

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА**

Забуга Артем Геннадійович

УДК: 531.43

**АНАЛІТИЧНЕ ТА ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ
З УДАРНО-ФРИКЦІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ**

Спеціальність 01.02.01 – Теоретична механіка

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
ПЛАХТІЄНКО Микола Павлович,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу динаміки складних систем

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛАРІН Володимир Борисович,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу стійкості процесів

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
НОВИЦЬКИЙ Віктор Володимирович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичних
проблем механіки та теорії керування

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ХРЕБЕТ Валерій Григорович,
Національний авіаційний університет,
доцент кафедри базових і спеціальних дисциплін Навчально-
наукового інституту неперервної освіти

Захист відбудеться «__» _____ 2018 р. о __ годині на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 26.166.01 при Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України.

Автореферат розісланий «__» _____ 201_ р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

д.ф.-м.н., Жук О.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Механіко-математичні моделі відіграють важливу роль при розв'язанні різних прикладних задач, серед яких можна відзначити дослідження динаміки машин, що застосовуються у металургії. Такі моделі часто можуть бути представлені у вигляді матеріальних систем, що складаються з матеріальних точок, абсолютно твердих тіл та пружних безінерційних елементів. Динаміка таких матеріальних систем описується за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, які на сьогодні є досить добре розвиненими. Саме тому дані моделі використовуються у роботах багатьох відомих авторів, серед яких можна згадати, наприклад, І. І. Артоболевського, І. І. Блехмана, С. П. Тимошенка та багатьох інших.

У механіко-математичних моделях, які існують на сьогоднішній день, часто не враховуються явища, зумовлені кулоновим тертям та механічними ударами. Це пов'язано з тим, що методи моделювання механічного удару є недостатньо розвиненими, а відповідні рівняння динаміки мають розривну праву частину і змінну структуру.

Саме тому дисертаційна робота присвячена дослідженню механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією, а також аналітичним та чисельним методам розв'язку відповідних рівнянь динаміки. Ці проблеми є актуальними для сучасної теоретичної механіки, оскільки їх вирішення дозволить більш ефективно розв'язувати задачі прикладного характеру, які можуть бути зведені до аналізу динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям і механічними ударами Див., наприклад, Posa M., Tobenkin M., Tedrake R. *Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction* // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 61, no 6. pp. 1423–1437.

Методи аналізу динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям досліджувалися в роботах В. В. Андропова, Є. Я. Антонюка, В. Ф. Журавльова, С. М. Кожевнікова, І. В. Крагельського, П. Пенлеве, М. П. Плахтієнка, Д. Е. Stewart та інших.

Моделі механічного удару розвивалися такими вченими, як В. Гольдсміт, О. П. Іванов, М. О. Кільчевський, Я. Г. Пановко, Е. Дж. Паус, Е. Уїттекер, G. Gilardi, T. R. Kane, D. A. Levinson, M. T. Mason, W. J. Stronge, Yu Wang та інші.

Методи побудови, аналітичного розв'язку і чисельного аналізу диференціальних рівнянь динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією розвивалися в роботах М. М. Боголюбова, О. Ф. Філіппова, Е. Haireg та інших.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дослідження є подальший розвиток методів побудови і розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією та їх

застосування до аналізу деяких механіко-математичних моделей штампувальних пресів, прокатних станів та рольгангів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання. Перше завдання полягає у тому, щоб розглянути основні моделі ударної взаємодії недеформівних тіл з кулоновим тертям, порівняти їх та вибрати таку з них, яка є найбільш коректною у випадку абсолютно непружного удару.

Ще одним завданням є розробка розрахункової схеми, яка є ефективною для чисельного аналізу рівнянь динаміки механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією.

Наступне завдання полягає у побудові і дослідженні за допомогою розроблених методів деяких механіко-математичних моделей штампувальних пресів, прокатних станів та рольгангів.

Об'єктом дослідження є складні багатовимірні матеріальні системи з ударно-фрикційною взаємодією.

Предметом дослідження є динаміка складних багатовимірних матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією.

Методи дослідження. Аналіз руху здійснюється за допомогою основного рівняння динаміки. Виключення невідомих складових сил реакції здійснюється за допомогою принципу Даламбера. Побудова аналітичного розв'язку рівнянь динаміки, що мають змінну структуру, проводилася за допомогою методу "припасовування". Розрахункова схема для чисельного аналізу рівнянь динаміки систем з ударно-фрикційною взаємодією розроблена на основі методу Рунге-Кутта.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що:

1) Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі, модель Кейна-Левінсона-Уїттекера, що ґрунтується на застосуванні кінематичного коефіцієнта відновлення, модель Рауса, що ґрунтується на застосуванні кінетичного коефіцієнта відновлення, і модель Стронге, що ґрунтується на застосуванні енергетичного коефіцієнта відновлення, дають однакові результати.

2) Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель штампувального пресу. Встановлено інтервал часу між двома послідовними механічними ударами в такій системі, необхідний для завершення перехідного процесу, а також знайдено умови, при яких шлях, пройдений центром мас вздовж горизонтальної осі, менший.

3) Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтується на методі Рунге-Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами. Встановлена гранична похибка розрахунків за допомогою вказаної розрахункової схеми, а також показана її ефективність на конкретному

прикладі рівняння динаміки системи з кулоновим тертям, що має точний аналітичний розв'язок.

4) Досліджено динаміку матеріальної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель звичайного стану холодної прокатки труб ХПТ-75, стану, модифікованого механізмом, який зрівноважує сили, що діють з боку шатунів, стану, в якому кривошипи можуть вільно повертатися один відносно одного, а також стану ХПТ-75, що має обидві зазначені модифікації. Шляхом порівняння розв'язків рівнянь динаміки вказаних систем показано, що динамічні навантаження є найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві зазначені модифікації.

5) За допомогою результатів, отриманих при дослідженні моделей механічного удару і запропонованої розрахункової схеми, побудовано і проведено чисельний аналіз рівняння динаміки трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є механіко-математичною моделлю рольганга прокатного стану; розв'язано задачу оптимізації вхідних параметрів машини даного типу.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Теоретична цінність дисертаційної роботи полягає у застосуванні моделей Кейна-Левінсона-Уїттекера, Рауса і Стронге для аналізу абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі та доведенні їхньої еквівалентності для даного випадку, а також у розробці розрахункової схеми, ефективною для чисельного інтегрування рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям.

