

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

СЕЛІВАНОВ Михайло Федорович



УДК 539.42

**КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ
ПРУЖНИХ ТА В'ЯЗКОПРУЖНИХ ТІЛ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ
ТРІЩИН З ЗОНАМИ ЗЧЕПЛЕННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі механіки руйнування матеріалів Інституту механіки імені С.П. Тимошенка Національної академії наук України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор
Камінський Анатолій Олексійович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України, головний науковий співробітник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Острик Володимир Іванович,
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка, завідувач науково-дослідного
сектора механіки спряжених хвильових полів;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Куц Володимир Іванович,
Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля
НАН України, провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Шевельова Алла Євгенівна,
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара,
професор кафедри обчислювальної
математики та математичної кібернетики.

Захист відбудеться “ 3 ” жовтня 2017 р. о 13³⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 211.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504.

Автореферат розіслано “ 30 ” серпня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,
доктор фізико-математичних наук



О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Інженерним розрахункам, що враховують наявність тріщин в ізотропних та ортотропних в'язкопружних тілах, приділяється все більше уваги у зв'язку з тим, що вони зосереджені на виявленні границь опору руйнуванню й довговічності конструкцій, виготовлених із сучасних матеріалів, таких як армовані пластики, нанокompозити та ін. Переважно ці розрахунки базуються на результатах лінійно-пружної механіки руйнування. Коли нелінійною поведінкою матеріалу в околі вершини тріщини можна знехтувати лінійна механіка руйнування дає ефективні результати при прогнозуванні граничного стану тріщини.

У багатьох випадках визначення параметрів стану граничної рівноваги при наявності тріщини в конструкції з композитного матеріалу, бетону або іншого квазікрихкого матеріалу розмір зони передруйнування виявляється не достатньо малим у порівнянні з іншими характеристичними розмірами, що призводить до невідповідності умовам застосування силового критерію. Деякі механізми (утворення мікротріщин та порожнин у фронті тріщини, їх злиття, бріджинг та інші механізми на мікрорівні), що супроводжують розвиток тріщини, мають істотний вплив на невиконання цих умов. Якщо розмір зони не є достатньо малим за інші характерні розміри задачі, незамінним інструментом аналізу стає модель зчеплення (МЗЗ). Складні фізичні ефекти, що мають місце в околі вершини тріщини, можна змоделювати за допомогою введення нелінійних ефектів деформування, що знесені на відрізок на продовженні тріщини.

Більшість досліджень у рамках МЗЗ проведені за допомогою методу скінченних елементів. Апарат теорії функції комплексної змінної дозволяє виявити основні закономірності між параметрами моделі та параметрами стану граничної рівноваги, зробити висновки, що можуть бути використаними при розрахунках тіл складної геометрії та за умов різних схем навантаження. До того ж виникає можливість задовольнити умову скінченності напружень у тілі, виконання якої вимагають класичні теорії повільного поширення тріщин.

Неоднорідність поля напружень на лінії розташування тріщини може призводити до часткового контакту берегів тріщини, що необхідно враховувати при визначенні параметрів граничного стану та при дослідженні повільного підростання тріщини. Врахування зсувного поля напружень вимагає застосування сучасних моделей, що пов'язують зсувні та нормальні зчеплення, які вводяться при використанні моделі.

Врахування вищезгаданих обставини обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні наступних науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.445п "Дослідження довготривалого деформування та руйнування анізотропних в'язкопружних тіл" номер державної реєстрації

0103U008055, 2003–2004 рр.; НДР № 1.3.1.345 “Дослідження квазістатичних процесів розвитку тріщин у композитах на основі моделей нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0104U000300, 2004–2007 рр.; НДР № 1.3.1.358 “Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей деформування і руйнування композитних матеріалів для розв’язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій”, номер державної реєстрації 0107U000163, 2007–2011 рр.; НДР № 1.3.1.487п “Дослідження впливу в’язкопружних властивостей композитів на концентрацію напружень поблизу отворів при статичному навантаженні”, номер державної реєстрації 0109U000252, 2009–2010 рр.; НДР № 1.3.1.366 “Дослідження механізмів квазістатичного розвитку тріщин в анізотропних і кусково-однорідних тілах при розтязії і зсуві з застосуванням підходів мезомеханіки руйнування”, номер державної реєстрації 0107U008617, 2008–2012 рр.; НДР № 1.3.1.503п “Дослідження квазістатичних процесів деформування і початкового руйнування пружних і в’язкопружних ортотропних пластин з колінеарними тріщинами при розтязії”, номер державної реєстрації 0115U002393, 2011 р.; НДР № 1.3.1.385 “Розробка моделей нелінійного деформування та руйнування конструктивних матеріалів з урахуванням їх дефектності, анізотропії, в’язкопружних та пластичних властивостей”, номер державної реєстрації 0112U000252, 2012–2016 рр.; НДР № 1.3.1.386 “Дослідження квазістатичних процесів розвитку тріщин у в’язкопружних і нелінійно пружних тілах на основі моделей нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0113U002153, 2013–2015 рр.; НДР № 1.3.1.408 “Визначення тріщиностійкості і довговічності композитних матеріалів на основі методів нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0115U005710, 2016–2017 рр.

Мета та завдання дослідження. Мета роботи полягає в постановці й розв’язанні задач механіки тріщин на основі сучасних моделей для врахування наявних біля вершин тріщини зон передруйнування, визначенні на основі отриманих розв’язків параметрів граничної рівноваги пружних тіл із тріщинами та прогнозуванні кінетики повільного поширення тріщини у в’язкопружному середовищі.

Для досягнення цієї мети необхідно:

1. Розвинути метод розв’язання задач лінійної в’язкопружності для врахування в’язкопружних властивостей матеріалів компонент композита.
2. Сформулювати строгу математичну постановку задачі механіки тріщин із зоною передруйнування у в’язкопружних ізотропних та ортотропних тілах в умовах дії розтягувальних та зсувних зусиль.
3. Розробити ефективний підхід до визначення параметрів докритичного стану та стану граничної рівноваги тіла з тріщиною змішаного режиму руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув).
4. Отримати ефективний числово-аналітичний метод розв’язання задач повільного поширення тріщин нормального відриву у в’язкопружних середовищах; врахувати можливий частковий контакт берегів тріщини при докритичному зростанні.

5. Побудувати розв'язки нових плоских задач для необмеженого тіла з тріщиною за наявності зони передруйнування та за умови неоднорідного поля напружень на лінії розташування тріщини.
6. Провести апробацію алгоритму визначення параметрів стану граничної рівноваги тіла з тріщиною при дослідженні впливу параметрів форми закону зчеплення-відриву (ЗЗВ).

Об'єктом дослідження є кінетика повільного поширення тріщини нормального відриву в ізотропних і ортотропних в'язкопружних тілах та параметри стану граничної рівноваги тіла з тріщиною змішаного режиму руйнування в ізотропних і ортотропних пружних тілах.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан зазначених тіл із тріщинами, в околі вершин яких утворюються зони передруйнування.

Методи дослідження. При розв'язанні задач лінійного спряження з розривними правими частинами використовувалися точні аналітичні методи теорії функцій комплексної змінної. Розкриття тріщини шукалося для кусково-лінійного розподілу зчеплення або щільності розкриття, причому зчеплення пов'язано з відривом (який є розв'язком задачі) законом зчеплення-відриву. Цей закон у процесі пошуку розв'язку задачі задовольнявся за допомогою стандартних числових методів розв'язання нелінійних систем рівнянь з використанням їх лінеаризації. Вимога скінченності напружень у тілі вносить у систему для параметрів розподілу зчеплення нелінійні рівняння, що унеможливають лінеаризацію. Щоб уникнути цієї незручності була використана модифікована постановка, в основі якої лежить методика врахування контактної взаємодії берегів тріщини. Реалізацію цієї методики зведено до використання ітеративної процедури, на кожному кроці якої розв'язується або лінійна система рівнянь (у разі рівномірного ЗЗВ), або нелінійна система (у разі нерівномірного ЗЗВ), що дозволяє лінеаризацію.

Для отримання розв'язку для в'язкопружного розкриття використано принцип пружно-в'язкопружної аналогії для залежних від часу граничних умов та запропоновані в роботі алгоритми оберненого перетворення Лапласа, що використовують методи раціональної апроксимації, та операторного методу, що використовують операторні ланцюгові дроби.

Отриману на основі критерію критичного розкриття тріщини систему інтегральних рівнянь та нерівностей, що описує зміну положення вершин тріщини з часом, розв'язано шляхом координатно-часової дискретизації та використання стандартних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:

1. Побудовані ефективні методики отримання розв'язків задач лінійної в'язкопружності. Розв'язки знайдено у вигляді інтеграла Больцмана з дробово-експоненційним ядром.
2. Отримано розв'язок задачі про розкриття тріщини в рамках МЗЗ з рівномірними розподілами нормального і зсувного зчеплень для схеми навантаження з розподіленим напруженням на нескінченності та системою зосереджених сил в околі тріщини. Враховано можливий контакт берегів тріщини.

3. Методику дослідження контактної взаємодії берегів тріщини застосовано для визначення розкриття тріщини в рамках МЗЗ з рівномірним законом розподілу зчеплення. Отриманий алгоритм не передбачає розв'язання систем нелінійних рівнянь відносно довжин зчеплення, а використовує ітеративне розв'язання систем лінійних рівнянь.
4. Запропонована методика розв'язання системи інтегральних рівнянь та нерівностей, що описує положення вершин тріщини зі зміною часу. Реалізація методики зводиться до послідовного визначення положення вершин тріщини в дискретні моменти часу на основі координатно-часової дискретизації.
5. Побудовані системи для визначення параметрів докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною нормального відриву в рамках МЗЗ. Отримано асимптотичний розв'язок, який можна використовувати як початкове наближення для розв'язання нелінійних визначальних систем.
6. Запропонована постановка, яка дозволила використати МЗЗ при дослідженні стану граничної рівноваги тріщини змішаного режиму руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув). Використано фізично обґрунтовані зв'язки між відривами та зчепленнями. Розв'язок для розкриття, отриманий на основі цієї постановки, задовольняє умови плавності змикання берегів тріщини та відсутності перекриття її берегів, а також неперервно збігається до розв'язку задачі для моделі без зон зчеплення при зникненні зсувної складової поля напружень. Постановка використовує модель складної зони зчеплення зі спільними хвостами прикладання нормальних та зсувних зчеплень. Використана постановка зводить задачу до розв'язання змішаної основної задачі теорії пружності (на одній частині границі задано напруження, на іншій – комбінацію нормального напруження та горизонтального переміщення).

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла та механіки руйнування; застосуванням обґрунтованих, здебільшого точних аналітичних методів розв'язання поставлених задач; використанням експериментально перевірених критеріїв руйнування; узгодженістю та збігом деяких одержаних розв'язків із відомими в літературі результатами, отриманими за допомогою інших методів; відповідністю постановок, результатів і висновків до фізичної суті задач.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання розроблених методів, що враховують сучасні моделі тріщин, для дослідження стану граничної рівноваги пружного тіла з тріщиною, механізму переходу наявної у в'язкопружному тілі тріщини до повільного зростання та механізму саме повільного поширення. Отримані розв'язки можна розглядати як еталонні при тестуванні результатів числових методів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародних наукових конференціях і форумах, зокрема: Міжнародна наукова школа (Симферополь, 2004), Dynamical systems modelling and stability investigation: International Conference (Київ, 2005), 7th, 8th, 9th

International Fracture Conferences (Коджаелі, Туреччина, 2005, 2007, 2009), Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпродзержинськ, 2007), III міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки” (Київ, 2015), Китайсько-український науково-технологічний форум (Харбін, Китай, 2016)

У повному обсязі дисертація доповідалася й обговорювалася на науковому семінарі відділу механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.ф.-м.н., професор А.О. Камінський, 2016 р.); на науковому семінарі за напрямком “Механіка руйнування та втоми” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівники – д.ф.-м.н., професор А.О. Камінський та д.т.н., професор В.П. Голуб, 2017 р.); на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2017 р.); на семінарі з механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2017 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертації висвітлено в 52 наукових працях, з них 6 статей [9, 11, 24, 29, 37, 40] у провідних міжнародних журналах, 37 статей [1–5, 7, 8, 10, 12–23, 25–28, 30–36, 38, 39, 41–44] у наукових фахових виданнях України, та 8 тез доповідей і матеріалів міжнародних наукових конференцій. Праці [6, 14, 20, 31, 35, 36, 38, 47, 48, 51, 52] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У працях [1–5, 7–13, 15–19, 21–30, 32–34, 37, 39–46, 49, 50], що опубліковано в співавторстві, здобувачеві належить: 1) розробка методів розв’язання задач лінійної в’язкопружності для композита, матеріали компонент якого виявляють спадкові властивості; 2) аналітичні розв’язки для переміщень берегів тріщини внаслідок наявності системи зосереджених сил у постановці задачі, яка розв’язується в рамках МЗЗ з рівномірним ЗЗВ; 3) побудова моделей тріщини змішаного режиму руйнування; 4) розробка алгоритмів дослідження параметрів граничного та докритичного станів тіла з тріщиною при моделюванні ЗЗВ нерівномірним розподілом; 5) моделювання несиметричного поширення однієї та системи колінеарних тріщин. Здобувачеві повністю належить числова реалізація й ілюстрація отриманих результатів, частково – розробка методики дослідження кінетики симетричного зростання однієї тріщини та методи розв’язання задач лінійної в’язкопружності.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел зі 192 найменувань та одного додатку. Загальний обсяг дисертації становить 322 сторінки, разом зі 105 рисунками та 4 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультантові – доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Олексійовичу Камінському за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету й задачі досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; наведено дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок здобувача в них, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У **першому розділі** виконано огляд літератури за темою дисертації. На підставі аналізу літературних джерел висвітлено виникнення теорій повільного поширення тріщин у в'язкопружних середовищах, розвиток моделей, що враховують наявність зони передруйнування біля вершини тріщини, а також основні принципи побудови розв'язків задач лінійної в'язкопружності.

Механіка руйнування як математичний інструмент аналізу опору зародженню та поширенню тріщин у своєму розвитку спирається на моделі й методи механіки суцільного середовища, використовуючи матеріалознавство, фізику твердого тіла, хімію та інші природничі науки. Кожну модель тріщини в механіці руйнування можна пов'язати з одним або декількома критеріальними співвідношеннями. Найважливіші критерії механіки руйнування та прізвища їх розробників: енергетичний критерій (А.А. Griffith, 1921), силовий критерій (G.R. Irwin, 1948), критерій критичного розкриття тріщин (A. Wells, 1963), критерій руйнування при стиску (О.М. Гузь, 1967), критерій критичного J -інтеграла (J.R. Rice, Г.П. Черепанов, 1968), енергетичний критерій повільного поширення тріщин (W.G. Knauss, 1970).

Значний внесок у розвиток механіки тріщин зробили О.Є. Андрейків, Г.І. Баренблатт, Л.Т. Бережницький, В.Л. Богданов, В.В. Болотін, П.М. Вітвицький, І.О. Гузь, О.М. Гузь, О.П. Дацишин, В.В. Зозуля, А.О. Камінський, Л.М. Качанов, Л.А. Кіпніс, Г.С. Кіт, О.Ф. Кривий, В.І. Куш, М.Я. Леонов, В.В. Лобода, М.А. Мартиненко, В.О. Меньшиков, О.В. Меньшиков, Є.М. Морозов, В.М. Назаренко, М.М. Николишин, В.І. Острик, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Г.Я. Попов, М.П. Саврук, Л.Й. Слеп'ян, А.Ф. Улітко, Л.П. Хорошун, Г.П. Черепанов, А.Є. Шевельова, А.Н. Cottrell, D.S. Dugdale, F. Erdogan, D. Gross, J.R. Rice, G.C. Sih, M.L. Williams, A.R. Zak та інші.

Розробка теорій повільного зростання тріщини пов'язана з наступними роботами: M.L. Williams (1965), А.О. Камінський (1968), W.G. Knauss (1970), В.В. Костров, Л.В. Нікітін (1970), R.A. Schapery (1975), L.N. McCartney (1977).

Як показують численні експериментальні дані (рис. 1) біля вершини тріщини утворюється зона послаблених зв'язків, яку називають *зоною передруйнування*. При моделюванні процесу руйнування на продовженні лінії тріщини вводиться додатковий розріз із прикладеними до його берегів силами зчеплення. Ці сили та відстань між поверхнями розрізу пов'язані законом зчеплення-відриву (рис. 2). Модель отримала назву *моделі зони зчеплення* (Cohesive Zone Model).

