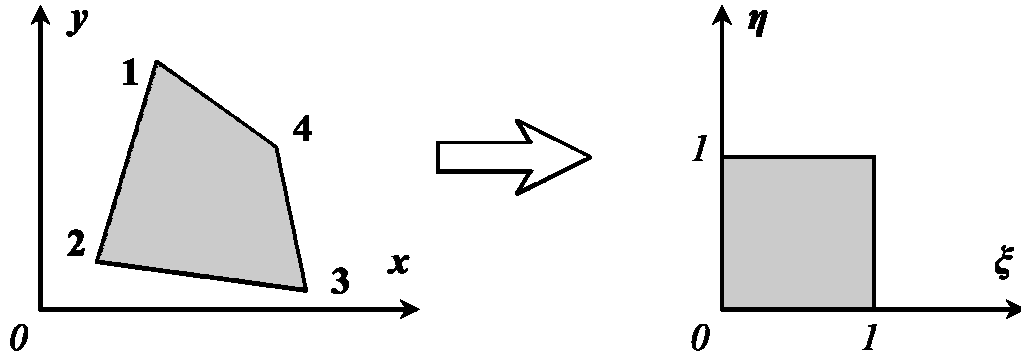


Рис. 2.1 — Перехід від вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника, що заданий координатами чотирьох точок, до одиничної області у новій системі координат.

наявність в них радикалів призводить до появи альтернативного варіанту перетворення  $xu \rightarrow \xi\eta$ . Останній, вочевидь, має бути відкинтий, оскільки переводить точки вихідного чотирикутника за межі цільового квадрата  $[0..1, 0..1]$ .

Для прикладу розглянемо чотирикутник з вершинами у точках  $A(1;4)$ ,  $B(4;1)$ ,  $C(7;5)$ ,  $D(2;4,5)$ , що зображено на рис. 2.2а. Відповідне зворотне перетворення координат  $x(\xi,\eta)$ ,  $y(\xi,\eta)$ , згідно з (2.9) буде мати вигляд

$$x(\xi,\eta) = 4 + 3\xi - 3\eta - 2\xi\eta, \quad y(\xi,\eta) = 1 + 4\xi + 3\eta - 3,5\xi\eta$$

Пряме перетворення, вирази для якого є розв'язками системи рівнянь (2.9) відносно змінних  $x$  та  $y$ , перетворює чотирикутник у квадрат  $A'B'C'D'$  рис. 2.2б:

$$\xi(x,y) = -\frac{\frac{15}{22}x + \frac{2}{11}y - 1 - \frac{1}{22}R}{-\frac{7}{33}x + \frac{4}{33}y - 1 - \frac{1}{33}R},$$

$$\eta(x,y) = -\frac{7}{66}x + \frac{2}{33}y + 1 - \frac{1}{66}R,$$

$$R = \sqrt{49x^2 - 56xy + 16y^2 + 132x - 264y + 924}.$$

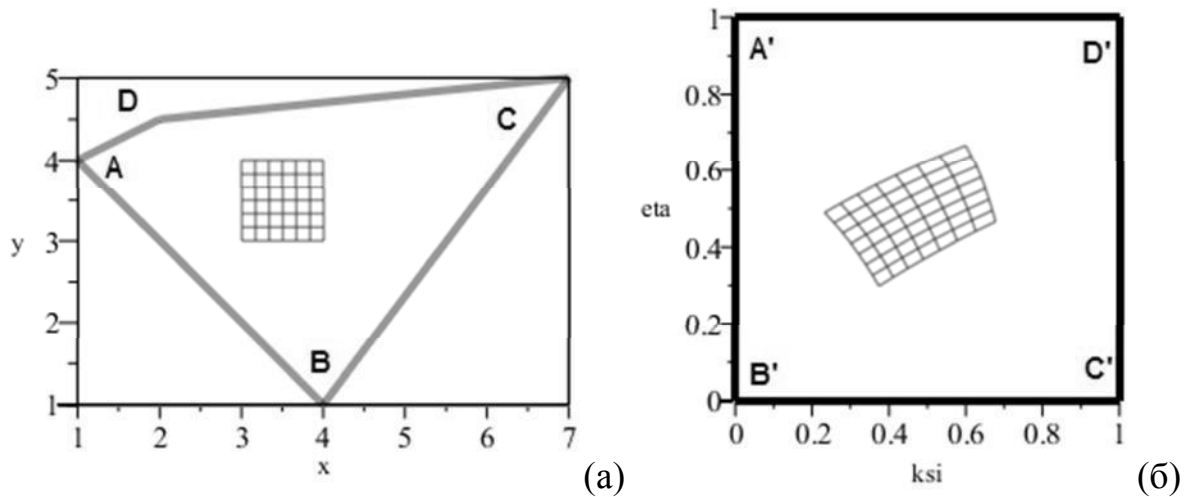


Рис. 2.2 — Чотирикутник ABCD у декартовій системі координат  $xu$  (а) та його відображення у нову область  $A'B'C'D'$  у формі одиничного квадрата (б)

Слід зазначити, що те саме перетворення відображає взятий з середини вихідного чотирикутника одиничний квадрат, сторони якого розташовані паралельно до ліній координатної сітки  $xu$  (рис. 2.2а), у деяку криволінійну фігуру (рис. 2.2б).

### 2.3. Розв'язувальні рівняння для чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів у новій системі координат

Щоб записати розв'язуючу систему рівнянь (2.5) у нових координатах  $\xi\eta$ , будемо використовувати вектор  $\bar{f}$  з 18 компонентами  $\left\{ \psi_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y}, \psi_y, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$  та відповідну матрицю коефіцієнтів  $S$  розміром  $3 \times 18$ . Приймаючи такі позначення, рівняння (2.5) можна записати у матричному вигляді

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q} \quad (2.10)$$

де вектор правих частин  $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}^T$ .

Визначення елементів матриці  $S$  потребує знаходження виразів для усіх компонентів вектору  $\bar{f}$  в нових координатах  $\xi\eta$  з врахування перетворення (2.9). Наведемо вивід цих співвідношень на прикладі функції прогину  $w(x,y)$ .

Перші похідні знайдемо з системи рівнянь, складених на основі відомих виразів для частинних похідних складної функції

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Її розв'язками будуть вирази

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A \frac{\partial w}{\partial \xi} + B \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = C \frac{\partial w}{\partial \xi} + D \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (2.11)$$

де  $A(\xi, \eta)$ ,  $B(\xi, \eta)$ ,  $C(\xi, \eta)$ ,  $D(\xi, \eta)$  — деякі функції координат  $\xi, \eta$ :

$$A = \frac{\partial y}{\partial \eta} / \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), \quad B = -\frac{\partial y}{\partial \xi} / \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right),$$

$$C = -\frac{\partial x}{\partial \eta} / \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), \quad D = \frac{\partial x}{\partial \xi} / \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

або, враховуючи перетворення (2.9),

$$A = (t_{24}\xi + t_{23})/\chi, \quad B = -(t_{24}\eta + t_{22})/\chi,$$

$$C = -(t_{14}\xi + t_{13})/\chi, \quad D = (t_{14}\eta + t_{12})/\chi \quad (2.12)$$

з позначенням  $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\eta + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$ .

Маючи вирази (2.11) для перших часткових похідних функції  $w$ , другі можемо знайти заміною у правій частині (2.11) самої функції  $w$  на вже отримані вирази для її перших похідних  $\frac{\partial w}{\partial x}$  або  $\frac{\partial w}{\partial y}$  [130], [131]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left( A \frac{\partial A}{\partial \xi} + B \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( A \frac{\partial B}{\partial \xi} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} + A^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + A^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$$

$$+ 2AB \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \left( C \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( C \frac{\partial D}{\partial \xi} + D \frac{\partial D}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} + C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\
&\quad + 2CD \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \left( A \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left( A \frac{\partial D}{\partial \xi} + B \frac{\partial D}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} + AC \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + BD \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\
&\quad + (AD + BC) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Введемо деякий вектор  $\bar{m}$  з компонентами  $\left\{ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$ , що є частинними похідними функції  $w$  у вихідній системі координат  $xу$ , відповідний йому у координатах  $\xi\eta$  вектор  $\bar{m}^*$  з компонентами  $\left\{ \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\}$  та матрицю переходу  $L$ , для яких виконується

$$\bar{m} = L \cdot \bar{m}^* \tag{2.14}$$

Маючи з (2.11) та (2.13) вирази для усіх компонентів  $\bar{m}$  через компоненти  $\bar{m}^*$ , можна визначити усі елементи матриці  $L$ :

$$L = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 & 0 \\ \left[ A \frac{\partial A}{\partial \xi} + B \frac{\partial A}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial B}{\partial \xi} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] & A^2 & B^2 & 2AB \\ \left[ C \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ C \frac{\partial D}{\partial \xi} + D \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & C^2 & D^2 & 2CD \\ \left[ A \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial D}{\partial \xi} + B \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & AC & BD & [AD + BC] \end{bmatrix}$$

Вираз (2.14), відповідно, для похідних функції прогину  $w$  набуває остаточного вигляду:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 & 0 \\ \left[ A \frac{\partial A}{\partial \xi} + B \frac{\partial A}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial B}{\partial \xi} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] & A^2 & B^2 & 2AB \\ \left[ C \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ C \frac{\partial D}{\partial \xi} + D \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & C^2 & D^2 & 2CD \\ \left[ A \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial D}{\partial \xi} + B \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & AC & BD & [AD + BC] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

Значення виразів  $A, B, C, D$  наведено у (2.12). Їх похідні, що входять до складу матриці  $L$ , мають вигляд

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{t_{24}\chi - (t_{24}\xi + t_{23})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{-(t_{24}\xi + t_{23})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{(t_{24}\eta + t_{22})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{-(t_{24}\chi - (t_{24}\eta + t_{22})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13}))}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{-(t_{14}\chi - (t_{14}\xi + t_{13})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14}))}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{(t_{14}\xi + t_{13})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} = \frac{-(t_{14}\eta + t_{12})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})}{\chi^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \eta} = \frac{(t_{14}\chi - (t_{14}\eta + t_{12})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13}))}{\chi^2}$$

де  $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\eta + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$ .

Для функцій  $\psi_x, \psi_y$  вирази для визначення похідних по координатам  $x, y$  через похідні по координатам  $\xi, \eta$  будуть мати вигляд, аналогічний до (2.14):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 & 0 \\ \left[ A \frac{\partial A}{\partial \xi} + B \frac{\partial A}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial B}{\partial \xi} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] & A^2 & B^2 & 2AB \\ \left[ C \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ C \frac{\partial D}{\partial \xi} + D \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & C^2 & D^2 & 2CD \\ \left[ A \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial D}{\partial \xi} + B \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & AC & BD & [AD + BC] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

та

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 & 0 \\ \left[ A \frac{\partial A}{\partial \xi} + B \frac{\partial A}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial B}{\partial \xi} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] & A^2 & B^2 & 2AB \\ \left[ C \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ C \frac{\partial D}{\partial \xi} + D \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & C^2 & D^2 & 2CD \\ \left[ A \frac{\partial C}{\partial \xi} + B \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] & \left[ A \frac{\partial D}{\partial \xi} + B \frac{\partial D}{\partial \eta} \right] & AC & BD & [AD + BC] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix}$$

Аналогічно вектору  $\bar{f}$  введемо у системі координат  $\xi, \eta$  вектор  $\bar{f}^*$  з 18 компонентами  $\left\{ \psi_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta}, \psi_y, \dots, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi \partial \eta} \right\}$  та матрицю переходу  $P$  таку, що виконується

$$\bar{f} = P \cdot \bar{f}^* \quad (2.15)$$

У складі векторів маємо 18 компонентів, по 6 для кожної з трьох функцій  $w, \psi_x, \psi_y$ . Зважаючи на те, що для кожної функції виконується співвідношення (2.14), матриця  $P$  у (2.15) буде мати вигляд



$$P = \begin{bmatrix} 1 & o_r & 0 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & \mathbf{L} & o_c & \mathbf{O} & o_c & \mathbf{O} \\ 0 & o_r & 1 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & \mathbf{O} & o_c & \mathbf{L} & o_c & \mathbf{O} \\ 0 & o_r & 0 & o_r & 1 & o_r \\ o_c & \mathbf{O} & o_c & \mathbf{O} & o_c & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

де позначено  $\mathbf{L}$  — матриця елементів переходу до нових координат для похідних розміром  $5 \times 5$ ,  $\mathbf{O}$  — нульова матриця розміром  $5 \times 5$ ,  $o_c$  — нульовий вектор-стовпець з 5 компонент,  $o_r$  — нульовий вектор-строка з 5 компонент.

З врахуванням (2.15) система рівнянь (2.10) у новій системі координат приймає вигляд

$$S \cdot (P \cdot \bar{f}^*) = \bar{q}^*$$

або

$$S^* \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^* \quad (2.16)$$

де  $\bar{f}^*$ ,  $\bar{q}^*$  — аналоги векторів  $\bar{f}$ ,  $\bar{q}$  у новій системі координат,  $S^* = S \cdot P$  — матриця відповідних коефіцієнтів. Вираз (2.16) являє собою розв'язуючу систему рівнянь (2.5) у координатах  $\xi\eta$  та містить у собі інформацію, щодо вихідної форми досліджуваної чотирикутної пластини.

В загальному випадку граничні умови (2.6), (2.7) та (2.8) для пластини, сторони якої не є паралельними до ліній координатної сітки, повинні бути записані відносно відповідних нормалей, що для довільного характеру можливої форми пластин становить певні труднощі. До того ж, вирази для граничних умов, що мають у складі похідні (шарнір, вільний край), мають бути змінені з урахуванням переходу до нових координат відповідно до (2.14).

Для випадку жорсткого закріплення та довільно зорієнтованого краю отримуємо граничні умови у вигляді, аналогічному до (2.6):

$$w = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0 \quad (2.17)$$

Шарнірне закріплення (2.7) для краю, що паралельний до осі  $y$  вихідної системи координат, тобто після переходу до  $\xi\eta$  — на сторонах  $\xi = const$ , набуває вигляду

$$w = 0, \quad A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} = 0, \quad \psi_y = 0, \quad (2.18)$$

а вільний край (2.8), що паралельний до осі  $y$  вихідної системи координат, може бути заданий у  $\xi\eta$  на сторонах  $\xi = const$  як

$$\begin{aligned} \psi_x + A \frac{\partial w}{\partial \xi} + B \frac{\partial w}{\partial \eta} &= 0, \\ A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + \nu_y \left( C \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right) &= 0, \\ C \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + A \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Вирази  $A, B, C, D$  приймаються у значенні, що наведено у (2.12).

Вихідна крайова задача для системи рівнянь (2.5) відносно функцій прогину  $w(x,y)$  та кутів  $\psi_x(x,y), \psi_y(x,y)$  з обраними умовами закріплення країв чотирикутної пластини у формі (2.6), (2.7) та (2.8) у новій системі координат  $\xi\eta$  приймає вигляд (2.16) відносно функцій прогину  $w(\xi,\eta)$  та кутів  $\psi_x(\xi,\eta), \psi_y(\xi,\eta)$ . Граничні умови задаються (2.17), (2.18) та (2.19) на сторонах  $\xi = const$  та  $\eta = const$  області у формі одиничного квадрата (рис. 2.2б).

#### **2.4. Особливості задач про напружено-деформований стан для випадку чотирикутних пластин з ізотропного матеріалу**

Рівняння, що описують напружено-деформований стан пластин з ортотропних матеріалів (п. 2.1.), та, відповідно, отримана на їх основі розв'язуюча система рівнянь (п. 2.3.) з врахуванням переходу до нової

області (п. 2.2.) можуть бути використані також для випадку пластин з ізотропного матеріалу. При цьому необхідно покласти у (2.4):

$$E_x = E_y = E, \quad \nu_x = \nu_y = \nu, \quad G_{ij} = G = E/2(1 + \nu).$$

Наслідком цього згідно до (2.4) стають однакові значення деяких коефіцієнтів  $K_i$ ,  $D_{ij}$ , у системі (2.5) проте загальний вигляд кінцевої системи рівнянь (2.16), особливо зважаючи на довільний характер вихідної форми пластини, після перетворення координат залишається тим самим. Це дозволяє використовувати формулювання задачі у вигляді (2.16) з граничними умовами (2.17), (2.18) та (2.19) без додаткових змін у тому числі для ізотропного матеріалу, вважаючи це окремим випадком значень пружних сталей.

## 2.5. Висновки до другого розділу

В розділі наведено основні рівняння уточненої теорії пластин типу Тимошенка, що враховує деформації поперечного зсуву. На основі рівнянь рівноваги елемента серединної поверхні ортотропної прямокутної пластини складено розв'язуючу систему диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних відносно функцій прогину та двох кутів.

Наведено схему відображення вихідної області у декартовій системі координат на область у формі одиничного квадрата в іншій системі координат, що дозволяє розглядати пластини складної геометрії за рахунок зміни коефіцієнтів розв'язуючої системи рівнянь. Виведено явний вигляд розв'язуючої системи рівнянь для ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника та відповідні вирази для задання граничних умов двовимірної крайової задачі.

### РОЗДІЛ 3

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СТАТИКИ ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ

### 3.1. Деякі відомості про сплайн-функції. Основні положення методу сплайн-колокації

Сплайном називають функцію, що складається з частин узагальнених поліномів по заданому базису. Поліноміальні сплайни, для яких за базисні функції вибрані функції  $1, x, x^2, \dots$ , дуже поширені, але для задач інтерполяції в багатьох випадках набагато ефективніше використовувати апарат так званих  $B$ -сплайнів.

За означення нормалізованих  $B$ -сплайнів часто приймають рекурентну формулу

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x) \quad (3.1)$$

де функції  $B_m^i(x)$  є сплайнами степеня  $m$  дефекту 1 зі скінченими носіями мінімальної довжини та побудовані на розширеній сітці вузлів  $\Delta$  для відрізка  $[a, b]$ :

$$\Delta = x_{-m} < \dots < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \dots < b = x_N < \dots < x_{N+m}$$

При цьому приймають

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Нормалізовані  $B$ -сплайни мають певні властивості:

- 1)  $B_m^i(x) > 0$  при  $x \in [x_i, x_{i+1})$ , та  $B_m^i(x) \equiv 0$  при  $x \notin [x_i, x_{i+1})$
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} B_m^i(x) dx = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1}$

Система функцій  $B_m^i(x)$ ,  $(i = -m, \dots, N-1)$  є лінійно незалежною і утворює базис у просторі сплайнів  $S_m(\Delta)$ , тобто кожен сплайн  $S_m(x) \in S_m(\Delta)$  може бути єдиним образом записаний у вигляді

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} b_i B_m^i(x),$$

де  $b_i$  — деякі сталі коефіцієнти.

Якщо прийняти сітку  $\Delta$  за рівномірну ( $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ ), а нумерацію сплайнів здійснювати по їх середньому вузлу, тобто зсунути її на  $(m+1)/2$  вправо і записати  $B_m^i(x)$  замість  $B_m^{i-(m+1)/2}(x)$ , перші два  $B$ -сплайни непарного степеня можна побудувати як

$$B_1^i(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-1}, \\ t, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 1-t, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} < x < \infty. \end{cases}$$

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-2}, \\ t^3, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 3t^3 - 6t^2 + 4, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ (1-t)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0, & x_{i+2} < x < \infty. \end{cases}$$

де  $t = \frac{(x-x_k)}{h}$  на інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = i = -\frac{m+1}{2}, i + \frac{m+1}{2} - 1$ . При чисельному розв'язанні задач більш ефективним може бути використання рекурентної формули (3.1) та початкового значення для  $B_0^i(x)$ .

Наведемо приклад побудови  $B$ -сплайнів до третього степеня включно, прийнявши сітку вузлів рівномірною в межах від 0 до 10 з кроком 1, тобто  $\Delta = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Використовуючи означення для  $B$ -сплайну нульового степеня  $B_0^i(x)$ , отримати відповідні значення легко: на рис. 3.1а зображені лише графіки 1-го, 3-го та 8-го  $B$ -сплайнів. Далі, використовуючи рекурентну формулу (3.1), отримаємо  $B$ -сплайни першого степеня з номерами 1, 3 та 8

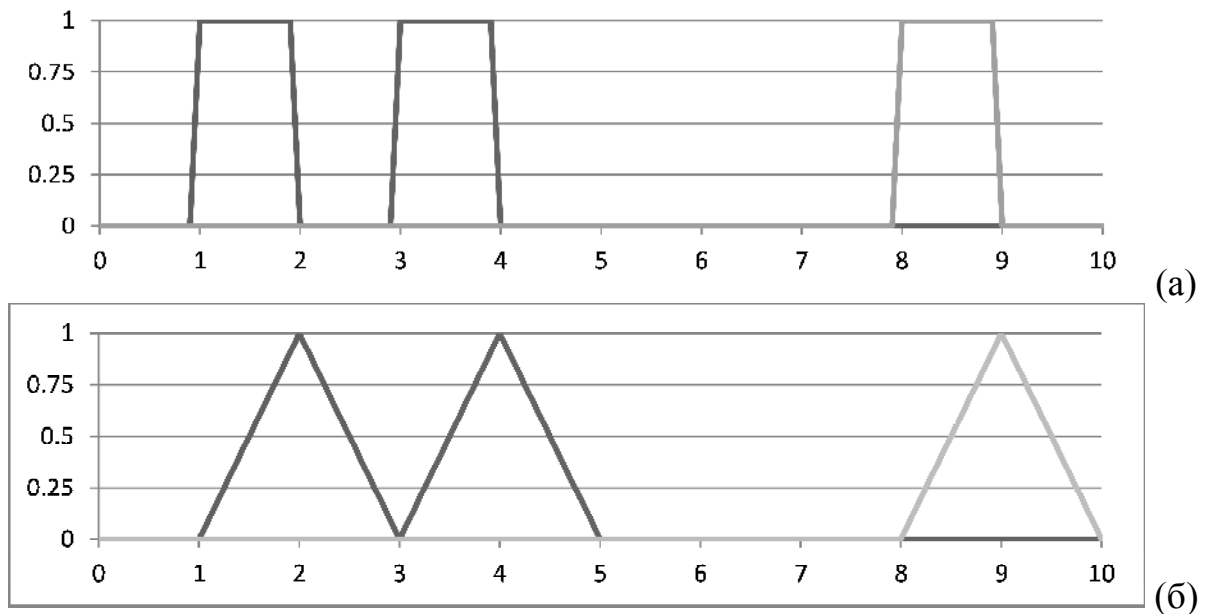


Рис. 3.1 —  $B$ -сплайни нульового (а) та першого (б) степеня з номерами 1, 3 та 8, побудовані на рівномірній сітці вузлів

(рис. 3.1б). При цьому видно, що в той час, коли для  $B$ -сплайнів нульового степеня достатньо задати два вузли, у випадку  $B$ -сплайнів першого степеня кількість потрібних вузлів зростає до трьох.

Побудова  $B$ -сплайнів другого та третього степеня (рис. 3.2) вимагає наявності ще більшої кількості вузлів: 4 для сплайнів другого степеня та 5 для третього. Це в першу чергу є тим фактором, що призводить до необхідності використання розширених сіток вузлів за потреби розрахунку значень декількох сплайн-функцій в кожній точці.

За необхідності, визначати значення похідних порядку  $m$  для  $B$ -сплайну степеня  $n$ , побудованого в  $i$ -му вузлі, можна використовуючи рекурентне співвідношення [132]:

$$\begin{aligned}
 (B_i^n)^m = & \frac{m(B_i^{n-1})^{m-1} + (x - x_i)(B_i^{n-1})^m}{x_{i+n} - x_i} \\
 & + \frac{-m(B_{i+1}^{n-1})^{m-1} + (x_{i+n+1} - x)(B_{i+1}^{n-1})^m}{x_{i+n+1} - x_{i+1}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

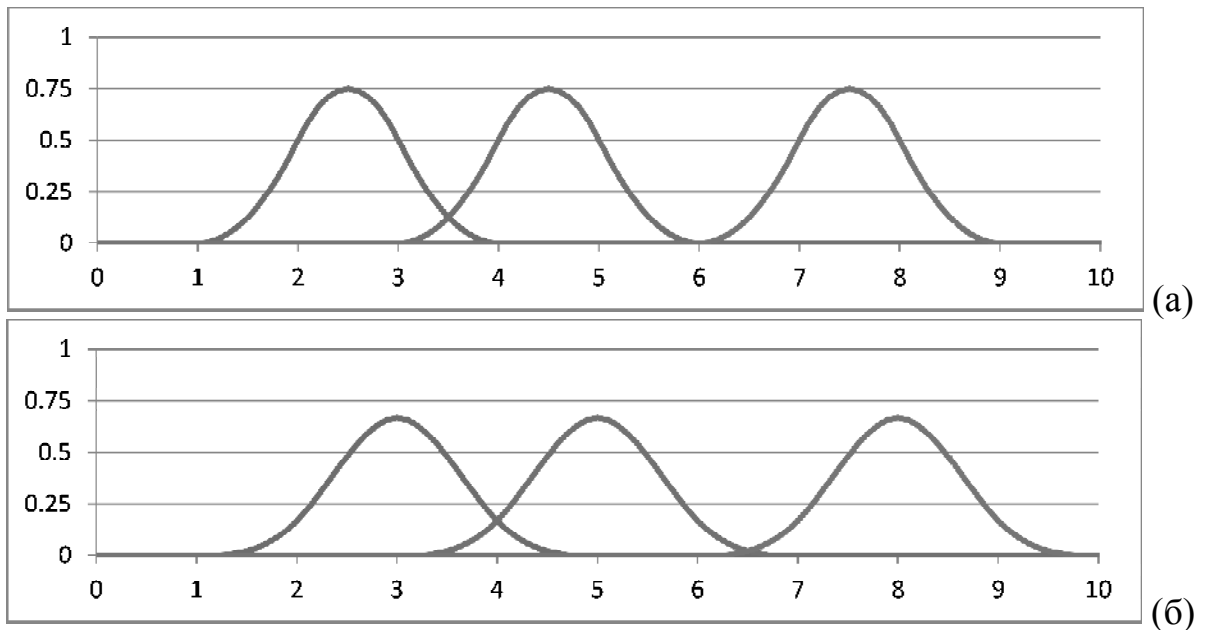


Рис. 3.2 —  $B$ -сплайни другого (а) та третього (б) степеня з номерами 1, 3 та 6, побудовані на рівномірній сітці вузлів

В такому записі похідна нульового порядку  $(B_i^n(x))^0$  буде означати  $B_i^n(x)$ , тобто значення самого  $B$ -сплайну. Значення похідних для  $B$ -сплайну третього степеня  $B_3^i$ , побудованого на рівномірній сітці вузлів, до другого порядку включно у вузлових точках наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 — Значення похідних  $B$ -сплайну третього степеня  $B_3^i$  до другого порядку включно

інтервал	$B_3^i$	$B_3^{i''}$
$(-\infty, x_{i-2})$	0	0
$[x_{i-2}, x_{i-1})$	$\frac{t^2}{2h}$	$\frac{t}{h^2}$
$[x_{i-1}, x_i)$	$\frac{-3t^2 + 2t + 1}{2h}$	$\frac{1 - 3t}{h^2}$
$[x_i, x_{i+1})$	$\frac{3t^2 - 4t}{2h}$	$\frac{3t - 2}{h^2}$
$[x_{i+1}, x_{i+2})$	$\frac{-(1-t)^2}{2h}$	$\frac{1-t}{h^2}$
$[x_{i+2}, +\infty)$	0	0

На застосуванні сплайнів базується відомий метод розв'язання крайових задач, що носить назву методу сплайн-колокації. Основні положення методу полягають у наступному.