Практична цінність дисертації полягає у тому, що запропоновані методи можуть бути застосовані до розв'язання задач динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією, які можуть використовуватися при моделюванні різних перехідних процесів та динамічного навантаження у важких машинах. Можливість практичного застосування проілюстрована на прикладі аналізу руху двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка є механіко-математичною моделлю штампувального пресу, і трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є моделлю рольганга прокатного стану.

Особистий внесок здобувача. В надрукованих у співавторстві працях [2], де описані результати, що містяться у першому розділі, [3–5], де описані результати, що містяться у третьому розділі, роботі [6], де описані результати, що містяться у п'ятому розділі, та роботах [7] і [8], де описані результати, що містяться у шостому розділі, Є. Я. Антонюку і М. П. Плахтієнку належить постановка задачі, І. А. Бобуху, Є. В. Соколову і О. О. Кільчинському – систематизація та обговорення результатів. Особисто дисертантом складено і розв'язано рівняння динаміки систем, що досліджуються в роботі.

Особисто дисертантом виконані роботи [9] і [10], в яких описані результати, що містяться у другому розділі, і роботи [11] і [12], в яких описані результати, що містяться у четвертому розділі.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- III International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, Ukraine, November 25 – 29, 2013;
- XIII Міжнародній науково-технічній конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, Україна, 14-16 жовтня 2014;
- XII Міжнародній конференції "Розвиток науки в XXI столітті". Харків, Україна, 16 квітня 2016.
- Міжнародній науковій конференції, присвяченій 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, Україна, 28-30 жовтня 2016.

У повному обсязі дисертація доповідалася і була підтримана на семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України А. А. Мартинюка, семінарі секції за напрямком «Динаміка і стійкість руху механічних систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В. Д. Кубенка.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць, 7 з яких – у виданнях за фахом, затверджених МОН України (2 з яких входять до міжнародної наукометричної бази Scopus), 3 матеріалів міжнародних конференцій, і 1 – тези доповідей на міжнародній конференції.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, результати яких наведено в роботі, проводилися у відповідності з планами науково-дослідних робіт Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, а також договором про науково-технічну співпрацю між Інститутом механіки ім. С.П. Тимошенка Національної академії наук України (м. Київ) та Донбаською державною машинобудівною академією (м. Краматорськ) (№ Тс-10-2011) та увійшли до звітів: "Дослідження динаміки споруди з опорно-кульовим механізмом сейсмоамортизації" (№ держреєстрації 0111U006383); "Побудова механіко-математичної моделі та дослідження взаємодії системи твердих тіл при косому ударі з урахуванням тертя ковзання" (№ держреєстрації 0114U002169).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, змісту, вступу, шести розділів, висновків, переліку використаних джерел із 132 найменувань та одного додатку. Обсяг дисертаційної роботи становить 144 сторінки друкованого тексту. У роботі міститься 23 рисунка.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання дослідження, розкрито наукову новизну,

теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації автора.

У першому розділі здійснено огляд літератури за темою дисертації. У підрозділі 1.1 наведено основні особливості побудови рівнянь динаміки матеріальних систем, в яких діють сили тертя, що описуються законом Амонтона-Кулона у вигляді

$$F_C = \begin{cases} -\mu|N|\text{sign } v_T & \text{при } v_T \neq 0, \\ -\mu|N|\text{sign}(\sum F_A) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| > \mu|N|, \\ -\sum F_A & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leq \mu|N|, \end{cases} \quad (1)$$

де F_C – сила кулонового тертя; v_T – швидкість ковзання; μ – коефіцієнт тертя, який вважається незалежним від швидкості ковзання v_T і площі контакту тіл, між якими відбувається тертя, а визначається лише властивостями матеріалів цих тіл; N – нормальна складова сили реакції і $\sum F_A$ – сума дотичних до поверхонь, між якими відбувається тертя, складових активних сил та сил інерції. Сила кулонового тертя F_C напрямлена при $v_T \neq 0$ протилежно до v_T , а при $v_T = 0$ – протилежно до $\sum F_A$. При наявності сил тертя, що описуються формулою (1), в'язі, якими обмежено рух точок системи, є неідеальними, а відповідні диференціальні рівняння мають розривну праву частину і змінну структуру.

У підрозділі 1.2 розглянута проблема існування розв'язку рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям, яке описується формулою (1). Описано відому проблему парадоксів Пенлеве та показано, як вона може бути вирішена шляхом врахування можливості виникнення «дотичного удару» («tangential impact»). Відзначено, що J.-S. Pang і J. C. Trinkle показали, що розв'язок рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям завжди існує за умови, що початкові швидкості дорівнюють нулю. D. E. Stewart довів існування розв'язку рівнянь динаміки систем, в яких є лише одна точка контакту з тертям, котре описується законом виду (1), а удари, які можуть мати місце при виникненні вказаного контакту, є абсолютно непружними.

У підрозділі 1.3 проведено огляд наближених методів рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям. Зокрема вказано роботи М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, В. В. Андропова, В. Ф. Журавльова і М. П. Плахтієнка, в яких розглянуто питання про застосування методу усереднення до систем з кулоновим тертям. Також зазначені роботи, присвячені проблемі чисельного інтегрування диференціальних рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям виду (1).

Підрозділ 1.4 присвячений огляду літератури стосовно основної задачі теорії механічного удару в системах з кулоновим тертям. Описані моделі механічного удару, які ґрунтуються на застосуванні гіпотез Ньютонна (модель Кейна-Левінсона-Уіттекера), Рауса (модель Рауса) і Стронге (модель Стронге). Відзначено, що на даний момент з літератури відомі три випадки,

коли застосування вказаних моделей дає однакові результати. Це удар твердих тіл без кулонового тертя, удар, при якому дотична складова швидкості не змінює знак і не обертається в нуль, а також центральний удар (удар, при якому пряма, що з'єднує центри мас тіл, що співударяються, проходить через точку їхнього контакту).

У підрозділі 1.5 проведено огляд робіт, присвячених застосуванню методів теоретичної механіки до аналізу динаміки машин, що застосовуються у металургії. Відзначено актуальність подальшого дослідження механіко-математичних моделей динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією та їх застосування до аналізу різних процесів, що використовуються, зокрема, в металургії.

У **другому розділі** розглядається абсолютно непружний удар шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі. Зокрема, підрозділ 2.1 присвячений постановці основної задачі абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі. Матеріальна система, що досліджується, зображена схематично на Рис. 1.