З часів їх введення Баренблатом (1959), моделі зони зчеплення використову-



Рис. 1 – Зона передруйнування біля фронту тріщини

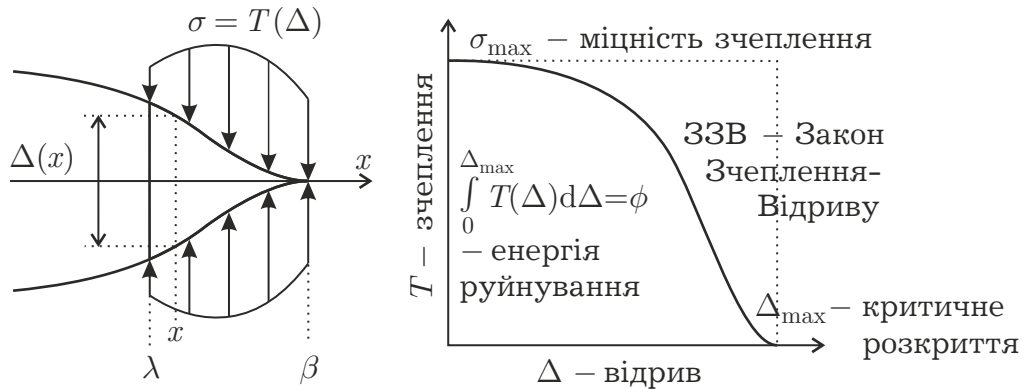


Рис. 2 – Модель зчеплення

ються для вивчення широкої різноманітності фізичних явищ таких як зростання тріщин у пружно-пластичних та в'язкопружних матеріалах, адгезійний контакт неузгоджених поверхонь, фрикційне ковзання та землетруси, тріщиноутворення, розклеювання та відшарування, бріджинг та ін.

Леонов та Панасюк (1959) запропонували модель зі сталою інтенсивністю зчеплення, яка вважається максимально можливим напруженням у тілі. Нормальний відрив знайдено в роботі Савіна та Камінського (1967) для східчастого розподілу зчеплення та ЗЗВ у формі лінійного зміцнення. У роботі Штала (Stähle P., 1983) побудований вираз для вертикальних переміщень берегів тріщини для кусково-лінійного розподілу зчеплення й ЗЗВ в лінійній формі розміщення. Модель була успішно застосована при визначенні розкриття за допомогою інтегральних рівнянь у роботі Андерсона (Andersson H., Bergkvist H., 1970). Вперше реалізувати головну ідею моделі вдалося Хіллерборгу (Hillerborg A., 1976) за допомогою методу скінченних елементів. У роботі вперше висловлена думка, що ЗЗВ є макрохарактеристикою матеріалу. У роботі Хонга (Hong S., Kim, K.S., 2003) за допомогою комплексних потенціалів у рамках концепції квазікрихкого руйнування розроблено метод визначення параметрів зони зчеплення на основі пружного поля напружень в околі цієї зони. До 1987 року використання моделі переважно було обмеженим вивченням граничної рівноваги тіл із наявними тріщинами або нормального відриву, або зсуву. Для вивчення руйнування багатокомпонентних матеріалів зі складною геометрією слід пов'язати зсувні та нормальні відриви в моделі зони зчеплення. Ця вимога була реалізована Нідельманом (Needleman A., 1987) при вивченні зародження порожнин із включень у металах або композитах.

У механіці руйнування існує щонайменше два головних напрямки. Перший, започаткований Гриффітсом, розглядає вершину тріщини ідеально гострою, що

призводить до сингулярності поля напружень у той час як швидкість вивільнення пружної енергії залишається обмеженою. Граничну рівновагу тріщини можна визначити прирівнюванням коефіцієнта інтенсивності напруження (КІН – множник при сингулярному доданку у виразі для напружень) або швидкості вивільнення пружної енергії до характеристики матеріалу, яка описує його опір руйнуванню. У рамках другого головного напрямку використовується МЗЗ, в основі якої лежить ЗЗВ, що містить дві основні характеристики тріщиновоїкості матеріалу (міцність зчеплення та граничне значення роботи зчеплення), а також параметри форми. Унаслідок заміни ідеально гострої вершини тріщини зоною зчеплення напруження в тілі стають обмеженими. Критерієм граничного стану при застосуванні моделі є одночасне досягнення розкриттям та роботою зчеплення своїх граничних значень.

Одним із найпоширеніших типів руйнування є повільне зростання тріщин внаслідок повзучості матеріалу. Явище поширення тріщин у в'язкопружних матеріалах обумовило численні теоретичні дослідження протягом останньої половини ХХ сторіччя. Були розглянуті три важливі етапи росту тріщини: ініціювання, повільне стійке поширення й початок швидкого нестабільного зростання. Вважається, що ініціація руйнування з наявної у в'язкопружному тілі тріщини, вимагає деякого часу (часу інкубації), що залежить від геометрії, схеми прикладеного навантаження і спадкових властивостей матеріалу. Рівень навантаження при цьому може бути суттєво нижчим за критичний рівень, що визначає стан граничної рівноваги у випадку відсутності спадковості механічних властивостей матеріалу. Протягом початкової стадії матеріал у вершині тріщини поступово втрачає можливість опиратися поширенню тріщини. Друга стадія руйнування полягає в докритичному зростанні тріщини, що має місце навіть за незмінного рівня інтенсивності зовнішніх зусиль і характеризується незначною зміною швидкості поширення. Стан нестабільності характеризується швидким збільшенням швидкості вершини тріщини. Умова, що визначає початок критичного зростання, має важливе значення, оскільки вона визначає термін виходу елемента конструкції з ладу.

Повільне зростання тріщини у в'язкопружному матеріалі вперше вдалося описати за допомогою МЗЗ. З урахуванням обмеженості напружень у вершині модельної тріщини рівняння енергетичного балансу має вигляд

$$\int_{\lambda}^{\beta} \sigma \dot{\Delta}(x, t) dx = \phi \dot{\lambda}, \quad (1)$$

σ – напруження в зоні зчеплення, $\Delta(x, t)$ – в'язкопружне розкриття в зоні зчеплення. Залежно від моделі тріщини, зчеплення σ може бути як функцією координати, так і функцією розкриття $\Delta(x, t)$. Положення вершини зони зчеплення β в кожний момент часу має визначатись умовою скінченності напружень у точці $x = \beta$. Критерій (1) вперше запропонував Кнаус зі співавторами (Knauss W.G., 1970), зводячи задачу до аналізу локального балансу енергії в зоні передруйнування поблизу вершини тріщини. Можна показати, що критерій (1) збігається з

критерієм критичного розкриття

$$\Delta(\lambda, t) = \Delta_{\max} \quad (2)$$

у випадку рівномірного розподілу зчеплення а також, якщо розкриття має вигляд $\Delta(x, t) = f(x - \lambda)$. Критерій теорії повільного поширення тріщин (2) вперше було запропоновано Савіним та Камінським (1967), а також Костровим, Нікітіним та Флітманом (1970). За умови незалежності розкриття від часу в рухомій системі координат, пов'язаній із вершиною фізичної тріщини, критеріальне співвідношення (1) приймає вигляд

$$\int_0^{\Delta_{\max}} \sigma d\Delta(X, t) = \phi, \quad (3)$$

де величина Δ_{\max} є розкриттям у вершині, що відповідає граничному стану. Критерій руйнування (3) було запропоновано Шепері, його часто називають критерієм критичної роботи зчеплення. Внук (Внук М.Р., 1972) запропонував критерій критичного відриву як альтернативу критерію критичного розкриття (2) для випадку, коли критичне розкриття є залежним від часу. Введене критеріальне співвідношення постулює, що кількість деформації, створеної під час проходження зоною передруйнування фіксованої точки, є величиною сталою.

Загальним для багатьох із вищезгаданих теорій є врахування при моделюванні наявності біля вершини тріщини зони послаблених зв'язків, яка описується стрибком переміщень і відповідним розподілом зчеплення. Довжина зони передруйнування визначається умовою обмеженості напружень у вершині зони. Розподіл зчеплення покладається сталим під час повільного підростання тріщини. Дослідження здебільшого виконано в рамках гіпотези рівномірності розподілу зчеплення й малості довжини зчеплення.

З огляду на сучасний стан проблеми моделювання зони послаблених зв'язків біля вершини тріщини виникає необхідність побудови числово-аналітичних методів дослідження стану граничної рівноваги тіла з тріщиною або їх системою. Важливою метою є поширення сучасних принципів моделювання на випадок змішаного режиму руйнування. Також необхідно включити сучасні принципи моделювання в рамках МЗЗ в теорії повільного поширення тріщин у в'язкопружних ортотропних матеріалах. Найпростіший варіант моделювання з рівномірним ЗЗВ треба поширити на випадок нерівномірного закону, враховуючи водночас умову скінченності напружень та наявність розвинених зон передруйнування. На розробку методів визначення параметрів стану граничної рівноваги пружних тіл із тріщинами в рамках МЗЗ та кінетики повільного поширення тріщин у в'язкопружному ортотропному матеріалі націлені дослідження даної дисертаційної роботи.

У **другому розділі** наведено основні співвідношення механіки повільного поширення тріщини в ортотропному в'язкопружному середовищі.

Напружено-деформований стан тіла з тріщиною визначено комплексними по-

тенціалами у формі Колосова – Мусхелішвілі для ізотропного тіла та у формі Лехніцького для ортотропного тіла. Також використовується інтегральна форма для потенціалів. Плоска задача розв’язується шляхом зведення до задачі лінійного спряження для розривних самоврівноважених правих частин. В’язкопружне розкриття отримується за допомогою принципу пружно-в’язкопружної аналогії або принципу Вольтерра з відповідного виразу для пружного розкриття, який слід подати у вигляді добутку пружної сталої та функції геометричних (положення вершин λ , рис. 3) і силових параметрів

$$\tilde{\Delta}(x, \lambda) = L \cdot F(x, \lambda),$$

L – функція модулів піддатливості ортотропної пластини a_{ij} , F не містить пружних сталей.

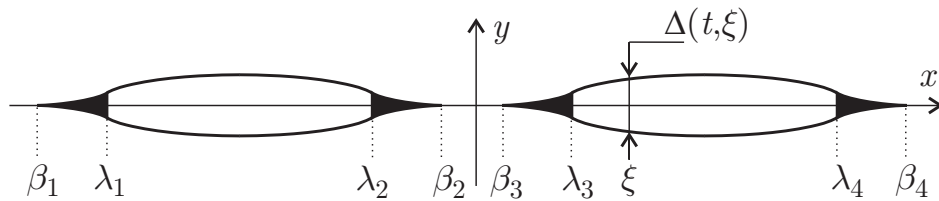


Рис. 3 – Система двох ($n = 2$) колінеарних тріщин, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ – положення вершин фізичної тріщини

У випадку однієї тріщини напівдовжини λ , рівномірного ЗЗВ й розтягувального напруження на нескінченності вираз для пружного розкриття має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x, \lambda) &= \frac{L\sigma}{\pi} [Q(x, \lambda) - Q(x, -\lambda)], \quad L = \frac{\operatorname{Re}\{\Lambda_1 - \Lambda_3\}}{\operatorname{Im}\{\alpha\}}, \quad \Lambda_k = \frac{p_k + \alpha q_k}{1 + \alpha s_k}, \\ Q(x, \lambda) &= (x - \lambda) \ln \left| \frac{\check{X}(x) - \check{X}(\lambda)}{\check{X}(x) + \check{X}(\lambda)} \right|, \quad \check{X}(x) = \sqrt{\frac{x + \beta}{\beta - x}}, \quad \beta = \lambda \operatorname{csc} \frac{\pi \sigma_\infty}{2\sigma}, \end{aligned} \quad (4)$$

p, q, α та s – параметри ортотропії. Для частинних випадків напряму осі ортотропії вздовж тріщини й ізотропії пружна стала L має відповідно вигляди

$$L = 2\sqrt{a_{22}(2(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}}) + a_{66})}, \quad L = 4/E. \quad (5)$$

Залежне від часу розкриття шукається у формі

$$\Delta(t, x) = \int_{-\infty}^t l(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [H(\tau) \tilde{\Delta}(x, \lambda(\tau))] d\tau,$$

$\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ – миттєве розкриття в точці x на лінії тріщин із вершинами в λ , H – функція Гевісайда, $l(t) = L(t)/L_0$ – безрозмірна характеристика повзучості, L_0 – миттєве значення характеристики повзучості.

У роботі розвинено числово-аналітичні методи дослідження повільного зростання тріщини вздовж наперед відомого шляху. В основу покладено розв’язок

задачі теорії пружності для розрізу з контурними умовами, що містять невідомий відрив $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$,

$$\sigma^\pm(x) = -\tilde{\sigma}(x) + T[\tilde{\Delta}(x, \lambda)], \quad \tilde{\Delta}'_x(x = \beta, \lambda) = 0.$$

Переміщення берегів тріщини знаходиться у формі

$$u^\pm(x) = u_0(x) \pm u_1(x), \quad v^\pm(x) = v_0(x) \pm v_1(x), \quad (6)$$

де точки (u_0, v_0) визначають положення середньої лінії деформованого контуру тріщини.

В'язкопружне розкриття отримується на основі принципу пружно-в'язкопружної аналогії для змінних із часом граничних умов

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] + \int_0^t l(t - \tau)\tilde{\Delta}'_\tau[x, \lambda(\tau)]d\tau,$$

частини границі, де задані переміщення, при цьому не можуть переходити на ділянки, де було задано напруження. Застосування критерію критичного розкриття (2), який має виконуватися в кожний момент часу для тріщини, що зростає (рис. 4), дозволило визначити тривалість інкубаційного періоду

$$\Delta[t_0, \lambda(0)] = \Delta_{\max}$$

та положення вершини тріщини λ як функції часу

$$l(t)\tilde{\Delta}[\lambda(t), \lambda(0)] + \int_0^t l(t - \tau)\tilde{\Delta}'_\tau[\lambda(t), \lambda(\tau)]d\tau = \Delta_{\max}.$$

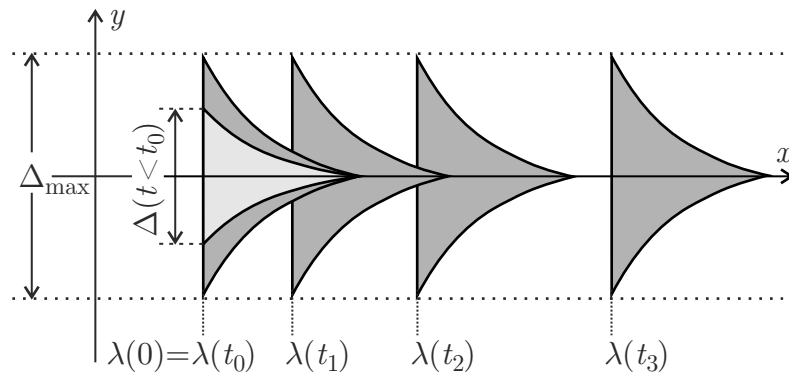


Рис. 4 – Положення зон зчеплення в дискретні моменти часу

Відмінності в дослідженнях граничного стану в пружному та в'язкопружному тілах із тріщиною наступні. У першому випадку граничний стан визначається комбінацією параметрів зовнішнього навантаження й довжини тріщини, за яких розкриття у вершині є критичним. Руйнування в'язкопружного матеріалу відбувається за докритичних рівнів навантаження відповідної пружної задачі. Протя-

гом інкубаційного періоду тріщина не зростає, розкриття у вершині з часом стає критичним. У випадку обмеженої повзучості можна визначити граничний рівень навантаження, за якого розкриття у вершині не досягне критичного значення за скільки завгодно тривалий проміжок часу. При дослідженні повільного поширення тріщини для заданого приросту часу шукається таке положення вершини, що забезпечує досягнення в ній критичного значення в'язкопружним розкриттям.