Розглянемо крайову задачу з рівнянням

$$Ly = \alpha_0(x)y^{(n)} + \alpha_1(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}(x)y' + \alpha_n(x)y = r(x),$$

$$y = y(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.3)$$

та крайовими умовами, що задані як

$$A_1 \cdot \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}, \quad A_2 \cdot \begin{bmatrix} y(b) \\ y'(b) \\ \vdots \\ y^n(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-k} \end{bmatrix}.$$

Тут  $A_1, A_2$  — задані прямокутні матриці порядку  $k \times n$  та  $(n - k) \times n$  відповідно,  $k < n$ . Також будемо вважати, що коефіцієнти рівняння (3.3) і  $r(x)$  є достатньо гладкими функціями, а задача має єдиний розв'язок  $y(x)$ . Останній будемо шукати у вигляді кубічного сплайну  $S(x)$  з вузлами на сітці  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Від  $S(x)$  будемо вимагати задовільнення рівняння (3.3) в точках колокації  $\xi_k \in [a, b]$ ,  $k = \overline{0, N}$  та граничних умов

$$A_1 \cdot \begin{bmatrix} S(a) \\ S'(a) \\ \vdots \\ S^n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}, \quad A_2 \cdot \begin{bmatrix} S(b) \\ S'(b) \\ \vdots \\ S^n(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-k} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Система (3.3)–(3.4) буде системою алгебраїчних рівнянь відносно параметрів сплайну  $S(x)$ .

Оскільки розмірність простору сплайнів класу  $C^2$  дорівнює  $N+3$ , а сплайни  $S(x)$  задовольняють двом граничним умовам (3.4), кількість точок колокації повинна бути  $N+1$ . Розташування точок колокації не може бути довільним, а самі точки не можуть припадати на значення, де коефіцієнти рівняння (3.3) мають особливості [94].



Конкретний вигляд системи (3.4) залежить від обраного способу представлення сплайну  $S(x)$ . Якщо використовувати згадані раніше  $B$ -сплайни, за певних умов похибка  $|S(x) - y(x)|$ , що утворюється внаслідок апроксимації у такий спосіб невідомої функції  $y(x)$ , може бути суттєво зменшена. Для цього потрібно, щоб рівномірна сітка вузлів  $\Delta$  мала парну кількість вузлів  $\xi_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ ,  $N = 2n + 1$ , а розташування вузлів задовольняло умовам

$$\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \quad \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \quad i = 0, \dots, n.$$

Тобто на кожному інтервалі сітки  $[x_{2i}, x_{2i+1}]$  було дві точки колокації, а на сусідніх інтервалах не було жодної.

При розташуванні точок колокації за схемою

$$\xi_{2i} = x_{2i} + t_1 h, \quad \xi_{2i+1} = x_{2i} + t_2 h, \quad t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

де крок  $h = x_{2i+1} - x_{2i}$  — крок сітки, точки  $t_1$ ,  $t_2$  — корені поліному Лежандра другого степеня  $P_2 = 6t^2 - 6t + 1$  на відрізку  $[0; 1]$ , похибка є мінімальною [94]. Викладена схема підвищення точності буде використана далі при розв'язанні двовимірних крайових задач із сплайн-апроксимацією розв'язку в одному з напрямків та чисельним інтегруванням системи рівнянь в іншому.

### **3.2. Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою сплайн-апроксимації невідомих функцій в одному з координатних напрямків**

У другому розділі було показано, що напружено-деформований стан ортотропних прямокутних пластин сталої товщини під дією розподіленого поверхневого навантаження можна описати системою рівнянь (2.5). Із застосуванням відповідного перетворення координат (п. 2.2.) система (2.5) перетворюється у рівняння (2.16), що дозволяє вже розглядати пластини у

формі довільного опуклого чотирикутника, який відображається в одиничну область у нових координатах. Поєднуючи (2.16) з умовами закріплення країв пластини у формі (2.17), (2.18) та (2.19), отримуємо двовимірну крайову задачу у новій системі координат  $\xi\eta$ . Оскільки отримана у таких спосіб нова область є прямокутною, з'являється можливість використовувати добре відпрацьовані методи, що зазвичай застосовуються для розв'язання відповідного класу задач.

Одним з поширених методів, що дозволяє знизити розмірність крайової задачі і відповідно перетворити двовимірну крайову задачу для системи рівнянь у частинних похідних на систему більш високого порядку для звичайних диференціальних рівнянь, є описаний у п. 3.1. метод сплайн-колокації. Стосовно задачі, що сформульована у п. 2.3., метод передбачає виконання наступних дій.

В першу чергу виконаємо певні перетворення щодо системи (2.16). Тут і надалі будемо вважати, що перше рівняння у (2.5) та, відповідно, (2.16) записано останнім.

Введемо деякий вектор з компонентами  $\left\{ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\}$  і перенесемо у рівняннях (2.16) у праву частину усі інші доданки, що не містять вказаних компонент. Отриману систему запишемо як

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

що дозволяє записати у свою чергу

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g_{12}u_2 - g_{22}u_1}{\rho} \\ \frac{g_{11}u_2 - g_{21}u_1}{\rho} \\ \frac{u_3}{g_{33}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

з позначенням  $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \rho$ . Оскільки невідомі компоненти вектору  $\bar{f}^*$  з (2.16) містяться тільки у виразах  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  і не входять до складу  $g_{ij}$ , рівняння (3.5) можна знову представити у матричному вигляді аналогічно до (2.16):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = R \cdot \bar{f}^{**} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ g_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

де матриця коефіцієнтів  $R$  має порядок  $3 \times 15$ , вектор  $\bar{f}^{**}$  має 15 компонентів

$$\left\{ \psi_x, \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta}, \psi_y, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\}:$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1.15} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2.15} \\ r_{31} & r_{32} & \dots & r_{3.15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_x \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \eta} \\ \psi_y \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ g_{33} \end{bmatrix}$$

Елементи матриці  $R$  та  $g_{ij}$  є виразами відносно елементів вихідної матриці  $S$  коефіцієнтів системи рівнянь (2.10) та елементів матриці переходу для похідних  $L$  (наведено лише ненульові значення):

$$\begin{aligned}
r_{1.1} &= \frac{-g_{22}s_{1.1}}{\rho}, & r_{1.2} &= \frac{g_{12}s_{2.6}l_{51} + (-l_{31}s_{1.4} - l_{41}s_{1.5})g_{22}}{\rho}, \\
r_{1.3} &= \frac{g_{12}s_{2.6}l_{52} + (-l_{32}s_{1.4} - l_{42}s_{1.5})g_{22}}{\rho}, \\
r_{1.4} &= \frac{g_{12}s_{2.6}l_{54} + (-l_{34}s_{1.4} - l_{44}s_{1.5})g_{22}}{\rho}, \\
r_{1.5} &= \frac{g_{12}s_{2.6}l_{55} + (-l_{35}s_{1.4} - l_{45}s_{1.5})g_{22}}{\rho}, \\
r_{1.6} &= \frac{g_{12}s_{2.1}}{\rho}, & r_{1.7} &= \frac{-g_{22}s_{1.12}l_{51} + (l_{31}s_{2.10} + l_{41}s_{2.11})g_{12}}{\rho}, \\
r_{1.8} &= \frac{-g_{22}s_{1.12}l_{52} + (l_{32}s_{2.10} + l_{42}s_{2.11})g_{12}}{\rho}, \\
r_{1.9} &= \frac{-g_{22}s_{1.12}l_{54} + (l_{34}s_{2.10} + l_{44}s_{2.11})g_{12}}{\rho}, \\
r_{1.10} &= \frac{-g_{22}s_{1.12}l_{55} + (l_{35}s_{2.10} + l_{45}s_{2.11})g_{12}}{\rho}, \\
r_{1.12} &= \frac{g_{12}l_{21}s_{2.15} - g_{22}l_{11}s_{1.14}}{\rho}, & r_{1.13} &= \frac{g_{12}l_{22}s_{2.15} - g_{22}l_{12}s_{1.14}}{\rho}, \\
r_{2.1} &= \frac{g_{21}s_{1.1}}{\rho}, & r_{2.2} &= \frac{-g_{11}s_{2.6}l_{51} + (l_{31}s_{1.4} + l_{41}s_{1.5})g_{21}}{\rho}, \\
r_{2.3} &= \frac{-g_{11}s_{2.6}l_{52} + (l_{32}s_{1.4} + l_{42}s_{1.5})g_{21}}{\rho}, \\
r_{2.4} &= \frac{-g_{11}s_{2.6}l_{54} + (l_{34}s_{1.4} + l_{44}s_{1.5})g_{21}}{\rho}, \\
r_{2.5} &= \frac{-g_{11}s_{2.6}l_{55} + (l_{35}s_{1.4} + l_{45}s_{1.5})g_{21}}{\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2.6} &= \frac{-g_{11}s_{2.7}}{\rho}, & r_{2.7} &= \frac{g_{21}s_{1.12}l_{51} + (-l_{31}s_{2.10} - l_{41}s_{2.11})g_{11}}{\rho}, \\
r_{2.8} &= \frac{g_{21}s_{1.12}l_{52} + (-l_{32}s_{2.10} - l_{42}s_{2.11})g_{11}}{\rho}, \\
r_{2.9} &= \frac{g_{21}s_{1.12}l_{54} + (-l_{34}s_{2.10} - l_{44}s_{2.11})g_{11}}{\rho}, \\
r_{2.10} &= \frac{g_{21}s_{1.12}l_{55} + (-l_{35}s_{2.10} - l_{45}s_{2.11})g_{11}}{\rho}, \\
r_{2.12} &= \frac{-g_{11}l_{21}s_{2.15} + g_{21}l_{11}s_{1.14}}{\rho}, & r_{2.13} &= \frac{-g_{11}l_{22}s_{2.15} + g_{21}l_{12}s_{1.14}}{\rho}, \\
r_{3.2} &= \frac{-l_{11}s_{3.2}}{g_{33}}, & r_{3.3} &= \frac{-l_{12}s_{3.2}}{g_{33}}, & r_{3.7} &= \frac{-l_{21}s_{3.9}}{g_{33}}, & r_{3.8} &= \frac{-l_{22}s_{3.9}}{g_{33}}, \\
r_{3.12} &= \frac{-l_{31}s_{3.16} - l_{41}s_{3.17}}{g_{33}}, & r_{3.13} &= \frac{-l_{32}s_{3.16} - l_{42}s_{3.17}}{g_{33}}, \\
r_{3.14} &= \frac{-l_{34}s_{3.16} - l_{44}s_{3.17}}{g_{33}}, & r_{3.15} &= \frac{-l_{35}s_{3.16} - l_{45}s_{3.17}}{g_{33}}, \\
g_{11} &= l_{33}s_{1.4} + l_{43}s_{1.5}, & g_{12} &= l_{53}s_{1.12}, & g_{21} &= l_{53}s_{2.6}, \\
g_{22} &= l_{33}s_{2.10} + l_{43}s_{2.11}, & g_{33} &= l_{33}s_{3.16} + l_{43}s_{3.17}
\end{aligned}$$

Відповідно до методу сплайн-колокації, розв'язки системи рівнянь (2.16) і, в свою чергу, її дещо зміненого варіанту (3.6) будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
w(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta), \\
\psi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{xi}(\xi) \varphi_{xi}(\eta), \\
\psi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{yi}(\xi) \varphi_{yi}(\eta),
\end{aligned}$$

(3.7)

де  $w_i(\xi)$ ,  $\psi_{xi}(\xi)$ ,  $\psi_{yi}(\xi)$  — шукані функції,  $\varphi_{wi}(\eta)$ ,  $\varphi_{xi}(\eta)$ ,  $\varphi_{yi}(\eta)$  — лінійні комбінації кубічних  $B$ -сплайнів, що наперед задовольняють обрані граничні умови на сторонах пластини  $\eta = const$  та побудовані на рівномірній розширеній сітці вузлів  $\Delta$ :  $\eta_{-3}, \dots, \eta_0, \dots, \eta_N, \dots, \eta_{N+3}$ .

При жорсткому закріпленні країв пластини  $\eta = const$  лінійні комбінації  $B_3$ -сплайнів будуються за схемою [99]:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -4B_3^{-1} + B_3^0, \\ \varphi_1 &= B_3^{-1} - \frac{1}{2}B_3^0 + B_3^{+1}, \\ \varphi_i &= B_3^i, \\ \varphi_{N-1} &= B_3^{N+1} - \frac{1}{2}B_3^N + B_3^{N-1}, \\ \varphi_N &= -4B_3^{N+1} + B_3^N,\end{aligned}\tag{3.8}$$

що дозволяє задовільнити у точках  $\eta = \eta_0$  та  $\eta = \eta_N$  умови  $\varphi(\eta) = 0$ ,  $\varphi'(\eta) \neq 0$ . Виконання вказаних вимог безпосередньо у вузлах рівномірної сітки легко перевірити, використовуючи значення похідних з табл. 3.1. Закріплення типу шарнір відповідає схемі

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= B_3^0, \\ \varphi_1 &= B_3^{-1} - \frac{1}{2}B_3^0 + B_3^{+1}, \\ \varphi_i &= B_3^i, \\ \varphi_{N-1} &= B_3^{N+1} - \frac{1}{2}B_3^N + B_3^{N-1}, \\ \varphi_N &= B_3^N,\end{aligned}\tag{3.9}$$

що означає у точках  $\eta = \eta_0$  та  $\eta = \eta_N$  виконання умови  $\varphi(\eta) \neq 0$ ,  $\varphi'(\eta) = 0$ . Нумерацію  $B_3$ -сплайнів наведено за номером центрального вузла. У випадку,

коли на протилежних краях пластини задані різні граничні умови, використовується відповідна комбінація для функцій  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{N-1}, \varphi_N$  з набору (3.8) або (3.9).

Замінюючи функції двох координат  $w(\xi, \eta), \psi_x(\xi, \eta)$  та  $\psi_y(\xi, \eta)$  у (3.6) їх відповідними розкладами згідно (3.7) і вимагаючи, відповідно до ідеї методу сплайн-колокації, задовільнення рівнянь (3.6) в усіх точках колокації  $\eta_k, k = \overline{0, N}$ , отримаємо, наприклад, для частинних похідних функції  $w$  і кожного  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \xi} (w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial w_i(\xi)}{\partial \xi} \varphi_{wi}(\eta_k) + w_i(\xi) \frac{\partial \varphi_{wi}(\eta_k)}{\partial \xi} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^N w'_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \eta} (w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial w_i(\xi)}{\partial \eta} \varphi_{wi}(\eta_k) + w_i(\xi) \frac{\partial \varphi_{wi}(\eta_k)}{\partial \eta} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^N w_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w_i(\xi)}{\partial \xi} \varphi_{wi}(\eta_k) + w_i(\xi) \frac{\partial \varphi_{wi}(\eta_k)}{\partial \xi} \right) = \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \xi} (w'_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \\ &= \sum_{i=0}^N w''_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w_i(\xi)}{\partial \eta} \varphi_{wi}(\eta_k) + w_i(\xi) \frac{\partial \varphi_{wi}(\eta_k)}{\partial \eta} \right) \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \eta} (w_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N w_i(\xi) \varphi''_{wi}(\eta_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (w_i(\xi) \varphi_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w_i(\xi)}{\partial \eta} \varphi_{wi}(\eta_k) + w_i(\xi) \frac{\partial \varphi_{wi}(\eta_k)}{\partial \eta} \right) \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial \xi} (w_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k)) = \sum_{i=0}^N w'_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k),\end{aligned}$$

розуміючи під виразами  $w'_i(\xi)$ ,  $\varphi'_{wi}(\eta_k)$  похідні по  $\xi$  та  $\eta$  відповідно. В розгорнутому вигляді, прийнявши  $w'_i = w'_i(\xi)$ , можна записати для  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$ :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^N w'_i(\xi) \varphi'_{wi}(\eta_k) &= \begin{bmatrix} w'_0 \varphi'_{w0}(\eta_0) + w'_1 \varphi'_{w1}(\eta_0) + \dots + w'_N \varphi'_{wN}(\eta_0) \\ w'_0 \varphi'_{w0}(\eta_1) + w'_1 \varphi'_{w1}(\eta_1) + \dots + w'_N \varphi'_{wN}(\eta_1) \\ \vdots \\ w'_0 \varphi'_{w0}(\eta_N) + w'_1 \varphi'_{w1}(\eta_N) + \dots + w'_N \varphi'_{wN}(\eta_N) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \varphi'_{w0}(\eta_0) & \varphi'_{w1}(\eta_0) & \dots & \varphi'_{wN}(\eta_0) \\ \varphi'_{w0}(\eta_1) & \varphi'_{w1}(\eta_1) & \dots & \varphi'_{wN}(\eta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{w0}(\eta_N) & \varphi'_{w1}(\eta_N) & \dots & \varphi'_{wN}(\eta_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w'_0 \\ w'_1 \\ \vdots \\ w'_N \end{bmatrix} = \Phi_{w'} \cdot \bar{w}'\end{aligned}$$

де  $\Phi_{w'}$  — матриця значень похідних сплайн-функцій  $\varphi_{wi}$ , що побудовані на  $i$ -му вузлі вздовж осі  $\eta$ , в  $k$  точках колокації  $\eta_k$ ,  $\bar{w}'$  — вектор похідних шуканих функцій  $w_i(\xi)$ . Аналогічно отримуємо вирази для інших частинних похідних функції прогину  $w(\xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} \rightarrow \Phi_w \cdot \bar{w}', \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \rightarrow \Phi_{w'} \cdot \bar{w}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \rightarrow \Phi_w \cdot \bar{w}'', \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \rightarrow \Phi_{w''} \cdot \bar{w},$$

а також функцій кутів  $\psi_x(\xi, \eta)$ ,  $\psi_y(\xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \rightarrow \Phi_x \cdot \bar{\psi}_x', \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} \rightarrow \Phi_{x'} \cdot \bar{\psi}_x, \quad \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \rightarrow \Phi_x \cdot \bar{\psi}_x'',$$

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \eta^2} \rightarrow \Phi_{x''} \cdot \bar{\psi}_x,$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} \rightarrow \Phi_y \cdot \bar{\psi}_y', \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \rightarrow \Phi_{y'} \cdot \bar{\psi}_y, \quad \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \xi^2} \rightarrow \Phi_y \cdot \bar{\psi}_y'',$$

$$\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial \eta^2} \rightarrow \Phi_{y''} \cdot \bar{\psi}_y.$$



Враховуючи вище зазначене, замість (3.6) можна отримати:

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \cdot \overline{\psi_x''} \\ \Phi_y \cdot \overline{\psi_y''} \\ \Phi_w \cdot \overline{w''} \end{bmatrix} = A \cdot \overline{F} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ g_{33} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

де під  $\overline{F}$  розуміємо  $\{\overline{\psi_x}, \overline{\psi_x'}, \overline{\psi_y}, \overline{\psi_y'}, \overline{w}, \overline{w'}\}^T$ , де кожен з векторів ( $\overline{\psi_x}, \overline{\psi_x'}, \dots$ ) має, у свою чергу,  $N+1$  елементів, відповідно до кількості точок колокації. Тобто, в розгорнутому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \Phi_x \cdot \overline{\psi_x''} \\ \Phi_y \cdot \overline{\psi_y''} \\ \Phi_w \cdot \overline{w''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\psi_x} \\ \overline{\psi_x'} \\ \overline{\psi_y} \\ \overline{\psi_y'} \\ \overline{w} \\ \overline{w'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ g_{33} \end{bmatrix}$$

Елементи  $a_{ij}$  матриці  $A$  розміру  $3 \times 6$  у такому запису мають вигляд:

$$a_{11} = r_{11} * \Phi_x + r_{13} * \Phi_x' + r_{14} * \Phi_x'',$$

$$a_{12} = r_{12} * \Phi_x + r_{15} * \Phi_x',$$

$$a_{13} = r_{16} * \Phi_y + r_{18} * \Phi_y' + r_{19} * \Phi_y'',$$

$$a_{14} = r_{17} * \Phi_y + r_{1.10} * \Phi_y',$$

$$a_{15} = r_{1.13} * \Phi_w',$$

$$a_{16} = r_{1.12} * \Phi_w,$$

$$a_{21} = r_{21} * \Phi_x + r_{23} * \Phi_x' + r_{24} * \Phi_x'',$$

$$a_{22} = r_{22} * \Phi_x + r_{25} * \Phi_x',$$

$$a_{23} = r_{26} * \Phi_y + r_{28} * \Phi_y' + r_{29} * \Phi_y'',$$

$$a_{24} = r_{27} * \Phi_y + r_{2.10} * \Phi_y',$$

$$a_{25} = r_{2.13} * \Phi_w',$$

$$a_{26} = r_{2.12} * \Phi_w,$$

$$a_{31} = r_{33} * \Phi_x',$$

$$a_{32} = r_{32} * \Phi_x,$$

$$a_{33} = r_{38} * \Phi_y',$$

$$a_{34} = r_{37} * \Phi_y,$$

$$a_{35} = r_{3.13} * \Phi_w' + r_{3.14} * \Phi_w'',$$

$$a_{36} = r_{3.12} * \Phi_w + r_{3.15} * \Phi_x',$$

де для деяких вектора-стовпчика  $\bar{u} = [u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_N]^T$  та матриці  $V = [v_{ij}]$  операція  $*$  означає множення відповідних елементів вектора на усі елементи відповідного рядка матриці, тобто  $\bar{u} * V = [u_i \cdot v_{ij}]$ .

Оскільки точки колокації обрано так, щоб матриці  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ ,  $\Phi_w$  були невироджені, і, відповідно, існували обернені до них матриці  $\Phi_x^{-1}$ ,  $\Phi_y^{-1}$ ,  $\Phi_w^{-1}$ , можемо записати (3.10) у вигляді

$$\begin{bmatrix} \overline{\psi_x} \\ \overline{\psi_x'} \\ \overline{\psi_y} \\ \overline{\psi_y'} \\ \overline{w} \\ \overline{w'} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} O & I & O & O & O & O \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ O & O & O & I & O & O \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ O & O & O & O & O & I \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\psi_x} \\ \overline{\psi_x'} \\ \overline{\psi_y} \\ \overline{\psi_y'} \\ \overline{w} \\ \overline{w'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_c \\ \bar{z}_2 \\ o_c \\ \bar{z}_4 \\ o_c \\ \bar{z}_6 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

де  $O$  — нульова матриця  $(N+1) \times (N+1)$ ,  $I$  — одинична матриця  $(N+1) \times (N+1)$ ,  $o_c$  — нульовий стовпчик з  $N+1$  елементів. При цьому  $Y_{2j} = \Phi_x^{-1} a_{1j}$ ,  $Y_{4j} = \Phi_y^{-1} a_{2j}$ ,  $Y_{6j} = \Phi_w^{-1} a_{3j}$ ,  $j = \overline{1,6}$ ;  $\bar{z}_2 = \bar{z}_4 = o_c$ ,  $\bar{z}_6 = \Phi_w^{-1}(-q/g_{33})$ .

Далі, приймаючи вектор правої частини  $\bar{Z} = \{o_c, \bar{z}_2, o_c, \bar{z}_4, o_c, \bar{z}_6\}^T$ , рівняння (3.11) у скороченому вигляді можна записати у нормальній формі Коші як

$$\bar{F}' = Y(\xi) \cdot \bar{F} + \bar{Z}(\xi) \quad (3.12)$$

Граничні умови двовимірної крайової задачі (2.17), (2.18) та (2.19), з урахуванням (3.7) на сторонах  $\xi = const$  приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
\psi_x = 0 &\rightarrow \Phi_x \bar{\psi}_x = 0 \text{ або } \bar{\psi}_x = 0, \\
\psi_y = 0 &\rightarrow \Phi_y \bar{\psi}_y = 0 \text{ або } \bar{\psi}_y = 0, \\
w = 0 &\rightarrow \Phi_w \bar{w} = 0 \text{ або } \bar{w} = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

для жорсткого закріплення, вздовж осі  $\eta$  граничні умови задовольняються автоматично за рахунок коефіцієнтів лінійних комбінацій сплайн-функцій;

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} = 0 &\rightarrow \bar{A} * \Phi_x \bar{\psi}'_x + \bar{B} * \Phi_x' \bar{\psi}_x = 0, \\
\psi_y = 0 &\rightarrow \Phi_y \bar{\psi}_y = 0 \text{ або } \bar{\psi}_y = 0, \\
w = 0 &\rightarrow \Phi_w \bar{w} = 0 \text{ або } \bar{w} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

для шарнірного закріплення, вздовж осі  $\eta$  граничні умови задовольняються автоматично за рахунок коефіцієнтів лінійних комбінацій сплайн-функцій;

$$\begin{aligned}
\psi_x + A \frac{\partial w}{\partial \xi} + B \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 &\rightarrow \Phi_x \bar{\psi}_x + \bar{A} * \Phi_w \bar{w}' + \bar{B} * \Phi_w' \bar{w} = 0, \\
A \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + \nu_y \left( C \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} \right) = 0 \\
&\rightarrow \bar{A} * \Phi_x \bar{\psi}'_x + \bar{B} * \Phi_x' \bar{\psi}_x + \nu_y (\bar{C} * \Phi_y \bar{\psi}'_y + \bar{D} * \Phi_y' \bar{\psi}_y) = 0, \\
C * \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + D * \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta} + A * \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi} + B * \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta} = 0 \\
&\rightarrow \bar{C} * \Phi_x \bar{\psi}'_x + \bar{D} * \Phi_x' \bar{\psi}_x + \bar{A} * \Phi_y \bar{\psi}'_y + \bar{B} * \Phi_y' \bar{\psi}_y = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

для вільного краю, на сторонах  $\eta = const$  задати умови закріплення даного типу в такий спосіб неможливо.

Оскільки перетворення координат, що застосовано для можливості описання вихідної області у формі довільного опуклого чотирикутника, перетворює останній на квадрат у координатах  $\xi\eta$ , граничні умови вздовж осі  $\eta$  завжди задаються в точках  $\eta = 0$  та  $\eta = 1$ , а вздовж осі  $\xi$  —  $\xi = 0$  та

$\xi = 1$ . Саме в цих точках ( $\eta = 0$  та  $\eta = 1$ ) повинні бути розраховані коефіцієнти перетворення  $A, B, C, D$  та відповідні матриці  $\Phi$ .

В більш загальному вигляді граничні умови (3.13), (3.14) та (3.15) можна записати як

$$\begin{aligned} B_1 \bar{F} &= \bar{b}_1, & \xi &= \xi_1 = 0, \\ B_2 \bar{F} &= \bar{b}_2, & \xi &= \xi_2 = 1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де  $B_1, B_2$  та  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  — відповідно прямокутні матриці порядку  $3(N+1) \times 6(N+1)$  та задані вектори. Розв'язок вихідної задачі, таким чином, зводиться до розв'язку крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь (3.12) порядку  $6(N+1)$  з граничними умовами у вигляді (3.16).

### 3.3. Розв'язання одновимірної крайової задачі методом дискретної ортогоналізації

Одновимірна двоточкова крайова задача (3.12) з граничними умовами (3.16) може бути розв'язана чисельним методом дискретної ортогоналізації [122], [133]. В ситуації, коли власні значення матриці системи (3.12) при деяких значеннях  $\xi$  значно відрізняються за величиною, в процесі інтегрування за рахунок втрати значущих цифр із зростанням аргументу можлива поява лінійної залежності системи векторів-розв'язків задач Коші і, як результат, втрата стійкості обчислень. Метод дискретної ортогоналізації дозволяє уникнути такої ситуації за рахунок ортогоналізації векторів розв'язків у деяких проміжних точках. Суть методу полягає у наступному.

Нехай розглядається двоточкова лінійна крайова задача

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (3.17)$$

з граничними умовами

$$B_1 \bar{y}(x_1) = \bar{b}_1$$

$$B_2 \bar{y}(x_2) = \bar{b}_2$$

де  $B_1, B_2$  — задані прямокутні матриці відповідно порядків  $k \times n$  та  $(n-k) \times n$ ,  $k < n$ ,  $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  — вектор-стовпчик,  $\bar{f}(x)$  — вектор правої частини,  $A(x)$  — квадратна матриця порядку  $n$ ,  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  — задані вектори. Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^m c_j \bar{y}_j(x) + \overline{y_{m+1}}(x),$$

де  $m = n-k$  — число граничних умов на правому кінці інтервалу інтегрування,  $\bar{y}_j$  — розв'язки задач Коші при  $\bar{f} = \bar{b}_1 = 0$ ,  $\overline{y_{m+1}}$  — розв'язок неоднорідної системи рівнянь з неоднорідними граничними умовами при  $x = x_1$ . Відрізок  $x_1 \leq x \leq x_2$  розділимо на частини точками інтегрування  $x_s$ ,  $s = \overline{0, N}$ , серед яких виберемо точки ортогоналізації  $x_i$ ,  $i = \overline{0, M}$ , в залежності від потрібної точності розв'язання задачі.