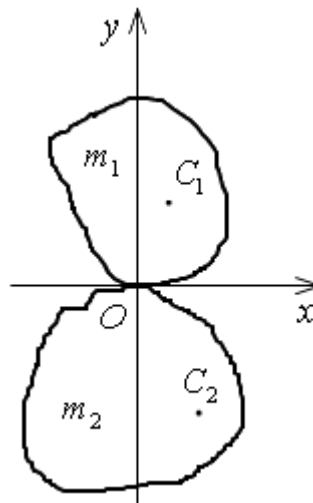


Рис. 1. Удар двох абсолютно твердих тіл при плоскопаралельному русі

На Рис. 1 показані два твердих тіла з масами m_1 і m_2 та центрами мас в точках C_1 і C_2 в процесі удару. Початок декартової системи координат Oxy знаходиться в точці контакту твердих тіл. Вісь Ox направлена уздовж загальної дотичної, а вісь Oy – уздовж загальної нормалі до поверхні тіл m_1 і m_2 . Плоскопаралельний рух тіл m_1 і m_2 відбувається у площині рисунку. У цій же площині знаходиться система координат Oxy .

Застосовуючи теореми про зміну кількості руху і моменту кількості руху і враховуючи третій закон Ньютона, знаходимо для зміни швидкостей поступального руху і обертання тіл m_1 і m_2 такі співвідношення:

$$\begin{cases} m_1(v_{1x} - v_{1x0}) = -I_T, \\ m_1(v_{1y} - v_{1y0}) = I_N, \\ G_1(\omega_1 - \omega_{10}) = -I_N x_1 - I_T y_1, \\ m_2(v_{2x} - v_{2x0}) = I_T, \\ m_2(v_{2y} - v_{2y0}) = -I_N, \\ G_2(\omega_2 - \omega_{20}) = I_N x_2 + I_T y_2, \end{cases} \quad (2)$$

де v_{1x} и v_{1x0} – спрямована уздовж вісі Ox складова швидкості руху центру мас тіла m_1 після і до удару відповідно, v_{1y} і v_{1y0} – направлена вздовж вісі Oy складова швидкості руху центру мас тіла m_1 після і до удару відповідно, G_1 – момент інерції тіла m_1 відносно вісі, яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині рисунку, ω_1 і ω_{10} – кутова швидкість обертання навколо цієї вісі тіла m_1 після і до удару відповідно, x_1 і y_1 – координати центру мас тіла m_1 в системі Oxy , I_T – дотична (направлена вздовж вісі Ox) складова ударного імпульсу, I_N – нормальна (направлена вздовж вісі Oy) складова ударного імпульсу, v_{2x} і v_{2x0} – направлена вздовж вісі Ox складова швидкості руху центру мас тіла m_2 після і до удару відповідно, v_{2y} і v_{2y0} – спрямована вздовж вісі Oy складова швидкості руху центру мас тіла m_2 після і до удару відповідно, G_2 – момент інерції тіла m_2 відносно вісі, яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині рисунку, ω_2 і ω_{20} – кутова швидкість обертання навколо цієї вісі тіла m_2 після і до удару відповідно, x_2 і y_2 – координати центру мас тіла m_2 в системі Oxy .

Основна задача теорії механічного удару при плоскопаралельному русі полягає у тому, щоб, знаючи v_{1x0} , v_{1y0} , ω_{10} , v_{2x0} , v_{2y0} і ω_{20} , визначити v_{1x} , v_{1y} , ω_1 , v_{2x} , v_{2y} і ω_2 . Для того, щоб зробити це, використовуючи рівняння (2), необхідно знайти складові ударного імпульсу I_N і I_T , значення яких залежать, строго кажучи, від вибору моделі механічного удару. В усіх розглянутих у даній роботі моделях механічного удару шорстких недеформівних тіл вводиться припущення про те, що закон тертя Амонтона–Кулона справедливий для нормальної і дотичної складових ударного імпульсу. Це означає, що необхідно розглядати три можливі випадки. У першому випадку швидкість ковзання не перетворюється в нуль і не змінює знак у процесі удару. У другому випадку швидкість ковзання перетворюється в процесі удару в нуль і зберігає нульове значення до закінчення удару. У третьому випадку швидкість ковзання проходить у процесі удару через нуль, змінюючи знак на протилежний.

У підрозділі 2.2 проводиться дослідження абсолютно непружного удару при плоскопаралельному русі за допомогою моделі Кейна–Левінсона–

Уїттекера, а у підрозділі 2.3 – за допомогою моделей Рауса і Стронге. Встановлено, що застосування усіх трьох моделей механічного удару дає однакові результати при дослідженні абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі. Якщо ввести позначення

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{x_1^2}{G_1} + \frac{x_2^2}{G_2}, \quad \tilde{a} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{y_1^2}{G_1} + \frac{y_2^2}{G_2}, \quad b = \frac{x_1 y_1}{G_1} + \frac{x_2 y_2}{G_2}, \quad (3)$$

то ці результати можуть бути представлені наступними формулами. У першому випадку удару з кулоновим тертям маємо

$$I_N = \frac{v_{N0}}{a - \mu b \operatorname{sign} v_{T0}}, \quad I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0}, \quad (4)$$

де v_{N0} і v_{T0} – відповідно нормальна і дотична складові швидкості руху тіл m_1 і m_2 одне відносно одного до удару. У другому випадку:

$$I_N = \frac{\tilde{a} v_{N0} - b v_{T0}}{a \tilde{a} - b^2}, \quad I_T = \frac{v_{T0} - b I_N}{\tilde{a}}. \quad (5)$$

А у третьому випадку:

$$I_N = \frac{v_{N0} (b - \mu \tilde{a} \operatorname{sign} v_{T0}) + 2 \mu b v_{T0} \operatorname{sign} v_{T0}}{(a + \mu b \operatorname{sign} v_{T0})(b - \mu \tilde{a} \operatorname{sign} v_{T0})}, \quad (6)$$

$$I_T = \mu \left(I_N - \frac{2 v_{T0}}{b - \mu \tilde{a} \operatorname{sign} v_{T0}} \right) \operatorname{sign} v_{T0}.$$

У **третьому розділі** досліджується плоскопаралельний поступальний рух віброударної системи, яка складається з двох абсолютно твердих тіл (Рис. 2.) під дією сили ваги.

У підрозділі 3.1 проводиться постановка задачі і побудова рівнянь динаміки до масової віброударної системи з кулоновим тертям.