Новизна роботи полягає у врахуванні зв'язаності зчеплення та відриву, а також в узагальненні методів дослідження повільного зростання на випадок несиметричного поширення однієї та колінеарних тріщин. Повільне підростання описано системою інтегральних рівнянь і нерівностей

$$\max_k \{ \Delta[t, \lambda_k(t)] \} = \Delta_{\max}, \quad \Delta(t, x) = \tilde{\Delta}[x, \boldsymbol{\lambda}(t)] + \int_0^t \dot{l}(t - \tau) \tilde{\Delta}_\tau[x, \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau,$$

яка числовими методами розв'язується в дискретні моменти часу $t_m = t_0 + m \cdot \Delta t$, $m = 1, 2, \dots$, t_0 – тривалість інкубаційного періоду, яка визначається рівнянням

$$\max_k \{ \Delta[t_0, \lambda_k(0)] \} = \Delta_{\max}.$$

Положення вершин тріщини в дискретні моменти часу $\boldsymbol{\lambda}(t_m)$ визначаються послідовно із системи

$$\begin{cases} \Delta[t_m, \lambda_k(t_m)] = \Delta_{\max}, & k \in K \\ \Delta[t_m, \lambda_k(t_m)] < \Delta_{\max}, & k \notin K \end{cases}, \quad (7)$$

індекси K відповідають вершинам, що рухаються. Положення вершин на інтервалах дискретизації шукаються у вигляді лінійної функції часу. Якщо при знаходженні $\boldsymbol{\lambda}(t_m)$ одна з нерівностей не виконується, то номер цієї нерівності включається до K і система (7) розв'язується заново.

Теорія повільного підростання тріщини експериментально перевірена у відділі механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України.

Розв'язання задач про повільне поширення тріщини в роботі умовно поділено на *три частини*: 1) визначення пружного розв'язку задачі; 2) знаходження ядер інтегральних рівнянь повільного зростання; 3) розв'язання системи інтегральних рівнянь і нерівностей, що описують поширення тріщин.

Ядра визначались для функцій релаксації ортотропного матеріалу композита або матеріалів його компонент, заданих у вигляді сум спадних експонент дробового порядку

$$C(t) = E_0 - \sum_{k=1}^n E_k [1 - E_{\delta,1}(-(\rho_k^{-1}t)^\delta)], \quad C(t) = E_\infty + \sum_{k=1}^n E_k E_{\delta,1}[-(\rho_k^{-1}t)^\delta], \quad (8)$$

ці експоненти є функціями Міттаг-Леффлера при $\gamma = 1$:

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)}.$$

Згідно з принципом пружно-в'язкопружної аналогії, перетворені модулі

$$\tilde{C}_{\alpha_i}(p) = E_{i0} \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{\xi_{ik}}{p^{\alpha_i} + \eta_{ik}} \right]$$

підставлено в пружний розв'язок задачі, отримано функцію параметра перетворення

$$\tilde{L}(q^{1/\alpha}) = F[\tilde{C}_{\alpha_1/\alpha}(q), \tilde{C}_{\alpha_2/\alpha}(q), \dots], \quad (\alpha_i = 1 - \delta_i, \quad q = p^\alpha),$$

яку замінено раціональною апроксимацією

$$\tilde{L}_n(q) \simeq \tilde{F}_\infty \prod_{k=1}^n \frac{q - z_k}{q - p_k} = \tilde{F}_\infty \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{q + \eta_k} \right]; \quad (9)$$

розклад в (9) на елементарні дроби дав параметри шуканої характеристики в часовій області у формі (8). Ця запропонована в роботі методика розв'язання задач лінійної в'язкопружності дозволила ефективно визначати ядра інтегральних рівнянь повільного поширення тріщин.

Також для знаходження ядер було застосовано операторні ланцюгові дроби. Функції релаксації ортотропного матеріалу композита або матеріалів його компонент у цьому разі треба отримати в операторному вигляді

$$C_\alpha^* \cdot 1 = E_{i0} \left[1 - \sum_{k=1}^n \xi_{ik} R_\alpha^*(\eta_{ik}) \right], \quad R_\alpha^*(\eta) = \frac{I_\alpha^*}{1 + \eta I_\alpha^*}. \quad (10)$$

Згідно з принципом Вольтерра, модулі в пружному розв'язку замінено операторними аналогами, отриману операторну функцію $L(I_\alpha^*)$ замінено апроксимуючим операторним ланцюговим дробом

$$L_n^* \simeq V_0 + \frac{I_\alpha^* - q_0}{V_1 + \frac{I_\alpha^* - q_1}{V_2 + \dots + \frac{I_\alpha^* - q_{n-1}}{V_n}}} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{L_n-1} \xi_i R_\alpha^*(\eta_i), \quad L_n = \left[\frac{n}{2} \right] + 1,$$

згорання якого дає шукану характеристику у формі (10).

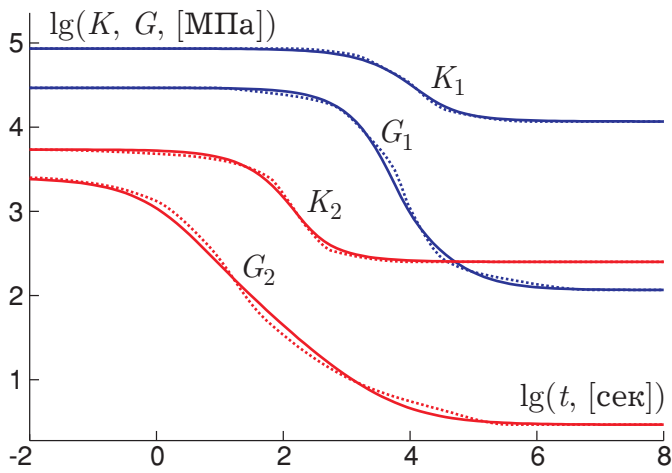


Рис. 5 – Функції релаксації

У прикладі використано ідеалізовану схему взаємного розташування кривих релаксації матеріалів компонент композита (Brinson L.C., Knauss, W.G., 1991, рис. 5). Кожна характеристика представлена однією експонентою дробового порядку

$$\begin{aligned} K(t) &= K_{\infty} + \\ &+ (K_0 - K_{\infty})E_{\delta_K,1}(-b_K t^{\delta_K}), \\ G(t) &= G_{\infty} + \\ &+ (G_0 - G_{\infty})E_{\delta_G,1}(-b_G t^{\delta_G}). \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 6 дозволяє простежити як варіюється відносна характеристика $L(t)/L(0)$ (див. перший вираз в (5)) в логарифмічній шкалі залежно від напрямку армування композита відносно лінії тріщини. Цей нахил при армуванні вздовж лінії визначається параметрами дробовості матеріалу наповнювача, при армуванні перпендикулярно лінії – параметрами дробовості матеріалу армування.

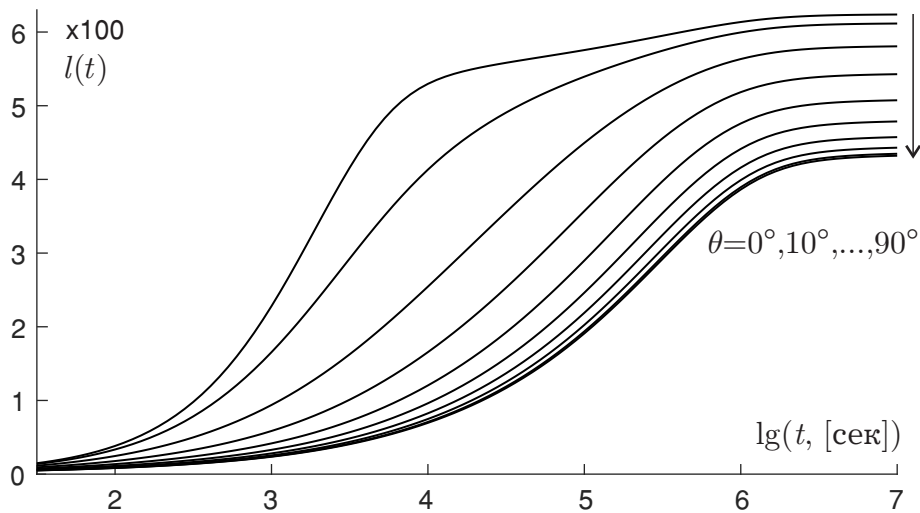


Рис. 6 – Ядро інтегрального рівняння для різних орієнтацій осі ортотропії відносно лінії тріщини

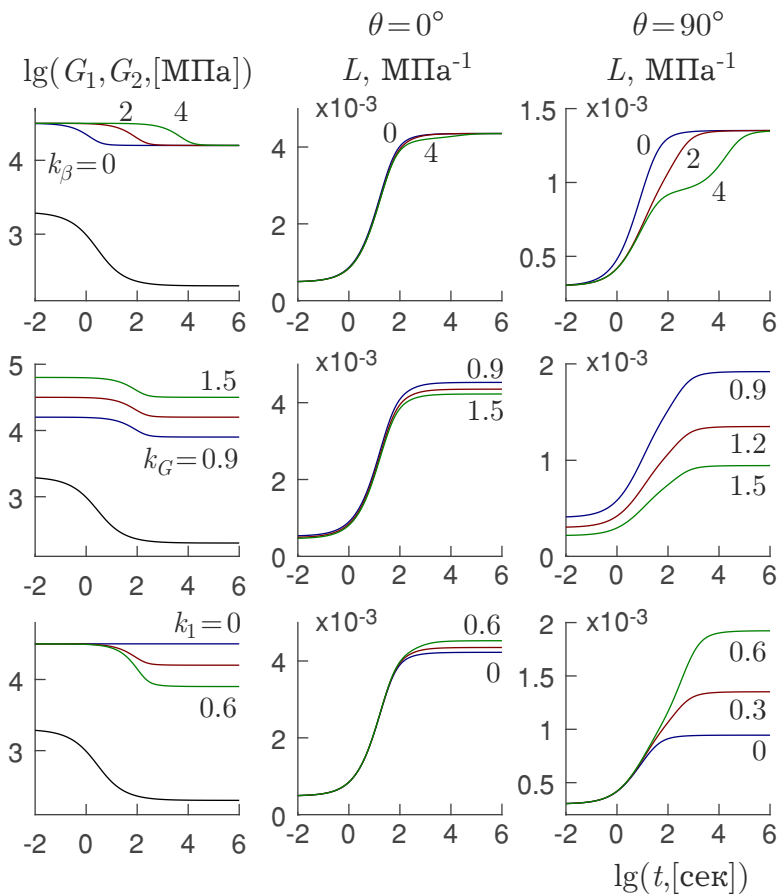


Рис. 7 – Модулі релаксації матеріалів компонент композита та характеристики повзучості $L(t)$ для двох орієнтацій осі ортотропії відносно лінії тріщини

У **третьому розділі** дослідження проведено для ізотропного матеріалу й рівномірного ЗЗВ. Отримано переміщення берегів тріщини змішаного режиму руйнування в постановці, що зводиться до розв'язання першої основної задачі теорії пружності. Неоднорідність поля напружень на лінії тріщини моделюється прикладанням зосереджених сил.

При розв'язанні задач теорії тріщин у рамках МЗЗ в роботі задовольняється вимога скінченності напружень у тілі, яка еквівалентна умові плавності змикання берегів. Щоб отримати вираз для переміщень берегів тріщини змішаного режиму руйнування треба знайти чотири параметри складних зон зчеплення з нелінійної системи рівнянь. Для моделі зі спільними положеннями вершин зон нормальних та зсувних зчеплень (модель 2 на рис. 23) отримано аналітичний вираз для переміщень берегів тріщини для заданої в її околі зосередженої сили й розподілених навантажень на нескінченності. Отримані розв'язки пружної задачі для симетричної відносно лінії тріщини схеми навантаження використано в численних прикладах дослідження повільного зростання. Числові приклади побудовано за допомогою запропонованого алгоритму розв'язання інтегральних рівнянь повільного зростання тріщини. У випадку, коли довжина зчеплення менша за розмір зони К-домінації, використана *концепція тонкої структури*, згідно з якою пружний відрив замінюється своїм асимптотичним представленням.

Проілюстровано залежність розв'язку від взаємного розташування функцій релаксації матеріалів компонент композита. Взаємне розташування описано коефіцієнтами

$$k_{\beta} = -\frac{1}{\delta} \lg \{b_G^{(1)}/b_G^{(2)}\},$$

$$k_G = \lg \{G_0^{(1)}/G_0^{(2)}\}, \quad (12)$$

$$k_1 = \lg \{G_0^{(1)}/G_{\infty}^{(1)}\},$$

$$G^{(i)}(t) = G_{\infty}^{(i)} + [G_0^{(i)} - G_{\infty}^{(i)}] \times E_{\delta,1}(-b^{(i)}t^{\delta}),$$

$$G_0^{(2)} = 2 \cdot 10^3 \text{ МПа},$$

$$\nu_0^{(2)} = 0.35, \lg \frac{G_0^{(2)}}{G_{\infty}^{(2)}} = 1,$$

$$b_G^{(2)} = 10^{-1} \text{ сек}^{-\delta}, \delta = 0.8.$$

Вплив коефіцієнтів (12) на ядро відображає рис. 7.

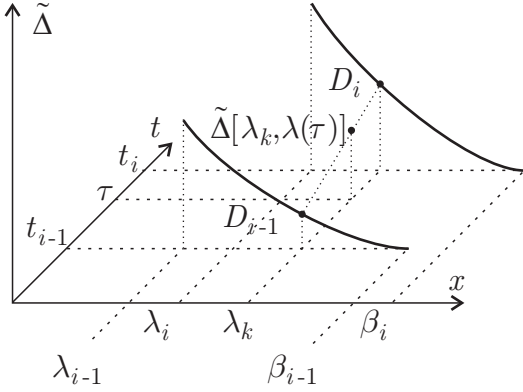


Рис. 8 – Координатно-часова дискретизація для $\lambda = (-\lambda, \lambda)$ (концепція тонкої структури)

$$\Delta t \cdot \Lambda_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) d\tau, \quad D_i = \tilde{\Delta}(\lambda_k, \lambda_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Тривалість інкубаційного періоду, t_0 визначається рівнянням

$$l(t_0)D_0 = \Delta_{\max}, \quad D_0 = \tilde{\Delta}(\lambda_0, \lambda_0).$$

Для експоненційного ядра, $l(t) = l_\infty - (l_\infty - 1) \exp(-\eta^{-1}t)$

$$t_0 = \eta \ln \frac{l_\infty - 1}{l_\infty - \Delta_{\max} D_0^{-1}}.$$

Умова існування періоду докритичного поширення в цьому разі: $l_\infty^{-1} < D_0 \Delta_{\max}^{-1} < 1$. Нерівність $D_0 \Delta_{\max}^{-1} \leq l_\infty^{-1}$ забезпечує неможливість досягнення розкриття у вершині тріщини граничного значення протягом як завгодно великого проміжку часу, нерівність $D_0 \Delta_{\max}^{-1} \geq 1$ відповідає початку динамічного зростання тріщини в момент прикладання навантаження.

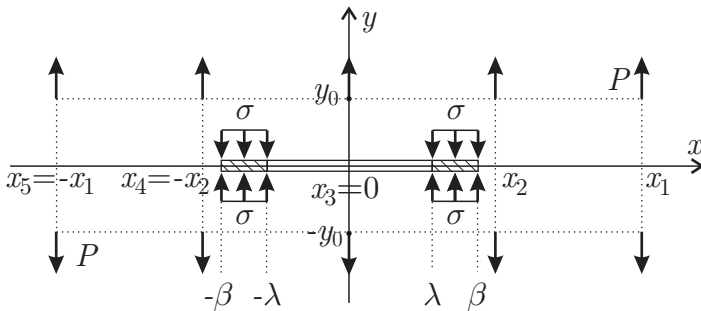


Рис. 9 – Схема навантаження та параметри моделі

В'язкопружне розкриття у вершинах зростаючої тріщини в дискретні моменти часу t_k шукається у формі

$$\Delta(t_k, \lambda_k) = l(t_k) \tilde{\Delta}[\lambda_k, \lambda(0)] + \int_0^{t_k} l(t_k - \tau) \tilde{\Delta}'_\tau[\lambda_k, \lambda(\tau)] d\tau, \quad \lambda_k = \lambda(t_k).$$

На основі координатно-часової дискретизації рис. 8 побудовано рівняння для послідовного визначення положення вершини тріщини в задані дискретні моменти часу:

$$l(t_k)D_0 + \sum_{i=1}^k \Lambda_i (D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max},$$

У прикладі розглянуто повільне зростання тріщини під дією системи розтягуючих зосереджених сил у її околі (рис. 9). Рис. 10 показує як змінюється з часом положення вершини тріщини та довжина зчеплення. Поширення сповільнюється при віддаленні вершини від лінії прикладання розтягувальних сил.