Метод дискретної ортогоналізації складається з прямого і зворотного ходів. Нехай у точці  $x_i$  при прямому ході за допомогою, наприклад, методу Рунге-Кутта знайдені розв'язки  $m+1$  задач Коші  $\overline{u}_r(x_i)$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . Проортономуємо вектори  $\overline{u}_1(x_i), \overline{u}_2(x_i), \dots, \overline{u}_m(x_i)$  і позначимо результат через  $\overline{z}_1(x_i), \overline{z}_2(x_i), \dots, \overline{z}_m(x_i)$ . Вектори  $\overline{z}_r$  визначаються через  $\overline{u}_r$  як

$$\overline{z}_r = \frac{1}{\omega_{rr}} \left( \overline{u}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj} \overline{z}_j \right), \quad r = \overline{1, m}, \quad (3.18)$$

а вектор  $\overline{z}_{m+1}$  не нормується:

$$\overline{z}_{m+1} = \overline{u}_{m+1} - \sum_{j=1}^m \omega_{m+1,j} \overline{z}_j, \quad (3.19)$$

де  $\omega_{rr} = \sqrt{(\overline{u}_r, \overline{z}_r) - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj}^2}$ ,  $\omega_{rj} = (\overline{u}_r, \overline{z}_j)$ ,  $j < r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ .

3 (3.18) та (3.19) можна одержати

$$\omega_{11}\bar{z}_1 = \bar{u}_1,$$

$$\omega_{22}\bar{z}_2 = \bar{u}_2 - \omega_{21}\bar{z}_1,$$

$$\omega_{33}\bar{z}_3 = \bar{u}_3 - \omega_{31}\bar{z}_1 - \omega_{32}\bar{z}_2,$$

...

$$\omega_{mm}\bar{z}_m = \bar{u}_m - \omega_{m1}\bar{z}_1 - \omega_{m2}\bar{z}_2 - \dots - \omega_{m,m-1}\bar{z}_{m-1},$$

$$\bar{z}_{m+1} = \bar{u}_{m+1} - \omega_{m+1,1}\bar{z}_1 - \omega_{m+1,2}\bar{z}_2 - \dots - \omega_{m+1,m-1}\bar{z}_{m-1} - \omega_{m+1,m}\bar{z}_m,$$

або після певних перетворень

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1(x_i) \\ \bar{u}_2(x_i) \\ \vdots \\ \bar{u}_{m+1}(x_i) \end{bmatrix} = \Omega_i \begin{bmatrix} \bar{z}_1(x_i) \\ \bar{z}_2(x_i) \\ \vdots \\ \bar{z}_{m+1}(x_i) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_i = \Omega(x_i) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(x_i) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_{21}(x_i) & \omega_{22}(x_i) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_{m1}(x_i) & \omega_{m2}(x_i) & \dots & \omega_{mm}(x_i) & 0 \\ \omega_{m+1,1}(x_i) & \omega_{m+1,2}(x_i) & \dots & \omega_{m+1,m}(x_i) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Компоненти векторів  $\bar{z}_r(x_i)$  є початковими значеннями задач Коші для одержання розв'язків однорідної ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) та неоднорідної ( $r = m+1$ ) систем диференціальних рівнянь на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$ .

У кожній точці ортогоналізації  $x_i$  розв'язок системи рівнянь (3.17), який задовольняє граничні умови, після ортогоналізації можна записати як

$$\bar{y}(x_i) = \sum_{j=1}^m c_j^{(i)} \bar{z}_j(x_i) + \bar{z}_{m+1}(x_i). \quad (3.21)$$

В кожному інтервалі  $[x_i, x_{i+1}]$  розв'язок системи рівнянь (3.17) визначається за формулою

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^m c_j^{(i)} \bar{z}_j(x) + \bar{z}_{m+1}(x).$$

В останній точці інтервалу  $x = x_N = x_M = x_2$  невідомі компоненти  $c_1^{(M)}$ ,  $c_2^{(M)}, \dots, c_m^{(M)}$  вектора  $\bar{c}^{(M)}$  визначаються з умови задоволення вектором  $\bar{y}(x_M)$  граничних умов  $B_2 \bar{y}(x_2) = \bar{b}_2$ . Цим закінчується прямий хід розв'язання задачі.

При зворотному ході по значеннях  $c_j^{(i)}$ ,  $j = \overline{1, m}$  визначаються сталі  $c_j^{(i-1)}$  з рекурентного співвідношення

$$\bar{c}^{(i-1)} = [\Omega_i^T]^{-1} \bar{c}^{(i)}, \quad i = M, M-1, \dots, 2,$$

де  $\Omega_i^T$  — транспонована матриця  $\Omega_i$ ,  $\bar{c}^{(i)}$  — вектор-сповпчик  $\{c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_m^{(i)}, 1\}^T$ . Маючи значення сталих  $c_j^{(i)}$ , обчислюємо розв'язки крайової задачі  $\bar{y}(x_i)$ .

Програмна реалізація наведеної схеми обчислень вимагає збереження значень матриць  $\Omega_i$  та векторів  $\bar{z}_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ . Якщо обмежитись значеннями шуканих функцій не в усіх точках ортогоналізації, а лише в деяких, де подрібно виводити результат, можна значно скоротити об'єм інформації, що має зберігатися під час розрахунків. При цьому вираз для розрахунку сталих  $c_j^{(i)}$  буде мати вигляд:

$$\bar{c}^{(i-1)} = \left[ \prod_{j=0}^p \Omega_{i+j}^T \right]^{-1} \bar{c}^{(i+p)},$$

де  $p = \overline{1, M-j}$ .

Для оцінки точності розрахунків можна використовувати порівняння розв'язків задачі при різній кількості точок ортогоналізації, що дозволяє зменшити похибку, зумовлену жорсткістю системи диференціальних рівнянь. Також критерієм достатньої точності може бути співпадання результатів при розрахунку відносно меж відрізка  $[x_1, x_2]$  «зліва-направо» та навпаки, оскільки обчислювальні схеми при цьому будуть суттєво відрізнятися.

### 3.4. Алгоритми для дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів з використанням запропонованого чисельно-аналітичного підходу

Задача про напружено-деформований стан чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів під дією нормального поверхневого навантаження  $q(\xi, \eta)$  описується отриманою у п. 2.3. системою диференціальних рівнянь (2.16) з граничними умовами (2.17), (2.18) та (2.19) в залежності від обраного закріплення країв. Система (2.16) складається з трьох диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних відносно функцій прогину  $w(\xi, \eta)$  та кутів  $\psi_x(\xi, \eta)$ ,  $\psi_y(\xi, \eta)$ .

Розроблений підхід базується на використанні перетворення координат, що дозволяє описати вихідну область у формі довільного опуклого чотирикутника в декартових координатах  $xu$  відображенням на область у формі одиничного квадрата в новій системі координат  $\xi\eta$ . Проведення розрахунків у координатах  $\xi\eta$  дозволяє використовувати для розв'язання крайової задачі методи, що вимагають прямокутної форми для досліджуваної області та задання граничних умов у двох точках по кожній з координатних осей, тобто при  $\xi = const$ ,  $\eta = const$ .

Для розв'язання двовимірної крайової задачі обрано комбінацію методів сплайн-колокації (п. 3.2.) та дискретної ортогоналізації (п. 3.3.), які відомі своєю ефективністю на задачах даного класу. За рахунок сплайн-апроксимації вздовж координати  $\eta$  двовимірна крайова задача для системи трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних (2.16) перетворюється у систему  $3(N+1)$  звичайних диференціальних рівнянь, що може бути представлена у нормальній формі Коші (3.12). Граничні умови (2.17), (2.18) та (2.19) набувають відповідно вигляду (3.13), (3.14) та (3.15). Оскільки рівняння системи (2.16) мають другий порядок, для апроксимації достатньо використання  $B$ -сплайнів третього степеня (п. 3.1.).



Потрібні для розрахунків значень квадратних матриць  $\Phi$  вирази наведено у п. 3.1.: значення сплайнів визначається за рекурентною формулою (3.1), значення їх похідних — за рекурентною формулою (3.2). Сплайни будуються на рівномірній розширеній сітці вузлів  $\Delta$ :  $\eta_{-3}, \dots, \eta_0, \dots, \eta_N, \dots, \eta_{N+3}$  для відрізка  $[\eta_0, \eta_N]$ ,  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta_N = 1$ , а розміщення точок колокації враховує описану у п. 3.1. схему, що дозволяє значно підвищити точність апроксимації. Використання вказаної схеми також забезпечує можливість знаходження обернених матриць  $\Phi_x^{-1}$ ,  $\Phi_y^{-1}$ ,  $\Phi_w^{-1}$ , обумовлюючи невиродженість  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ ,  $\Phi_w$ . Це, в свою чергу, є необхідною умовою для зведення диференціальних рівнянь до нормального вигляду (3.12). Обернені матриці розраховуються методом Гауса з вибором головного елемента.

Граничні умови для обраного типу закріплення країв на сторонах  $\eta = const$  задовольняються використанням відповідної комбінації функцій згідно (3.8) або (3.9). Для сторін  $\xi = const$  граничні умови визначають відповідні вирази для отриманої одновимірної крайової задачі згідно (3.13), (3.14) або (3.15).

Зведена до нормальної форми Коші одновимірною крайовою задачею для системи диференціальних рівнянь (3.12) з граничними умовами (3.13), (3.14) та (3.15) розв'язується чисельним методом дискретної ортогоналізації. Процедура розрахунку передбачає формування в початковій точці лінійно незалежних векторів-розв'язків з урахуванням граничних умов на лівому кінці інтервалу із наступним розв'язанням задачі Коші на усьому відрізку інтегрування методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

В деяких фіксованих точках відбувається ортогоналізація векторів-розв'язків за схемою Грама-Шмідта. Для кожної точки ортогоналізації зберігається інформація про ортогоналізовані вектори  $\bar{z}_r$ ,  $r = \overline{1, m+1}$ ,  $m = 2(N+1)$ , що обчислюються згідно (3.18), (3.19), та матриці перетворення  $\Omega_i$

відповідно до (3.20). Ця інформація використовується для обчислення значень шуканих функцій у точках виводу результату.

Після задовільнення в кінцевій точці інтегрування граничних умов на правому кінці, у точках виводу результату за (3.21) розраховуються значення вектору  $\bar{y}$  і, повертаючись до функції двох змінних згідно (3.7), шуканих функцій прогину  $w(\xi, \eta)$  та кутів  $\psi_x(\xi, \eta)$ ,  $\psi_y(\xi, \eta)$ . Зворотнє відображення одиничної області у координатах  $\xi\eta$  на вихідну область у координатах  $xu$ , що відповідає формі досліджуваної пластини, здійснюється за (2.9).

За необхідності визначення полів напружень, можна скористатись наступною схемою. Оскільки з розв'язку задачі за допомогою методу дискретної ортогоналізації маємо для кожної точки виводу результату значення векторів  $\bar{w}$ ,  $\bar{\psi}_x$ ,  $\bar{\psi}_y$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \xi}$  з компонентами у кількості, що відповідає кількості точок колокації  $N+1$ , можемо розрахувати їх значення для довільної точки  $\eta$  досліджуваної області.

Враховуючи рекурентне співвідношення (3.2), на основі значень функцій  $\bar{w}$ ,  $\bar{\psi}_x$ ,  $\bar{\psi}_y$  можна отримати і їх похідні по координаті  $\eta$ :  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \eta}$ . При цьому для  $\bar{w}$ ,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}$ ,  $\bar{\psi}_x$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \eta}$  використовуються комбінації сплайнів згідно (3.8), а для  $\bar{\psi}_y$ ,  $\frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \eta}$  — (3.8), (3.9) або їх поєднання в залежності від граничних умов задачі на відповідних сторонах  $\eta = const$ . Додаючи до вказаного набору значення виразів  $A(\xi, \eta)$ ,  $B(\xi, \eta)$ ,  $C(\xi, \eta)$ ,  $D(\xi, \eta)$  за (2.12), маємо можливість розрахувати значення моментів  $M_x(\xi, \eta)$ ,  $M_y(\xi, \eta)$ ,  $M_{xy}(\xi, \eta)$  та перерізуючих зусиль  $Q_x(\xi, \eta)$ ,  $Q_y(\xi, \eta)$ , які замість формул (2.2), в координатах  $\xi\eta$  визначаються як

$$\begin{aligned}
M_x(\xi, \eta) &= D_{11} \left( A(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + B(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \\
&\quad + D_{12} \left( C(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi}(\xi, \eta) + D(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \\
M_y(\xi, \eta) &= D_{12} \left( A(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + B(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \\
&\quad + D_{22} \left( C(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi}(\xi, \eta) + D(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \\
M_{xy}(\xi, \eta) &= D_{66} \left( C(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + D(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right. \\
&\quad \left. + B(\xi, \eta) \frac{\partial \psi_y}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
Q_x(\xi, \eta) &= K_1 \left( \psi_x(\xi, \eta) + A(\xi, \eta) \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) + B(\xi, \eta) \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) \\
Q_y(\xi, \eta) &= K_2 \left( \psi_y(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) + D(\xi, \eta) \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right)
\end{aligned}$$

Після отримання значень моментів та зусиль у координатах  $\xi\eta$  за (3.22) і, відповідно до (2.9), у координатах  $xу$ , використовуючи для зворотного переходу від статично еквівалентних моментів та перерізуючих зусиль до напружень вирази [60]

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3}z, & \sigma_y &= \frac{12M_y}{h^3}z, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{h^3}z, \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right),
\end{aligned}$$

маємо можливість отримати розподіл полів напружень для всієї досліджуваної області (приймаємо  $\sigma_z = 0$  відповідно до обраної моделі теорії

пружності). При цьому найбільший інтерес, вочевидь, викликають значення напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  на поверхні пластини при  $z = \pm \frac{h}{2}$  та  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  при  $z = 0$ , де відповідні функції сягають своїх максимальних значень.

В деяких задачах, де інформація про окремі компоненти тензора напружень має другорядне значення, поряд з розподілом функції прогину  $w(x,y)$  може виявитися корисною деяка інтегральна оцінка напружень, що мають місце у тій чи іншій точці пластини. У якості такої величини можна обрати так звану інтенсивність напружень у серединній площині  $z = 0$  чи на поверхні  $z = \pm \frac{h}{2}$ , що може бути розрахована як [134]

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}, \quad (3.23)$$

та використовується для оцінок близькості НДС до початку пластичної деформації в деяких теоріях міцності [59].

Розроблений алгоритм розв'язання задач про НДС ортотропних чотирикутних пластин в уточненій постановці дозволяє отримувати розв'язки задач в широкому діапазоні зміни геометричних, механічних та силових параметрів для різних комбінацій умов закріплення країв і отримувати повну інформацію щодо полів переміщень та напружень. На основі вказаного алгоритму розроблений програмний комплекс для ПК, що дозволяє безпосередньо проводити розрахунки для визначеного класу задач з максимально досяжною точністю і є оптимізованим щодо швидкості та використання обчислювальних ресурсів.

Вихідний код програмного комплексу складається з декількох модулів на мові програмування Fortran 90, кожен з яких містить процедури та функції, що реалізують певні етапи розрахунків. Безпосередня робота з програмою відбувається шляхом редагування файлів параметрів задачі та запуску програмного файлу для платформи Win32. Введення параметрів задачі та вивід результатів реалізовано через текстові файли ASCII, що

полегшує обмін даними та дозволяє проводити їх подальшу обробку за допомогою іншого спеціалізованого програмного забезпечення.

Отже, послідовність дій для викладеної вище схеми розрахунку має вигляд:

1. Визначення параметрів задачі: координат вершин чотирикутника, що задає геометрію пластини, тип граничних умов на кожному кінці обох осей, значення пружних сталей матеріалу, розподіл функції поверхневого навантаження, параметрів методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації.
2. Розрахунок коефіцієнтів розв'язувальної системи рівнянь у системі координат  $\xi\eta$ , що відповідають заданим геометричним параметрам пластини.
3. Представлення розв'язку двовимірної крайової задачі у вигляді відрізків рядів по  $B$ -сплайнах третього степеня.
4. Вибір коефіцієнтів лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів з тим, щоб точно задовольнити граничні умови на кінцях.
5. Розрахунок координат точок колокації і знаходження значень лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів та їх похідних в цих точках відповідно до обраної сітки вузлів.
6. Підстановка розв'язку, представленого у вигляді відрізків рядів по лінійних комбінаціях  $B$ -сплайнів, у вихідну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних в точках колокації.
7. Розв'язання отриманої одновимірної крайової задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів по лінійних комбінаціях  $B$ -сплайнів у кожній точці колокації, за допомогою методу дискретної ортогоналізації.
8. Підстановка отриманих коефіцієнтів в ряди і знаходження за ними значень усіх факторів напружено-деформованого стану пластини у координатах  $\xi\eta$ .



Рис. 3.3 — Блок-схема алгоритму розв'язання задач про напружено-деформований стан чотирикутних пластин з використанням уточненої моделі

9. Розрахунок значень факторів напружено-деформованого стану пластини у початковій системі координат  $xу$  за допомогою виразів для оберненого переходу.

Схема алгоритму представлена на рис. 3.3.

### 3.4. Приклади розв'язання задач про напружено-деформований стан пластин різної геометрії

Проілюструємо розроблений підхід на прикладі пластини у формі квадрата, яка розташована у вихідній системі координат з поворотом на  $45^\circ$

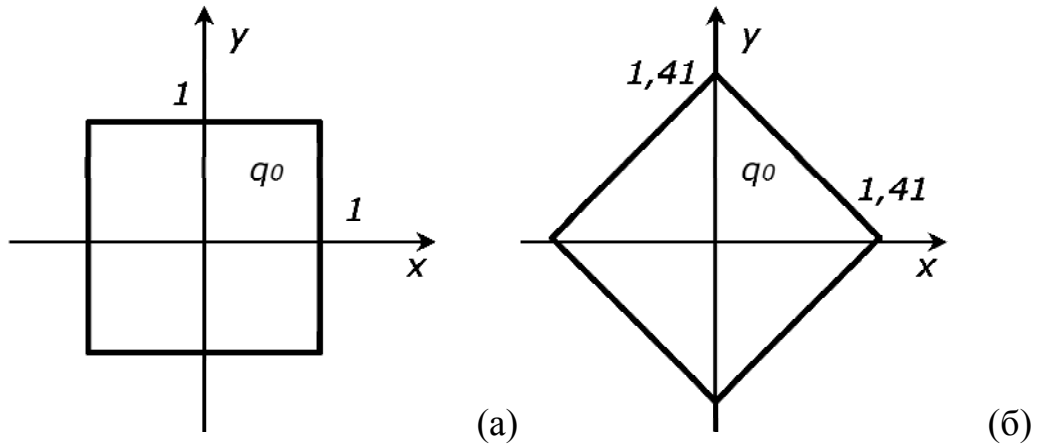


Рис. 3.5 — Пластина у формі квадрата для безпосереднього розв'язання задачі (а) та отримання розв'язку на основі запропонованого підходу (б)

(рис. 3.4). Розміри пластини приймаємо у вигляді нормованих величин: сторона квадрата  $a = 2$ , товщина  $h = a/20$ . Матеріал для зручності будемо вважати ізотропним:  $E_x = E_y = E$ ,  $\nu_x = \nu_y = \nu$ ,  $G_{ij} = G = E/2(1 + \nu)$ , як це було зазначено у п. 2.4. Граничні умови покладемо такими, що відповідають жорсткому затисканню усіх сторін:

$$w = 0, \psi_x = 0, \psi_y = 0.$$

Деформація пластини відбувається за рахунок рівномірно розподіленого

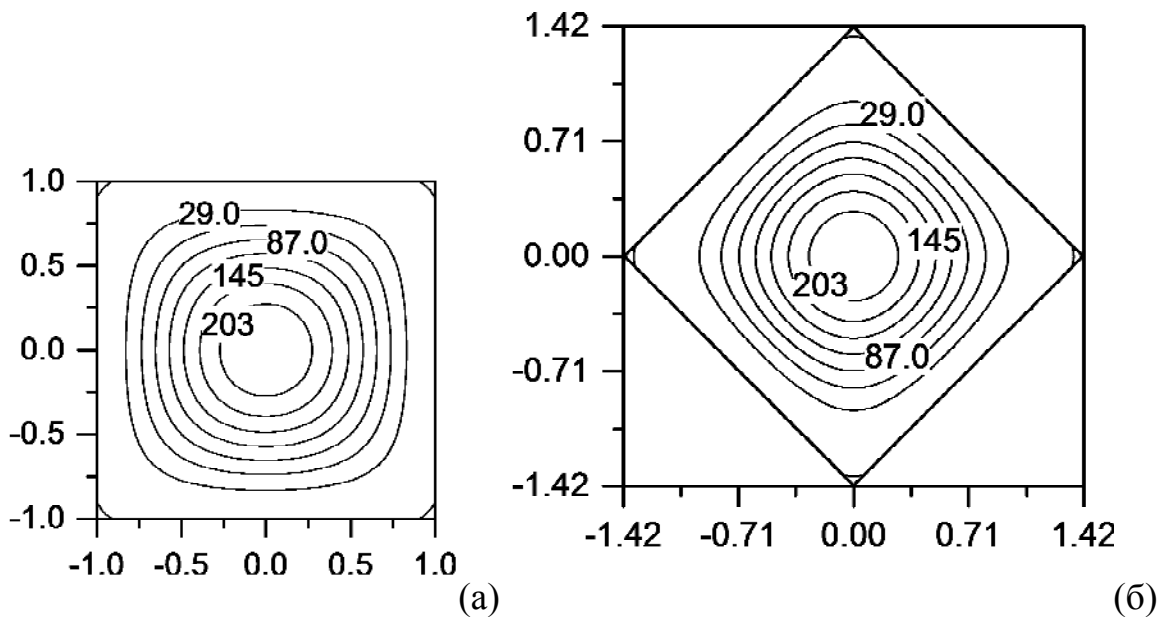


Рис. 3.4 — Вигляд поверхні функції прогину, розрахованої для квадратної пластини з розташуванням відповідно до координатних осей (а) та з поворотом на  $45^\circ$  (б)

поверхневого навантаження  $q(x, y) = q_0$ .

Для оцінки достовірності результатів розрахунку будемо порівнювати отримані дані з розв'язком задачі, де розглядається та ж сама пластина, але без застосування перетворень координат. Оскільки досліджувана область має вочевидь у цьому випадку форму прямокутника та розташована так, що сторони пластини є паралельними до координатних осей (рис. 3.4а), для розв'язання такої задачі достатньо безпосередньо застосувати методи сплайн колокації та дискретної ортогоналізації. Граничні умови для цього варіанту задачі задаємо на сторонах  $x = \pm 1, y = \pm 1$ .

Розрахунки проводимо з використанням 20 пар точок колокації для однієї осі та 500 точок інтегрування для іншої. Розраховані значення прогину подаємо у вигляді нормованої величини  $w_{max}^* = w_{max}E/q$ . Геометрію пластини з орієнтацією згідно рис. 3.4а задаємо чотирма вершинами з координатами  $(-1,0;1,0)$ ,  $(-1,0;-1,0)$ ,  $(1,0;-1,0)$  та  $(1,0;1,0)$ . Розгорнута на  $45^\circ$  пластина має координати вершин  $(-1,414;0,0)$ ,  $(0,0;1,414)$ ,  $(1,414;0,0)$ ,  $(0,0;1,414)$ , які використовуємо у якості вихідних параметрів для розрахунку з використанням перетворення координат. Інші параметри приймають значення:  $E_x = E_y = 1$ ;  $\nu_x = \nu_y = 0,3$ ;  $G_{ij} = 0,384615$ ;  $h = 0,1$ ;  $q_0 = 1$ .

Отримані результати представлено на рис. 3.5 у вигляді поверхонь

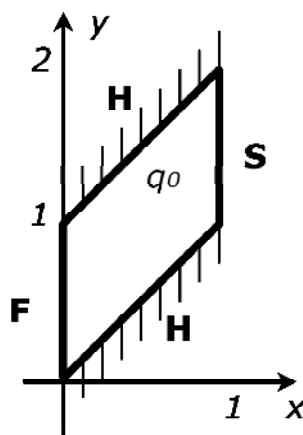


Рис. 3.6 — Пластина у формі паралелограма з двома протилежними сторонами закріпленими жорстко (H), однією — шарнірно (S) та вільно (F)



функції прогину  $w^*(x, y)$ . Значення максимального прогину  $w_{max}^*$  в обох випадках практично співпадає і складає 231,79 та 231,66 для поверхонь рис. 3.5а та рис. 3.5б відповідно. Похибка задовільнення заданих граничних умов на краях не перевищує  $10^{-12}$ .

У якості більш складного прикладу розглянемо пластину у формі паралелограму, дві сторони якого є паралельними осі  $Oy$ , закріплені шарнірно (S) та вільно (F), а дві інші — жорстко (H). Як і у попередній задачі матеріал приймаємо ізотропним, а поверхневе навантаження  $q(x, y) = q_0$  — сталим та рівномірно розподіленим по поверхні. Координати вершин відповідної фігури мають значення  $(0;1)$ ,  $(0;0)$ ,  $(1;1)$ ,  $(1;2)$ . Схема з геометричними параметрами пластини та умовами закріплення наведена на рис. 3.6.

Для розрахунку приймаємо  $E_x = E_y = 1$ ;  $\nu_x = \nu_y = 0,3$ ;  $G_{ij} = 0,384615$ ;  $h = 0,1$ ;  $q_0 = 1$ . Використовуємо 30 пар точок колокації та 1500 точок інтегрування. Розраховані значення прогину подаємо у вигляді

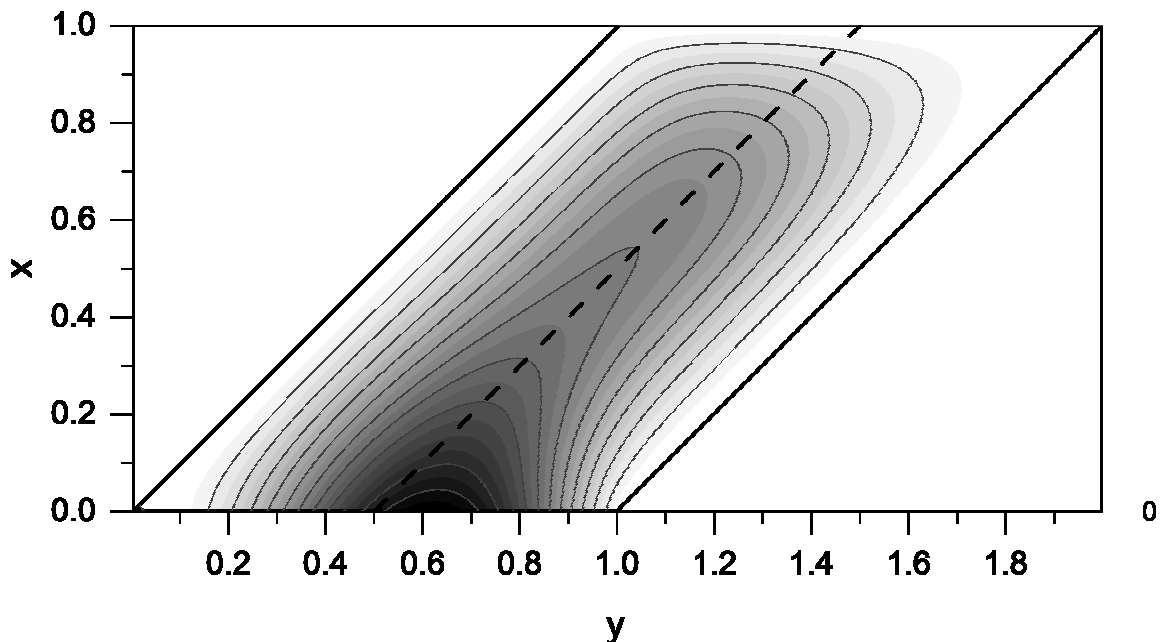


Рис. 3.7 — Поверхня функції прогину пластини у формі паралелограма, закріплення сторін якої передбачає поєднання жорсткої, шарнірної та вільної фіксації

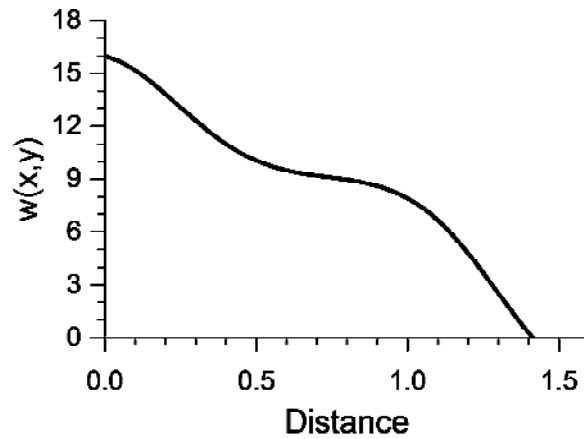


Рис. 3.8 — Крива перерізу поверхні  $w^*(x,y)$  вздовж лінії, яка проходить через точки  $(0;0,5)$  та  $(1;1,5)$

нормованої величини  $w^* = wE/q$ .