Під час руху система може бути або вільною, або її переміщення у просторі буде обмежене недеформівною горизонтальною площиною. Позначимо масу поршня, як m_p , а масу циліндра разом з дном – як m_c . Циліндр вважаємо недеформівним, тобто рух поршня відносно дна циліндра у горизонтальному напрямку неможливий. Декартова система координат $O\xi\eta$ інерціальна, а система осей O_1xy зв'язана з дном циліндра і має початок в точці O_1 , яка знаходиться у центрі зовнішньої поверхні дна циліндра. Центри мас циліндра і поршня знаходяться на їхній осі симетрії, яка при вказаному виборі системи осей O_1xy збігається з віссю O_1y . Точки кріплення пружини до циліндра і поршня також знаходяться на осі O_1y . Оскільки циліндр і поршень недеформівні, то при вказаному виборі системи осей O_1xy зміна довжини пружини дорівнює зміні координати y центра мас поршня у системі O_1xy . Значення координати y , при якому пружина недеформована, дорівнює l . Жорсткість пружини дорівнює c , а її коефіцієнт дисипації – $2n$.

Очевидно, що положення точок системи у будь-який момент часу може бути визначене за допомогою абсциси ξ і ординати η точки O_1 dna циліндра, а також ординати y . Через наявність абсолютно твердої шорсткої площини рух системи обмежений неідеальною неутримуючою геометричною в'яззю, рівняння якої

$$\Phi(\xi, \eta, y) = \eta \geq 0, \quad (7)$$

де знак рівності має місце тоді, коли циліндр перебуває у контакті з площиною. Зі сказаного випливає, що досліджувана механічна система матиме три ступеня вільності при $\eta > 0$ і два ступеня вільності при $\eta = 0$.

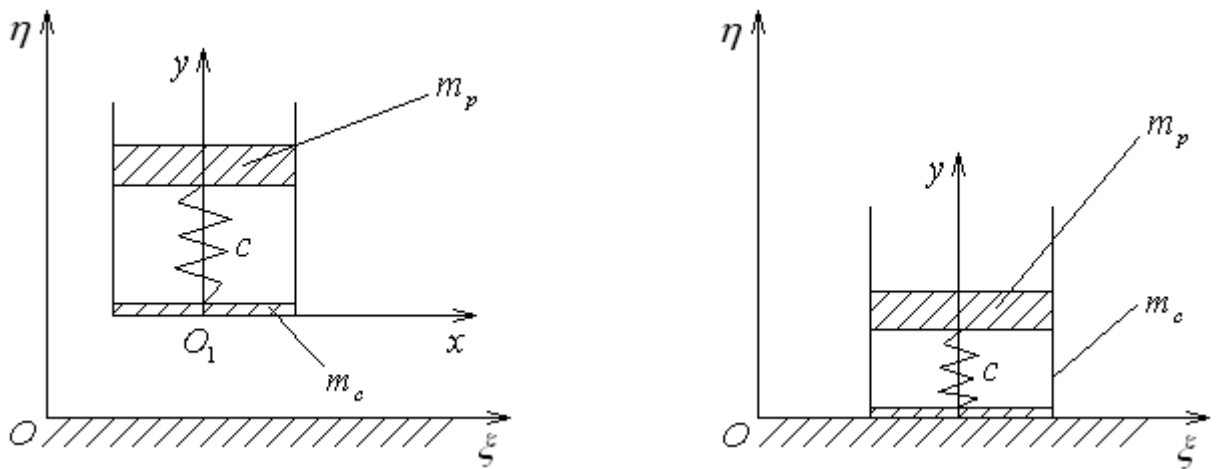


Рис. 2. Двомасова віброударна система з кулоновим тертям

Під час руху поршня відносно циліндра у вертикальному напрямку на поршень з боку циліндра діє сила кулонового тертя Q , обумовлена тертям поршня об стінки циліндра. Силу кулонового тертя Q будемо описувати за допомогою залежності

$$Q = \begin{cases} -q_0 \operatorname{sign} \dot{y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -q_0 \operatorname{sign} \sum F_A & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| > q_0, \\ -\sum F_A & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| \leq q_0, \end{cases} \quad (8)$$

де q_0 – додатна стала, що має розмірність сили, \dot{y} – швидкість руху у вертикальному напрямку поршня відносно циліндра і $\sum F_A$ – сума проєкцій на вісь O_1y активних сил і сил інерції, що діють на поршень у рухомій системі відліку O_1xy .

Досліджувана віброударна система може бути застосована в якості механіко-математичної моделі явищ, які мають місце при фрикційно-ударній взаємодії робочого органу машини (наприклад, штампувального пресу) і заготовки в процесі металообробки.

У підрозділі 3.2 побудовано рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям. Ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned}
M\ddot{\xi} &= F_T, \\
m_c\ddot{\eta} &= -m_c g + c(y-l) + 2n\dot{y} - Q + N, \\
\frac{m_c m_p}{M}\ddot{y} + c(y-l) + 2n\dot{y} &= Q - \frac{m_p}{M}N,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $M = m_c + m_p$, а N , F_T і Q – складові реакції, які були визначені за допомогою принципу Даламбера.

У підрозділах 3.3 і 3.4 знайдено розв'язки рівнянь (9) відповідно у випадку наявності і відсутності контакту циліндра із площиною. Крім того, у підрозділі 3.4 за допомогою результатів, отриманих у другому розділі, досліджено механічний удар циліндра із площиною.

Аналіз динаміки двомасової віброударної системи за допомогою одержаних розв'язків проведено у підрозділі 3.5. Шляхом порівняння розв'язків рівнянь динаміки двомасової віброударної системи при різних значеннях початкової висоти показано, що при більшій початковій висоті коливання циліндра і поршня один відносно одного повністю затухають на інтервалі часу між двома послідовними ударами, а шлях $\Delta\xi$, пройдений циліндром по горизонталі на інтервалі часу між ударом і наступним відскакуванням, виявляється меншим.

Четвертий розділ присвячено побудові розрахункової схеми для чисельного аналізу рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям. У випадку системи з одним ступенем свободи таке рівняння має в декартових координатах наступний загальний вигляд:

$$\ddot{x} = \begin{cases} f(t, x, \dot{x}, \text{sign}[v_T]) & \text{при } v_T \neq 0, \\ f(t, x, \dot{x}, \text{sign}[\sum F_A]) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| > \mu|N|, \\ g(t) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leq \mu|N|, \end{cases} \tag{10}$$

де v_T – швидкість ковзання, $g(t)$ – функція часу, яка являє собою праву частину рівняння динаміки при накладанні кінематичної в'язі $v_T = 0$, N – нормальна складова реакції. Початкові умови: $x_0 = x(t_0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$. Проблема побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування рівнянь типу (10) за допомогою методу Рунге-Кутта описана у підрозділі 4.1.