Також у розділі запропоновано числовий алгоритм розв'язання задач механіки тріщин у рамках МЗЗ. Алгоритм дозволяє не включати в розв'язуваль-

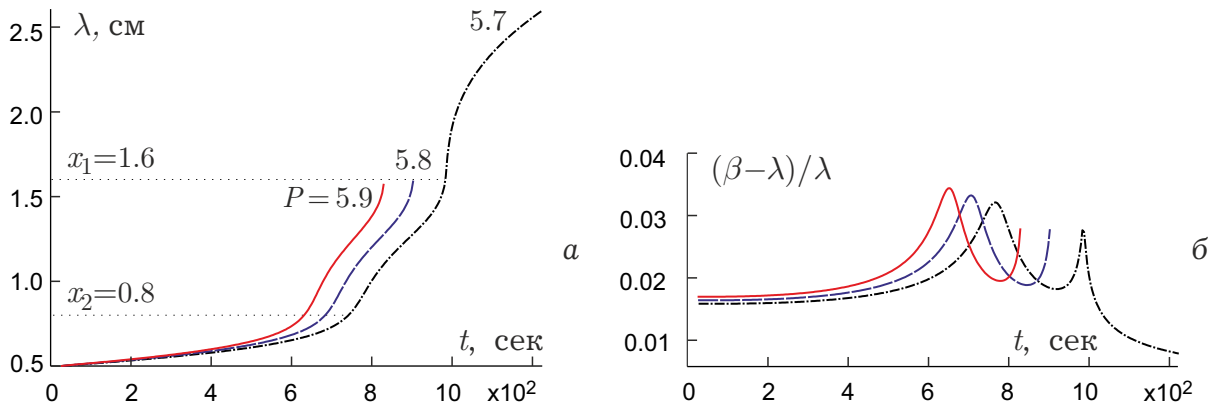


Рис. 10 – Залежна від часу напівдовжина (а) та довжина зчеплення (б)

ну систему нелінійні рівняння відносно довжин зчеплення. В основу покладено ітеративну процедуру, що використовується в механіці тріщин при дослідженні контактної взаємодії берегів тріщини.

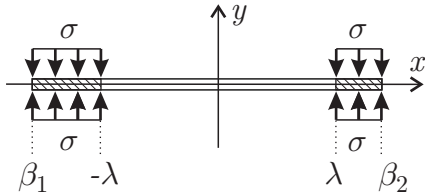


Рис. 11 – Параметри моделі

Розглянуто задачу з контурними умовами

$$\sigma^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + T(x), \quad x \in (\beta_1, \beta_2),$$

$$\Delta'(\beta_{1,2}) = 0,$$

$\tilde{\sigma}$ – напруження на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини; умова містить зчеплення

$$T(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in (\beta_1, -\lambda) \cup (\lambda, \beta_2) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}.$$

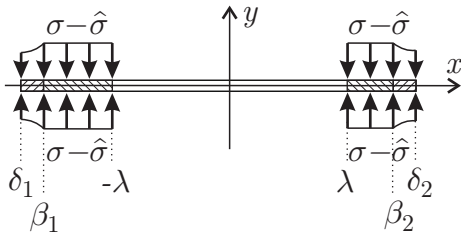


Рис. 12 – Модифікована постановка задачі

У модифікованих контурних умовах (рис. 12)

$$\sigma^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x), \quad x \in (\delta_1, \delta_2)$$

зчеплення подано різницею відповідної модифікованої величини

$$\hat{T}(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in (\delta_1, -\lambda) \cup (\lambda, \delta_2) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}$$

та додаткового напруження $\hat{\sigma}$, яке знаходиться з умови невід'ємності відриву.

Розв'язок задачі дається системою інтегральних рівнянь і нерівностей

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{g(t) dt}{t-x} = -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x),$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} g(t) dt = 0, \quad \int_{\delta_1}^x g(t) dt \geq 0, \quad x \in (\delta_1, \delta_2).$$

За допомогою квадратурно-колокаційного методу (щільність розкриття шукається в кусково-лінійній формі – рис. 13) отримано визначальну систему

$$Jg = -\tilde{\sigma} + \hat{T} - \hat{\sigma}, \quad Ng = 0, \quad Wg \geq 0. \quad (13)$$

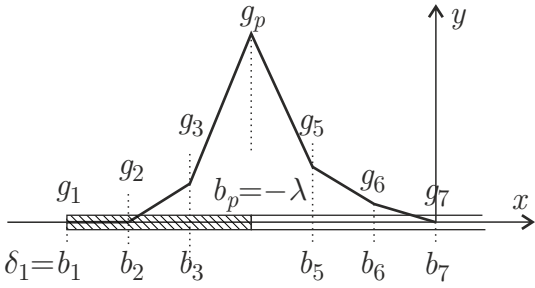


Рис. 13 – Дискретизація $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{n+1})^T$, $g_k = g(b_k)$, b_k – квадратурні точки

В (13) і (14) матриці J , W і вектор \mathbf{N} залежать тільки від n ; \mathbf{W}_m і \mathbf{J}_m – вектори, що складаються з елементів m -х рядків відповідних матриць; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ – вектори, елементи яких є значеннями відповідних функцій у точках колокації.

Алгоритм застосовано для отримання пружного розв'язку задачі при дослідженні повільного зростання тріщини. Розглянуто вісесиметричну постановку рис. 14.

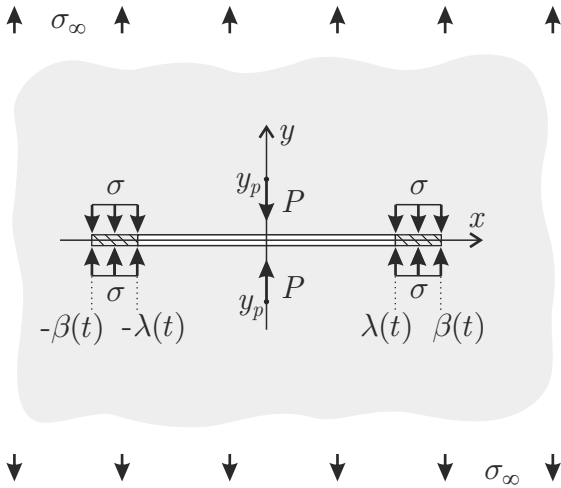


Рис. 14 – Схема навантаження

На рис. 15 проілюстровано ядро інтегрального рівняння повільного поширення тріщини, контури тріщини для декількох моментів часу та відповідна кінетична крива. Останньому контуру відповідає відсутність контактної взаємодії берегів.

Запропонована модифікована постановка використана для знаходження пружних переміщень берегів системи паралельних тріщин у рамках МЗЗ.

Для знаходження дискретної щільності розкриття, \mathbf{g} використано ітеративну процедуру:

$$\begin{aligned}
 & M = \{m : 1 \leq m \leq n + 1\}, \quad P = \emptyset, \\
 & 1. \begin{cases} \mathbf{W}_m \mathbf{g} = 0, & m \in M \\ \mathbf{J}_m \mathbf{g} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}}, & m \in P \end{cases} \\
 & 2. \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{J} \mathbf{g} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}} \\
 & 3. \begin{cases} M = \{m : \hat{\sigma}_m \geq 0\} \\ P = \{m : \hat{\sigma}_m < 0\} \end{cases} \\
 & \text{Продовження 1-3 доки} \\
 & \hat{\sigma}_m \geq 0, \quad 0 \leq m \leq n.
 \end{aligned} \tag{14}$$

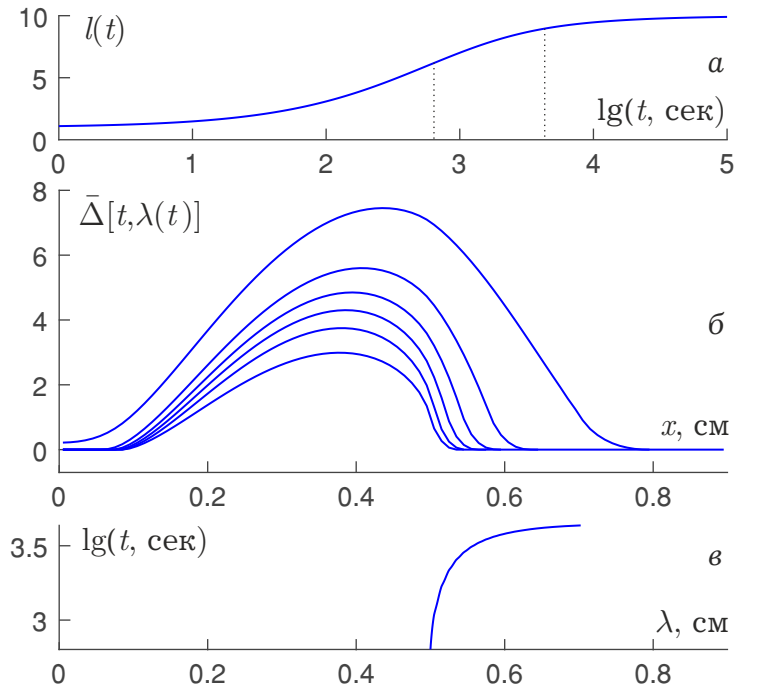


Рис. 15 – Характеристика повзучості (а), розкриття зростаючої тріщини (б), кінетична крива (в)

У **четвертому розділі** дослідження проведено для ортотропного матеріалу та рівномірного ЗЗВ. Для навантаження, що складається з рівномірно розподілених на нескінченності нормальних і зсувних зусиль, а також із системи зосереджених сил в околі тріщини, знайдено вираз для переміщень берегів тріщини Гріффітса в ортотропній пластині у формі (6). Умова контакту

$$v_1(1 + u'_0) - u_1v'_0 = 0$$

використана для знаходження розподілу контактних напружень у кусково-лінійній формі.

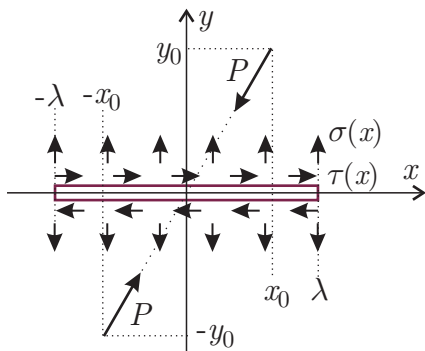


Рис. 16 – Схема навантаження (σ і τ – контактні напруження)

Постановці рис. 16 відповідають числові результати рис. 17. Перший стовпець блоків – напруження на відріжку розташування тріщини в тілі без тріщини (з протилежним знаком) та нормальне контактне напруження, другий – різниця між цими двома напруженнями, третій ілюструє вплив коефіцієнта тертя на величину контактного напруження (перший рядок – вплив у межах 0.1 %, другий – вплив вимірюється одним відсотком), у четвертому стовпці проілюстровано складові компонент переміщень берегів.

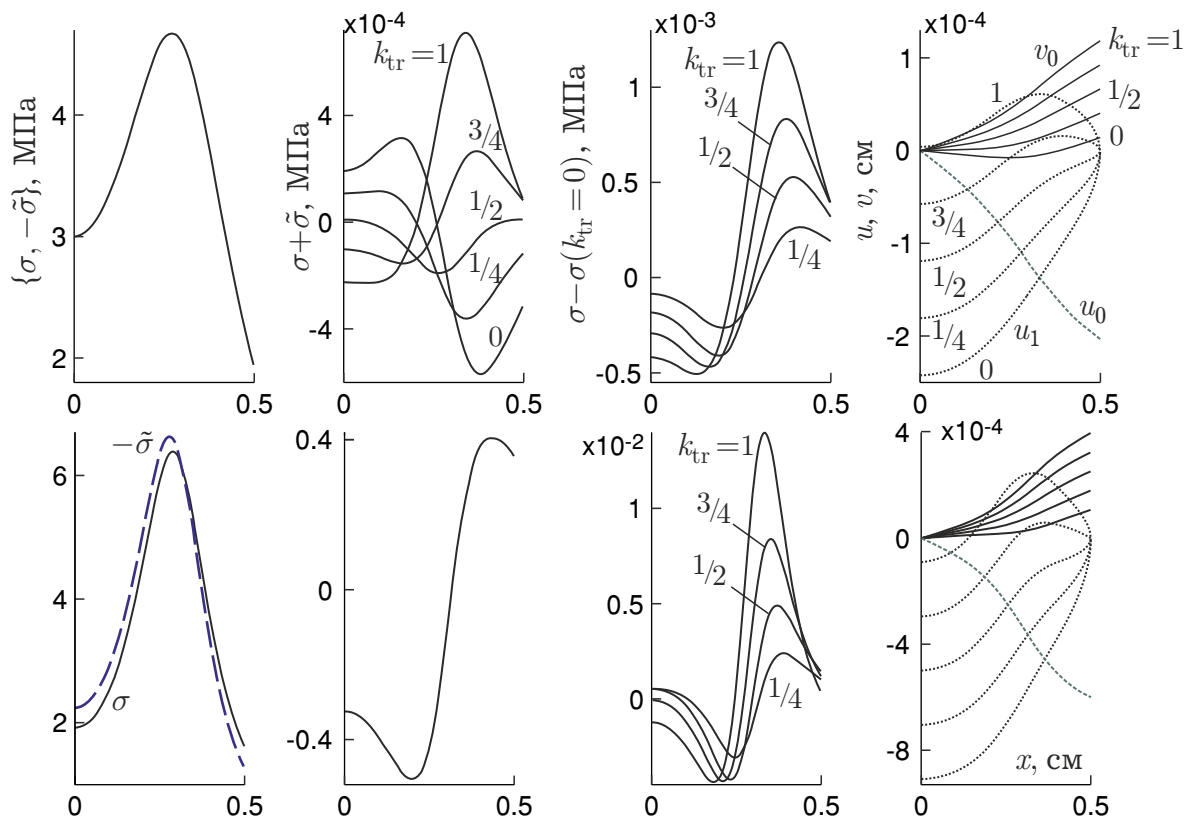


Рис. 17 – Контактні напруження й переміщення берегів тріщини: перший рядок блоків – армування вздовж тріщини, другий – вздовж нормалі до тріщини

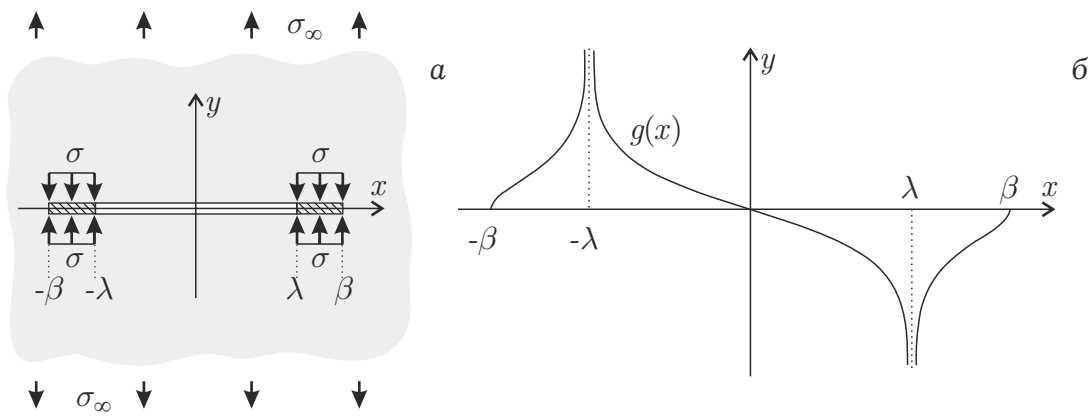


Рис. 18 – Схема навантаження та параметри моделі (а), відповідна щільність розкриття (б)

Для числових прикладів пружні характеристики ортотропної пластини отримано за допомогою результатів механіки композитних матеріалів на основі механічних характеристик матеріалів компонент композита.

Запропоновано алгоритми розв'язання граничних задач теорії тріщин у рамках МЗЗ. Алгоритми враховують умову плавності змикання берегів і сингулярність похідної від переміщень у точках, що відповідають вершинам фізичної тріщини. Для порівняння аналітичного та числових розв'язків розглянуто постановку рис. 18 а. Аналітичний розв'язок цієї задачі наведено в (4).