Результат розрахунку у вигляді ізоліній поверхні функції прогину  $w^*(x,y)$  представлений на рис. 3.7. Для полегшення сприйняття осі  $x$  та  $y$  змінено місцями. Темні зони, що відповідають більшим значенням прогину, припадають на околиці сторони з вільним закріпленням (F) та на центральну частину поверхні пластини.

Граничні умови на жорстко закріплених сторонах та шарнірно закріпленій стороні  $x = 1$  задовільняються з високою точністю: похибка у значеннях прогину  $w^*$  не перевищує  $10^{-13}$ . Похибка у значеннях моменту  $M_x$  на сторонах  $x = 0, x = 1$  —  $10^{-3} \dots 10^{-4}$ .

На рис. 3.8 наведено переріз поверхні функції  $w^*(x,y)$  вздовж штрихованої лінії (рис. 3.7). Ось «Distance» показує відстань від точки  $(0;0,5)$ , що знаходиться безпосередньо на вільному краї пластини, у напрямку точки  $(1;1,5)$ . Видно, що характер зміни значень прогину біля сторони пластини  $x = 1$  майже лінійний, що добре узгоджується з граничними умовами типу «шарнір». На відстані від неї, що приблизно відповідає половині ширини «полоси», утворюваної косими сторонами паралелограму, нахил кривої на рис. 3.8 суттєво зменшується, а із наближенням до вільного краю знову збільшується.

### 3.5. Висновки до третього розділу

У розділі розглянуто основні положення методу сплайн-колокації та особливості його застосування з метою зниження розмірності сформульованої двовимірної крайової задачі за рахунок апроксимації шуканих функцій в одному з координатних напрямків. Вказано на можливість точного задовільнення граничних умов на відповідних сторонах пластини за рахунок використання лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів та підбору відповідних коефіцієнтів, шляхи підвищення точності апроксимації за рахунок застосування спеціальної схеми вибору точок колокації.

Вихідна розв'язувальна система диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних для двовимірної крайової задачі за допомогою методу сплайн-колокації представлена у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь більш високого порядку. У сукупності зі зміненими відповідним чином виразами граничних умов ці рівняння складають одновимірну двоточкову крайову задачу, для подальшого розв'язання якої можуть бути застосовані чисельні методи інтегрування.

Для розв'язання одновимірної крайової задачі застосовано чисельний метод дискретної ортогоналізації. Наведено прийоми контролю точності отриманого чисельного розв'язку задачі та відомі способи оптимізації програмної реалізації методу.

На основі сформульованої задачі та наведених розрахункових схем створено алгоритми та відповідне програмне забезпечення для ПК, що дозволяє розв'язувати практичні задачі про визначення напружено-деформованого стану довільних чотирикутних пластин з ортотропних та ізотропних матеріалів при різних геометричних, механічних і силових параметрах.

Застосування запропонованого підходу продемонстровано на прикладі жорстко закріпленої пластини у формі квадрата з розташуванням сторін під кутом до координатних вісей та на прикладі пластини у формі

паралелограма, закріплення сторін якого передбачає поєднання жорсткої, шарнірної та вільної фіксації. Вказано на особливості формування набору випадних даних для розрахунку, наведено приклади представлення результатів обчислень у вигляді ізоліній поверхні функції прогину та її перерізу.

## РОЗДІЛ 4

### ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЧОТИРИКУТНИХ ПЛАСТИН З ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

#### 4.1. Деякі оцінки достовірності результатів розв'язання класів задач, що розглядаються

Основними засобами досягнення достовірності результатів розв'язання задач за допомогою запропонованого підходу є коректність постановки задачі [32], [27], [33], застосування для їх розв'язання теоретично обґрунтованих наближених методів [37], [94], [66], а також проведення розрахунків з достатньою та контрольованою індуктивними прийомами точністю [135].

Деякі зауваження щодо неможливості остаточної відповіді на питання про можливість застосування тієї чи іншої моделі теорії оболонок та пластин наведені у [18]. Проте результати аналізу похибки для циліндричних оболонок, що з'являється при переході від розгляду задач у тривимірній постановці до двовимірної та застосування таких припущень як гіпотеза прямої лінії, певною мірою справедливі і для випадку пластин. Значення відносної товщини  $h < 1/10..1/20$  та незначна зміна поверхневого навантаження, що згадуються у [18] як необхідні умови отримання розв'язку задачі близького до точного при застосуванні уточнених моделей, було враховано при розгляді конкретних задач статичного аналізу для пластин складної форми.

Необхідність дотримання умови малих деформацій, що лежить в основі лінійних моделей, може викликати певні труднощі при розгляді практичних задач, які передбачають наявність конкретних значень розмірів досліджуваних об'єктів, прикладеного навантаження та пружних сталих матеріалу. Отримання розв'язків задач, що використовують подання прогину у вигляді нормованої величини  $wE/q$ , дозволяє уникнути вказаних труднощів,

зосередивши увагу на особливостях застосованих методів та питаннях якісного аналізу отриманих результатів.

Як вже було зазначено у розділі 3, запропонований підхід складається з трьох основних етапів:

- 1) перехід від вихідної області до одиничного квадрата з відповідним перетворенням розв'язувальної системи рівнянь;
- 2) зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою використання методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків, при цьому вихідна система диференціальних рівнянь у частинних похідних переходить у систему звичайних диференціальних рівнянь більш високого порядку;
- 3) розв'язання крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Перехід з вихідної області до нормованої у новій системі координат може бути записаний аналітично. Він призводить лише до зміни коефіцієнтів розв'язувальної системи рівнянь та повністю визначається координатами точок вершин чотирикутника, що задає форму пластини. Тому похибка наближеного розв'язку задачі визначається похибкою зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної та похибкою розв'язання останньої.

Точність сплайн-апроксимації на другому етапі залежить від обраного виду апроксимуючих функцій, кількості та розміщення вузлів і точок колокації. При цьому граничні умови на краях за рахунок вибору відповідних коефіцієнтів задовольняються точно, а розміщення точок колокації здійснюється за схемою, коли точки колокації на кожному інтервалі є коренями полінома Лежандра другого степеня (п. 3.1.).

На останньому етапі застосовано метод дискретної ортогоналізації, що дає змогу розв'язувати задачі з достатньою та контрольованою точністю. Доцільність його використання підтверджує багаторічний успішний досвід

його застосування для розв'язання широкого кола практичних задач теорії пластин та оболонок [32], [136], [137], [35].

В загальному випадку визначення строгих оцінок точності кінцевого результату викликає певні труднощі, тому доцільним виглядає застосування індуктивних прийомів, а саме:

- 1) порівняння результатів, отриманих наближеними чисельними методами запропонованого підходу, з існуючими аналітичними розв'язками для задач, де це можливо;
- 2) порівняння результатів з розв'язками, отриманими за допомогою інших наближених методів;
- 3) порівняння розв'язків задач, отриманих для різної кількості точок колокації в методі сплайн-апроксимації;
- 4) порівняння розв'язків задач, отриманих для різної кількості точок інтегрування в методі дискретної ортогоналізації.

Використання вказаних індуктивних прийомів покажемо на прикладі розв'язання конкретних задач.

Тестування запропонованого підходу з використанням перетворення координат проведено за допомогою розв'язання задачі про НДС прямокутної пластини (рис. 4.1) з ізотропного матеріалу розмірами  $2 \times 3$ ,  $h = 0,1$  в умовах жорсткого та шарнірного закріплення сторін [128], [138]. Лінійні розміри тут і надалі подано у відносних одиницях. Поверхневе навантаження  $q = q_0$

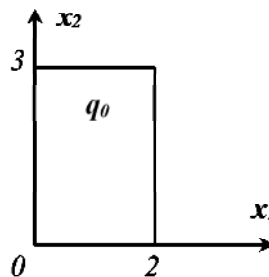


Рис. 4.1 — Прямокутна пластина під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження  $q = q_0$ .

прийнято сталим та рівномірно розподіленим. Прямокутна форма пластини дозволяє отримати розв'язок як безпосередньо в координатах  $x_1, x_2$ , так і з використанням перетворення координат, що зводить вихідну область до одиничного квадрата (п. 2.2.). В останньому випадку відбувається зміна коефіцієнтів системи розв'язуючих рівнянь, а задача розв'язується вже в координатах  $\xi_1, \xi_2, [0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$ . Задачу розв'язано при 500 точках інтегрування для методу дискретної ортогоналізації та 20 парах точок колокації.

Оскільки усі параметри розрахунків прийнято однаковими, включаючи кількість точок інтегрування, параметри сплайн-функцій, розташування та кількість точок колокації та ін., розв'язки задачі з перетворенням вихідної області та без нього повинні мати однакові значення прогину, що буде підтвердженням коректності запропонованої методики.

За результатами розрахунків отримані значення прогину  $w' = wE/q_0$ , що для обох розглянутих випадків закріплення сторін пластини при використанні чисел подвійної точності співпадають до 11 знаку. Розходження в останніх розрядах можна віднести головним чином до похибки розрахунку сум, що зумовлена кінцевою точністю представлення дійсних чисел у пам'яті комп'ютера.

Іншим варіантом тестування якості описання вихідної області може

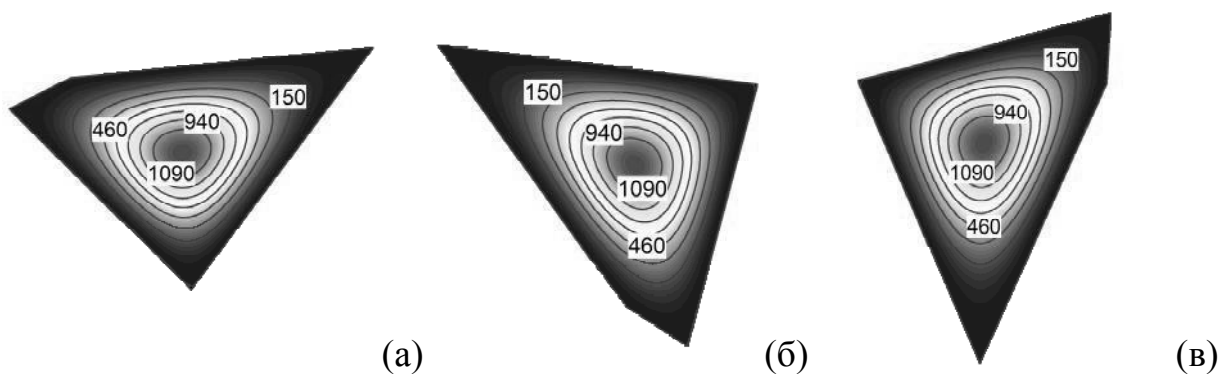


Рис. 4.2 — Поверхні функції прогину жорстко закріпленої ізотропної пластини у формі опуклого чотирикутника з різним розташуванням у вихідній системі координат.



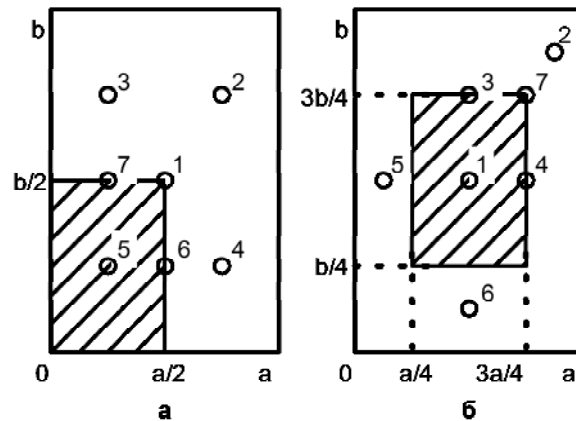


Рис. 4.3 — Варіанти розподілу навантаження  $q = q_0$  (заштрихована частина) по поверхні пластини та розташування контрольних точок обчислення прогину  $w$ .

бути розв'язок задачі про НДС трьох пластини у формі опуклого чотирикутника (рис. 4.2) [131]. Вони являють собою одну й ту саму пластину з вершинами у точках  $(1,0; 4,0)$ ,  $(4,0; 1,0)$ ,  $(7,0; 5,0)$ ,  $(2,0; 4,5)$  для варіанту рис. 4.2а, але по-різному розташовану у початковій системі координат: з поворотом на  $120^\circ$  (рис. 4.2б) та  $240^\circ$  (рис. 4.2в). Як і можна очікувати, поверхні прогину  $wE/q_0$  співпадають для усіх трьох випадків розташування пластини, так само як і значення максимального прогину, що становить  $w_{max}E/q_0 = 1245,06$ . Слід зазначити відсутність будь яких труднощів обчислювального характеру у розрахунках у зв'язку з формою пластини, яка наближається до трикутної, та правильність описання НДС пластини у кутах.

Для перевірки запропонованого підходу за допомогою відомих аналітичних розв'язків деяких задач розглянуто [139], [140] прямокутну шарнірно оперту пластину зі сторонами  $a$  та  $b$  товщиною  $a/40$  під дією поверхневого навантаження  $q = q(x,y)$ , що зосереджене в окремих частинах поверхні (рис. 4.3). Для полегшення порівняння значення прогину розраховано для семи точок.

У випадку шарнірного обпирання є можливість [61] розв'язання задачі за допомогою запису аналітичних виразів для функцій прогину  $w$ , кутів  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  та навантаження  $q$  через їх розклади у подвійні ряди Фур'є:

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
\psi_x(x, y) &= \sum_m \sum_n \psi_{xmn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
\psi_y(x, y) &= \sum_m \sum_n \psi_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
q(x, y) &= \sum_m \sum_n q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Приймаючи навантаження  $q = q_0$  у штрихованих частинах та  $q = 0$  — за їх межами, у випадку розподілу рис. 4.3а коефіцієнти розкладу  $q_{mn}$  приймають вигляд

$$\begin{aligned}
q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \\
&= \frac{4}{ab} \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \\
&= \frac{4q_0}{\pi^2 mn} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

а для випадку розподілу рис. 4.3б аналогічно отримуємо ( $m, n = 1, 2, 3 \dots$ )

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} \left(\cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Вирази для коефіцієнтів  $w_{mn}$ ,  $\psi_{xmn}$ ,  $\psi_{ymn}$  отримуємо шляхом підстановки розкладів відповідних функцій (у тому числі  $q(x, y)$  в залежності від обраного розподілу) у систему рівнянь (2.5) та подальшого розв'язання її відносно  $w_{mn}$ ,  $\psi_{xmn}$ ,  $\psi_{ymn}$ . Маючи вирази для коефіцієнтів розкладів у (4.1) як функції  $m$  та  $n$ , розраховуємо наближені значення прогину  $w$ , які приймаємо за точні при подальшому порівнянні результатів розв'язання задач.

Таблиця 4.1 — Значення прогину пластини під дією поверхневого навантаження, розподіленого за схемою рис. 4.3а

№ точки рис. 4.3а	$x/a$	$y/b$	Значення прогину $w' = wE/q_0$	
			чисельний розрах.	аналітичне
1	1/2	1/2	2702,1	2705,4
2	3/4	3/4	847,75	845,93
3	1/4	3/4	959,92	957,63
4	3/4	1/4	1581,1	1587,8
5	1/4	1/4	2373,2	2380,5
6	1/2	1/4	2734,9	2744,7
7	1/4	1/2	2204,5	2206,7

Таблиця 4.2 — Значення прогину пластини під дією поверхневого навантаження, розподіленого за схемою рис. 4.3б

№ точки рис. 4.3б	$x/a$	$y/b$	Значення прогину $w' = wE/q_0$	
			чисельний розрах.	аналітичне
1	1/2	1/2	5831,9	5771,9
2	7/8	7/8	761,94	750,21
3	1/2	3/4	3930,3	3875,3
4	3/4	1/2	4058,8	4017,0
5	1/8	1/2	2164,9	2142,1
6	1/2	1/8	2020,3	1988,5
7	3/4	3/4	2743,0	2705,4

Результати обчислень наведено у табл. 4.1 та табл. 4.2 для розподілу навантаження рис. 4.3а та рис. 4.3б відповідно. При розрахунках розміри прямокутної пластини прийнято  $a = 2$ ;  $b = 3$ ;  $h = a/40 = 0,05$ . Значення прогину наведено у вигляді нормованої величини  $w' = wE/q_0$ ;  $\nu = 0,3$ .

Аналітичні значення прогину враховують перші 600 членів ряду, а чисельний розв'язок отримано для 30 пар точок колокації та 1500 точок інтегрування. Загальний вид поверхонь функції прогину, що відповідають розглянутим випадкам навантаження, зображено на рис. 4.6.

Таблиця 4.3 — Значення прогину пластини під дією навантаження, розподіленого за схемою рис. 4.3а, при використанні нерівномірної сітки

№ точки рис. 4.3а	$x/a$	$y/b$	Значення прогину $w' = wE/q_0$	
			чисельний розрах.	аналітичне
1	1/2	1/2	2700,1	2705,4
2	3/4	3/4	848,3	845,93
3	1/4	3/4	960,6	957,63
4	3/4	1/4	1578,9	1587,8
5	1/4	1/4	2371,3	2380,5
6	1/2	1/4	2732,0	2744,7
7	1/4	1/2	2203,0	2206,7

Таблиця 4.4 — Значення прогину пластини під дією навантаження, розподіленого за схемою рис. 4.3б, при використанні нерівномірної сітки

№ точки рис. 4.3б	$x/a$	$y/b$	Значення прогину $w' = wE/q_0$	
			чисельний розрах.	аналітичне
1	1/2	1/2	5747,5	5771,9
2	7/8	7/8	749,6	750,21
3	1/2	3/4	3865,9	3875,3
4	3/4	1/2	3999,5	4017,0
5	1/8	1/2	2133,0	2142,1
6	1/2	1/8	1985,3	1988,5
7	3/4	3/4	2698,5	2705,4

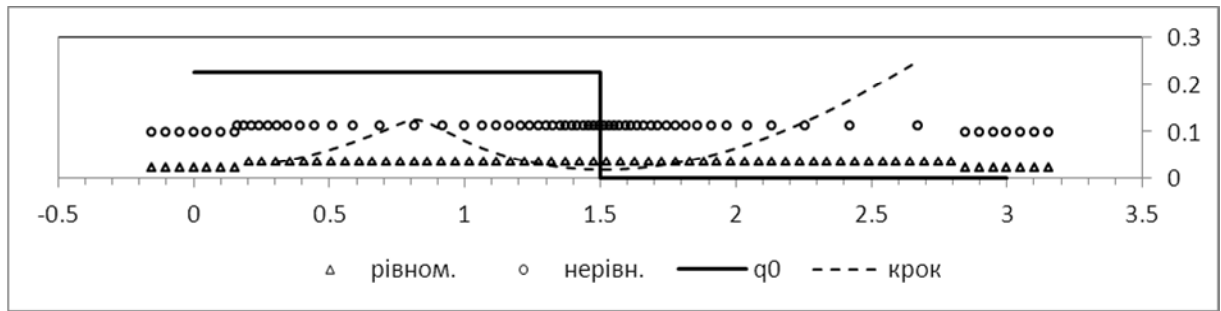


Рис. 4.4 — Приклад побудови нерівномірної сітки вузлів для сплайнів, що передбачає зменшення кроку у місцях значної зміни поверхневого навантаження  $q_0$

З даних табл. 4.1 та табл. 4.2 видно, що в усіх контрольних точках спостерігається практичне співпадіння результатів, отриманих аналітично та чисельно: різниця між значеннями становить менше одного відсотка, що свідчить про достатньо високу точність чисельного розв'язку.

Приймаючи до уваги нерівномірний характер розподілу навантаження по поверхні пластини, було також здійснено розв'язання задач з використанням нерівномірних сіток для побудови сплайнів у методі сплайн-колокації. Перерозподіл розташування вузлів сітки та, відповідно, точок колокації було здійснено з урахуванням необхідності задовільнення граничних умов. Остання накладає певні обмеження на розташування вузлів для сплайнів  $B_3^{-1}, B_3^0, B_3^1$  та  $B_3^{N-1}, B_3^N, B_3^{N+1}$  (рис. 4.4), які розташовані на початку та у кінці досліджуваного відрізка.

При використанні 30 пар точок колокації це залишає 52 «вільних» вузли у центральній частині сітки. Їх перерозподіл відбувався таким чином, щоб

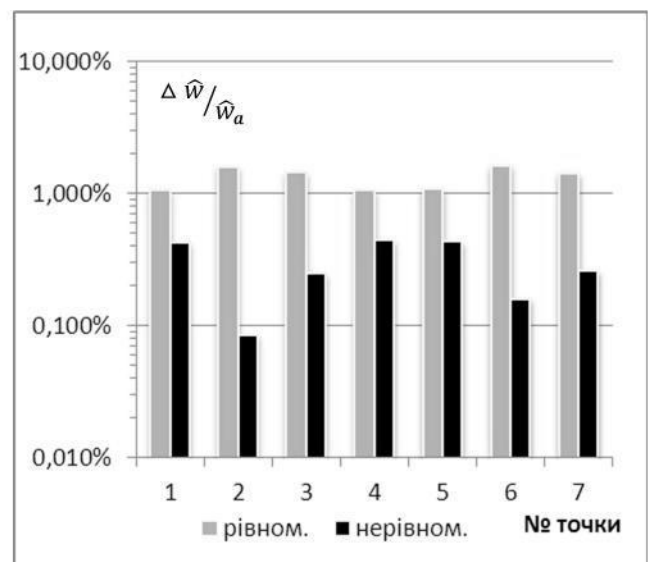


Рис. 4.5 — Порівняння відносної різниці у значеннях прогину для розв'язків задач з використанням різних сіток, варіант навантаження рис. 4.3б

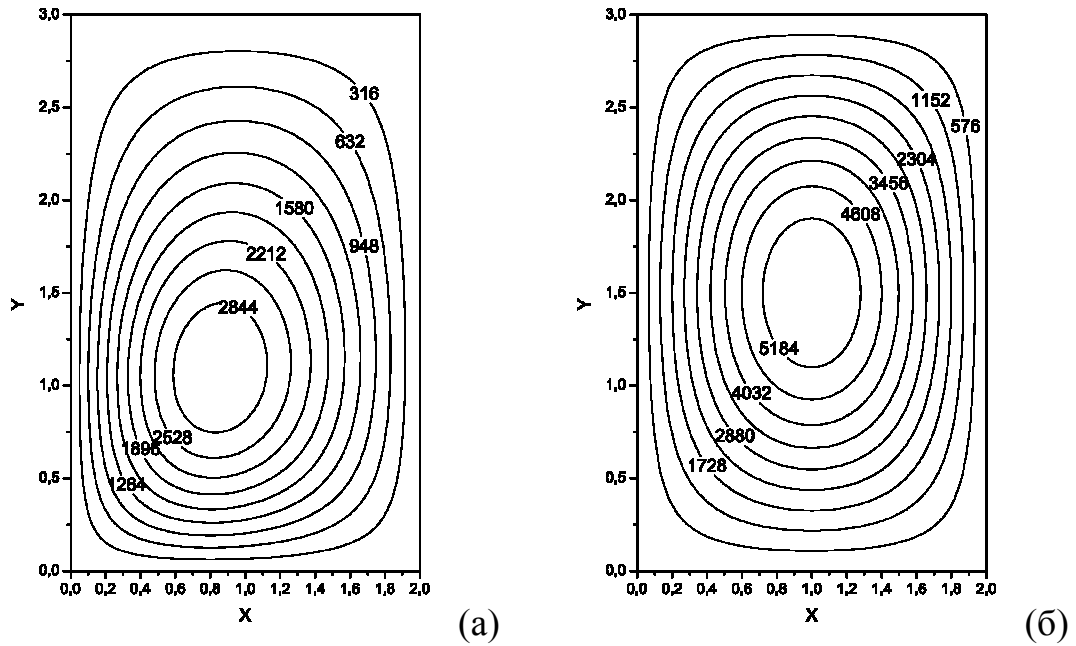


Рис. 4.6 — Вигляд поверхні функції прогину  $w'(x,y)$ , отриманої на основі аналітичного розв'язку, для обох варіантів навантаження відповідно до рис. 4.3.

згущення і, відповідно, зменшення кроку припадало на інтервали, де функція поверхневого навантаження  $q(x,y)$  змінюється стрибком від 0 до  $q_0$ . Для схеми розподілу рис. 4.3а це околиці точки  $y = 1,5$ ; для розподілу рис. 4.3б — околиці точок  $y = 0,75$  та  $y = 2,25$  (рис. 4.4). У табл. 4.3 та табл. 4.4 наведені результати розрахунків нормованих значень прогину  $wE/q_0$  для випадку використання нерівномірної сітки у порівнянні з аналітичним розв'язком, а на рис. 4.5 — значення відносних різниць між чисельним та аналітичним розв'язком для варіанту з використанням рівномірної та нерівномірної сітки для сплайнів  $\frac{\Delta w'}{w'_a} = \frac{w' - w'_a}{w'_a}$ , де  $w'$  — чисельний, а  $w'_a$  — аналітичний розв'язок.

Можна зазначити, що для варіанту навантаження рис. 4.3а використання нерівномірної сітки для сплайн-апроксимації не дало відчутного ефекту. Проте для варіанту навантаження рис. 4.3б відносну розбіжність чисельного розв'язку з аналітичним вдалося зменшити в середньому з 1 % до майже 0,1 %.

Таблиця 4.5 — Координати вершин фігур, що описують форму розглянутих паралелограмів та трапецій

№	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	$x_4$	$y_4$
1	2,59	9,66	0	0	10,00	0	12,59	9,66
2	7,07	7,07	0	0	10,00	0	17,07	7,07
3	1,29	4,83	0	0	10,00	0	11,29	4,83
4	3,54	3,54	0	0	10,00	0	13,54	3,54
5	47,15	4,13	47,15	-4,13	57,15	-5,00	57,15	5,00
6	8,66	2,32	8,66	-2,32	18,66	-5,00	18,66	5,00
7	52,15	4,56	52,15	-4,56	57,15	-5,00	57,15	5,00
8	8,74	3,18	8,74	-3,18	13,74	-5,00	13,74	5,00

Таблиця 4.6 — Розраховані значення максимального прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q_0$ , дані за методом скінчених елементів (FEM) та значення відносної різниці  $\delta$  між ними

№, табл. 4.3	$w'_{max}$	$w'_{max}$ (FEM)	$\delta$ , %
1	118160	123100	4,01
2	40205	41460	3,03
3	15077	15180	0,68
4	4483	4505	0,49
5	108889	113000	3,64
6	59309	60760	2,39
7	17128	17120	0,05
8	15628	15650	0,14

Результати розрахунків із застосуванням запропонованого підходу було також порівняно з даними досліджень, що використовували такий наближений метод як метод скінчених елементів [128]. Так у [46] наведено результати розрахунків прогинів для пластин у формі трапецій та паралелограмів з жорстким закріпленням під дією сталого рівномірно

розподіленого навантаження  $q = q_0$ . Координати вершин фігур, що описують форму чотирьох розглянутих паралелограмів (№1–№4) та чотирьох трапецій (№5–№8), наведено у табл. 4.5.