З метою побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь типу (10) у підрозділі 4.2 була розглянута найпростіша коливальна система з в'язким і кулоновим тертям, зображена на Рис. 3.

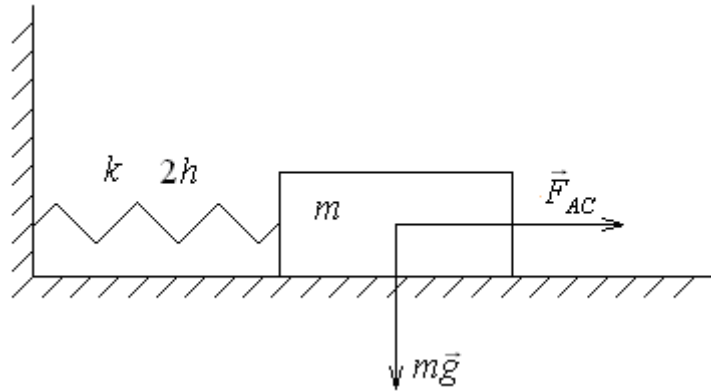


Рис. 3. Найпростіша коливальна система з в'язким і кулоновим тертям

Рівняння динаміки системи, зображеної на Рис. 3, може бути записане у вигляді

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -\mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}) + F_{AC} & \text{при } \dot{x} \neq 0, \\ m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -\mu mg \operatorname{sign}(\sum F_A) + F_{AC} & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| > \mu mg, \\ m\ddot{x} = 0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| \leq \mu mg, \end{cases} \quad (11)$$

де були використані такі позначення:

$$\sum F_A = -2h\dot{x} - kx + F_{AC}, \quad F_{AC} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_F, \\ a(t - t_F) & \text{при } t \geq t_F, \end{cases} \quad (12)$$

$$t_F = 16 \text{ с}, \quad a = 50 \text{ Н/с}.$$

Також у підрозділі 4.2 було знайдено аналітичний розв'язок рівняння (11).

У підрозділі 4.3 була побудована розрахункова схема на основі формул Рунге-Кутта для чисельного інтегрування рівняння (11), доповнена співвідношеннями для автоматичного регулювання кроку інтегрування, які дозволяють більш точно визначати моменти часу, коли система проходить через розрив і визначати відповідні значення координат і швидкостей. Ефективність запропонованої розрахункової схеми показана шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування за допомогою звичайних і модифікованих формул Рунге-Кутта з точним аналітичним розв'язком. Результат, отриманий за допомогою розрахункової схеми на основі модифікованих формул Рунге-Кутта, є більш точним.

У підрозділі 4.4 розрахункова схема для чисельного інтегрування рівняння (11) була узагальнена для випадку рівнянь (10). Узагальнені формули Рунге-Кутта мають при $v_T \neq 0$ вигляд

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t, \\ x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \Delta t, \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, x_n, \dot{x}_n, \text{sign}[v_T])\Delta t, \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \text{sign}[v_T]\right)\Delta t, \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4}\Delta t, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \text{sign}[v_T]\right)\Delta t, \\
k_4 &= f\left(t_n + \Delta t, x_n + \dot{x}_n\Delta t + \frac{k_2}{2}\Delta t, \dot{x}_n + k_3, \text{sign}[v_T]\right)\Delta t.
\end{aligned} \tag{14}$$

Якщо при якомусь $n = j$ маємо $v_T(t_j) \cdot v_T(t_{j+1}) \leq 0$, де $v_T(t_j)$ і $v_T(t_{j+1})$ – значення швидкості ковзання, обчислені відповідно при t_j і t_{j+1} , то крок $n = j + 1$ треба перерахувати за формулами

$$\begin{aligned}
t_r &= \frac{v_T(t_{j+1})t_j - v_T(t_j)t_{j+1}}{v_T(t_{j+1}) - v_T(t_j)}, \quad \Delta t' = t_r - t_j, \quad t'_{j+1} = t_r = t_j + \Delta t', \\
v'_T(t_{j+1}) &= 0, \quad \Delta t'' = 2\Delta t - \Delta t', \quad t_{j+2} = t'_{j+1} + \Delta t''.
\end{aligned} \tag{15}$$

Рівність $v'_T(t_{j+1}) = 0$ означає, що \dot{x}'_{j+1} вибирається таким чином, щоб швидкість ковзання дорівнювала нулю.

Якщо у випадку, коли застосовуються формули (15) і \dot{x}'_{j+1} визначається зі співвідношення $v'_T(t_{j+1}) = 0$, має місце нерівність $|\sum F_A| \leq \mu mg$, то при обчисленні x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} матимемо згідно з (10) замість формул (14) рівності

$$k_1 = g(t_n)\Delta t, \quad k_2 = g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t, \quad k_3 = g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t, \quad k_4 = g(t_n + \Delta t)\Delta t. \tag{16}$$

Рівності (16) необхідно застосовувати, починаючи з $n = j + 2$, до тих пір, поки виконується умова $|\sum F_A| \leq \mu mg$.

У **п'ятому розділі** досліджено питання про вплив параметрів стану холодної прокатки труб (ХПТ-75) на динамічну навантаженість у його складових. Дана система описана у підрозділі 5.1. Головна частина стану ХПТ-75, зображеного схематично на Рис. 5.1., являє собою спарений дезаксіальний кривошипно-повзунний механізм (5, 6 – кривошипи, 3, 4 – шатуни, 1 – кліть, яка рухається вздовж горизонтальної направляючої 2 в процесі прокатки труби 14). Кривошипи 5, 6 і шатуни 3, 4 мають неоднакову довжину внаслідок похибок їхнього виготовлення, що може призводити до збільшення динамічних навантажень в процесі роботи стану ХПТ-75. Шарнірне закріплення шатунів на кліті розміщено на певній висоті над віссю зубчастих коліс 7 і 8, з'єднаних пружним валом 9. Колеса 7 і 8 зачіпляються з колесами 10 і 11, які мають радіуси початкових кіл і з'єднані пружним валом 12. Привід здійснюється через зубчасте колесо 13.