В основу *першого алгоритму* покладено контурні умови

$$\begin{aligned} \sigma^\pm(x) &= -\sigma_\infty + T(x), \quad x \in (-\beta, \beta), \quad \Delta'(\pm\beta) = 0, \\ T(x) &= \begin{cases} \sigma, & x \in (-\beta, -\lambda) \cup (\lambda, \beta) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}, \end{aligned} \quad (15)$$

в основу *другого* – модифіковані контурні умови, де зчеплення представлено різницею подовженого на від'ємний відрив зчеплення й додаткового напруження $\hat{\sigma}$, яке забезпечує додатність розкриття:

$$\begin{aligned} \sigma^\pm(x) &= -\sigma_\infty + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x), \quad x \in (-\delta, \delta), \quad \Delta(x) \geq 0, \\ \hat{T}(x) &= \begin{cases} \sigma, & x \in (-\delta, -\lambda) \cup (\lambda, \delta) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}. \end{aligned} \quad (16)$$

Розв'язок задач (15) і (16) дається сингулярним інтегральним рівнянням

$$\frac{1}{\pi} \int_{b_0}^{b_n} \frac{g(t) dt}{t - x} = \sigma^\pm(x),$$

яке розв'язано квадратурно-колокаційним методом із використанням різних функцій форми

$$g(x) = g_k(x), \quad x \in (b_{k-1}, b_k) \quad (b_k = b_{k-1} + \Delta b_k, \quad b_0 = -\beta, \quad b_n = \beta),$$

що враховують зазначену логарифмічну особливість.

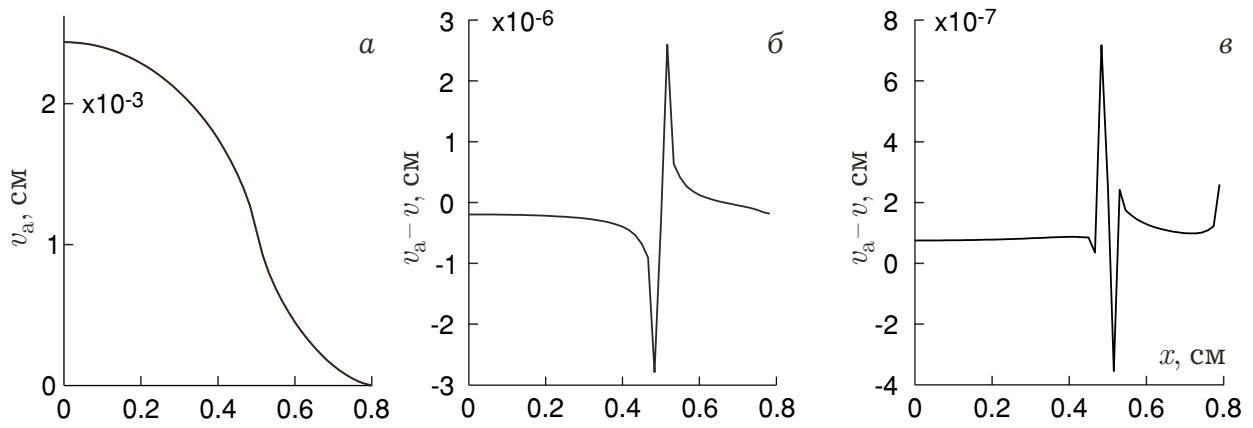


Рис. 19 – Точний розв’язок (а), похибка для розв’язку виключно з лінійними елементами (б), та сингулярними елементами (в). Використано 30 елементів вздовж половини тріщини, 20 – вздовж зони зчеплення

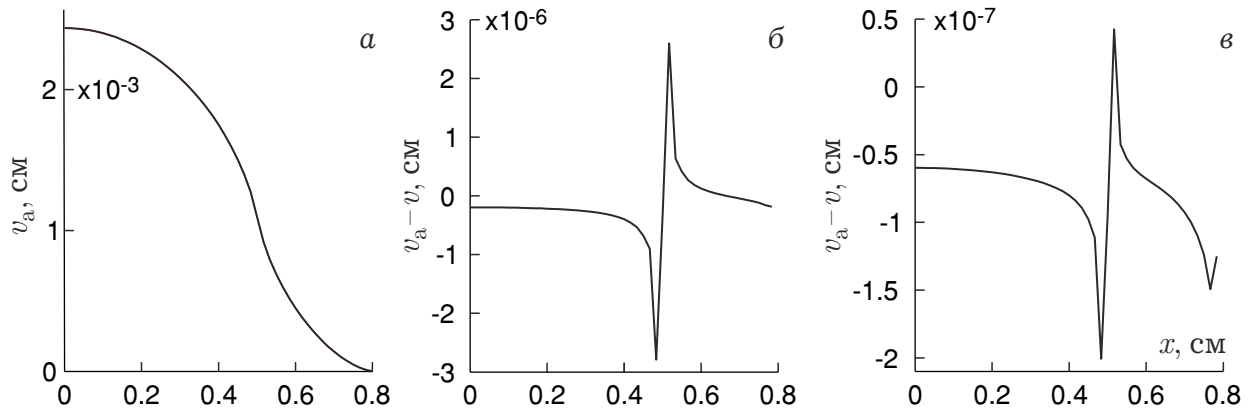


Рис. 20 – Точний розв’язок (а), похибка для розв’язку виключно з лінійними елементами, $w(x) = 1$ (б) та з ваговою функцією (в). Використано 30 елементів вздовж половини тріщини, 20 – вздовж модифікованої зони зчеплення

При використанні першого алгоритму розв’язується рівняння відносно положення вершини $g(\pm\beta) = 0$, причому квадратурна сітка змінюється на кожній ітерації числового методу. Використано функцію форми

$$g_k(x) = \begin{cases} g_{k-1} - g_k \ln[1 - A_k(x)], & \text{перед } \pm \lambda \\ -g_{k-1} \ln A_k(x) + g_k, & \text{після } \pm \lambda \\ g_{k-1}[1 - A_k(x)] + g_k A_k(x), & \text{інакше} \end{cases}, \quad A_k(x) = \frac{x - b_{k-1}}{\Delta b_k}.$$

У рамках другого алгоритму використовується ітеративний метод (14) та функція форми

$$g_k(x) = \{g_{k-1}[1 - A_k(x)] + g_k A_k(x)\} w(x), \quad w(x) = -\ln |x^2 - \lambda^2|.$$

Числові результати використання двох алгоритмів (рис. 19 і 20) показують, що точність визначення розкриття запропонованим методом не відрізняється від точності класичного підходу. Перевагою першого алгоритму є можливість точного визначення довжин зчеплення, другого – обчислювальна ефективність.

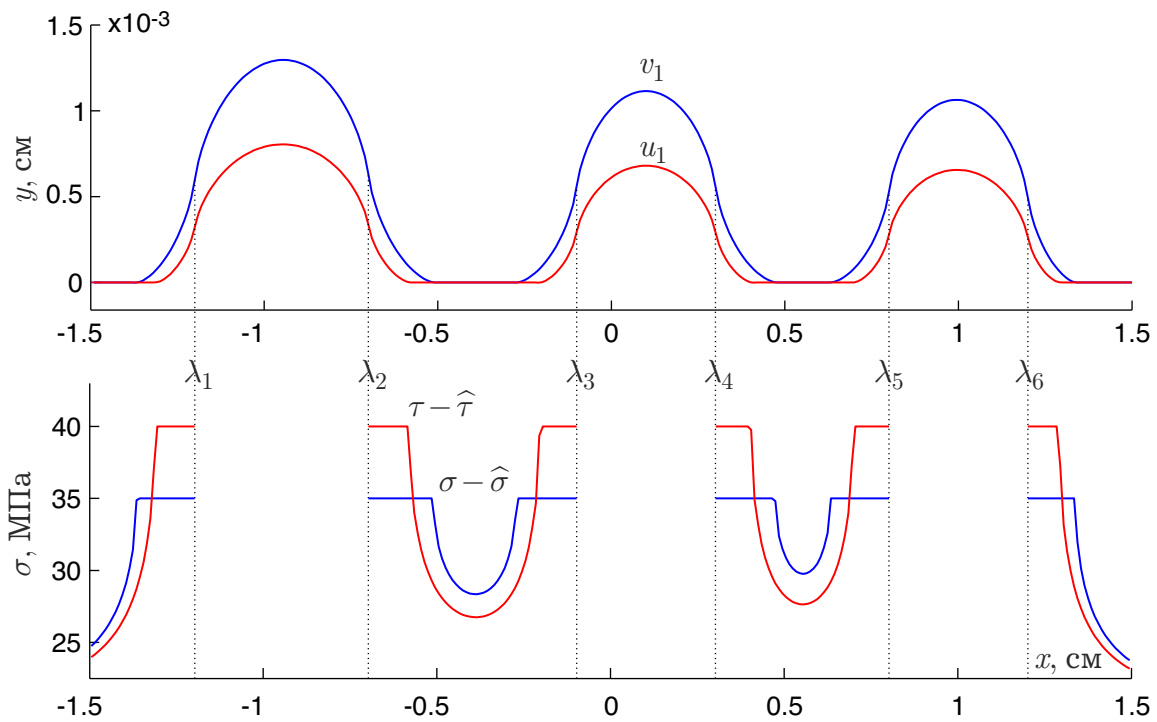


Рис. 21 – Нормальні та зсувні переміщення верхніх берегів системи колінеарних тріщин і напруження поза розрізами, що відповідають фізичним тріщинам

Другий алгоритм можна ефективно застосовувати для визначення розкриття системи колінеарних тріщин. На рис. 21 представлено розв'язок задачі для трьох колінеарних тріщин; розв'язок отриманий при $\sigma_\infty = \tau_\infty = 20$ МПа, $\sigma = 35$ МПа, $\tau = 40$ МПа, $L = 4.167$ МПа⁻¹; параметри сітки $-b_0 = b_n = 1.5$ см, $n = 300$. При розв'язанні задач такого класу тип граничних умов для заданої конфігурації до розв'язання невідомий – деякі внутрішні зони зчеплення можуть бути об'єднаними. При використанні запропонованого підходу не треба обирати один із типів для побудови розв'язку – коректний тип отримується автоматично.

Досліджено кінетику росту двох колінеарних тріщин. Числові результати рис. 22 отримано для розтягувального навантаження на нескінченності та двох початкових відстаней між тріщинами з довжинами 2 см і 2.5 см (рис. 3). Тривалість інкубаційного періоду визначається досягненням розкриттям граничного значення у внутрішній вершині більшої тріщини. Дослідження зростання починається розв'язанням одного інтегрального рівняння, що описує рух третьої вершини; у кожному вузлі часової дискретизації перевіряється умова досягнення граничного стану в інших вершинах. Критичний стан далі буде досягнуто в зовнішній вершині більшої тріщини. Дослідження зростання продовжується розв'язанням системи двох інтегральних рівняння, що описують рух третьої та четвертої вершин тощо, до завершення повільного поширення. Можна записати номери вершин у послідовності досягнення в них критичного стану: 3, 4, 2, 1. Розв'язку другого рядка блоків відповідає менша початкова відстань між тріщинами. Отримано іншу послідовність номерів вершин у порядку досягнення в них граничного стану: 3, 2, 4, 1.

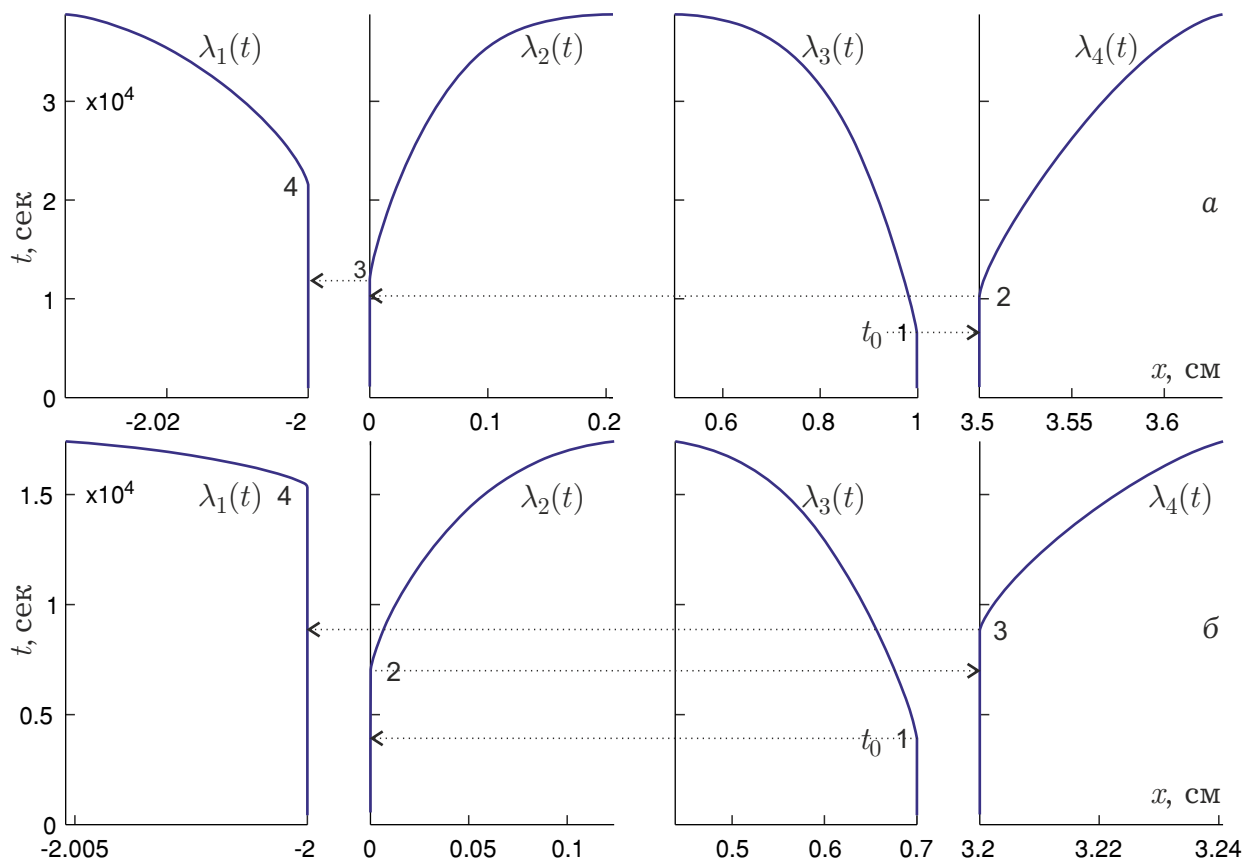


Рис. 22 – Зростання колінеарних тріщин для двох початкових відстаней між ними ($a = 1$ см і $b = 0.7$ см)

У п'ятому розділі дослідження проведено для ізотропного матеріалу та нерівномірного ЗЗВ. Всі результати можна перенести на випадок ортотропного матеріалу заміною пружних сталей.

Одне з головних завдань розділу – отримати алгоритми дослідження докритичного та граничного станів тіла з тріщиною в рамках МЗЗ з потенціальним ЗЗВ

$$\sigma(\Delta) = \frac{\partial \Psi(\Delta)}{\partial \Delta_I}, \quad \tau(\Delta) = \frac{\partial \Psi(\Delta)}{\partial \Delta_{II}}, \quad \Delta = (\Delta_I, \Delta_{II}),$$

водночас задовольнивши вимогу скінченності напружень у тілі. Параметри моделі складної зони зчеплення відповідають схемі 4 на рис. 23. Довжина зсувного зчеплення має не перевищувати довжини нормального зчеплення. Виникає необхідність розв'язання змішаної основної задачі теорії пружності: на ділянці границі $x \in (\lambda, \gamma)$ маємо першу основну задачу з розривним напруженням на границі, на ділянці $x \in (\gamma, \beta)$ – третю (тут задано нормальне напруження й нульове горизонтальне переміщення). У випадку нерівномірного ЗЗВ ця задача є зв'язаною. Перехід до схеми 4 здійснюється в роботі поступово через моделі 2 і 3, для яких отримати розв'язок простіше. Розв'язки для цих моделей більш детально проаналізовано в розділі 3. Зазначимо, що модель 1, у рамках якої інтервали прикладання нормальних і зсувних зчеплень збігаються (що не дозволяє використовувати міцність зсувного зчеплення τ як параметр тріщиностійкості),

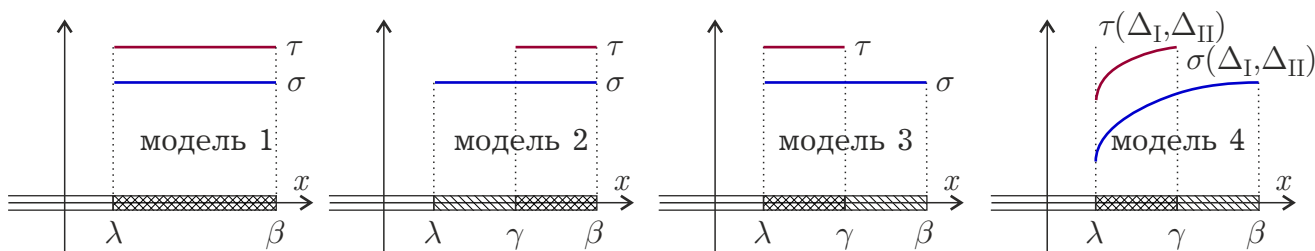


Рис. 23 – Моделі складної зони зчеплення

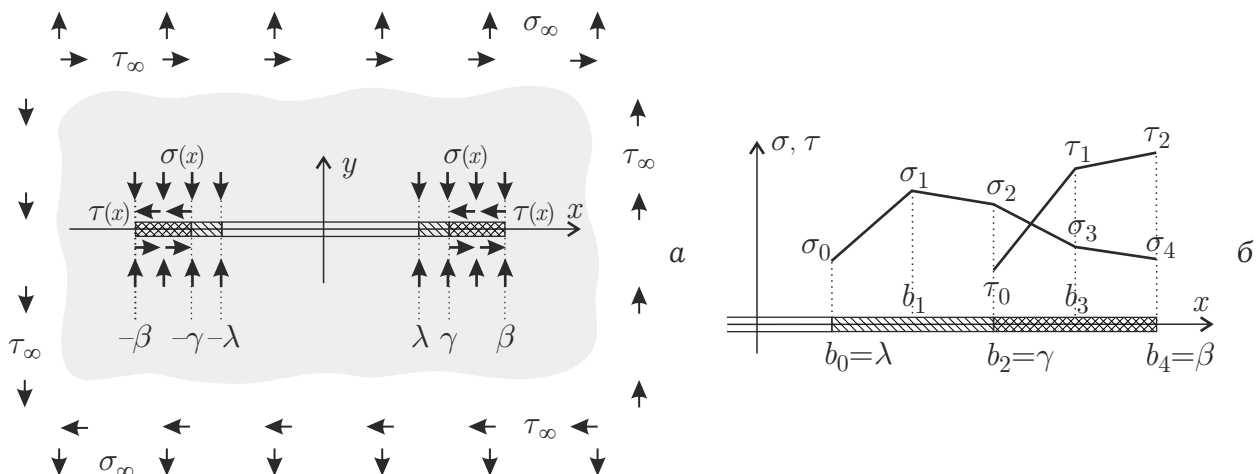


Рис. 24 – Схема навантаження та параметри моделі (а), дискретизація (б)

у роботі не використовується.