Усі вказані у табл. 4.5 фігури є чотирикутниками і це дозволяє застосувати для розв'язку відповідних задач підхід, що запропоновано. Для можливості порівняння результатів розрахунків параметри задач відповідають наведеним у [46]: розміри ізотропних пластин згідно табл. 4.5; товщина  $h = 0,1$ ; коефіцієнт Пуассона 0,3. Розрахунки виконано для 30 пар точок колокації та 1500 точок інтегрування.

Розраховані числові значення максимального прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q_0$  разом з даними для методу скінчених елементів (FEM) та значеннями відносної різниці  $\delta$  наведено у табл. 4.6, а вигляд поверхонь функції прогину для пластин у формі паралелограмів показаний на рис. 4.7, а для пластин у

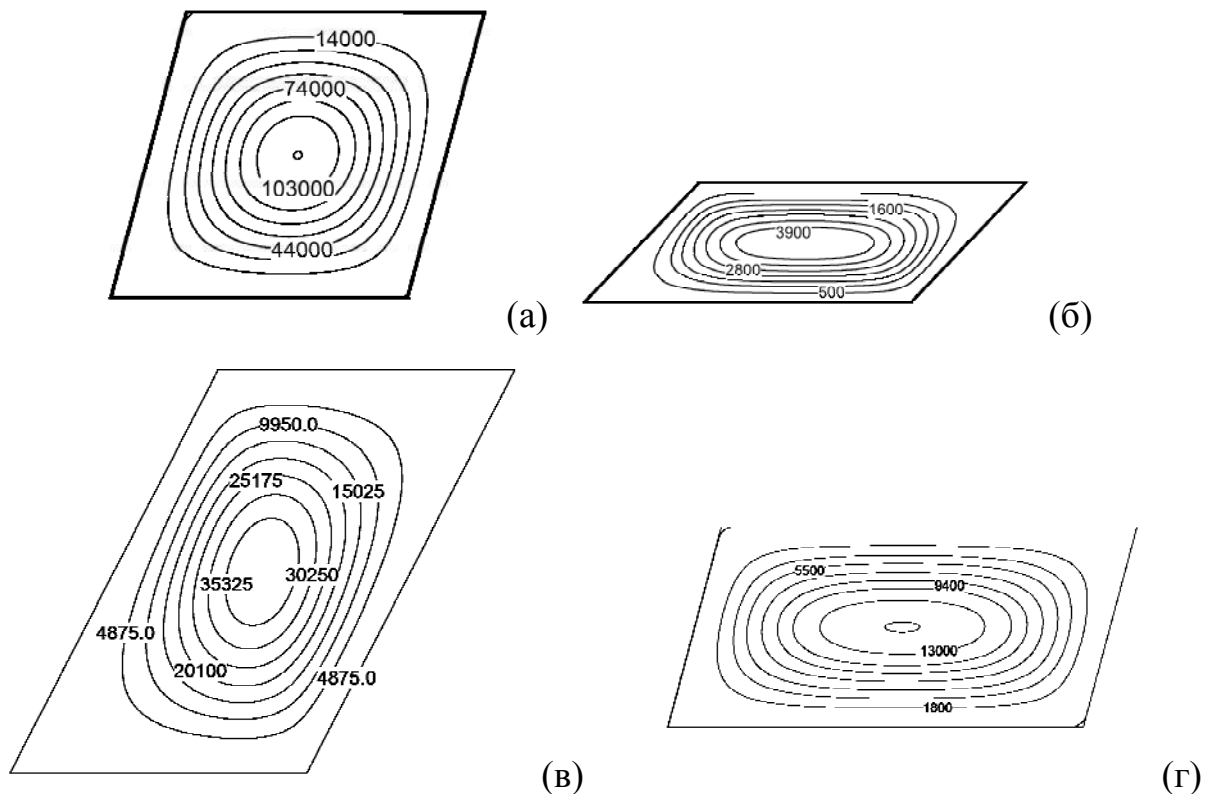


Рис. 4.7 — Вигляд поверхонь функції прогину ізотропних чотирикутних пластин у формі паралелограмів під дією рівномірного поверхневого навантаження із жорстким закріпленням сторін.



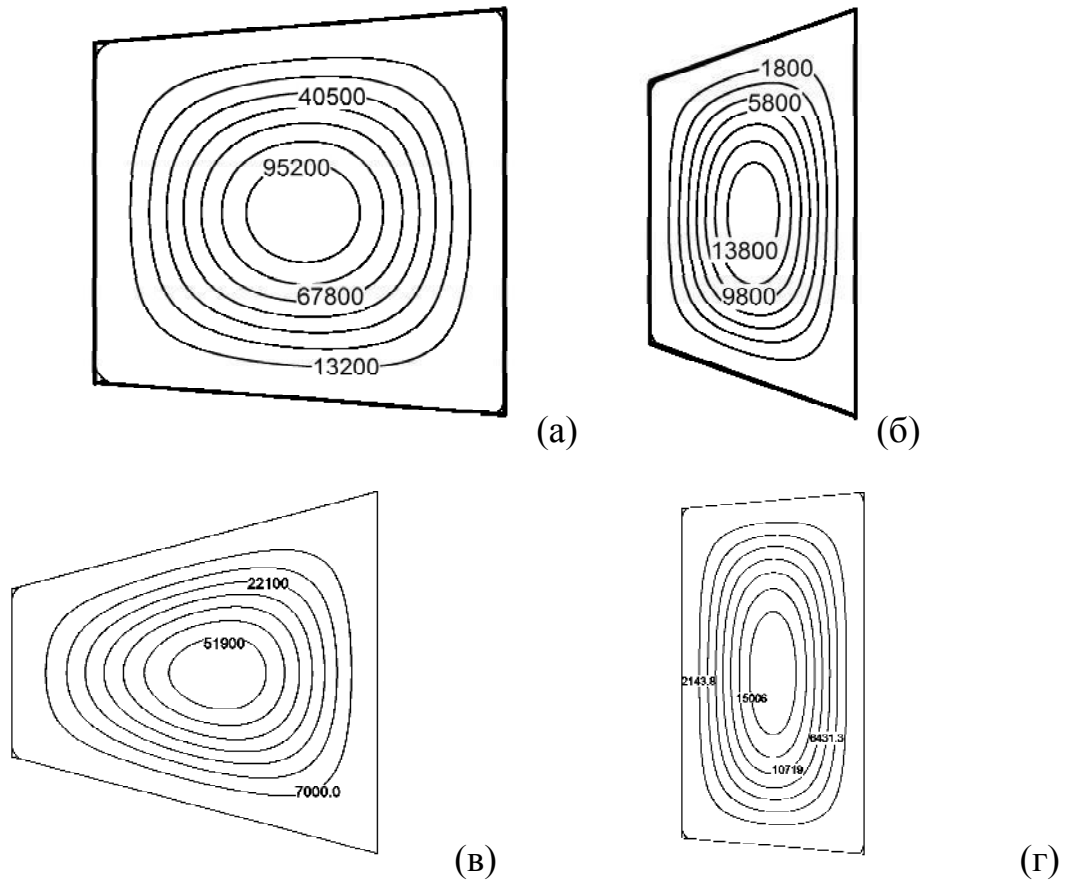


Рис. 4.8 — Вигляд поверхонь функції прогину ізотропних чотирикутних пластин у формі трапецій під дією рівномірного поверхневого навантаження із жорстким закріпленням сторін.

формі трапецій — на рис. 4.8.

Приймаючи до уваги незначну відмінність у значеннях прогину, відносна різниця між якими не перевищує одиниць відсотків (табл. 4.6), можна говорити про узгодженість результатів розв'язання задач за допомогою запропонованого підходу з даними інших наближених методів. Це, в свою чергу, підтверджує можливість застосування підходу до розв'язання відповідних класів задач про НДС пластин.

В задачах визначення НДС пластин з ортотропних матеріалів іноді виникає потреба розглянути ефекти, що виникають при повороті осей ортотропії на певний кут. В загальному випадку, приймаючи об'єкт дослідження зафіксованим відносно обраної системи координат, це означає зміну пружних сталих у напрямку координатних осей, а розв'язання

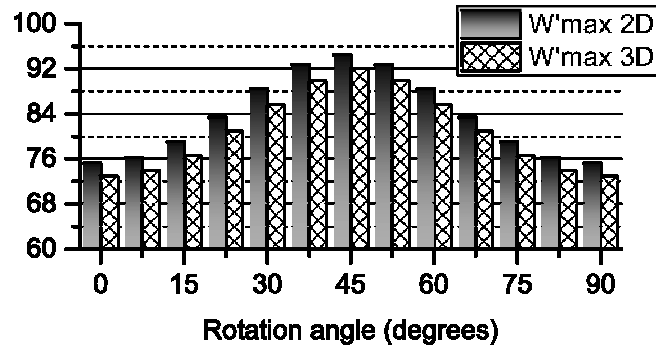


Рис. 4.9 — Значення максимального прогину квадратної ортотропної пластини з жорстким закріпленням сторін в залежності від кута розвороту осей ортотропії матеріалу, отримані розв'язанням задачі у двовимірній ( $w'_{\max}$  2D) та у тривимірній ( $w'_{\max}$  3D) постановці.

відповідних задач — необхідність додаткових розрахунків. При застосуванні запропонованого підходу пластини складної форми може бути однозначно задана незалежно від її розташування (зсуву та повороту) відносно начала координат, як це було продемонстровано вище для чотирикутника (рис. 4.2). Це дозволяє замість повороту осей ортотропії матеріалу змінювати орієнтацію самої пластини, залишаючи таким чином значення пружних сталих матеріалу без змін.

Для підтвердження зробленого припущення було розглянуто задачу про квадратну пластину під дією рівномірного сталого поверхневого навантаження  $q = q_0$  з жорстким закріпленням сторін при зміні орієнтації пластини у вихідній системі координат від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Результати розрахунку максимального прогину  $w_{\max}E/q_0$  було порівняно з даними, що отримані узагальненим методом Канторовича-Власова [141] для тієї самої задачі у тривимірній постановці (рис. 4.9). Оскільки максимальна розбіжність у значеннях прогину, отриманих двома вказаними методами, не перевищує 3,5 %, запропоновану схему можна використовувати у подальших розрахунках, а добре узгодження між результатами в цілому може бути одним з критеріїв достовірності отриманих розв'язків.

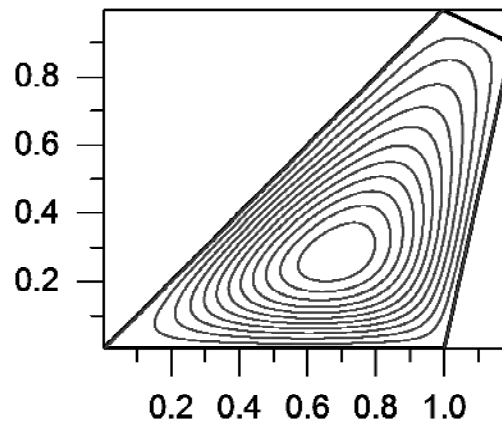


Рис. 4.10 — Поверхня функції прогину жорстко закріпленої ортотропної чотирикутної пластини з вуглепластику.

З метою визначення параметрів розрахунків для методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації, а саме необхідної кількості пар точок колокації та точок інтегрування, що забезпечують отримання стійкого розв'язку, розглянуто задачу про НДС чотирикутної пластини з ортотропного матеріалу (рис. 4.10). Товщину пластини з вуглепластику (CFRP) прийнято  $h = 0,1$ ; поверхнєве навантаження  $q = q_0$  розподілене рівномірно; пружні сталі відповідають значенням з [142]:  $E_1 = 2,11 E_0$ ,  $E_2 = 0,053 E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $G_{12} = G_{31} = 0,026 E_0$ ,  $G_{23} = 0,013 E_0$ .

Розрахунки максимального значення прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q_0$  здійснено для різної кількості точок колокації (вісь  $\xi_2$ , сплайн-апроксимація) та точок інтегрування  $Nx$  (вісь  $\xi_1$ , дискретна ортогоналізація). Отримані результати наведено у табл. 4.7.

З даних табл. 4.7 легко бачити, що при кількості точок колокації більше 60 (30 пар) та точок інтегрування більше 1500, зміни у значеннях прогину не виходять за межі п'ятого знаку. Приймаючи до уваги достатньо довільну (рис. 4.10) форму пластини, що розглядається, можна очікувати, що визначених значень кількості точок колокації та інтегрування буде достатньо для отримання стійкого результату і для інших задач зі схожою формою

пластин. У той же час для варіантів задач з пластинами, форма яких має суттєві відмінності у довжині сторін, малі або великі значення кутів між ними, особливості геометрії і т.і., необхідність у проведенні додаткових розрахунків щодо визначення параметрів методів, які забезпечать стабільність розрахунків, залишається актуальною.

Таблиця 4.7 — Значення максимального прогину жорстко закріпленої ортотропної пластини, розраховані при різній кількості точок колокації та інтегрування

$N_x$	Кількість пар точок колокації						
	5	10	15	20	25	30	35
100	32,503	32,386	32,376	32,375	32,374	32,374	32,374
200	32,508	32,389	32,380	32,378	32,377	32,377	32,377
300	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,379	32,379
500	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,379	32,379
1000	32,509	32,390	32,381	32,379	32,379	32,378	32,378
1500	32,509	32,390	32,381	32,379	32,378	32,378	32,378
2000	32,509	32,390	32,381	32,379	32,378	32,378	32,378

Підсумовуючи отримані результати, слід зазначити, що застосування методів сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації для розв'язання двовимірних крайових задач про НДС чотирикутних пластин в уточненій постановці дозволяє отримувати достовірні результати, які добре узгоджуються як з відомими аналітичними розв'язками, так і з даними інших наближених методів. При цьому використання вказаних вище індуктивних прийомів дає змогу додатково контролювати точність обчислень.

#### 4.2. Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ізотропних матеріалів

Розглянемо напружено-деформований стан чотирикутних ізотропних пластин товщиною  $h = 0,1$ , форма яких змінюється від квадрата зі стороною  $a = 2$  через рівнобічні трапеції до рівнобічного трикутника таким чином, що площа відповідної фігури залишається сталою [143]. Координати відповідних точок-вершин фігур наведено у табл. 4.8 (варіант 1–4).

Застосуємо запропонований підхід для визначення полів деформацій згідно з уточненою моделлю. Коефіцієнт Пуассона прийнято рівним 0,3; нормальне поверхнєве навантаження  $q = q_0$  розподілене рівномірно; прогин подаємо у вигляді нормованої величини  $wE/q$ . Бокові сторони трапецій нехай закріплені жорстко, а основи вільні. Для розрахунків приймаємо кількість точок колокації 30 пар, точок інтегрування — 1500.

Таблиця 4.8 — Координати вершин чотирикутників, що задають форму пластин

№	Координати вершин чотирикутників							
	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	$x_4$	$y_4$
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
2	-1	0,5	-1	-0,5	1	-1,5	1	1,5
3	-1	0,1	-1	-0,1	1	-1,9	1	1,9
4	0	1	-1	0	1	-2	1	2
5	0	1	4	0	4	4	0	3,5
6	0	1	4	0	4	4	0	4
7	0	1	4	0	4	4	0	4,25
8	0	1	4	0	4	4	0	5

Достовірність результатів, отриманих використанням сплайн-колокації, будемо перевіряти порівнянням з даними розрахунків за методом скінчених

елементів (МСЕ), де застосовано найпростіший чотирикутний елемент та розбиття області рівномірною сіткою  $200 \times 200$ . Отримані результати представлені на рис. 4.11 у вигляді ізоліній поверхонь функції прогину  $wE/q$ , а у табл. 4.9 — як максимальні значення прогину, які для варіантів пластин 1–4 вочевидь досягаються у точці  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Зважаючи на близькість значень прогину (табл. 4.9) та повністю ідентичний характер розподілу полів деформації, що отримані двома згаданими способами, на рис. 4.11 (а також рис. 4.12) наведені лише поверхні, розраховані за допомогою підходу з використанням сплайн-колокації.

Таблиця 4.9 — Розраховані значення максимального прогину з використанням сплайн-колокації та МСЕ для різних варіантів форми пластин

Метод розрахунку	Значення $w_{max}E/q$ для варіанту форми №			
	1	2	3	4
Сплайн-колокація	529,34	1235,6	1576,7	1628,5
МСЕ	527,75	1231,6	1570,8	1622,2

Розподіл полів переміщень є очікуваним та повністю відповідає особливостям форми та закріплення кожної окремої пластини: із зростанням довжини вільного краю більшої основи зростає і значення максимального прогину, що припадає на середину відповідної сторони пластини. При цьому варто зазначити, що використання обох підходів призвело до позитивного результату при розрахунках для варіанту форми №4, де чотирикутна пластина фактично стає трикутною рис. 4.11г. Щоправда, використання підходу на основі сплайн-колокації призвело до необхідності дещо змінити порядок та розташування вершин відповідного чотирикутника (варіант 4, табл. 4.8).

Для інших чотирьох розглянутих пластин (варіант форми 5–8 табл. 4.8) умови закріплення передбачають вільний край лише на стороні, що лежить

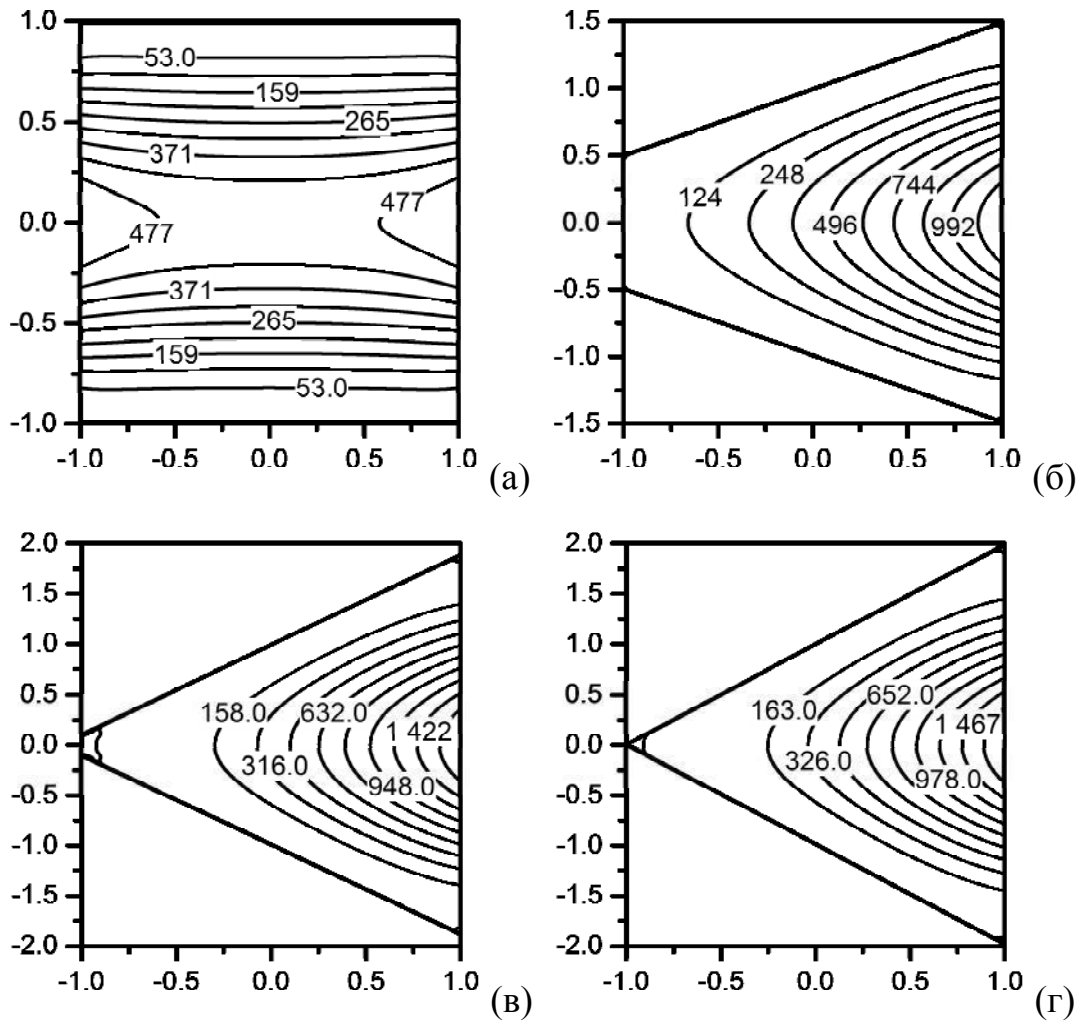


Рис. 4.11 — Загальний вигляд поверхонь функції прогину для чотирикутних пластин різної форми та з однаковою площею поверхні

на осі  $Oy$ , а самі пластини відрізняються розташуванням виключно четвертої точки. Це дозволяє прослідкувати зміни у поверхні функції прогину при переході від трапеції до паралелограму (рис. 4.12). Інші параметри пластин, умови навантаження і розрахунків повністю повторюють описані вище для варіантів форми 1–4 (табл. 4.8).

Як і у випадку трапецій рис. 4.11а-г, маємо збільшення значень максимального прогину із збільшенням довжини вільного краю пластини (табл. 4.10). Водночас розташування зони максимальної деформації змінюється з майже центру пластини (рис. 4.12а) на край (рис. 4.12г) з утворенням «сідловини» у проміжних варіантах (рис. 4.12б, в). Координати точок, що відповідають максимальним значенням прогину у табл. 4.10 для

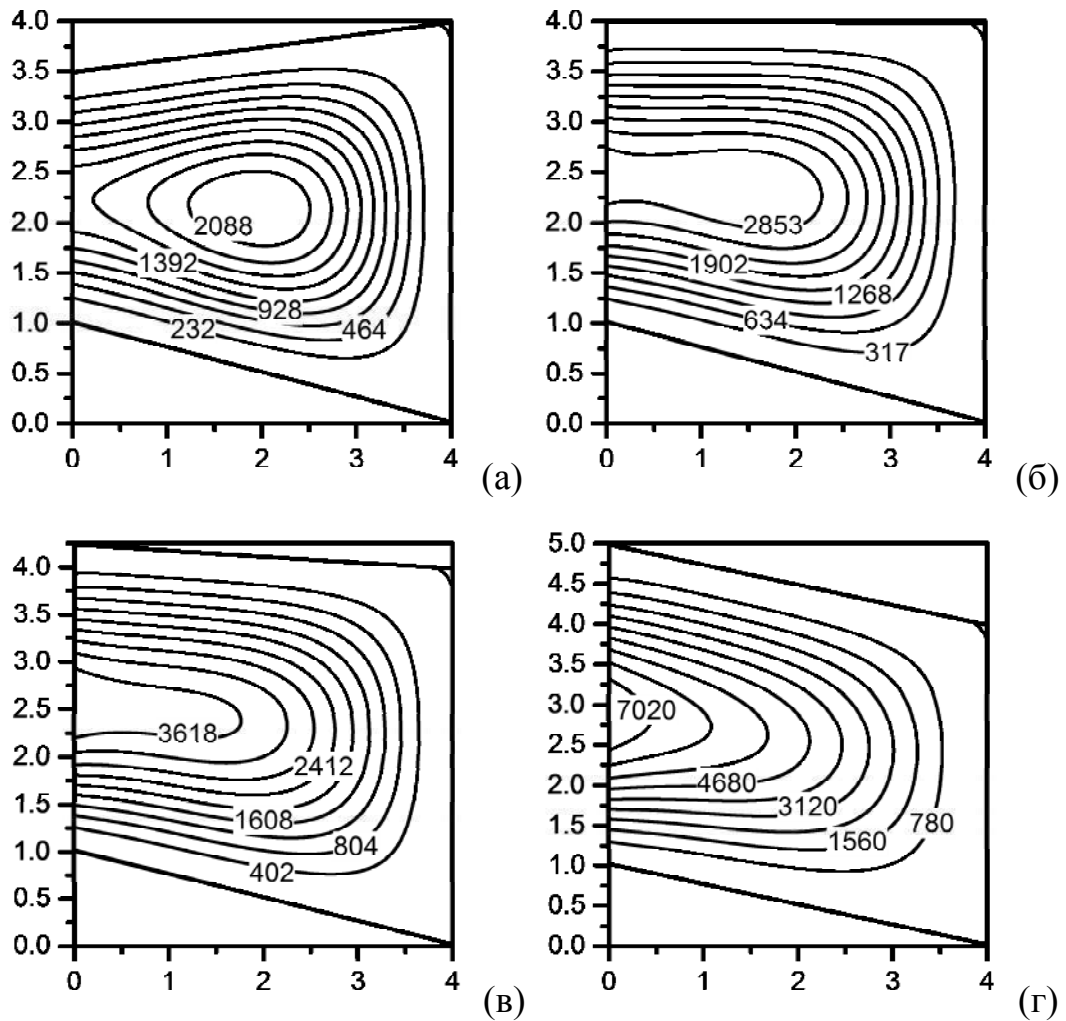


Рис. 4.12 — Загальний вигляд та ізолінії поверхонь функції прогину для пластин із різною довжиною вільного краю на  $x = 0$

вказаних варіантів розрахунку за допомогою сплайн-колокації та за МСЕ відрізняються лише у третьому-четвертому знаку, що свідчить про високий ступінь узгодженості отриманих результатів.

Таблиця 4.10 — Розраховані значення максимального прогину з використанням сплайн-колокації та МСЕ для різних варіантів форми пластин

Метод розрахунку	Значення $w_{max}E/q$ для варіанту форми №			
	5	6	7	8
Сплайн-колокація	2315,6	3161,5	4016,4	7790,9
МСЕ	2303,3	3144,1	3990,9	7736,4



Розрахунки для вказаних вище восьми ізотропних пластин здійснено з урахуванням спрощень, що були зазначені у п. 2.4. Отримані за допомогою підходу на основі сплайн-колокації значення максимальних прогинів для усіх розглянутих випадків форми пластин добре узгоджуються з даними методу скінчених елементів: відносна різниця у значеннях не перевищує 1 %.

#### 4.3. Дослідження напружено-деформованого стану чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів

Як було показано у п. 4.2. для випадку ізотропного матеріалу, розподіл полів переміщень для чотирикутних пластин визначеної форми під дією нормального поверхневого навантаження відносно легко передбачити, знаючи умови закріплення кожної із сторін. Дещо складніше виглядає ситуація, коли матеріал має анізотропні властивості, а форма поверхні функції прогину визначається комплексною взаємодією декількох параметрів.

Продовжуючи розгляд пластин у формі трапецій, щодо яких є можливість порівняння розрахунків з даними інших досліджень, спробуємо

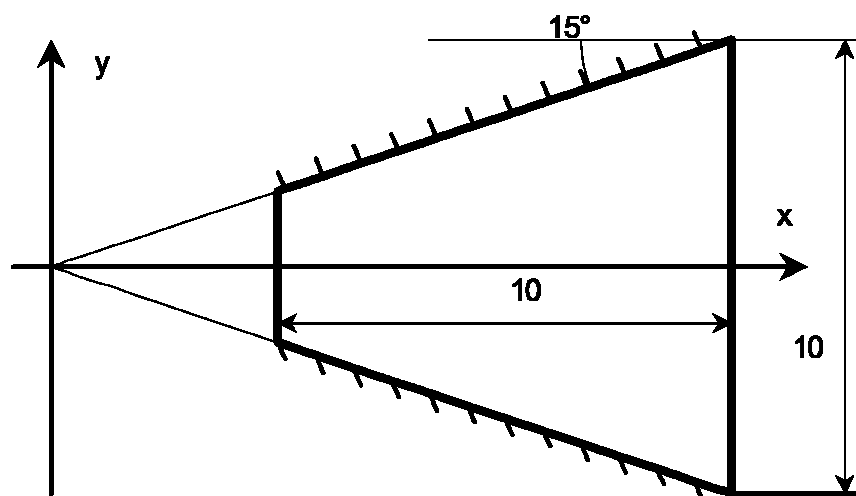


Рис. 4.13 — Геометричні параметри ортотропної пластини сталої товщини у формі рівнобічної трапеції

розв'язати задачу про НДС ортотропної пластини сталої товщини  $h$  під дією нормального рівномірного поверхневого навантаження  $q(x,y) = q_0$ . Основні геометричні параметри пластини, що була розглянута у роботі [47], наведено на рис. 4.13.