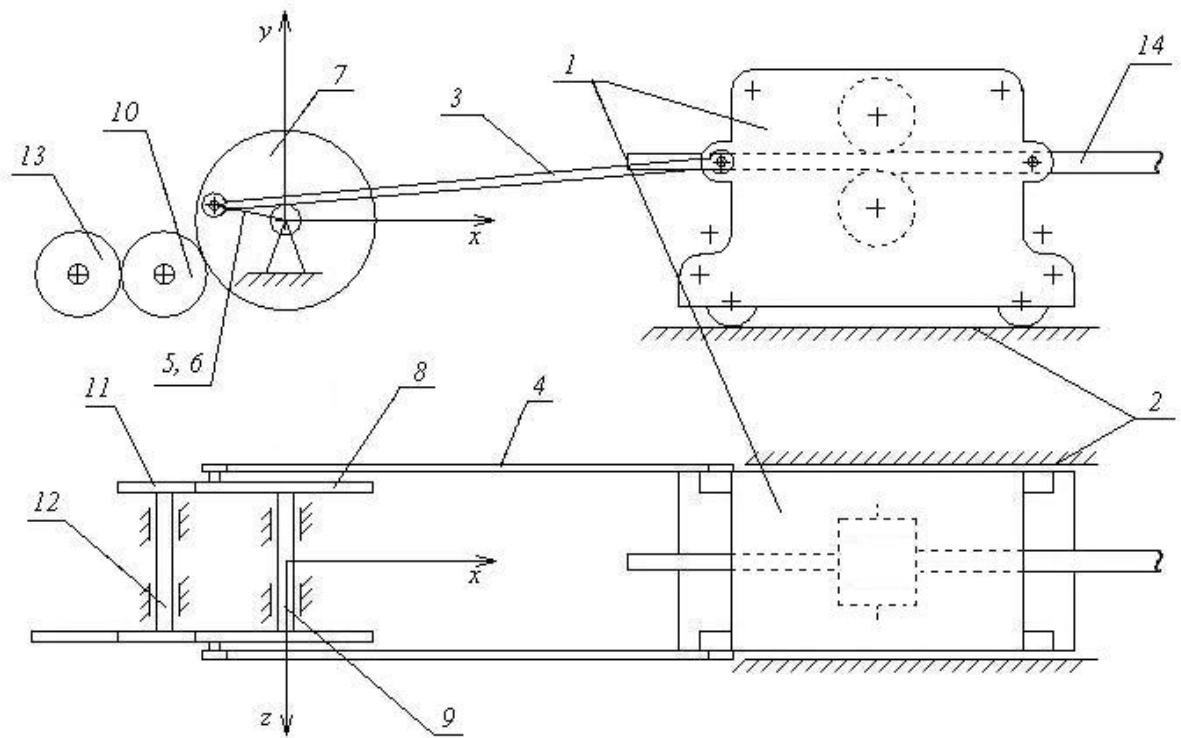


Рис. 4. Схематичне зображення приводу кліті стану ХПТ-75.

Моделювання проводилося з метою порівняння динамічних навантажень у звичайному стані ХПТ-75, стані, модифікованому механізмом, який зрівноважує сили, що діють з боку шатунів, стані, в якому колеса можуть вільно обертатися одне відносно одного, а також, стані, ХПТ-75, що має обидві зазначені модифікації.

Колеса 7 і 8 мають по одному ступеню свободи, тобто можуть здійснювати незалежні обертання навколо осі Oz , перпендикулярної до площини Рис. 4. Відповідні кути повороту позначимо φ_{31} і φ_{32} . Кліть 1 має два ступеня свободи – поступальний вздовж осі Ox і обертальний навколо осі Oy з кутом повороту α . Динаміка такої системи описується чотирма диференціальними рівняннями другого порядку, наведеними у підрозділі 5.2. Ці рівняння мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 G\ddot{\varphi}_{31} &= c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31}) - k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3 + k\Delta l_1 p_1 + D_{31}, \\
 G\ddot{\varphi}_{32} &= c_3(\varphi_{31} - \varphi_{32}) - k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3 + k\Delta l_2 p_2 + D_{32}, \\
 m\ddot{x} &= -k\Delta l_1 \cos \varphi_{41} - k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - F_T - F_P + D_K, \\
 G_K \ddot{\alpha} &= (k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_K}{2} \cos \alpha - M_E - M_T + D_4.
 \end{aligned} \tag{17}$$

В (17) доданок $c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31})$ являє собою момент сил пружності, який діє на зубчасті колеса 7 і 8 з боку валу 9, $k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3$ і $k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3$ – моменти сил пружності, що діють на колеса 10 і 11 з боку коліс 7 і 8; φ_{21} і φ_{22}

– кути повороту коліс 10 і 11 навколо осі Oz ; доданки $k\Delta l_1 p_1$ та $k\Delta l_2 p_2$ – моменти сил пружності, що діють на колеса 7 та 8 з боку шатунів 3 і 4; Δl_1 і Δl_2 – абсолютні видовження шатунів 3 і 4; p_1 і p_2 – плечі векторів сил пружності шатунів 3 і 4; доданки $k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}$ і $k\Delta l_2 \cos \varphi_{42}$ – проекції сил пружності в шатунах 3 і 4 на вісь Ox , φ_{41} і φ_{42} – кути нахилу шатунів 3 і 4 відповідно до осі Ox , F_T – сила тертя, що діє на кліть 1 при поступальному русі вздовж направляючої 2. Доданок $(k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_K}{2} \cos \alpha$ – обертовий момент відносно осі Oy , який діє на кліть 1 з боку шатунів 3 і 4, M_T – момент сил тертя, який виникає при повороті кліті 1 навколо осі Oy , M_E – момент сил пружності, що діє на кліть, після виникнення її контакту з вертикальними стінками направляючої 2 внаслідок повороту на кут δ . Доданки D_{31} , D_{32} , D_K і D_4 являють собою дисипативні опори.

У підрозділі 5.3 проведено чисельний аналіз рівнянь (17) за допомогою розрахункової схеми, запропонованої у четвертому розділі. За допомогою отриманих результатів чисельного аналізу проведено порівняння динамічних навантажень у звичайному стані ХПТ-75; стані ХПТ-75, модифікованому зрівнювальною ланкою, яка зрівноважує зусилля, що діють на робочу кліть з боку шатунів; стані ХПТ-75, в якому зубчасті колеса, з'єднані з шатунами, можуть вільно обертатися одне відносно одного; а також стані ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації. Шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування рівнянь динаміки вказаних систем показано, що динамічні навантаження будуть найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві зазначені модифікації.

У шостому розділі досліджено динаміку механіко-математичної моделі рольганга прокатного стану. Характеристики досліджуваної системи наведені у підрозділі 6.1. Ця система в різні моменти часу показана на Рис. 5 а і б.