Для постановки й дискретизації рис. 24 отримано вирази для переміщень берегів тріщини та проведено порівняння розв'язків для моделей 2 і 3 (рис. 23).

Розв'язок для моделі 3 неперервно переходить у розв'язок для моделі без зон зчеплення при зникненні зсувного поля напружень (рис. 25).

У розділі також проаналізовано деякі найпростіші частинні випадки (для лінійного й білінійного законів розподілу координата-зчеплення) виразів для розкриття тріщини й роботи зчеплення. Встановлено, що використання в ЗЗВ нульової інтенсивності зчеплення для нульового відриву призводить до перекриття берегів. Цей факт викликав необхідність модифікації відомих законів, яка полягає в приписуванні зчепленню для нульового відриву ненульового значення. Побудовано вирази для роботи зчеплення, розподіленого за кусково-лінійним законом. Отримано асимптотичні вирази для умови скінченності напружень, роботи зчеплення й розкриття. Ці результати використано при дослідженні докритичного й граничного станів у якості початкового наближення. Проаналізована збіжність розв'язку залежно від параметра форми степеневого ЗЗВ.

Приклад дослідження повільного поширення тріщини побудовано в рамках гіпотези сталості параметрів ЗЗВ під час повільного підростання.

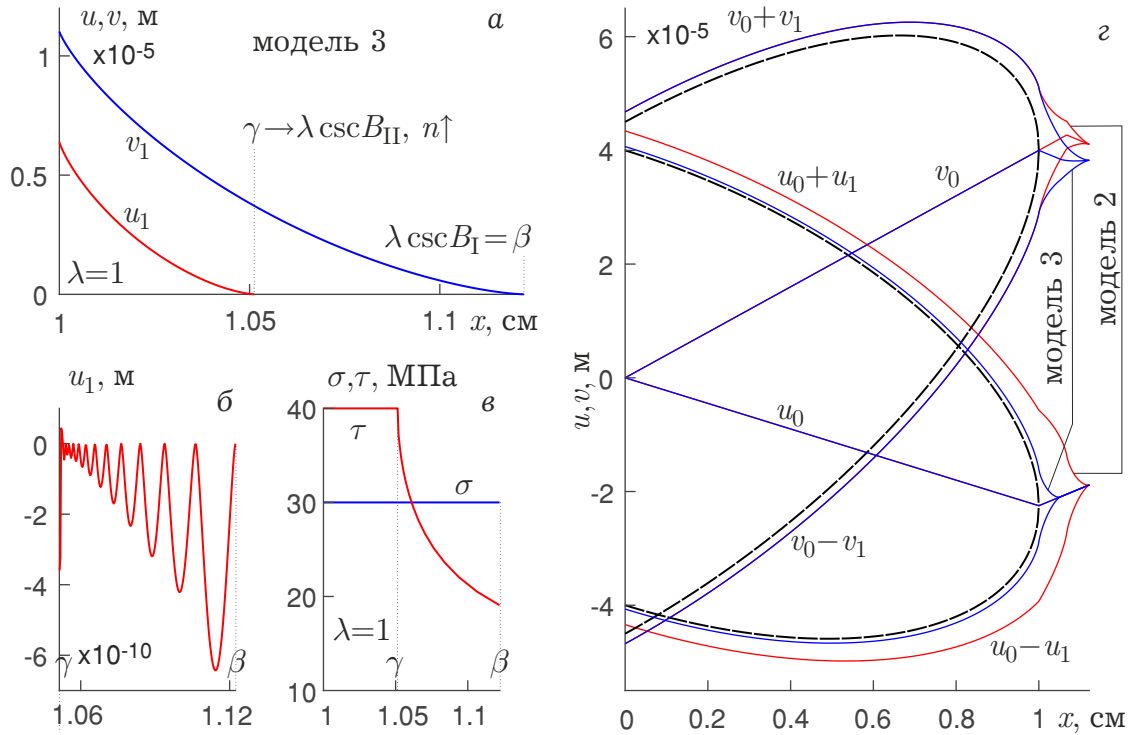
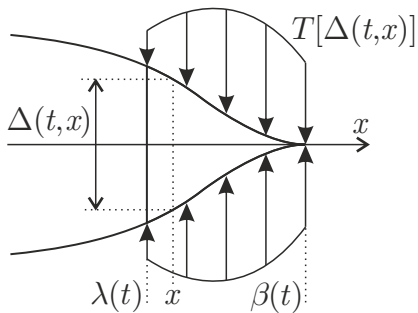


Рис. 25 – Порівняння двох моделей складної зони зчеплення: модель 2 – спільні вершини, модель 3 – спільні початки (штрихові криві відповідають моделі без зон зчеплення, $B_I = \pi\sigma_\infty/(2\sigma_{\max})$, $B_{II} = \pi\tau_\infty/(2\tau_{\max})$)



У кожний момент часу розподіл зчеплення визначається рівнянням

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) &= T[\Delta(t, x)], \quad \lambda(t) < x < \beta(t), \\ \Delta(t, x) &= l(t)\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] + \\ &+ \int_0^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_\tau[x, \lambda(\tau)]d\tau, \quad (17) \\ \tilde{\Delta}'_\beta[\beta(t), \lambda(t)] &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 26 – Параметри моделі

Використання нерівномірного ЗЗВ надало змогу описати збільшення довжини зони передруйнування під час інкубаційного періоду (рис. 27). Розв'язки рис. 28, отримані для експоненційного ЗЗВ, представлено розподілами відносних зчеплень і відривів у дискретні моменти часу (саме для цих моментів часу задовольняється (17)), які відповідають точкам на графіку ядра (блок 2).

Запропоновано алгоритм дослідження граничного стану тіла з тріщиною змішаного режиму руйнування. Визначальні рівняння не містять невідомі геометричні характеристики складної зони зчеплення. Це дозволило лінеаризувати отримані визначальні системи для параметрів розподілу зчеплення, що суттєво спростило побудову числових розв'язків.

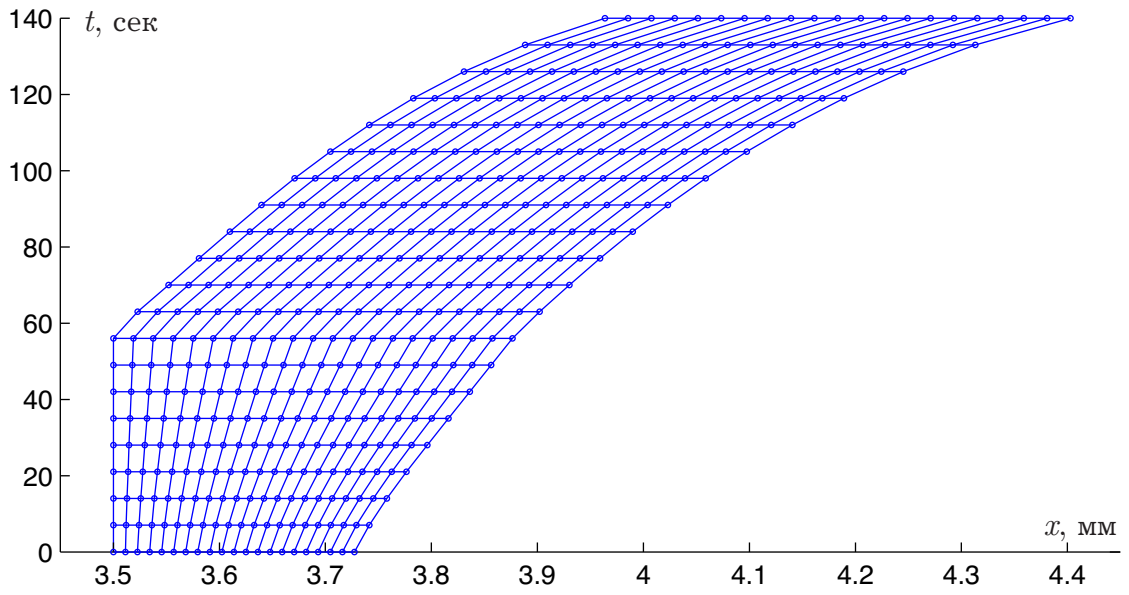


Рис. 27 – Положення вузлів кусково-лінійного розподілу зчеплення в дискретні моменти часу

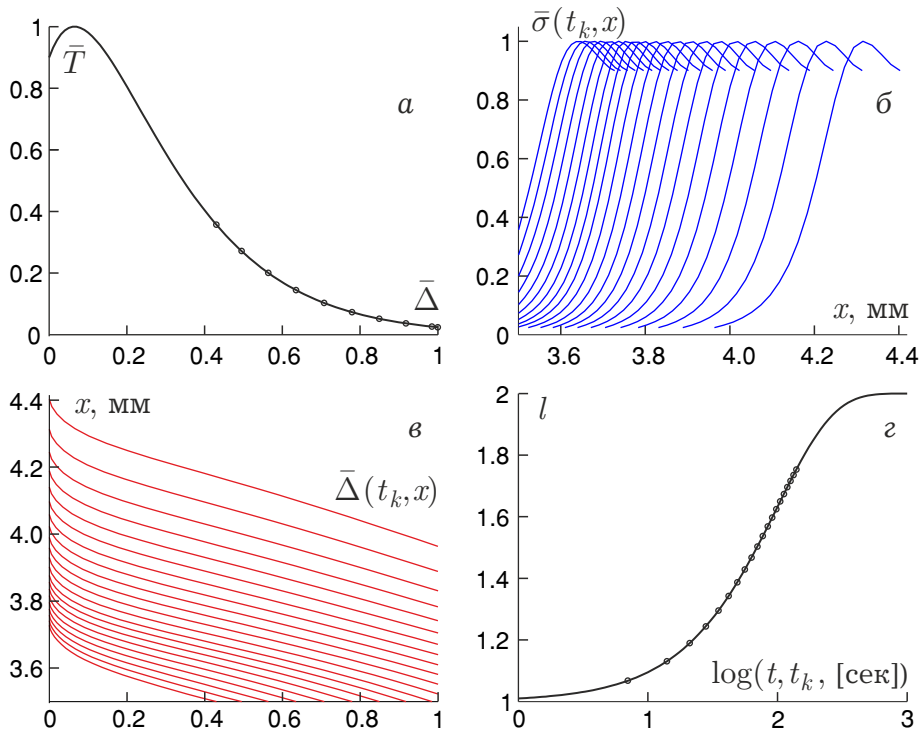


Рис. 28 – ЗЗВ (а), відносні зчеплення (б) та відрив (в) на часовій сітці, ядро інтегрального рівняння повільного зростання тріщини (г)

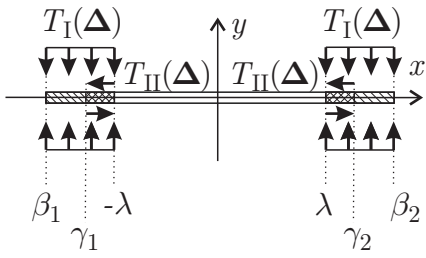


Рис. 29 – Параметри моделі

При дослідженні докритичного стану розглядається задача з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sigma^\pm(x) &= -\tilde{\sigma}(x) + T_I[\Delta(x)], & x \in (\beta_1, \beta_2), \\ \tau^\pm(x) &= -\tilde{\tau}(x) + T_{II}[\Delta(x)], & x \in (\gamma_1, \gamma_2), \\ \Delta'_I(\beta_{1,2}) &= 0, & \Delta'_{II}(\gamma_{1,2}) = 0, \\ \Delta_{II}(x) &= 0, & x \in (\beta_1, \beta_2) \setminus (\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Зчеплення $T_I(\Delta) = T_{II}(\Delta) = 0$ при $\Delta \notin \Xi$, $\Xi = \{\Delta = (\Delta_I, \Delta_{II}) : 0 \leq \Delta_I \leq \Delta_I^*, 0 \leq \Delta_{II} \leq \Delta_{II}^*\}$.

При дослідженні критичного стану у визначальну систему додається рівняння

$$\max\{\bar{\Delta}_I(\pm\lambda), \bar{\Delta}_{II}(\pm\lambda)\} = 1.$$

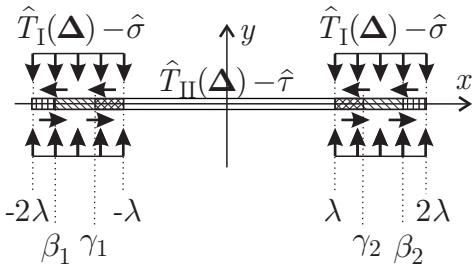


Рис. 30 – Модифікована постановка

Модифікована постановка ($|x| < 2\lambda$)

$$\begin{aligned} \sigma^\pm(x) &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}_I[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \\ \tau^\pm(x) &= -\tilde{\tau}(x) + \hat{T}_{II}[\Delta(x)] - \hat{\tau}(x) \end{aligned} \quad (18)$$

дозволила лінеаризувати визначальну систему. Додаткові напруження $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$ знаходяться з умови невід'ємності відривів. Поширене на від'ємні відриви зчеплення

$$\hat{T}_{\{I, II\}}(\Delta) = \begin{cases} T_{\{I, II\}}(\Delta), & \Delta \in \Xi \\ P_{\{I, II\}}(\Delta), & \Delta_I < 0 \vee \Delta_{II} < 0 \end{cases}.$$

Розв'язок задачі (18) дається системою інтегральних рівнянь і нерівностей

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left\{ \begin{array}{l} g(t) \\ h(t) \end{array} \right\} \frac{dt}{t-x} &= - \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}(x) \\ \tilde{\tau}(x) \end{array} \right\} + \hat{T}_{\{I, II\}} \left[L \int_{-2\lambda}^x g(t) dt, L \int_{-2\lambda}^x h(t) dt \right] - \\ &- \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}(x) \\ \hat{\tau}(x) \end{array} \right\}, \quad \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left\{ \begin{array}{l} g(t) \\ h(t) \end{array} \right\} dt = 0, \quad \int_{-2\lambda}^x \left\{ \begin{array}{l} g(t) \\ h(t) \end{array} \right\} dt \geq 0, \quad |x| < 2\lambda, \\ L \cdot \max \left\{ \frac{1}{\Delta_I^*} \int_{-2\lambda}^{\pm\lambda} g(t) dt, \frac{1}{\Delta_{II}^*} \int_{-2\lambda}^{\pm\lambda} h(t) dt \right\} &= 1. \end{aligned}$$

Визначальна система після заміни змінних та дискретизації набуває вигляду

$$\begin{aligned} J \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{array} \right\} &= - \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{array} \right\} + \hat{T}_{\{I, II\}}(2\lambda L \cdot W \mathbf{g}, 2\lambda L \cdot W \mathbf{h}) - \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{array} \right\}, \\ \mathbf{N} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{array} \right\} &= 0, \quad W \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{array} \right\} \geq 0, \quad 2\lambda L \cdot \max\{\mathbf{V}_p \mathbf{g} / \Delta_I^*, \mathbf{V}_p \mathbf{h} / \Delta_{II}^*\} = 1, \end{aligned}$$

матриці J , W , V і вектор \mathbf{N} залежать тільки від n , \mathbf{V}_p – вектор, що складається з елементів p -го рядка матриці V , жирним шрифтом також позначені вектори, елементи яких є значеннями відповідних функцій у точках колокації.