Для збереження можливості порівняння результатів розглянемо два випадки матеріалу та умов закріплення [144]. Перший випадок повторює умови задачі з роботи [47]: (V) набір пружних констант ( $E_x = E_0, E_y = E_0/2, G_{xy} = E_0/8, \nu_x = 0,15$ ) та жорстке закріплення усіх сторін. На другому варіанті, що поєднує жорстке закріплення лише бокових сторін (рис. 4.13) і пружні константи для армованого вуглепластику (carbon fiber reinforced plastic, CFRP), параметри якого  $E_{11} = 2,11E_0, E_{22} = 0,053E_0, G_{12} = G_{13} = 0,026E_0, G_{23} = 0,013E_0, \nu_{12} = 0,25$  наведено у [142], спробуємо визначити вплив наявності ортотропії та орієнтації відповідних осей на характер НДС пластини.

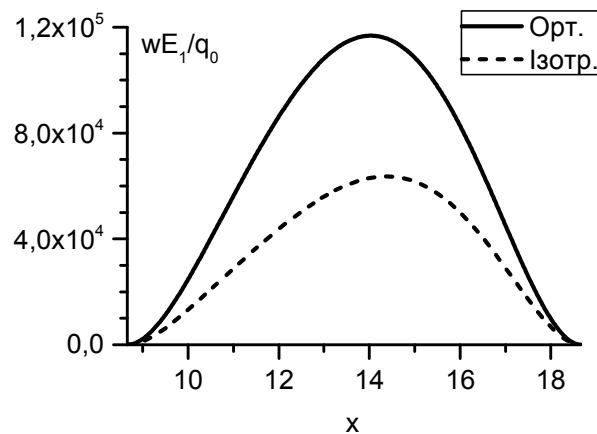


Рис. 4.14 — Криві перерізу при  $y = 0$  поверхні функції прогину  $w^*(x,y)$  для ортотропного та ізотропного матеріалів

Отриманий чисельний розв'язок задачі для матеріалу з роботи [47] наведено на рис. 4.14 у вигляді кривих перерізу поверхні функції прогину  $w^*(x,y) = wE_0/q_0$  при  $y = 0$ . Пунктирна крива відповідає умовно ізотропному матеріалу з усередненими параметрами ( $E = (E_1 + E_2)/2$  і т.і.). Відсутність

детальної інформації про значення параметрів розрахунку у згаданій роботі робить неможливим безпосереднє порівняння значень прогину  $w^*$ , проте форма кривих та характер залежності цілком збігається з даними, що було наведено вказаними авторами.

Поверхні функції прогину для армованого пластику CFRP, для якого відношення  $E_1/E_2 \approx 40$ , представлені на рис. 4.15а;  $E_2/E_1 \approx 40$ , тобто після розвороту матеріалу на  $90^\circ$  із відповідними змінами для  $G_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  — на рис. 4.15в. Рис. 4.15б відповідає псевдо ізотропному матеріалу, з параметрами, що є середніми для розглянутого набору ( $E = (E_1 + E_2)/2$  і т.і.). Для полегшення візуального порівняння результатів розрахунків на рис. 4.15а–в додатково наведені криві перерізів поверхонь при  $y = 0$ , що відповідає середині пластини.

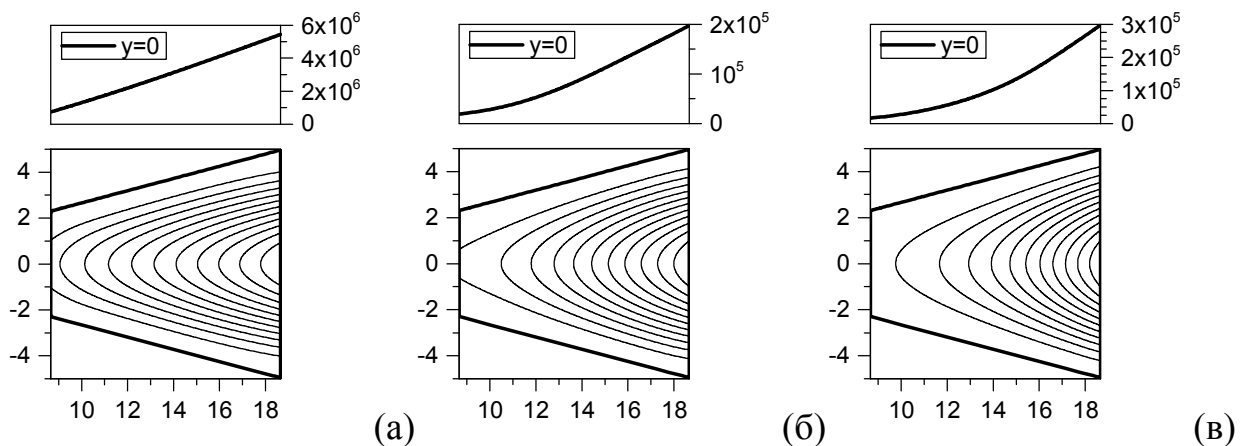


Рис. 4.15 — Вигляд поверхонь функції прогину та кривих перерізу при  $y = 0$  для пластини у формі рівнобічної трапеції: (а), (в) — ортотропний матеріал, (б) — псевдо ізотропний матеріал

Порівнюючи форму кривих перерізів та характер ізоліній поверхонь на рис. 4.15а та рис. 4.15б, легко бачити, що для ортотропного матеріалу з  $E_1/E_2 \approx 40$  максимальний прогин практично лінійно залежить від розміру пластини вздовж  $Oy$ , тоді як для ізотропної пластини при наближенні до лівого краю спостерігається відчутне зменшення прогину, поверхня стає

більш пологою. Це є досить очікуваним, зважаючи на незначну жорсткість матеріалу вздовж  $Oy$  при жорсткому закріпленні тільки бокових сторін трапеції.

Вказаний вплив жорсткого закріплення є ще більш виразним у порівнянні рис. 4.15а з рис. 4.15в, та рис. 4.15б з рис. 4.15в. При розгляді поверхні біля лівого краю зростання прогину на рис. 4.15в є ще більш повільним, а абсолютні значення  $w^*$  мало відрізняються від ізотропного випадку (рис. 4.15б), незважаючи на значні відмінності у пружних сталих — ізотропний матеріал фактично відповідає армуванню одночасно в усіх напрямках. Це наглядно показує доцільність армування матеріалів з виділенням переважаючого напрямку, що відповідає особливостям закріплення та навантаження конструктивного елемента.

Як було показано вище, ортотропні пластини із різними значеннями пружних сталих можуть перебувати у суттєво різному НДС навіть при однакових умовах закріплення та навантаження. Детально проілюструвати зміни характеру НДС, що відбуваються як результат наявності певної взаємодії між орієнтацією осей ортотропії та сторін пластини, можна розглянувши ряд задач, де відповідний кут змінюється від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , а усі інші параметри залишаються сталими [143], [145].

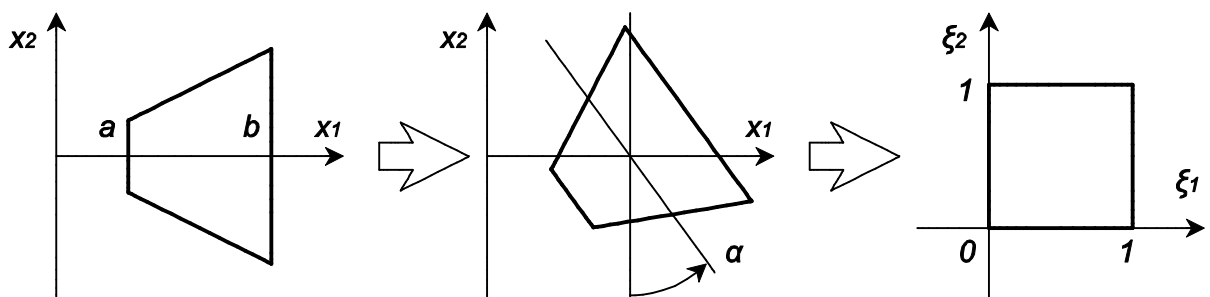


Рис. 4.16 — Схема дослідження впливу взаємного розташування осей ортотропії та сторін пластини у формі трапеції із співвідношенням основ  $b/a$  від 1:1 (квадрат) до 10:1 на розподіл полів деформації

Для дослідження цього питання розглянемо задачу про НДС чотирикутних ортотропних пластин товщиною  $h = 0,1$  у формі рівнобічної трапеції із співвідношенням основ  $b/a$  від 1:1 (квадрат) до 10:1 (рис. 4.16). Висота трапеції та її площа  $S = 1,0$  зберігаються незмінними для забезпечення можливості кількісного порівняння результатів розрахунків. Деформація пластини відбувається під дією рівномірно розподіленого поверхневого навантаження  $q(x,y) = q_0$ .

Таблиця 4.11 — Розраховані значення максимального прогину  $w_{max}E/q$  для пластику, армованого скловолокном із співвідношенням шарів 2/1

b/a	1/1	3/1	10/1
0°	7,66669	6,77759	5,57181
15°	7,77132	6,80441	5,57531
30°	7,99358	6,86615	5,60469
45°	8,11149	6,92438	5,68011
60°	7,99358	6,93553	5,77703
75°	7,77131	6,89784	5,85183
90°	7,66668	6,87186	5,87669

Таблиця 4.12 — Розраховані значення максимального прогину  $w_{max}E/q$  для пластику, армованого вуглецевим волокном (CFRP)

b/a	1/1	3/1	10/1
0°	75,2208	71,2451	60,7918
15°	79,0297	74,0471	62,6399
30°	88,4201	80,6674	67,4719
45°	94,4493	85,8743	74,2085
60°	88,4199	86,0683	81,8951
75°	79,0292	84,3045	87,5379
90°	75,2202	83,5697	— *

\* отримано нестійкий результат

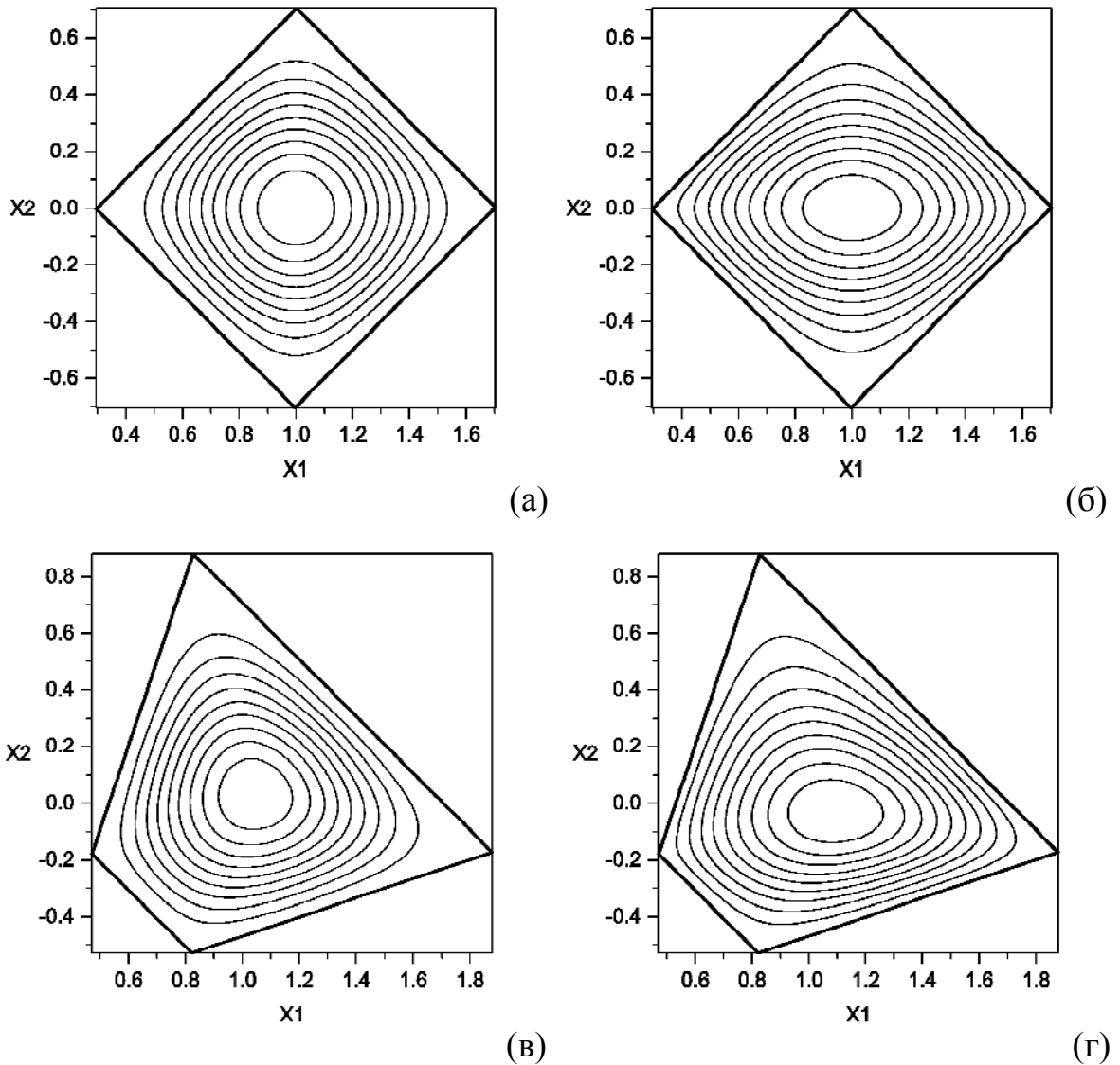


Рис. 4.17 — Загальний вигляд поверхні функції прогину для ортотропної пластини із склопластику 2/1 (а, в) та CFRP (б, г) при значенні кута  $\alpha=45^\circ$  та різному співвідношенні основ  $b/a$

Результати розрахунку для пластику, армованого скловолокном із співвідношенням шарів 2/1 ( $E_1 = 3,68E_0$ ,  $E_2 = 2,68E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,105$ ,  $G_{12} = 0,5E_0$ ,  $G_{23} = 0,41E_0$ ,  $G_{31} = 0,45E_0$ ), представлені значеннями максимального прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q$  у табл. 4.11. Для пластику, армованого вуглецевим волокном (CFRP), що має більш виражену ортотропію пружних властивостей, результати розрахунків наведено у табл. 4.12.

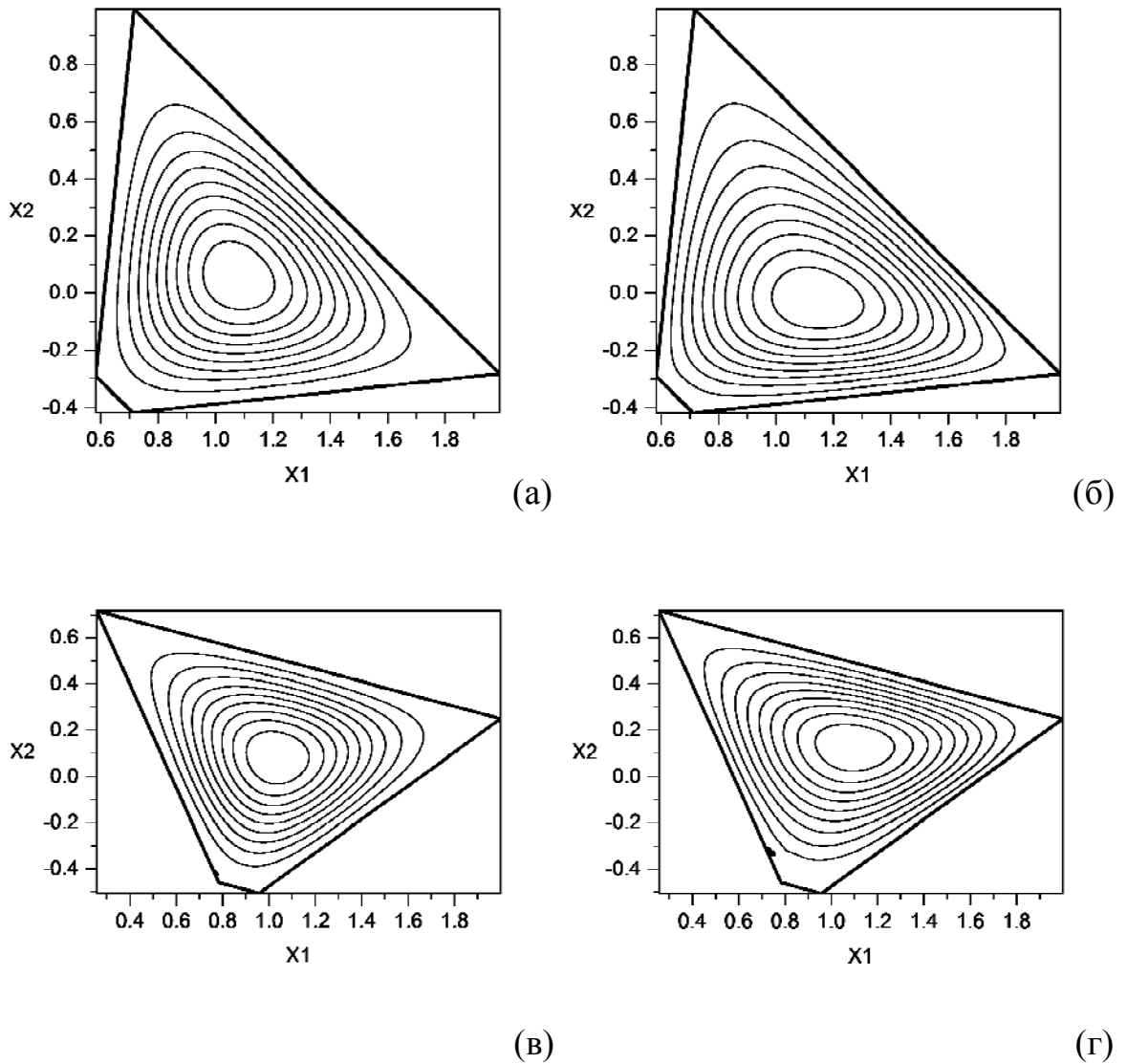


Рис. 4.18 — Загальний вигляд поверхні функції прогину для ортотропної пластини із склопластику 2/1 (а, в) та CFRP (б, г) при значенні кута  $\alpha = 45^\circ$  та  $\alpha = 75^\circ$ , співвідношення основ  $b/a = 10$

Загальний вигляд поверхні функції прогину для обох матеріалів при значенні параметру  $b/a = 1/1$   $b/a = 3/1$  та куті повороту осей ортотропії  $45^\circ$  наведено на рис. 4.17. Легко бачити вплив, що здійснює велике значення співвідношення  $E_1/E_2 \approx 40$  на зсув області з максимальним прогином до тієї частини пластини, де її розмір вздовж осі  $Ox$  має найбільшу величину рис. 4.17г.

Зображені на рис. 4.18 поверхні функції прогину для значень параметру  $b/a = 10/1$  та кутів повороту осей ортотропії  $45^\circ$  і  $75^\circ$  ще більш підкреслюють

вплив ортотропних властивостей матеріалу на розподіл переміщень: для склопластику ізолінії поверхні відтворюють контур пластини (рис. 4.18а, в), тоді як для CFRP зсув області максимального прогину до найдовшої сторони стає ще більш помітним (рис. 4.18б, г).

Дані табл. 4.11 показують, що збільшення відношення  $b/a$  призводить до зменшення значень максимального прогину для будь-яких значень кута  $\alpha$ . Тому квадратна ( $b/a = 1/1$ ) пластинка з склопластику на куті  $45^\circ$  показує найбільший прогин. Для пластин іншої геометрії (3/1, 10/1), навіть зважаючи на деяке збільшення прогинів ближче до  $90^\circ$ , їх значення залишаються значно меншими.

Для випадку пластин з CFRP спостерігається дещо інша ситуація. Хоча максимальні значення прогину лишаються за пластинкою у формі квадрата на куті  $\alpha = 45^\circ$ , трапеції 3/1 та 10/1 на великих кутах  $\alpha$  мають значне зростання  $w'_{max}$ , що перебільшує відповідні значення для квадратної пластинки. Відбувається це, вочевидь, завдяки зростанню довжини основи  $b$  (рис. 4.16), що створює умови для різкого збільшення деформацій поблизу відповідного краю пластинки.

Беручи до уваги сталі значення площі поверхні пластинки  $S = 1,0$  для усіх випадків розглянутих значень геометричних параметрів, виявлені ефекти зменшення (збільшення) максимального прогину можна віднести до впливу форми пластинки та властивостей її матеріалу. Одночасна зміна форми серединної поверхні та зміна пружних сталей можуть призводити як до зменшення значень прогинів, так і до їх збільшення. При цьому, як це видно при порівнянні результатів розрахунків на кутах  $45^\circ$  і  $75^\circ$ , не останнє значення має орієнтація вісей ортотропії відносно сторін пластинки, що підкреслює складний характер взаємодії різних параметрів.



#### 4.4. Аналіз впливу геометричних та механічних параметрів пластин на розподіл полів напружень та переміщень

Оскільки запропонований підхід, що використовує відображення вихідної області на нормовану одиничну область завдяки відповідному перетворенню координат, дозволяє розглядати в загальному випадку пластини довільної форми, певний практичний інтерес становить питання наявності геометричних обмежень на форму серединної поверхні цих пластин. Відповідь на це питання будемо шукати, розглянувши два набори пластин: у формі дельтоїдів та трапецій (рис. 4.19) [143], [146].

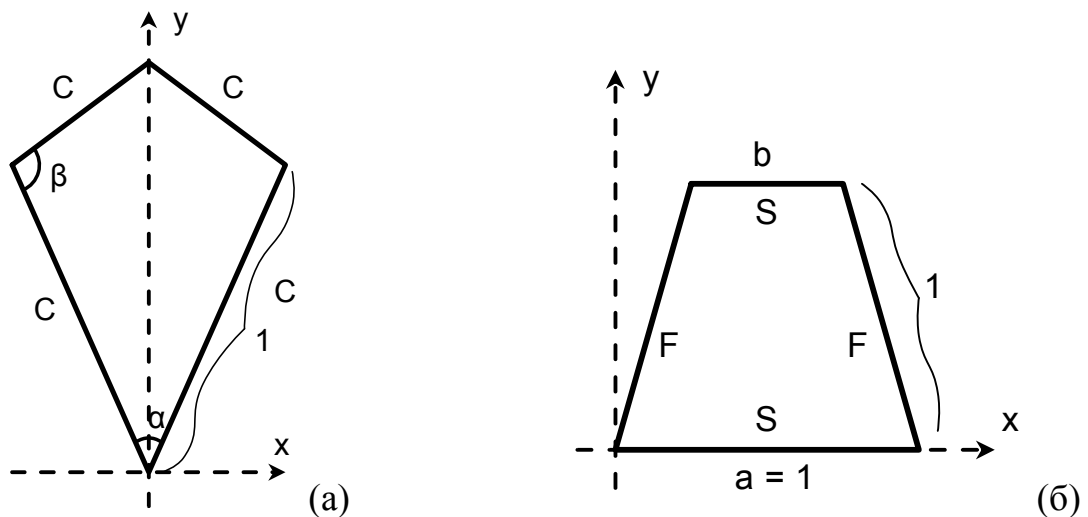


Рис. 4.19 — Форма пластин для дослідження впливу геометричних параметрів на НДС

Змінним параметром для дельтоїдів (рис. 4.19а), усі сторони яких вважаємо закріпленими жорстко, приймаємо кут  $\alpha$  між двома суміжними сторонами одиничної довжини. Довжина двох інших сторін обирається такою, щоб три інших кута  $\beta$  були однаковими. Величину кутів  $\alpha$  будемо розглядати як в межах малих, так і великих значень.

Рівнобічні трапеції (рис. 4.19б) мають шарнірне закріплення основ  $a = 1$  і  $b$  та вільні бокові сторони одиничної довжини. Змінним параметром у цьому випадку приймаємо відношення  $a/b$ .

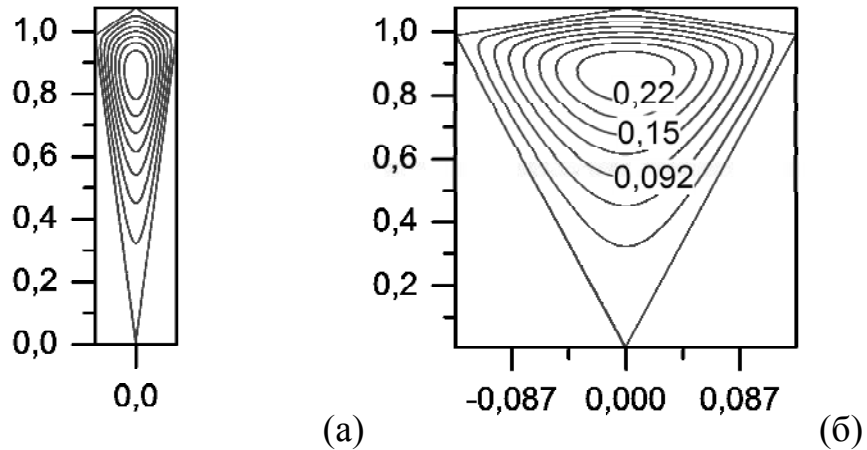


Рис. 4.20 — Вигляд поверхні функції прогину для пластини у формі дельтоїду з кутом  $\alpha = 15^\circ$  із однаковим масштабом вздовж обох осей (а) та без збереження однакового масштабу (б)

Таблиця 4.13 — Результати розрахунку максимального прогину для пластин у формі дельтоїдів та координати точок, де цей максимум досягнуто

$\alpha$	$w'_{max}$	$x$	$y$
$1^\circ$	—*	—	—
$2^\circ$	0,0043426	9,31E-05	0,962714
$5^\circ$	0,0257738	8,72E-05	0,931212
$10^\circ$	0,103236	-5,81E-05	0,896618
$15^\circ$	0,245628	-5,22E-04	0,872174
$165^\circ$	33,8905	-0,00132193	0,600752
$170^\circ$	33,8474	-0,00199239	0,593863
$175^\circ$	33,6256	-0,00266413	0,587146
$178^\circ$	33,4112	-9,99E-16	0,579916
$179^\circ$	33,3252	0,00133328	0,577947

\* отримано нестійкий розв'язок

Деформація пластин сталої товщини  $h = 0,1$  відбувається за рахунок прикладеного рівномірно розподіленого поверхневого навантаження  $q(x,y) = q_0$ . Матеріал пластин для спрощення приймаємо ізотропним,  $\nu = 0,3$ .