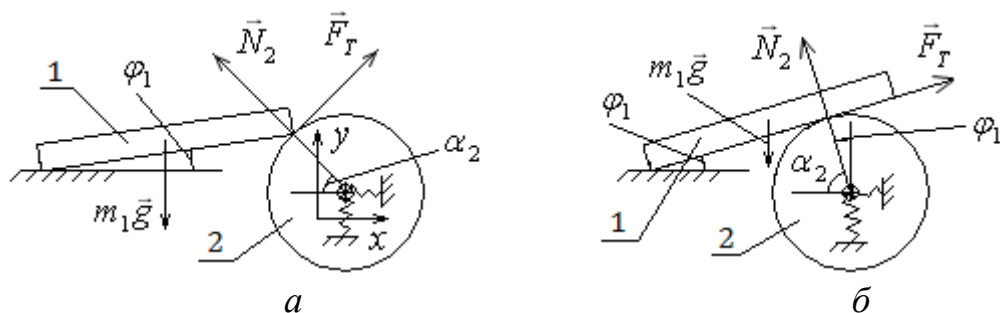


Рис. 5. Схематичне зображення механіко-математичної моделі рольганга прокатного стану

У досліджуваній системі абсолютно тверде тіло 1, яке являє собою заготовку, котра подається на рольганг, має форму прямокутного паралелепіпеда, масу $m_1 = 20000$ кг та довжину $l = 10$ м, здійснює

плоскопаралельний рух в площині Oxy . До удару з абсолютно твердим тілом 2 циліндричної форми, яке являє собою ролик рольгангу, з масою $m_2 = 4631$ кг, радіусом $R = 0,2$ м, та віссю симетрії, перпендикулярною до площини Рис. 5., тіло 1 рухається поступально у додатньому напрямку осі абсцис. Вісь симетрії тіла 2 до удару є нерухомою. Поступальний рух тіла 2 обмежено по вертикалі і горизонталі пружними ланками, що мають коефіцієнти жорсткості та дисипації $k_x = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м, $H_x = 85000$ Н·с/м, $k_y = 8,5 \cdot 10^6$ Н/м і $H_y = 1,7 \cdot 10^5$ Н·с/м. Тіло 2 приводиться в обертальний рух навколо своєї осі симетрії за допомогою асинхронного електродвигуна, ротор якого з'єднаний із цим тілом через пружний вал із крутильною жорсткістю $c = 5,45 \cdot 10^5$ Н·м та відповідним коефіцієнтом дисипації $H = 50,886$ Н·м·с. Тіло 1 має два ступеня свободи: x_1 – горизонтальна складова радіус-вектора його центру мас в обраній системі відліку та φ_1 – кут між направляючою і нижньою поверхнею тіла 1. Тіло 2 має три ступеня свободи: x_2 та y_2 – відповідно горизонтальна і вертикальна складові радіус-вектора його центра мас в обраній системі відліку і φ_2 – кут повороту тіла 2 навколо своєї осі симетрії. Ротор електродвигуна має один обертальний ступінь свободи φ_3 . Коефіцієнт тертя ковзання прийнятий $\mu = 0,3$.

У підрозділі 6.2 проведено побудову рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга. В загальному випадку ці рівняння можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 G_1 \ddot{\varphi}_1 &= p_1 N_2 + p_T F_T - \frac{l}{2} m_1 g \cos \varphi_1, \\
 m_1 \ddot{x}_1 &= -N_2 \cos \alpha_2 + F_T \sin \alpha_2, \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= N_2 \cos \alpha_2 - k_x x_2 - H_x \dot{x}_2 - F_T \sin \alpha_2, \\
 m_2 \ddot{y}_2 &= -N_2 \sin \alpha_2 - F_E - F_T \cos \alpha_2, \\
 G_2 \ddot{\varphi}_2 &= c(\varphi_3 - \varphi_2) + H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) - R F_T, \\
 G_3 \ddot{\varphi}_3 &= M - c(\varphi_3 - \varphi_2) - H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\
 N_2 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

У системі рівнянь (18) N_2 – сила реакції, що діє з боку тіла 2 на тіло 1. Наявність умови $N_2 \geq 0$ обумовлена тим, що геометрична в'язь, яка може виникати між тілами 1 і 2, є односторонньою. F_T – сила кулонового тертя між тілами 1 і 2. G_1 – момент інерції тіла 1 відносно осі обертання, яка проходить через точку його контакту з горизонтальною направляючою перпендикулярно до площини Рис. 5. Оскільки довжина тіла 1 вважається набагато більшою, ніж його товщина, то зазначений момент інерції $G_1 = m_1 l^2 / 3$. p_1 та p_T – плечі сил N_2 і F_T – відповідно відносно осі обертання тіла 1. α_2 – кут між радіусом тіла 2, опущеним у точку контакту

тіл 1 і 2, та віссю абсцис. $G_2 = m_2 R^2 / 2$ – момент інерції тіла 2 відносно його осі симетрії. M – обертовий момент, який розвиває електродвигун.

Рівняння динаміки системи (18) мають п'ять структур. Структура I відповідає ситуації, коли контакту між тілами 1 і 2 немає. Структури II і III мають місце при наявності контакту тіл 1 і 2 в ситуації, зображеній на Рис. 5 а. Причому, структура III відрізняється від структури II наявністю кінематичної в'язі, яка забороняє проковзування між тілами 1 і 2. Структури IV і V мають місце при наявності контакту тіл 1 і 2 в ситуації, зображеній на Рис. 5 б. Причому, структура V відрізняється від структури IV наявністю кінематичної в'язі, яка забороняє проковзування між тілами 1 і 2.

Зміни структури I-II, I-III, I-IV і I-V супроводжуються абсолютно непружним ударом тіл 1 і 2. Нормальна і дотична складові ударного імпульсу були визначені за допомогою результатів дослідження механічного удару, отриманих у другому розділі.

У підрозділі 6.3 проведено чисельний аналіз системи рівнянь (18) за допомогою розрахункової схеми, запропонованої у четвертому розділі. Виходячи з порівняння результатів аналізу динаміки досліджуваної системи, отриманих при $h = 0,18$ м та $h = 0,133$ м, показано, що в другому випадку динамічна навантаженість системи буде значно вищою. Крім того, у другому випадку системі потрібно в декілька разів більше часу на проходження перехідного процесу. Це варто враховувати при проектуванні реальних машин, оскільки зазначені особливості динаміки досліджуваної системи при $h = 0,133$ м можуть призводити до збоїв у роботі двигунів і швидкому виходу з ладу деталей обладнання.

ВИСНОВКИ

1. Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі застосування моделі Кейна–Левінсона–Уїттекера, що ґрунтується на застосуванні кінематичного коефіцієнта відновлення, моделі Рауса, що ґрунтується на застосуванні кінетичного коефіцієнта відновлення, і моделі Стронге, що ґрунтується на застосуванні енергетичного коефіцієнта відновлення, дає однакові результати.

2. Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка є механіко-математичною моделлю штампувального пресу. Встановлено інтервал часу між двома послідовними механічними ударами в такій системі, необхідний для завершення перехідного процесу, а також знайдено умови, за яких шлях, пройдений центром мас вздовж горизонтальної осі, буде меншим.

3. Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтується на методі Рунге-Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами.

Встановлено граничну похибку розрахунків за допомогою вказаної розрахункової схеми, а також показано її ефективність на конкретному прикладі рівняння динаміки системи з кулоновим тертям, що має точний аналітичний розв'язок.

4. Досліджено динаміку матеріальної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель звичайного стану ХПТ-75; стану ХПТ-75, модифікованого зрівнювальною ланкою, яка зрівноважує зусилля, які діють на робочу кліть з боку шатунів; стану ХПТ-75, в якому зубчасті колеса, з'єднані з шатунами, можуть вільно обертатися одне відносно одного; а також стану ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації. Шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування рівнянь динаміки вказаних систем показано, що динамічні навантаження будуть найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації.

5. За допомогою результатів, отриманих при дослідженні моделей механічного удару і запропонованої розрахункової схеми, побудовано і проведено чисельний аналіз рівняння динаміки трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є механіко-математичною моделлю рольганга прокатного стану; розв'язано задачу оптимізації вхідних параметрів машини даного типу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Антонюк Е. Я., Забуга А. Г. О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределимыми кинематическими цепями // Обработка материалов давлением. 2012. Т. 32, № 3. С. 235–241.

2. Забуга А. Г., Антонюк Е. Я. Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием // Вісник Одеського національного університету. Серія: Математика і механіка. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–121.

3. Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В., Забуга А. Г. О динамическом взаимодействии горячего сляба с рольгангом прокатного стана // Обработка материалов давлением. 2013. Т. 37, № 4. С. 57–62.

4. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2014. Vol. 115, no 1. pp. 173–182.

5. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Нелінійна модель фрикційно-ударної взаємодії твердого тіла з твердою шорсткою площиною // Дослідження в математиці і механіці. 2015. Т. 20, № 2 (26). С. 26–42.

6. Плахтиенко Н. П., Забуга А. Г. Фрикционное взаимодействие упруго-связанных твердых тел с шероховатой плоскостью // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 2. С. 111–125.

7. Забуга А. Г. Моделирование абсолютно неупругого удара шероховатых недеформируемых тел при плоскопараллельном движении // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 5. С. 137–144.

8. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, 2013. pp. 215–225.

9. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Коливання системи двох пружно-зв'язаних твердих тіл при ударно-фрикційній взаємодії // Тези XIII Міжнародної науково-технічної конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, 2014. С. 9.

10. Забуга А. Г. Моделі удару шорстких недеформівних тіл при плоскопараллельному русі // Матеріали XII Міжнародної конференції "Розвиток науки в XXI столітті". Харків, 2016. С. 39–44.

11. Забуга А. Г., Кільчинський О. О. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку диференціальних рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям // Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, 2016. С. 130–132.

АНОТАЦІЇ

Забуга А. Г. Аналітичне та чисельне моделювання динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка» (113 – Прикладна математика). – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією, а також аналітичним та чисельним методам розв'язку відповідних рівнянь динаміки.

Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопараллельному русі застосування моделей Кейна-Левінсона-Уїттекера, Рауса і Стронге дає однакові результати.

Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтується на методі Рунге-Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами.

Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель штампувального пресу, а також

досліджено динаміку матеріальних систем з кулоновим тертям, які являють собою механіко-математичні моделі стану холодної прокатки труб ХПТ-75 та рольганга прокатного стана.

Ключові слова: кулонове тертя, механічний удар, рівняння динаміки, змінна структура, механіко-математична модель, коефіцієнт відновлення, модель Кейна-Левінсона-Уйттекера, модель Рауса, модель Стронге, метод Рунге-Кутта.

Забуга А. Г. Аналитическое и численное моделирование динамики материальных систем с ударно-фрикционным взаимодействием. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика» (113 – Прикладная математика). – Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины.

Диссертационная работа посвящена исследованию механико-математических моделей систем с ударно-фрикционным взаимодействием, а также аналитическим и численным методам решения соответствующих уравнений динамики.

Показано, что в случае абсолютно неупругого удара шероховатых недеформируемых твердых тел при плоскопараллельном движении, использование моделей Кейна-Левинсона-Уйттекера, Раусса и Стронге даёт одинаковые результаты.

Предложена расчетная схема, основанная на методе Рунге-Кутта, которая даёт корректные с точки зрения механики результаты при численном анализе динамики систем с кулоновым трением и механическими ударами.

Построены и решены при помощи полученных результатов уравнения динамики двухмассовой виброударной системы с кулоновым трением, которая представляет собой механико-математическую модель штамповочного пресса, а также исследована динамика материальных систем с кулоновым трением, которые представляют собой механико-математические модели стана холодной прокатки труб ХПТ-75 и рольганга прокатного стана.

Ключевые слова: кулоново трение, механический удар, уравнение динамики, переменная структура, механико-математическая модель, коэффициент восстановления, модель Кейна-Левинсона-Уйттекера, модель Раусса, модель Стронге, метод Рунге-Кутта.

Zabuga A. G. Analytical and Numerical Modelling of Dynamics of Material Systems with Frictional Impact Interaction. – Manuscript.

Thesis for Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in speciality 01.02.01 «Theoretical mechanics» (113 – Applied mathematics). – S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is dedicated to investigation of mechanical-mathematical models of systems with frictional impact interaction as well as analytical and numerical methods of solution of appropriate dynamics equations.

It is proved that in case of perfectly inelastic impact of rough rigid bodies in planar motion results of modeling are the same for Kane-Levinson-Whittaker's, Routh's, and Stronge's models.

It was suggested based on Runge-Kutta method computational scheme that allows getting mechanically correct results by numerical analysis of dynamics of systems with Coulomb friction and mechanical impacts.

Developed and solved by using obtained methods dynamics equations of two-mass vibro-impact system with Coulomb friction that is mechanical-mathematical model of punching-press. Investigated dynamics of material systems with Coulomb friction that are mechanical-mathematical models of cold rolling mill and rolling mill's roller.

Keywords: Coulomb friction, mechanical impact, dynamics equation, variable structure, mechanical-mathematical model, coefficient of restitution, Kane-Levinson-Whittaker's model, Routh's model, Stronge's model, Runge-Kutta method.