На рис. 31 проілюстровано параметри критичного стану для трьох параметрів

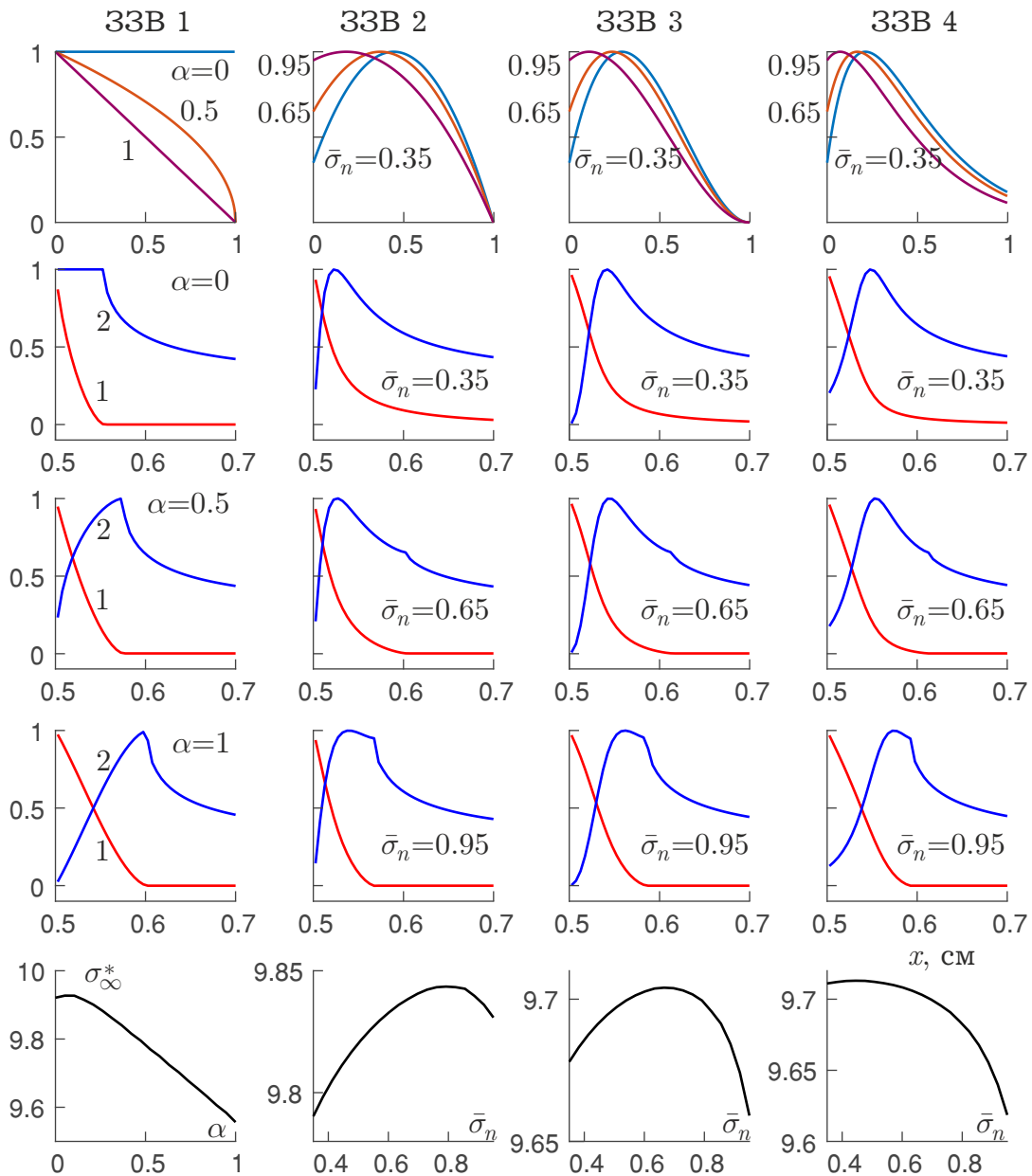


Рис. 31 – ЗЗВ та відповідні параметри граничного стану, отримані при $\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\phi = 400$ Н/м, $E = 4 \cdot 10^3$ МПа, $n = 200$, перший рядок – ЗЗВ для трьох значень параметра форми, другий-четвертий – відносні відриви (1) та зчеплення без додаткового напруження (2) для трьох параметрів форми, п'ятий – критичний рівень зовнішнього навантаження

форми чотирьох ЗЗВ у випадку тріщини нормального відриву. Перший ЗЗВ є степеневим, другий і третій – поліноміальними, четвертий – експоненціальним.

Встановлено, що параметри форми несуттєво впливають на параметри граничного стану. Найбільше відхилення від середнього рівня (2.5%) спостерігається для степеневого ЗЗВ. Тут має місце збільшення довжини зчеплення зі зростанням параметра форми α . Для трьох ЗЗВ з ділянкою зміцнення спостерігається зменшення довжини зчеплення зі збільшенням початкового рівня зчеплення (описується параметром форми $\bar{\sigma}_n$).

При побудові числових прикладів для змішаного режиму руйнування розгля-

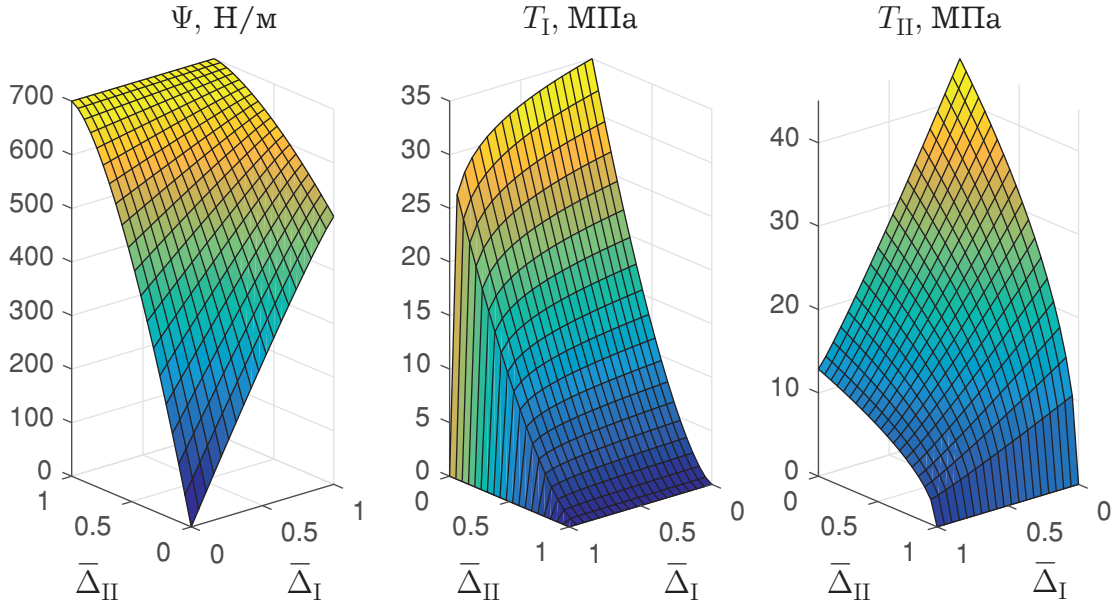


Рис. 32 – Потенціальне поле зчеплення ($\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 500$ Н/м, $\phi_2 = 700$ Н/м, $\alpha = 1.1$, $\beta = 1.5$)

нуто степеневий ЗЗВ з потенціалом (рис. 32)

$$\Psi(\bar{\Delta}) = \phi_2 - [\phi_2 - (1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha)\phi_1] (1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta,$$

$$\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}), \quad \bar{\Delta}_I = \Delta_I/\Delta_I^*, \quad \bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II}/\Delta_{II}^*$$

та полем нормального і зсувного зчеплень

$$T_I(\bar{\Delta}) = \sigma_{\max}(1 - \bar{\Delta}_I)^{\alpha-1}(1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta,$$

$$T_{II}(\bar{\Delta}) = \tau_{\max}[1 - (1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha)\phi_1/\phi_2](1 - \bar{\Delta}_{II})^{\beta-1},$$

$$\Delta_I^* = \alpha\phi_1/\sigma_{\max}, \quad \Delta_{II}^* = \beta\phi_2/\tau_{\max}.$$

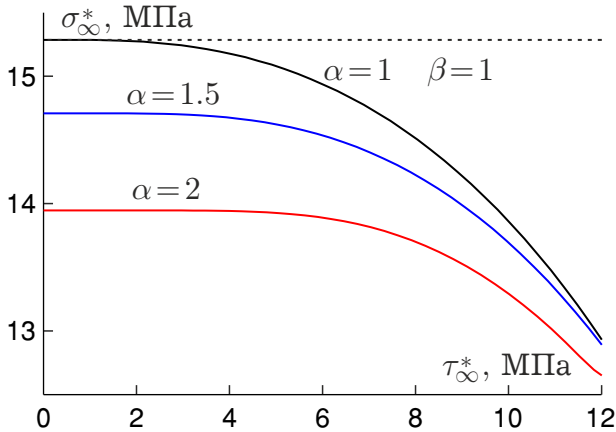


Рис. 33 – Локус руйнування ($\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 400$ Н/м, $\phi_2 = 600$ Н/м, $\lambda = 0.5$ см, $E = 10^4$ МПа, $n = 100$)

На рис. 33 наведено криві граничних навантажень. Пунктирна крива відповідає моделі зі сталими інтенсивностями зчеплень ($\Psi(\bar{\Delta}) = \sigma_{\max}\bar{\Delta}_I + \tau_{\max}\bar{\Delta}_{II}$).

Кожна точка кривих отримана за допомогою ітеративної процедури, згідно з якою вводиться позначення

$$M_{\{x\}_y} = \left\{ m : 1 \leq m < p - p_{\{x\}_y} \right\}, \quad P_{\{x\}_y} = \left\{ m : p - p_{\{x\}_y} \leq m \leq n \right\},$$

де індекс p відповідає квадратурній точці, що збігається з $-\lambda$ (див. рис. 13); індекси $p_{x,y} \geq 1$, таким чином, визначають кількість точок колокації у відповідній

зоні зчеплення (цей параметр обумовлює точність початкового наближення);

1. розв'язується система

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} &= 0, \quad m \in M_{\{x\}} \\ \mathbf{J}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{Bmatrix} + \hat{T}_{\{\text{II}\}}(2\lambda L \cdot \mathbf{W}_m \mathbf{g}, 2\lambda L \cdot \mathbf{W}_m \mathbf{h}), \quad m \in P_{\{x\}} \\ 2\lambda L \cdot \max \{ \mathbf{V}_p \mathbf{g} / \Delta_{\text{I}}^*, \mathbf{V}_p \mathbf{h} / \Delta_{\text{II}}^* \} &= 1, \end{aligned} \quad (19)$$

2. обчислюються додаткові напруження

$$\begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \end{Bmatrix} = -J \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{Bmatrix} + \hat{T}_{\{\text{II}\}}(2\lambda L \cdot \mathbf{W} \mathbf{g}, 2\lambda L \cdot \mathbf{W} \mathbf{h}),$$

3. проводиться перепозначення

$$M_{\{x\}} = \left\{ m : \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\tau}_m \end{Bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad P_{\{x\}} = \left\{ m : \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\tau}_m \end{Bmatrix} < 0 \right\}.$$

Виконання пунктів 1-3 продовжується, доки всі компоненти векторів додаткових напружень не стануть невід'ємними: $\hat{\sigma}_m \geq 0$, $\hat{\tau}_m \geq 0$, $m = 1, \dots, n$.

Отже, на кожній ітерації розв'язується нелінійна система рівнянь (19), яка легко лінеаризується. Хід розв'язання проілюстровано на рис. 34. На першому кроці в зону зчеплення можна включити декілька точок колокації. Наступні кроки додають точки в цю зону, доки дискретні додаткові напруження не стануть невід'ємними.

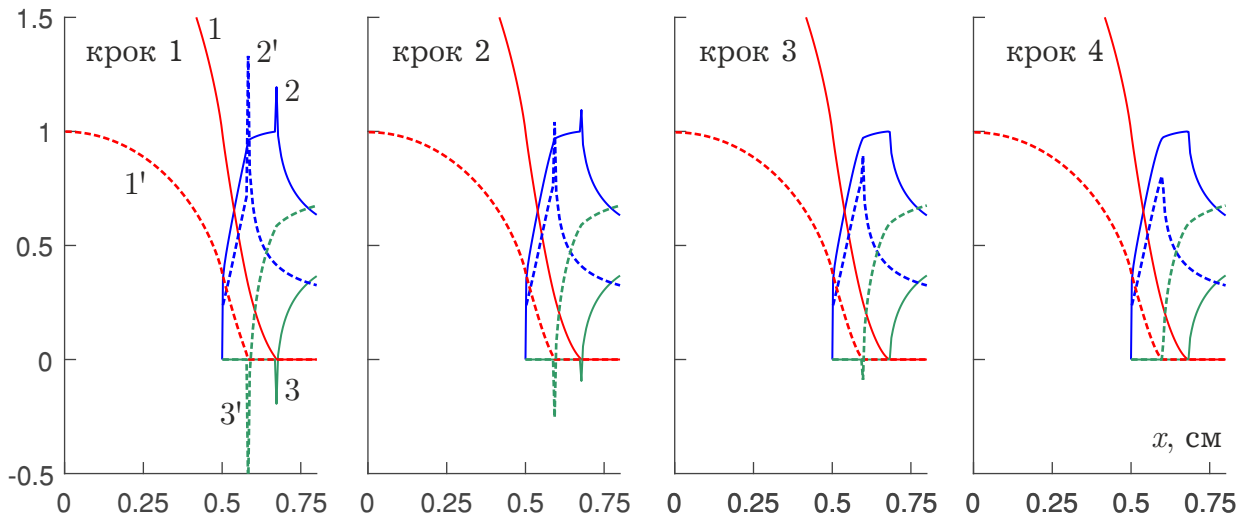


Рис. 34 – Ілюстрація ітеративної процедури: відносні відриви (1) та зчеплення без додаткових напружень (2), додаткове напруження (3); штрихові лінії відповідають зсувним компонентам (1', 2', 3') ($\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 500$ Н/м, $\phi_2 = 700$ Н/м, $\alpha = 1.1$, $\beta = 1.5$, $E = 10^4$ МПа, $n = 200$)

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ І ВИСНОВКИ

Отримані результати є інструментом аналізу практичних проблем, що виникають у будівництві й літакобудуванні, та пов'язані з повільним поширенням тріщин в елементах конструкцій. Результати дозволяють визначати параметри критичного стану ізотропних та ортотропних тіл, що містять тріщини з зонами передруйнування. Розроблені нові ефективні методики: 1) дослідження повільного поширення тріщини нормального відриву в ортотропних в'язкопружних тілах; 2) визначення параметрів стану граничної рівноваги тіл із тріщинами в рамках моделі зчеплення, яка враховує наявну біля фронту тріщини зону передруйнування. Основні результати:

1. Отримали розвиток методи розв'язання задач про деформування в'язкопружних ортотропних матеріалів на основі перетворення Лапласа й методу операторних ланцюгових дробів. Отримана методика дозволяє на основі результатів механіки композитних матеріалів і характеристик релаксації матеріалів компонент композита ефективно отримувати вирази для в'язкопружного розкриття тріщини у формі інтеграла Больцмана з ядром у вигляді суми експонент дробового порядку.
2. Для моделювання багатоосередкового руйнування композитів зроблена нова постановка й отримано розв'язки задачі про повільний розвиток двох колінеарних тріщин в ортотропному в'язкопружному тілі. Методика побудови визначальних співвідношень для залежних від часу положень вершин тріщин системи базується на представленні в'язкопружного розкриття у формі інтеграла Больцмана та критерії критичного розкриття. Залежності від часу положень вершин визначаються із систем інтегральних рівнянь і нерівностей, які розв'язуються шляхом координатно-часової дискретизації. Проілюстровано залежність послідовності досягнення граничного стану у вершинах тріщин системи від початкової відстані між суміжними вершинами.
3. Розв'язані нові задачі механіки руйнування для пружних і в'язкопружних пластин із тріщинами за умови прикладання системи зосереджених сил. Розвинено метод розв'язання задач теорії пружності і в'язкопружності для пластин, послаблених тріщинами з зонами передруйнування у разі контакту берегів. Для тріщини нормального відриву отримано нові закономірності повільного докритичного поширення внаслідок дії системи розтягувальних зосереджених сил та під впливом системи зосереджених сил, що притискають береги тріщини, в комбінації з розтягом на нескінченності. Проілюстровано зникнення ділянки контакту берегів тріщини при її повільному поширенні. Виявлено вплив зникнення ділянки на вихід тріщини на динамічний етап поширення.
4. Для змішаного режиму руйнування зроблена загальна постановка задач механіки тріщин за наявності зон передруйнування. Зона передруйнування моделюється складною зоною зчеплення з відмінними положеннями границь інтервалів прикладання нормального і зсувного зчеплень (ця відмінність продиктована вимогою скінченності напружень у тілі).