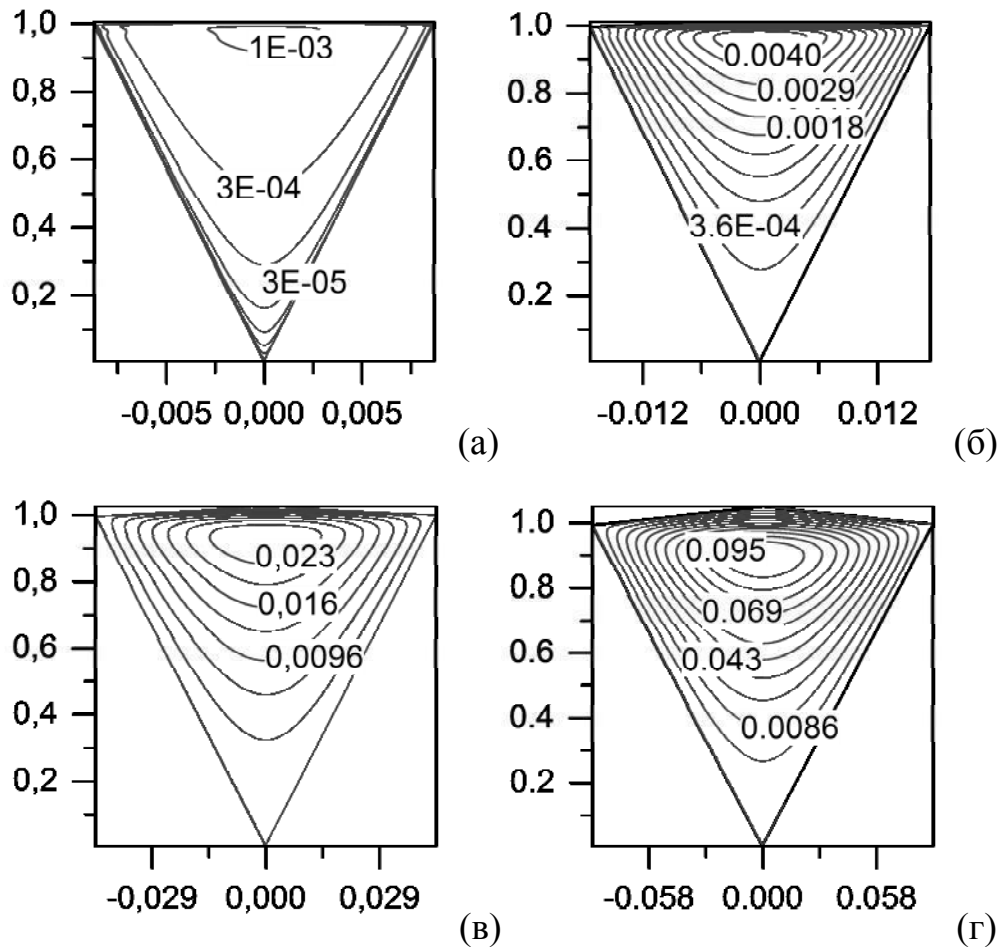


Рис. 4.21 — Вигляд поверхні функції прогину для пластини у формі дельтоїду з кутом  $\alpha = 1^\circ$  (а),  $\alpha = 2^\circ$  (б),  $\alpha = 5^\circ$  (в) та  $\alpha = 10^\circ$  (г)

Вплив форми ізотропних пластин у вигляді дельтоїдів на чисельний розв'язок задачі та параметри шуканої поверхні функції прогину  $w(x,y)$  було досліджено [129] для 10 значень кута  $\alpha$ , які поряд із розрахованими значеннями нормованого максимального прогину  $w'_{max} = w_{max}E/q$  та координатами відповідних точок, де цей максимум досягнуто, наведені у табл. 4.13.

Вигляд поверхні функції прогину для кута  $\alpha = 15^\circ$  показано на рис. 4.20а із збереженням однакового масштабу для обох осей, а на рис. 4.20б — із значеннями прогину для ізоліній поверхні.

При  $\alpha = 1^\circ$  (рис. 4.21а) отримано дещо нестійкий результат, що також зазначено у табл. 4.13. При цьому значенні кута пластина фактично стає стрічкою, а довжина її сторін, що безпосередньо формують кут  $\beta$ , становить

величину значно меншу за 1. Враховуючи необхідність дискретизації області  $\Omega$ , відповідно, розбиття вказаних сторін на відрізки у процесі розв'язання задач методом сплайн-колокації, це може бути одним із факторів, що необхідно враховувати для отримання стійких результатів при чисельних розрахунках.

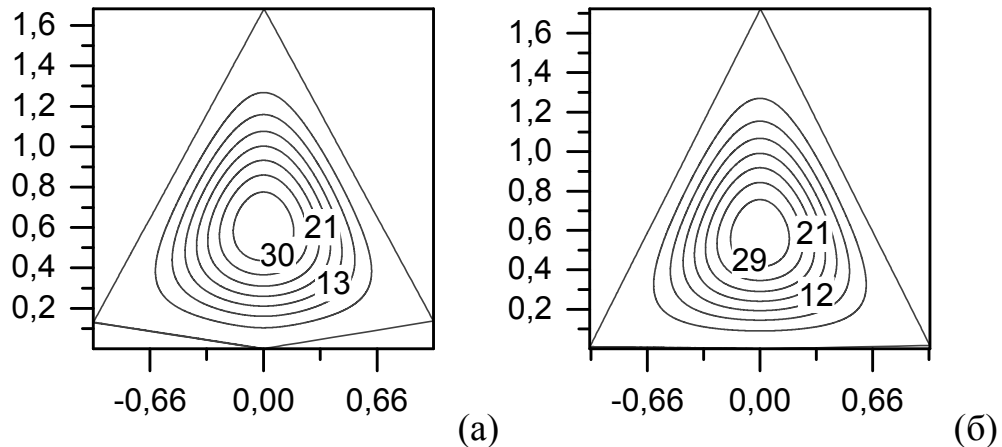


Рис. 4.22 — Вигляд поверхні функції прогину для пластини у формі дельтоїду з кутом  $\alpha = 165^\circ$  (а) та  $\alpha = 179^\circ$  (б)

Таблиця 4.14 — Значення максимального прогину для трапецій із співвідношенням основ  $a/b$  та координати точок, де цей максимум досягається

$a/b$	$w'_{max}$	$x$	$y$
1,000	170,35	0,000 / 1,000	0,501
2,154	141,39	0,126 / 0,874	0,452
4,641	114,25	0,178 / 0,822	0,416
10,00	101,17	0,201 / 0,799	0,399
21,54	95,87	0,211 / 0,789	0,389
46,41	93,71	0,216 / 0,784	0,385
100,0	92,79	0,219 / 0,781	0,384
215,4	92,37	0,220 / 0,780	0,383
464,1	92,18	0,221 / 0,779	0,383
1000	92,10	0,221 / 0,779	0,383

Для усіх інших розглянутих пластин із  $\alpha = 1^\circ \dots 10^\circ$  (рис. 4.21б–г) та  $\alpha = 165^\circ \dots 179^\circ$  (рис. 4.22), незважаючи на те, що при  $\alpha = 179^\circ$  дельтоїди вже наближаються по формі до трикутників, обчислення дали цілком очікуваний результат: значні зміни прогину на малих кутах  $\alpha$  та незначні — на великих (табл. 4.13), відповідно до змін площі поверхні, яка знаходиться під дією навантаження  $q$ . Значення координати  $x$  точок максимального прогину для усіх варіантів задач є близьким до теоретичного  $x = 0$  (табл. 4.13), що свідчить про високий ступінь симетрії чисельно розрахованої поверхні прогину відносно осі  $Oy$  та підтверджує високу точність отриманого результату.

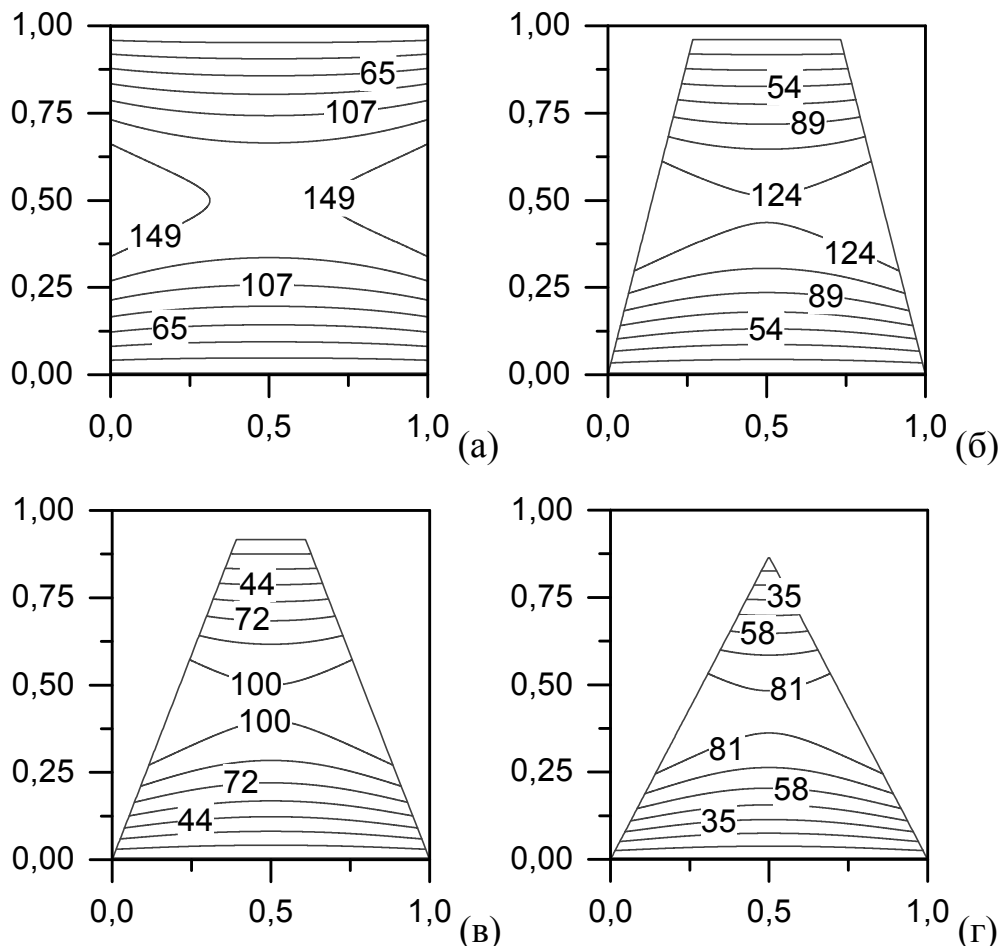


Рис. 4.23 — Загальний вигляд поверхонь функції прогину для пластин із різним значенням співвідношення основ  $a/b$  рівнобічної трапеції: 1,0 (а), 2,154 (б), 4,641 (в) та 1000 (г)

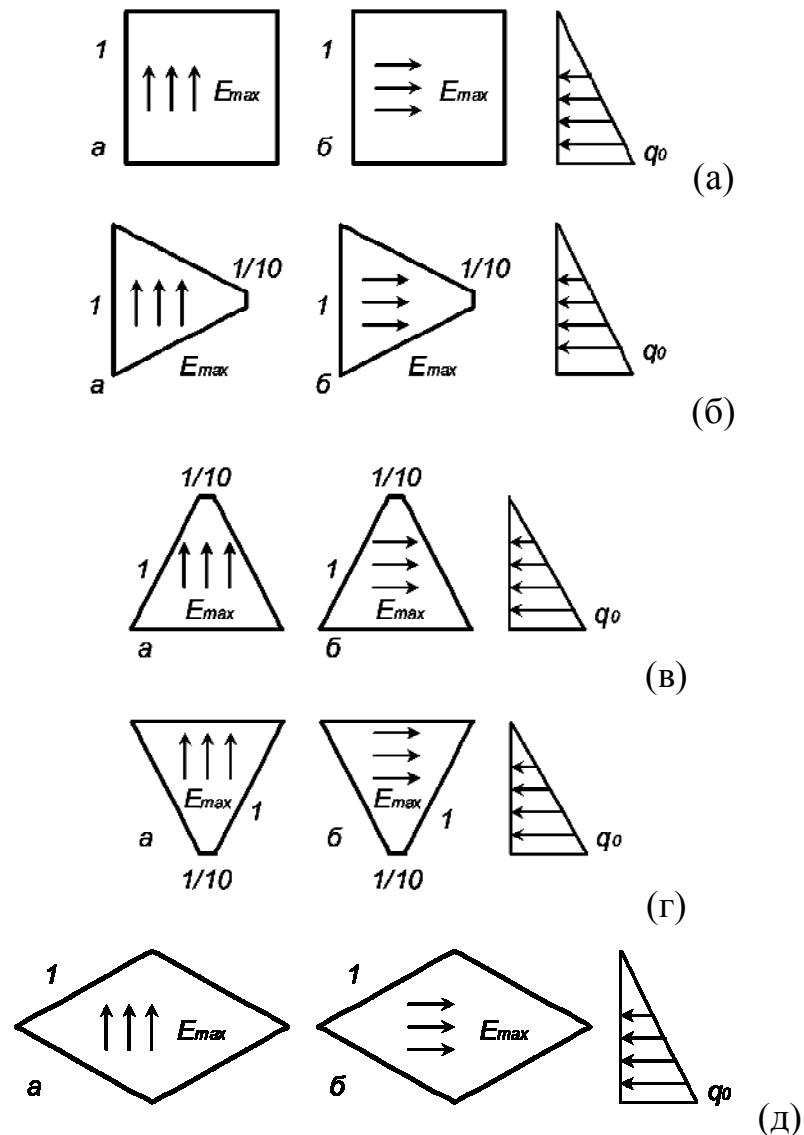


Рис. 4.24 — Геометричні особливості ортотропних пластин, орієнтація осей ортотропії матеріалу та розподіл змінного поверхневого навантаження

Дослідження рівнобічних трапецій (рис. 4.19б) було здійснено [129], [143] для значень параметру  $a/b$  від 1 до 1000, при цьому форма фігури серединної поверхні змінюється від квадрата до майже трикутника. Значення розглянутих варіантів відношення  $a/b$  та розраховані відповідно до них максимальні прогини пластин  $w'_{max} = w_{max}E/q$  наведено у табл. 4.14, а загальний вигляд поверхні функції прогину для деяких варіантів геометрії пластин показано на рис. 4.23.

Оскільки пластини у формі рівнобічних трапецій мають певну симетрію, а на бокових сторонах закріплені вільно, максимальний прогин

досягається водночас у двох точках, які розташовані у середній частині бокових сторін.

Це зумовлює наявність двох значень координати « $x$ » у табл. 4.14 для кожного з розглянутих випадків геометрії пластин. Координата « $y$ » цих двох

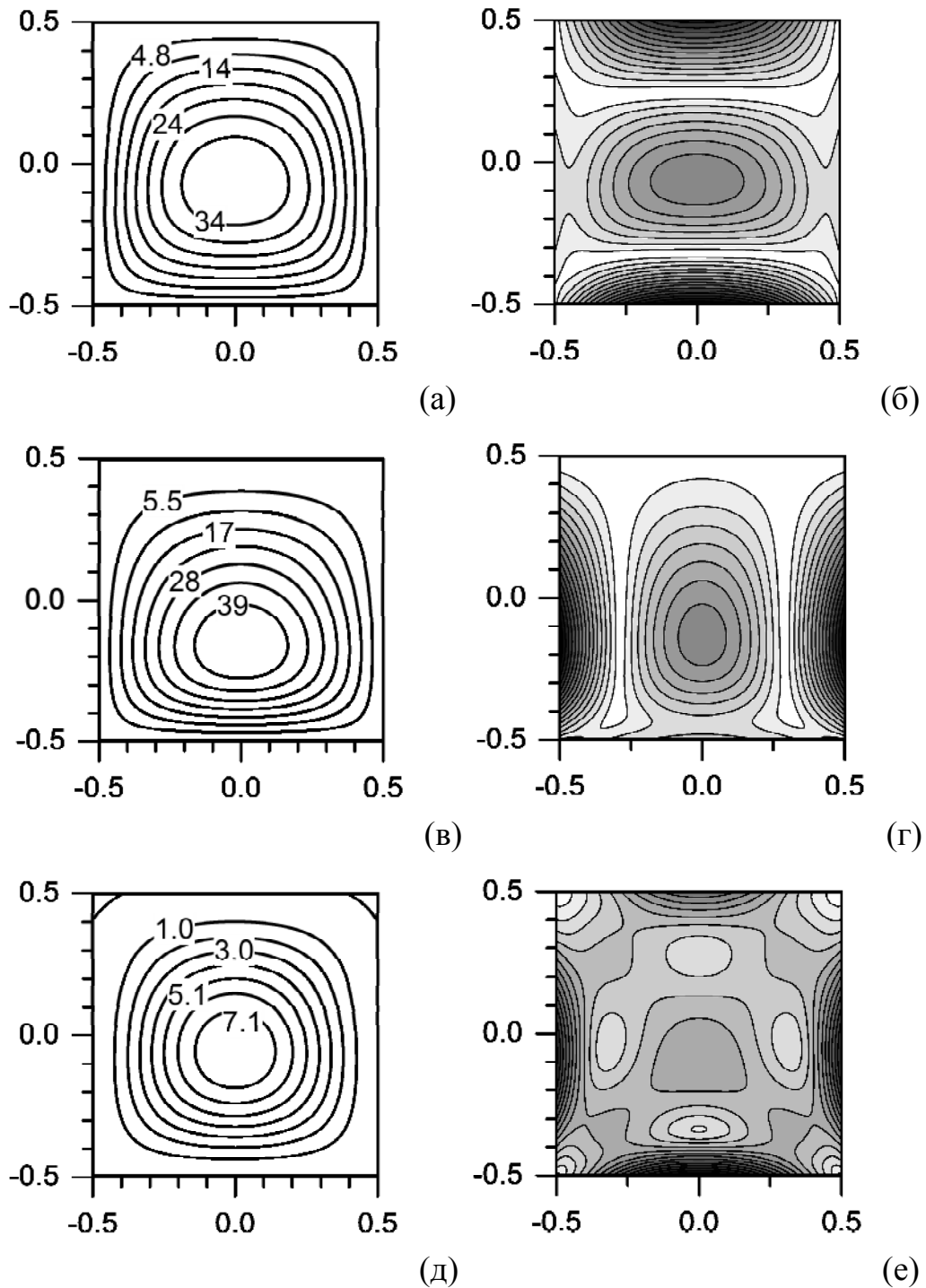


Рис. 4.25 — Загальний вигляд поверхні функції прогину (а, в, д) та інтенсивності напружень (б, г, е) для різних варіантів пружних сталей матеріалу квадратних пластин

точок максимумів прогину повинна мати одне й те саме значення, що підтверджується проведеними розрахунками.

Характер зміни значень максимального прогину  $w'_{max}$  повністю відповідає аналітичним оцінкам як кількісно, так і якісно: прогин змен-

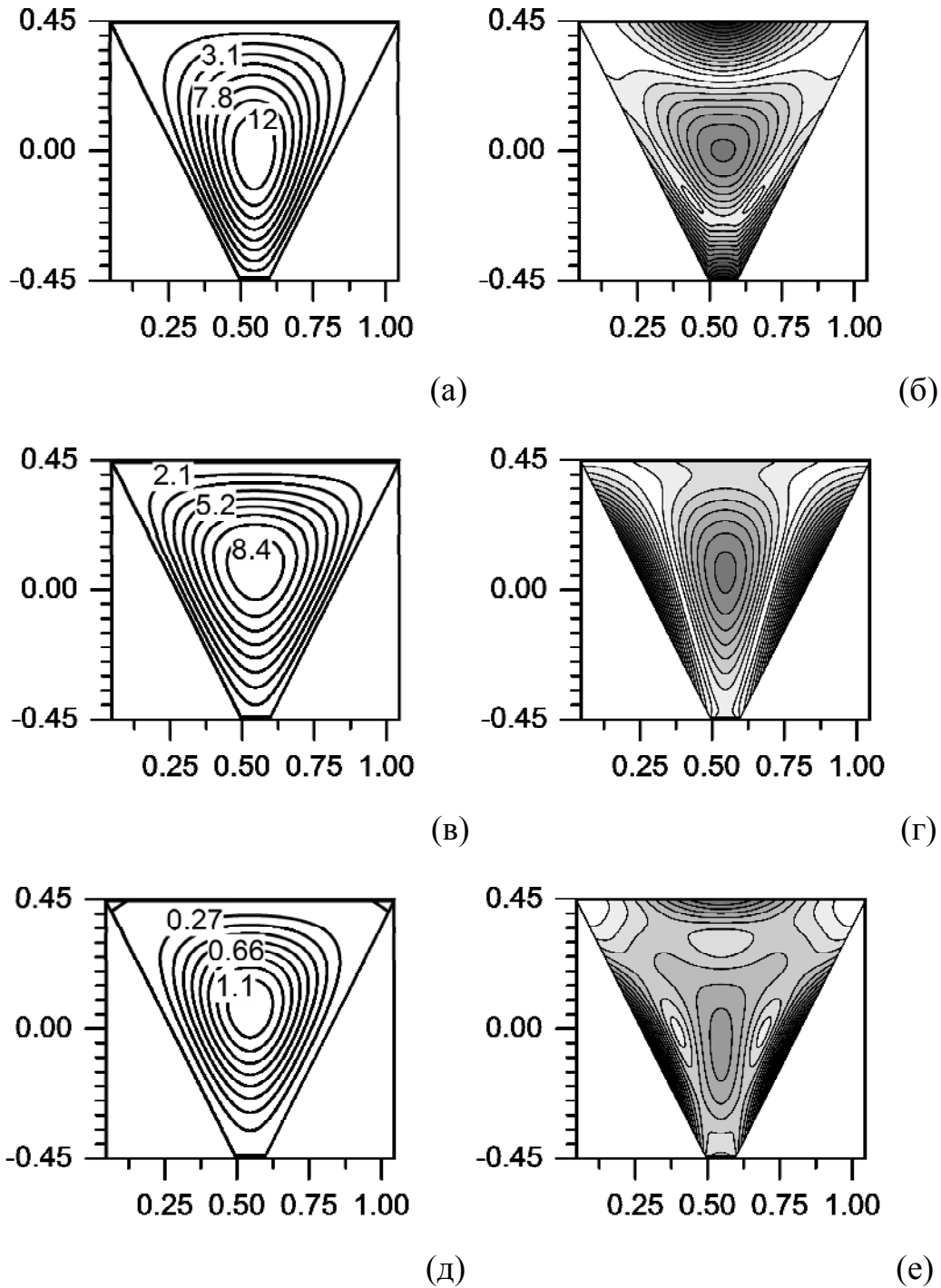


Рис. 4.26— Загальний вигляд поверхні функції прогину (а, в, д) та інтенсивності напружень (б, г, е) для різних варіантів пружних сталей матеріалу пластин у формі трапеції, близької до трикутника



шується із зменшенням площі навантаженої поверхні, а при наближенні форми пластини до трикутника ( $a/b = 1000$ ) зміни стають все більш повільними. При цьому навіть для пластини з  $a/b = 1000$  (рис. 4.23г) розв'язок задачі не має особливостей, незважаючи на досить малу довжину основи  $b$ , вздовж якої під час розрахунків відбувається чисельне інтегрування.

З метою проаналізувати комплексний вплив геометричних параметрів та співвідношення пружних сталих ортотропних матеріалів на характер НДС в умовах змінного навантаження було розглянуто [147] ряд задач для пластин у формі трапеції, ромбу та квадрата, параметри яких показано на рис. 4.24. В усіх випадках поверхнєве навантаження змінюється лінійно від 0 у точці пластини з максимальним значенням координати « $y$ » до свого максимального значення  $q_0$  у точці з мінімальним значенням координати « $y$ ».

Довжину сторін пластин у формі квадрата та ромбу обрано рівною одиниці, рівнобічні трапеції рис. 4.24б–г мають одиничну довжину бокових сторін та більшої основи, менша основа має довжину  $1/10$ , що робить форму трапецій близькою до трикутника. Також зазначимо, що площа поверхні пластин у формі трапецій рис. 4.24б–г та ромбу рис. 4.24д відрізняються майже удвічі, що полегшує кількісне порівняння розрахованих значень для прогину.

Для кожного з п'яти випадків сполучень форми пластини і розподілу навантаження рис. 4.24а–д розглянуто по три варіанти пружних сталих матеріалу: з розташуванням осей ортотропії вуглепластику CFRP (Carbon Fiber Reinforced Polymer,  $E_1 = 2,11 E_0$ ,  $E_2 = 0,053 E_0$ ,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $G_{12} = G_{31} = 0,026 E_0$ ,  $G_{23} = 0,013 E_0$ ) з  $E_{max}$  вздовж осі  $0y$  (варіант «а»), вздовж  $0x$  (варіант «б»), та псевдо ізотропного ( $E = (E_1 + E_2)/2$  и т.і.), що в сукупності передбачає розв'язання 15 крайових задач.

Результати розрахунків представлено у табл. 4.15 значеннями максимального прогину  $w_{max}^* = w_{max} E/q_0$  та максимальної інтенсивності напружень  $\sigma_{i max}$  (розраховано за формулою 3.23 п. 3.4.) на поверхні пластини  $z = h/2$  для п'яти варіантів форми та трьох наборів пружних сталих матеріалу.

Як можна бачити з даних табл. 4.15, найменші значення максимального прогину  $w_{max}^*$  та інтенсивності напружень  $\sigma_{i\ max}$  мають місце для пластини у формі трикутника з варіантом орієнтації рис. 4.24б та рис. 4.24г. У порівнянні з ними пластина у формі ромбу рис. 4.24д при лише вдвічі більшій площі поверхні, що сприймає навантаження  $q$ , має у 2–3 рази більші значення  $w_{max}^*$  та  $\sigma_{i\ max}$ .

Таблиця 4.15 — Розраховані значення максимального прогину та максимальної інтенсивності напружень на поверхні пластини для п'яти варіантів форми та трьох наборів пружних сталей матеріалу

Форма	Матеріал	$w_{max}^*$	$\sigma_{i\ max}$
квадрат, рис. 4.24а	а	38,6	27,2
	б	44,0	29,8
	ізотр.	8,12	17,55
трикутник <sup>1</sup> , рис. 4.24б	а	— <sup>2</sup>	—
	б	16,55	12,1
	ізотр.	1,645	6,86
трикутник, рис. 4.24в	а	19,4	13,95
	б	21,2	14,7
	ізотр.	2,14	8,56
трикутник, рис. 4.24г	а	14,05	9,7
	б	9,4	6,78
	ізотр.	1,195	5,28
ромб, рис. 4.24д	а	26,6	23,6
	б	48,8	21,5
	ізотр.	5,06	12,95

<sup>1</sup> пластина у формі трапеції, близької до трикутної

<sup>2</sup> отримано нестійкий результат

Пластина у формі квадрата рис. 4.24а виявляється найбільш сприйнятливою до деформації. Вона також має  $\sigma_{i \max}$  в залежності від матеріалу у 3–5 разів більше, ніж у трикутників.

Приймаючи до уваги умови закріплення країв, що прийнято для усіх випадків форми пластин як жорстке закладання, максимальні значення прогину спостерігаються у центральних частинах, з незначним зсувом до тієї сторони, що відповідає напрямку збільшення поверхневого навантаження. Цей зсув є незначним, але добре простежується навіть при візуальному аналізі форми поверхонь функції прогину  $w(x,y)$ , що наведено у вигляді ізоліній на рис. 4.25 для квадратних пластин та на рис. 4.26 трикутних у варіанті орієнтації рис. 4.24г.

Порівнюючи результати розрахунків для різних варіантів значень пружних сталих матеріалу, треба зазначити, що поверхні функції прогину мають схожий вигляд для усіх варіантів форми та орієнтації пластин відносно напрямку зміни поверхневого навантаження.

Зовсім по-іншому виглядає ситуація з розподілом інтенсивності напружень  $\sigma_i(x,y)$ , що представлено на рис. 4.25г–е та рис. 4.26г–е. Більш темним ділянкам відповідають більші значення  $\sigma_i$ . Для ортотропних матеріалів максимальні значення  $\sigma_i$  мають місце біля сторін, що розташовані перпендикулярно до напрямку з максимальним модулем пружності  $E$  незалежно від форми пластини. Для ізотропних матеріалів максимальні значення інтенсивності напружень сконцентровані біля середньої частини усіх країв пластин (рис. 4.25е, рис. 4.26е) та незначні по величині безпосередньо у кутах.

Взагалі розглянуті випадки задач про НДС пластин з жорстким закріпленням країв показують, що переважний вплив на розподіл та величину прогину окрім пружних властивостей матеріалу здійснює форма пластин, а характер зміни навантаження має другорядне значення. Зміна орієнтації осей ортотропії має незначний вплив на форму поверхні функції

прогину (рис. 4.25а,в, рис. 4.26а,в), але призводить до повного перерозподілу інтенсивності напружень на поверхні (рис. 4.25б,г, рис. 4.26б,г).

#### 4.5. Висновки до четвертого розділу

На основі запропонованого підходу у розділі 4 отримано наступні результати:

- 1) забезпечення достовірності даних розрахунків ґрунтується на використанні обґрунтованої математичної моделі уточненої теорії пластин типу Тимошенка, коректному формулюванні задачі, тестуванні підходу на задачах відповідного класу, що мають відомі наближені або аналітичні розв'язки, та використанні індуктивних оцінок для контролю точності;
- 2) для ряду розглянутих у роботі задач про напружено-деформований стан чотирикутних ізотропних пластин сталої товщини отримано чисельні розв'язки і проаналізовано вплив геометричних параметрів на характер розподілу полів переміщень, отримані результати порівняно з даними розрахунків, що використовують інші наближені методи;
- 3) розв'язано ряд задач для чотирикутних ортотропних пластин, за даними розрахунків яких показано кількісні та якісні відмінності отриманих поверхонь функції прогину для матеріалів з різними значеннями пружних сталих, показано вплив взаємної орієнтації осей ортотропії та країв пластини на параметри НДС при різних граничних умовах;
- 4) проведено аналіз обмежень на форму чотирикутних пластин, у тому числі для граничних випадків (стрічка, трикутник), що показує можливість застосування підходу в широкому діапазоні зміни геометричних параметрів та отримання стійких розв'язків відповідних задач;

- 5) підхід успішно застосовано для розв'язання ряду задач статички в умовах змінного поверхневого навантаження, що дозволило проаналізувати одночасний вплив геометричних та механічних параметрів у різних випадках взаємної орієнтації осей ортотропії матеріалу, країв пластини та напрямку зміни навантаження, виявити відмінності впливу вказаних умов на розподіл полів переміщень та напружень.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі представлено розроблений чисельно-аналітичний підхід для розв'язання задач статички ортотропних чотирикутних пластин складної форми на основі уточненої моделі типу Тимошенка. Підхід базується на використанні перетворення координат, що відображає вихідну область складної форми в одиничний квадрат, а також поєднання методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації для розв'язку отриманої двовимірної крайової задачі з різними граничними умовами.

Розв'язано ряд задач про напружено-деформований стан пластин з ізотропних та ортотропних матеріалів, що мають форму прямокутників, трапецій, паралелограмів, ромбів, дельтоїдів та чотирикутників загального вигляду, в умовах різного закріплення країв, рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження, для різних випадків взаємної орієнтації осей пружної симетрії, країв пластин та напрямків зміни механічних параметрів. При цьому отримано наступні конкретні результати:

- 1) на основі вихідних рівнянь рівноваги уточненої теорії пластин, що базується на гіпотезі прямолінійного елемента, та виразів перетворення координат виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь другого порядку у частинних похідних, що описує напружено-деформований стан ортотропних пластин у формі довільного опуклого чотирикутника і у сполученні з виразами для обраних граничних умов складає двовимірну крайову задачу;
- 2) розроблено підхід до розв'язання задач статички ортотропних чотирикутних пластин, що використовує метод сплайн-колокації для зниження розмірності відповідної крайової задачі та метод дискретної ортогоналізації для чисельного розв'язку отриманої у таких спосіб системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку;

- 3) використовуючи розроблений підхід, створено алгоритм та відповідний програмний комплекс, що дозволяє виконувати розрахунки для задач про НДС ізотропних та ортотропних чотирикутних пластин із різними варіантами сполучень механічних і геометричних параметрів та умов закріплення країв;
- 4) достовірність отриманих результатів досягається використанням обґрунтованої математичної моделі, коректністю постановки задачі, контрольованою точністю проведення розрахунків на базі індуктивних оцінок, тестуванням та порівнянням отриманих чисельних даних з результатами робіт, що використовують інші аналітичні та наближені методи;
- 5) сформульовано та розв'язано ряд задач про НДС ізотропних та ортотропних чотирикутних пластин сталої товщини, деформація яких відбувається під дією рівномірного та нерівномірного поверхневого навантаження, в умовах різних видів закріплення країв, різних сполучень орієнтації осей ортотропії, країв та напрямків зміни навантаження, для пластин з різними геометричними параметрами тощо;
- 6) отримані результати розрахунків та виявлені закономірності представлені на відповідних графіках та у таблицях.

Розроблений на основі запропонованого чисельно-аналітичного підходу алгоритм та відповідний програмний комплекс можуть бути використані у подальшому для розв'язання широкого кола практичних задач статички пластин складної форми, оцінки міцності та деформацій відповідних елементів конструкцій. Наведені чисельні значення розв'язків та параметрів розглянутих задач можуть бути використані для тестування і порівняння з даними майбутніх досліджень, при створенні інших підходів до розв'язання задач схожого класу.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

- [1] А. Ляв, Математическая теория упругости, М., Л.: ОНТИ, 1935.
- [2] С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, М.: Наука, 1961.
- [3] В. З. Власов, Общая теория оболочек и ее приложение в технике, М., Л.: Гостехиздат, 1949.
- [4] А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, 2 ред., М.: Наука, 1976.
- [5] Я. М. Григоренко и А. Т. Василенко, Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек, М.: Наука, 1992.
- [6] А. Н. Гузь, Ред., Механика композитов. Статика элементов конструкций, т. 8, К.: А.С.К., 1999.
- [7] Н. А. Кильчевский, Основы аналитической механики оболочек, Киев: Наук. думка, 1964.
- [8] А. И. Лурье, Статика тонкостенных упругих оболочек, М., Л.: Гостехиздат, 1947.
- [9] Х. М. Муштари, «Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия,» Прикл. математика и механика, т. 2, № 14, pp. 494-456, 1939.
- [10] В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Л.: Судостроение, 1962.
- [11] С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, М.: Наука, 1966.
- [12] W. Flügge, Stresses in shells, Berlin (Heidelberg), New-York: Springer-Verlag, 1964.
- [13] К. Ф. Черных, Линейная теория оболочек, Л.: Изд-во ЛГУ, 1962.
- [14] C. R. Calladine, Theory of Shell Structures, Cambridge: Cambridge Univ. Press. M. A., 1983.



- [15] P. L. Gould, *Analysis of Shells and Plates*, New York: Springer-Verlag, 1988.
- [16] A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, 2nd ed., London: Oxford Univ. Press, 1968.
- [17] F. I. Niordson, *Shell Theory*, Amsterdam: Elsevier Sci. Publ. BV, 1985.
- [18] Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко и Н. Д. Панкратова, *Статика анизотропных толстостенных оболочек*, К.: Вища школа, 1985.
- [19] С. П. Тимошенко, *Курс теории упругости*, Киев: Наук. думка, 1972.
- [20] С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных пластин*, М.: Наука, 1967.
- [21] L. Bolle, "Contribution on problem linearire de flexion dune plaque elastique," *Bull. Technique de la Suisse Romande*, vol. 73, pp. 281-285, 1947.
- [22] А. Л. Гольденвейзер, «К теории изгиба пластинок Рейснера,» *Изв. АН СССР ОТН*, № 4, pp. 441-467, 1958.
- [23] P. M. Naghdi, "On the theory of thin elastic shells," *Quart. Appl. Math.*, vol. 14, no. 4, pp. 369-380, 1957.
- [24] E. Reissner, "On the theory of bending of elastic plates," *J. Math. and Phys.*, vol. 23, pp. 184-191, 1944.
- [25] И. Ю. Хома, *Обобщенная теория анизотропных оболочек*, К.: Наук. Думка, 1986.
- [26] В. И. Королев, *Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс*, М.: Машиностроение, 1965.
- [27] Б. Л. Пелех, *Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью*, Киев: Наук. думка, 1973.
- [28] А. Н. Гузь, Я. М. Григоренко и И. Ю. Бабич, *Механика элементов конструкций*, т. 2, Киев: Наукова думка, 1983.
- [29] Ю. П. Артюхин, К. З. Галимов и В. И. Дараган, *Теория оболочек с*

- учетом поперечного сдвига, Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
- [30] А. Н. Елпатьевский и В. В. Васильев, Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов, М.: Машиностроение, 1972.
- [31] В. В. Васильев, Механика конструкций из композитных материалов, М.: Машиностроение, 1988.
- [32] Я. М. Григоренко и А. Т. Василенко, Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменно жесткости, Киев: Наук. думка, 1981.
- [33] Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко и Г. П. Голуб, Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, Киев: Наук. думка, 1987.
- [34] C. Hwu, Anisotropic Elastic Plates, Boston, MA: Springer, 2010.
- [35] Я. М. Григоренко, «Решение задач теории оболочек методами численного анализа,» *Прикл. механика*, т. 20, № 10, pp. 3-22, 1984.
- [36] А. А. Самарский, «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент,» *Вестн. АН СССР*, № 5, pp. 38-49, 1979.
- [37] Я. М. Григоренко и А. П. Мукоед, Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ, Киев: Вища школа, 1983.
- [38] A. W. Leissa and F. W. Nietenfuhr, "Bending of a Square Plate With Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported," *AIAA Journal*, vol. 1, no. 1, pp. 116-120, 1962.
- [39] H. D. Conway, "The Approximate Analysis of Certain Boundary-Value Problems," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, no. 2, pp. 275-277, 1960.
- [40] L. S. D. Morley, *Skew Plates and Structures*, New York: Pergamon Press, 1963, pp. 120-124.
- [41] J. B. Kennedy, "Linear and Nonlinear Analyses of Skewed Plates," *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, vol. 38, no. E2, June, pp. 530-532, 1971.

- [42] R. S. Alwar and N. R. Rao, "Nonlinear Analysis of Orthotropic Skew Plates," *AIAA Journal*, vol. 11, no. 4, pp. 495-498, 1973.
- [43] P. Malekzadeh and G. Karami, "Differential quadrature nonlinear analysis of skew composite plates based on FSDT," *Engineering Structures*, vol. 28, no. 9, pp. 1307-1318, 2006.
- [44] S. Kitipornchai, Y. Xiang, K. M. Liew and M. K. Lim, "A global approach for vibration of thick trapezoidal plates," *Computers & Structures*, vol. 53, no. 1, pp. 83-92, 1994.
- [45] M. S. Qatu, "Natural frequencies for cantilevered laminated composite right triangular and trapezoidal plates," *Composites Science and Technology*, vol. 51, no. 3, pp. 441-449, 1994.
- [46] N. N. Kryukov, "Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions," *Int. Appl. Mech.*, vol. 33, no. 5, pp. 114-117, 1997.
- [47] Y. M. Grigorenko, N. N. Kryukov and N. S. Yakovenko, "Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness," *Int. Appl. Mech.*, vol. 41, no. 4, pp. 413-420, 2005.
- [48] I. Shufrin, O. Rabinovitch and M. Eisenberger, "A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 52, no. 12, p. 1588–1596, 2010.
- [49] A. Gupta and S. Sharma, "Thermally induced vibration of orthotropic trapezoidal plate of linearly varying thickness," *Journal of Vibration and Control*, vol. 17, no. 10, pp. 1591-1598, 2011.
- [50] К. З. Галимов и В. Н. Паймушин, Теория оболочек сложной геометрии (геометрические вопросы теории оболочек), Казань: Изд-во Казанского университета, 1985.
- [51] М. С. Корнишин, В. Н. Паймушин и В. Ф. Снигирев, Вчислительная геометрия в задачах механики оболочек, М.: Наука, 1989.

- [52] A. V. Singh and Y. Elaghabash, "On the finite displacement analysis of quadrangular plates," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 8, p. 1149–1162, 2003.
- [53] A. Shahidi, "Nonlinear analysis of arbitrary quadrilateral plates by use of Kirchhoff-Love theory," *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 2, no. 6, pp. 279 - 290, 2007.
- [54] A. R. Shahidi, M. Mahzoon, M. M. Saadatpour and M. Azhari, "Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, no. 5, pp. 832-848, 2007.
- [55] В. Л. Рвачев и Л. В. Курпа, R-функции в задачах теории пластин, Киев: Наукова думка, 1987.
- [56] Д. В. Вайнберг и Е. Д. Вайнберг, Расчет пластин, 2 ред., Киев: БУДІВЕЛЬНИК, 1970.
- [57] В. Л. Бажанов, Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учеб. пособие для вузов., И. И. Гольденблат, Ред., М.: Высшая школа, 1970.
- [58] Ю. Н. Работнов, Механика деформируемого твердого тела. — Учеб. пособие для вузов, 2nd ред., М.: Наука, 1988.
- [59] Н. И. Безухов, Основы теории упругости, пластичности и ползучести, М.: Высшая школа, 1961.
- [60] С. Г. Лехницкий, Анизотропные пластинки, М.: ОГИЗ, 1947.
- [61] Я. М. Григоренко та Л. В. Мольченко, Основи теорії пластин та оболонок: Навч. посібник, К.: Либідь, 1993.
- [62] А. С. Авдонин, Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций, М.: Машиностроение, 1969.
- [63] Н. И. Безухов и О. В. Лужин, Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач, М.: Высшая школа, 1974.
- [64] А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, М.: Гос. Изд-во Технико-

- теоретической литературы, 1956.
- [65] Н. В. Колкунов, Основы расчета упругих оболочек: учебное пособие для вузов, 3 ред., М.: Высшая школа, 1987.
- [66] В. П. Шевченко, «Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек,» в *Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений*, Киев, 1998, pp. 159-196.
- [67] Б. Е. Победря, Численные методы в теории упругости и пластичности, М.: Изд-во МГУ, 1995.
- [68] О. Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, М.: Мир, 1975.
- [69] Д. Оден, Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, М.: Мир, 1976.
- [70] Р. Б. Рикардс, Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин, Рига: Зннатне, 1988.
- [71] В. А. Постнов и Л. А. Розин, «Метод конечных элементов в теории пластин и оболочек,» в *Тр. IX Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин*, Л., 1975.
- [72] В. А. Постнов и И. Я. Хархурим, Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций, Л.: Судостроение, 1974.
- [73] Л. А. Розин, Расчет гидротехнических сооружений на фЦВМ. Метод конечных элементов, М.: Энергия, 1971.
- [74] Л. А. Розин и Л. А. Гордон, «Метод конечных элементов в теории пластин и оболочек,» *Изв. ВНИИ гидротехники*, т. 95, pp. 85-97, 1971.
- [75] А. В. Александров, Б. Я. Лашенников, Н. Н. Шапошников и В. А. Смирнов, Методы расчета стержневых систем, пластинок и оболочек с использованием фЦВМ, т. 2, М.: Стройиздат, 1976.
- [76] В. Г. Пискунов, Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов, К.: Изд-во при Киев. ун-те ИО "Вища шк.", 1987.

- [77] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.: Гостехиздат, 1952.
- [78] П. М. Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях, Т. 1 из 2, Киев: Изд. АН УССР, 1949.
- [79] М. И. Длугач, Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости, Киев: Наукова думка, 1964.
- [80] Л. И. Дятловицкий, Напряжения в гравитационных плотинах на нескальных основаниях, Киев: Изд. АН УССР, 1959.
- [81] Г. Маркус, Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий, М.: Госстройиздат, 1936.
- [82] А. А. Назаров, Основы теории и методы расчета пологих оболочек, М.,Л.: Госстройиздат, 1966.
- [83] Я. М. Григоренко и А. П. Мукоед, Решение задач теории оболочек на IBM, Киев: Вища шк., 1979.
- [84] Л. П. Фильсгольц, Вариационное исчисление, М.: Гостехиздат, 1958.
- [85] А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких и С. А. Капустин, «Численный анализ квазистатических упруго-пластических задач оболочек и пластин,» в *Тр. IX Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин*, Л., Судостроение, 1975, pp. 334-340.
- [86] М. С. Корнишин, Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения, М.: Наука, 1964.
- [87] Я. А. Берг, Г. А. Левин и А. А. Лившиц, К расчету пластинок переменной жесткости. «Вопросы механики и математики», Киев: Изд. КГУ, 1964.
- [88] И. М. Дунаев, «Приближенный метод решения в полиномах дифференциальных уравнений в частных производных,» в *Сб. «Расчет пространственных конструкций»*, М., Изд-во литературы по

строительству, 1964.

- [89] М. С. Корнишин, «Применение метода коллокаций к решению некоторых линейных и нелинейных задач теории пластин,» *Изв. Казанского филиала АН СССР*, № 14, 1960.
- [90] M. Takashi and Y. Jin, “Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular mindlin plates,” *Computers & Structures*, vol. 18, no. 3, pp. 425-431, 1984.
- [91] Д. Алберг, fi. Нильсон и Д. Уолш, Теория сплайнов и ее приложения, М.: Мир, 1972.
- [92] А. И. Гребенников, Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
- [93] К. Де Бор, Практическое руководство по сплайнам, М.: Радио и связь, 1985.
- [94] Ю. С. Завьялов, Ю. И. Квасов и В. Л. Мирошниченко, Методы сплайн-функций, М.: Наука, 1980.
- [95] Н. П. Корнейчук, Сплайны и теории приближения, М., 1984.
- [96] Г. И. Марчук, Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1977.
- [97] Д. Ортега и У. Пул, введение в численные методы решения дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1986.
- [98] С. Б. Стечкин и Ю. Н. Субботин, Сплайны в вычислительной математике, М.: Наука, 1976.
- [99] Я. М. Григоренко та А. П. Мукоєд, Розв’язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ, Київ: Либідь, 1992.
- [100] A. Y. Grigorenko and T. L. Efimova, “Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural-Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness,” *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 10, p. 1161–1169, 2005.

- [101] Y. M. Grigorenko, A. Y. Grigorenko and T. L. Efimova, "Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories," *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 3, no. 5, pp. 929-952, 2008.
- [102] V. D. Budak, A. Y. Grigorenko and S. V. Puzyrev, "Free vibrations of rectangular orthotropic shallow shells with varying thickness," *International Applied Mechanics*, vol. 43, no. 6, pp. 670-682, 2007.
- [103] A. Y. Grigorenko and S. N. Yaremchenko, "Investigation of static and dynamic behavior of anisotropic inhomogeneous shallow shells by Spline approximation method," *Journal of Civil Engineering and Management*, vol. 15, no. 1, pp. 87-93, 2009.
- [104] А. Я. Григоренко, А. С. Бергулев та С. Н. Яремченко, «О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин,» *Доповіді Національної академії наук України*, pp. 49-55, 9 2011.
- [105] Y. M. Grigorenko and A. Y. Grigorenko, "Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review)," *International Applied Mechanics*, vol. 49, no. 2, pp. 123-193, 2013.
- [106] L.-Y. Wu, C.-H. Wu and H.-H. Huang, "Shear buckling of thin plates using the spline collocation method," *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, vol. 8, no. 4, pp. 645-664, 2008.
- [107] S. C. Fan and Y. K. Cheung, "Analysis of shallow shells by spline finite strip method," *Eng. Struct.*, vol. 5, no. October, pp. 255-263, 1983.
- [108] S. S. Ajeesh and S. Arul Jayachandran, "Amendment schemes for cubic end splines used in structural analysis," *Journal of Structural Engineering*, vol. 43, no. 6, pp. 539-546, 2017.
- [109] W. Y. Li, Y. K. Cheung and L. G. Tham, "Spline Finite Strip Analysis of



- General Plates,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 112, no. 1, pp. 43-54, 1986.
- [110] G. N. Geannakakes and P.-C. Wang, “Moving load analysis of arbitrarily shaped plates using the B3-spline finite strip method,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 141, no. 1, pp. 127-142, 1990.
- [111] A. H. Sheikh and M. Mukhopadhyay, “Geometric nonlinear analysis of stiffened plates by the spline finite strip method,” *Computers and Structures*, vol. 76, no. 6, p. 765–785, 2000.
- [112] Y. M. Grogorenko and N. N. Kryukov, “Solution of problems of the theory of plates and shells with spline functions (survey),” *International Applied Mechanics*, vol. 31, no. 6, pp. 413-434, 1995.
- [113] Ю. П. Артюхин и А. П. Грибов, Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов, Казань: Издательство "Фэн", 2002.
- [114] П. Бенерджи и Р. Баттерфилд, Методы граничных элементов в прикладных науках. Пер. с англ., М.: Мир, 1984.
- [115] К. Бреббия и С. Уокер, Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ., М.: Мир, 1982.
- [116] К. Бреббия, Ж. Теллес и Л. Броубел, Методы граничных элементов. Пер. с англ., М.: Мир, 1987.
- [117] Ю. В. Верюжский, Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики, Киев: Вища школа, 1978.
- [118] Э. С. Вентцель, К. Е. Джан-Темиров, А. М. Трофимов и Е. В. Негольша, Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек, Харьков, 1992.
- [119] С. Крауч и А. Старфилд, Методы граничных элементов в механике твердого тела. Пер. с англ., М.: Мир, 1987.
- [120] В. Л. Рвачев, Л. В. Курпа, Н. Г. Склепус и Л. А. Учишвили, Метод R-

функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы, Киев: Наукова думка, 1973.

- [121] T. Shmatko and A. Bhaskar, “R-functions theory applied to investigation of nonlinear free vibrations of functionally graded shallow shells,” *Nonlinear Dyn.*, pp. 1-16, 2017.
- [122] С. К. Годунов, «О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений,» *Успехи математических наук*, т. 16, № 3, pp. 171-174, 1961.
- [123] Я. М. Григореико, Е. И. Беспалова, А. Т. Василенко и Л. И. Петрова, «О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении,» в *Применение ЭЦВМ в строительной механике*, Киев, Наукова думка, 1968, pp. 46-51.
- [124] Э. И. Григолюк, В. П. Мальцев, В. И. Мячеиков и А. Н. Фролов, «Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения,» *Изв. АН СССР. МТТ*, № 1, pp. 9-19, 1971.
- [125] Я. М. Григоренко, В. Д. Будака та О. Я. Григоренко, Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів, Миколаїв: Іліон, 2010.
- [126] Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко и Н. Д. Панкратова, Расчет некруговых цилиндрических оболочек, К.: Наукова думка, 1977.
- [127] В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, А. Д. Поспелов и А. М. Синюков, Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учеб. пособие для вузов, М.: Высшая школа, 1970.
- [128] A. Y. Grigorenko, S. A. Pankratiev and S. N. Yaremchenko, “Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation,” *Int. Appl. Mech.*, vol. 53, no. 3, p. 326–333, 2017.
- [129] А. Я. Григоренко, С. А. Панкратьев и С. Н. Яремченко, «Особенности подхода к решению задач о напряженно-деформированном состоянии

- пластин сложной формы,» *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.*, № 2, р. 51–60, 2016.
- [130] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 8th ред., т. 1, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [131] A. Y. Grigorenko, S. A. Pankratiev and S. N. Yaremchenko, “Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle,” in *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30, Kharkov, Ukraine, 2016*.
- [132] Д. Роджерс и Д. Адамс, Математические основы машинной графики: Пер. с англ., 2nd ред., М.: Мир, 2001.
- [133] И. М. Гельфанд и О. В. Локуциевский, «Метод «прогонки». Дополнение к книге С.К. Годунова, В.С. Рябенского,» в *Введение в теорию разностных схем*, М., Физматгиз, 1962, pp. 283-309.
- [134] А. С. Вольмир, Нелинейная динамика пластинок и оболочек, М.: Наука, 1972.
- [135] И. И. Блехман, А. Д. Мышкис и Я. Г. Пановко, Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов, Киев: Наук. думка, 1976.
- [136] А. А. Абрамов, «О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки),» *Журнал вычислит. математики и мат. физики*, № 2, pp. 542-543, 1961.
- [137] Я. М. Григоренко, Ред., Алгоритмы и программы решения задач механики твёрдого деформируемого тела, Киев: Наук. думка, 1976.
- [138] С. А. Панкратьев, «Решение задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы,» в *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», 22–24 вересня, Миколаїв, Україна, 2016*.

- [139] О. Я. Григоренко, С. А. Панкратьев та С. М. Яремченко, «Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини із застосуванням сплайнів на нерівномірних сітках,» *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, № 2, р. 29–34, 2016.
- [140] А. Я. Григоренко, С. А. Панкратьев та С. Н. Яремченко, «О применении неравномерных сеток для сплайнов в задачах о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин,» в *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», 22–24 вересня, Миколаїв, Україна, 2016.*
- [141] E. I. Beshalova and G. P. Urusova, “Solving the torsion problem for an anisotropic prism by the advanced Kantorovich–Vlasov method,” *Int. Appl. Mech.*, vol. 46, no. 2, pp. 149-158, 2010.
- [142] N. Alam and N. T. Asnani, “Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Plates,” *Journal of Composite Materials*, vol. 20, no. 1, pp. 2-18, 1986.
- [143] О. Я. Григоренко, С. А. Панкратьев та Т. І. Пінчук, «Чисельний аналіз статичного деформування чотирикутних пластин різної геометрії,» в *Тези Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», 22–25 травня, Львів, Україна, 2018.*
- [144] О. Я. Григоренко та С. А. Панкратьев, «Особенности напружено-деформованого стану пластин складної форми з ортотропних матеріалів,» *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.*, № 3, р. 35–38, 2016.
- [145] О. Я. Григоренко, С. А. Панкратьев та Т. І. Пінчук, «Особенности застосування чисельного підходу до аналізу деформації пластин

складної форми,» в *Тези доповідей XVIII Міжнародної конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 24–26 травня, Київ, Україна, 2017.*

- [146] С. А. Панкратьев, «Особенности чисельно-аналитического подхода до статичного аналізу складних чотирикутних пластин з ортотропних матеріалів,» в *Матеріали міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», 18–20 квітня, Дніпро, Кам'янське, Україна, 2017.*
- [147] А. Я. Григоренко и С. А. Панкратьев, «О напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы из изотропных материалов при переменной нагрузке,» *Прикл. механика*, т. 54, № 4, р. 47–54, 2018.

## ДОДАТКИ

### Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

1. Grigorenko A.Ya. Solution of Stress-Strain Problems for Complex-Shaped Plates in a Refined Formulation / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 3. – p. 326–333.
2. Григоренко А.Я. О напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы из изотропных материалов при переменной нагрузке / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Прикл. механика.* – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 47–54.
3. Григоренко О.Я. Особливості напружено-деформованого стану пластин складної форми з ортотропних матеріалів / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* – 2016. – № 3. – С. 35–38.
4. Григоренко О.Я. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини із застосуванням сплайнів на нерівномірних сітках / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.М. Яремченко // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* – 2016. – № 2. – С. 29–34.
5. Григоренко А.Я. Особенности подхода к решению задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко // *Вісник Запорізького національного університету: збірник наукових статей. Фізико-математичні науки.* – 2016. – № 2. – С. 51–60.
6. Григоренко О.Я. Чисельний аналіз статичного деформування чотирикутних пластин різної геометрії [Електронний ресурс] / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // *Сучасні проблеми*

- механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2018. – Т. 3. – С. 17–18. Режим доступу: [www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018](http://www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018)
7. Grigorenko A.Ya. Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30. – Kharkov: KhPI, 2016. – p. 287–293.
  8. Панкратьев С.А. Особенности чисельно-аналитического подхода до статического анализа сложных четырехугольных пластин из ортотропных материалов // Материали міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», 18–20 квітня, 2017. – Дніпро, Кам'янське, 2017. – С. 25.
  9. Григоренко О.Я. Особенности застосування чисельного підходу до аналізу деформації пластин складної форми / О.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, Т.І. Пінчук // Тези доповідей XVIII Міжнародної конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем», 24–26 травня 2017 р. – Київ: КНУ, 2017. – С. 117.
  10. Григоренко А.Я. О применении неравномерных сеток для сплайнов в задачах о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин / А.Я. Григоренко, С.А. Панкратьев, С.Н. Яремченко // Развитие інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей між-народної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 118.
  11. Панкратьев С.А. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии пластин сложной формы // Развитие інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук: Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції / Миколаїв, 22–24 вересня 2015 р. – С. 128.

Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній науково-практичній конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, Україна, 22 – 24 вересня 2016 р.;
- 5<sup>th</sup> International conference "Nonlinear dynamics — 2016", Kharkov, Ukraine, September 27–30, 2016;
- XVII Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки — 2017», Дніпродзержинськ, Україна, 17–20 квітня 2017 р.;
- XVIII Міжнародній конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI-2017), Київ, Україна, 24–26 травня 2017 р.;
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, Україна, 22–25 травня 2018 р.

У повному обсязі дисертація доповідалася і була підтримана на семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренка, семінарі секції за напрямком «Механіка оболонкових систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України Я.М. Григоренка.