5. Запропоновано нові числово-аналітичні методи розв'язання задач механіки тріщин із зонами передруйнування у випадку їх моделювання складними зонами зчеплення з нерівномірним законом зчеплення-відриву. У випадку незначних довжин зчеплення для тріщини нормального відриву знайдено та проілюстровано зв'язок параметрів тріщиностійкості закону зчеплення-відриву та критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень. Встановлено, що параметри форми несуттєво впливають на рівень критичного навантаження. Отримано нові розв'язки для граничних рівнів нормального і зсувного навантажень та проілюстровано вплив на них параметрів форми потенціального закону зчеплення-відриву для змішаного режиму руйнування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Перераспределение напряжений около эллиптического отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине вследствие ползучести материала. *Доповіді НАН України*. (6), 49-54 (2004)
2. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Влияние циклического нагружения на кинетику роста трещины в вязкоупругой ортотропной пластине из композитного материала. *Прикл. механика*. **40** (9), 116-122 (2004)
3. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О перераспределении напряжений со временем около прямолинейной трещины в пластине из вязкоупругого композитного материала. *Доповіді НАН України*. (11), 51-55 (2004)
4. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Инициирование трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. *Доповіді НАН України*. (2), 53-58 (2005)
5. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. *Прикл. механика*. **41** (5), 9-21 (2005)
6. Селиванов, М.Ф.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования многокомпонентного композита. *Материалы. Инструменты. Технологии*. (2), 14-20 (2005)
7. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов. *Прикл. механика*. **41** (8), 41-50 (2005)
8. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: On the application of branched operator continued fractions for a boundary problem of linear viscoelasticity. *Прикл. механика*. **42** (1), 133-143 (2006)
9. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate. *Int. J. Fract.* **139** (1), 153-160 (2006)
10. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Развитие трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. *Прикл. механика*. **42** (9), 89-97 (2006)
11. Selivanov, M.F., Chernoiivan, Y.A.: A combined approach of the Laplace transform and Pade approximation solving viscoelasticity problems. *Int. J. Solids and Struct.* **44**, 66-76 (2007)
12. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О развитии дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале. *Прикл. механика*. **44** (8), 45-51 (2008)
13. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композиту, релаксація компонент якого описується експонентами різних дробових порядків. *Мат. методи та фіз.-мех.*

- поля. **51** (3), 7-18 (2008)
14. Селиванов, М.Ф.: Об эффективных свойствах линейно вязкоупругого композита. Прикл. механика. **45** (10), 62-70 (2009)
 15. Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А., Рудис, А.В.: О развитии трещины сдвига в композите с линейно вязкоупругими фазами. Теоретич. и прикл. механика. **45**, 71-78 (2009)
 16. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Определение и анализ эффективных релаксационных свойств композита с вязкоупругими компонентами. Прикл. механика. **46** (1), 22-33 (2010)
 17. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Про вплив на концентрацію напружень біля еліптичного отвору в пластині з композитного матеріалу в'язкопружних властивостей компонентів композиту. Доповіді НАН України. (1), 52-58 (2010)
 18. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.: Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **53** (1), 99-108 (2010)
 19. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті. Доповіді НАН України. (11), 37-44 (2010)
 20. Селиванов, М.Ф.: О влиянии вязкоупругих свойств композита на поле напряжений около эллиптического отверстия. Прикл. механика. **46** (7), 76-83 (2010)
 21. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле. Теоретич. и прикл. механика. **48** (2), 40-50 (2011)
 22. Камінський А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. Доповіді НАН України. (11), 51-60 (2011)
 23. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины. Теоретич. и прикл. механика. **50** (4), 78-84 (2011)
 24. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Computational optimization of characteristics of composites of viscoelastic components. J. Eng. Math. **74**, 91-100 (2012)
 25. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Початковий етап руйнування в'язкопружної пластини з двома колінеарними тріщинами однакової довжини. Доповіді НАН України. (6), 54-59 (2012)
 26. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (1), 61-71 (2012)
 27. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення переміщень берегів двох колінеарних тріщин різних довжин в рамках моделі Леонова –

- Панасюка. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (4), 74-84 (2012)
28. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: О докритическом распространении трещины продольного сдвига в вязкоупругом композитном теле. Прикл. механика. **49** (3), 49-59 (2013)
 29. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. Int. J. Solids Struct. **50** (19), 2929-2942 (2013)
 30. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноиван, Ю.О.: Про межі застосовності наближених підходів до дослідження макроскопічних тріщин поперечного зсуву у в'язкопружних анізотропних композитах. Доповіді НАН України. (7), 57-63 (2013)
 31. Селіванов, М.Ф.: Поширення тріщини у в'язкопружному тілі внаслідок прикладання навантаження до її берегів. Доповіді НАН України. (12), 67-73 (2013)
 32. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальный период роста трещины в вязкоупругом композите при смешанном нагружении. Теоретич. и прикл. механика. **53** (7), 18-29 (2013)
 33. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальное разрушение вязкоупругой изотропной пластины с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины. Прикл. механика. **50** (3), 94-106 (2014)
 34. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Злиття двох колінеарних тріщин різної довжини у в'язкопружній анізотропній пластині. Доповіді НАН України. (6), 58-63 (2014)
 35. Селіванов, М.Ф.: Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування. Доповіді НАН України. (11), 58-64 (2014)
 36. Селиванов, М.Ф.: Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения. Теоретич. и прикл. механика. **55** (9), 33-41 (2014)
 37. Selivanov, M.F., Chornoivan, Yu.O.: The initial period of mixed-mode crack growth in viscoelastic composite with Rabotnov's relaxation law. Int. J. Mech. **8**, 371-376 (2014)
 38. Селіванов, М.Ф.: Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. Доповіді НАН України. (7), 62-69 (2015)
 39. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Моделювання повільного зростання тріщини зчеплення у в'язкопружному тілі. Доповіді НАН України. (8), 43-50 (2015)
 40. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. Mech. of Time-Dependent Materials. **20** (2), 233-243 (2016)

41. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву. Доповіді НАН України. (5), 36-42 (2016)
42. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування анізотропної пластини. Вісник Київського нац. ун-ту ім Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (1), 53-58 (2016)
43. Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О., Вовкодав, О.В.: Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (3), 39-42 (2016)
44. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту. Доповіді НАН України. (1), 38-43 (2017)
45. Гаврилов, Г.В., Селиванов, М.Ф., Черноіван, Ю.А.: Длительное разрушение стареющего слоисто-волокнутого композита тетрагональной симметрии. В: Матер. XIV Межд. Науч. школы, Таврич. нац. ун-т., Симферополь, 29-32 (2004)
46. Селиванов, М.Ф., Богданова, О.С.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования композитного материала при моделировании его однородной анизотропной средой. В: Dynamical systems modelling and stability investigation, Int. Conf., Kyiv (2005)
47. Selivanov, M.F.: On a time-dependent redistribution of stress near a linear crack in a plate made from the viscoelastic composite material. In: Proceedings of 7th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2005)
48. Selivanov, M.F.: Long-term crack growth in 3-D reinforced polymer. In: Proceedings of 8th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2007)
49. Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Оптимізація представлення в'язкопружних характеристик полімерних матеріалів. В: Міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми технічної механіки", Дніпродзержинськ (2007)
50. Selivanov, M.F., Kaminsky, A.A., Chornoivan, Yu.O.: Initial fracture of viscoelastic plate with two equal collinear cracks. In: Proceedings of 9th Int. Fract. Conf., Istanbul, Turkey (2011)
51. Селіванов, М.Ф.: Дослідження докритичного і граничного станів тріщини зчеплення. В: Матеріали III Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки", Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка (2015)
52. Selivanov, M.F.: Study of the critical state and long-term fracture of viscoelastic anisotropic bodies using nonlinear fracture models. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016)

АНОТАЦІЯ

Селіванов М.Ф. Квазістатичні задачі механіки руйнування пружних та в'язкопружних тіл для моделей тріщин з зонами зчеплення. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 “Механіка деформівного твердого тіла”. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена розробці методів дослідження напружено деформованого стану в'язкопружних плоских тіл, що містять тріщини з зонами передруйнування, та повільного поширення тріщин у в'язкопружному ортотропному середовищі.

Створена нова числово-аналітична методика математичного дослідження напружено деформованого стану тіл з тріщинами. Врахування впливу зон передруйнування, що утворюються біля фронту тріщини, здійснюється за допомогою моделі зони зчеплення. Модель забезпечує обмеженість напружень і дозволяє знести всі нелінійні ефекти деформування в зону зчеплення. Розроблено ефективні алгоритми побудови розв'язку як для рівномірного закону зчеплення-відриву так і для нерівномірних законів. В останньому випадку розв'язується зв'язана задача теорії пружності. В основі алгоритму лежить процедура пошуку контактних напружень між берегами тріщини. У випадку тріщини змішаного режиму руйнування розглянуто декілька моделей складної зони зчеплення, в рамках яких границі прикладання нормального та зсувного зчеплень не збігаються.

Наведено математичні постановки окремих класів задач механіки тріщин з зонами передруйнування в ізотропних та ортотропних плоских тілах, що містять одиничні, колінеарні або паралельні тріщини. Отримано розв'язки задач для найпоширеніших типів закону зчеплення-відриву. Досліджено зв'язок параметрів граничного стану з характеристиками тріщиностійкості, які є параметрами закону зчеплення-відриву.

Розв'язок задачі про розкриття тріщини з зонами передруйнування покладено в основу дослідження повільного поширення тріщин вздовж наперед відомого шляху. Розроблена ефективна методика побудови кінетичних кривих зростання тріщин вздовж осей ортотропії композита, матеріали компонент якого виявляють в'язкопружні властивості. Встановлено загальні закономірності впливу геометричних параметрів задачі та реологічних характеристик матеріалу на кінетику поширення тріщин.

Ключові слова: модель зони зчеплення, складна зона зчеплення, закон зчеплення-відриву, довжина зчеплення, частковий контакт берегів тріщини, колінеарні тріщини, повільне зростання тріщин, кінетичні криві зростання тріщин, композит з в'язкопружними компонентами.

АННОТАЦИЯ

Селиванов М.Ф. Квазистатические задачи механики разрушения упругих и вязкоупругих тел для моделей трещин с зонами сцепления. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 “Механика деформируемого твердого тела”. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена разработке методов исследования напряженно деформированного состояния вязкоупругих плоских тел, содержащих трещины с зонами предразрушения, и медленного распространения трещин в вязкоупругой ортотропной среде.

Создана новая численно-аналитическая методика математического исследования напряженно деформированного состояния тел с трещинами. Учет влияния зон предразрушения, образующихся у фронта трещины, осуществляется с помощью модели зоны сцепления. Модель обеспечивает ограниченность напряжений и позволяет снести все нелинейные эффекты деформирования в зону сцепления. Разработаны эффективные алгоритмы построения решений как для равномерного закона сцепления-отрыва так и неравномерных законов. В последнем случае решается связанная задача теории упругости. В основе алгоритма лежит процедура поиска контактных напряжений между берегами трещины. В случае трещины смешанного режима разрушения рассмотрено несколько моделей сложной зоны сцепления, в рамках которых границы приложения нормального и сдвигового сцеплений не совпадают.

Приведены математические постановки отдельных классов задач механики трещин с зонами предразрушения в изотропных и ортотропных плоских телах, содержащих единичные, коллинеарные или параллельные трещины. Получены решения задач для самых распространенных типов закона сцепления-отрыва. Исследована связь параметров предельного состояния с характеристиками трещиностойкости, которые являются параметрами закона сцепления-отрыва.

Решение задачи о раскрытии трещины с зонами предразрушения положено в основу исследования медленного распространения трещин вдоль заранее известного пути. Разработана эффективная методика построения кинетических кривых роста трещин вдоль оси ортотропии композита, материалы компонент которого обладают вязкоупругими свойствами. Установлены общие закономерности влияния геометрических параметров задачи и реологических характеристик материала на кинетику распространения трещин.

Ключевые слова: модель зоны сцепления, сложная зона сцепления, закон сцепления-отрыва, длина сцепления, частичный контакт берегов трещины, коллинеарные трещины, медленный рост трещин, кинетические кривые роста трещин, композит с вязкоупругими компонентами.

SUMMARY

Selivanov M.F. Quasi-static problems of fracture mechanics for elastic and viscoelastic bodies in the framework of cohesive zone models. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.04 “Mechanics of deformable solids”. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of deformed state of two-dimensional viscoelastic bodies containing cracks with failure zones as well as to the slow crack growth in viscoelastic orthotropic media.

Semi-analytical method for the investigation of deformed state of a cracked body is presented. Influence of failure zones which are formed in front of the crack tip is taken into account by introducing the cohesive zone model. The model provides the finite stress condition and allows ascribing all non-linear effects of deformation to the cohesive zone. The effective algorithms are developed to find solutions for the uniform traction-separation law as well as for the non-uniform ones. In the latter case the coupled problem of elasticity is solved. The algorithm is based on the procedure of determination of contact stresses between crack faces; it allows avoiding the solution of nonlinear systems to find cohesive lengths. In the case of mixed mode cracks, some multiple cohesive zone model are considered; these models use unmatched intervals for normal and shear tractions. When the cohesive lengths are small enough the concept of thin structure is used to find the separation; the concept considerably simplifies the solving algorithm and provides initial estimate when the problem is solved for non-small failure zones.

When cohesive zone model is introduced, it is assumed that the crack growth occurs when the normal or shear separation and corresponding work of separation simultaneously reach their critical values. Basing on the found solutions for separations the system of equation is obtained to find critical state parameters of a crack with failure zones. Using the non-uniform traction-separation law requires solving of nonlinear systems with unknown parameters of traction distribution and cohesive length. Correspondence between critical state parameters and parameters of fracture toughness, which is forming traction-separation law, is investigated. Numerical solutions are built for given uniformly distributed stresses at infinity and system of point forces in the vicinity of a crack. A combination of the above-mentioned types of loading is also considered. Mixed type is used to form the zone of partial contact between crack faces.

Solution of the problem on a separation of crack faces is used in the investigation of slow crack growth along the predefined path. Effective methodology is developed for finding the kinetic curves of crack growth along the orthotropic axes of composite, which phases shows viscoelastic properties. It is shown that in the case of compressive forces (i.e. the forces that diminish the separation) the crack can propagate the distance several times greater than its initial length. The growth of a crack with partially contacting faces is investigated; it is shown that disappearing of contact zone can

fasten the transition to the dynamic crack propagation.

The problem of multisite fracture is considered. The solution for crack faces separation is obtained for the parallel cracks; kinetic curves are built for the slow growth of collinear cracks of different initial lengths.

Key words: cohesive zone model, multiple cohesive zone, traction-separation law, cohesive length, partial contact of crack faces, collinear cracks, slow crack growth, kinetic curves of crack growth, composite material with viscoelastic components.

Підписано до друку 16.08.2017. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. авт. арк. 1,87. Тираж 100 прим. Замовлення № 137.

Фото-копі центр “Кубік”
ПП Клименко Р.В.,
03047, м. Київ, проспект Перемоги, 50