

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СЕЛІВАНОВ МИХАЙЛО ФЕДОРОВИЧ

УДК 539.42

ДИСЕРТАЦІЯ

КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРУЖНИХ
ТА В'ЯЗКОПРУЖНИХ ТІЛ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ТРИЩИН З ЗОНАМИ
ЗЧЕПЛЕННЯ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело



М.Ф. Селіванов

Науковий консультант: Камінський Анатолій Олексійович, доктор
фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Селіванов М.Ф. Квазістатичні задачі механіки руйнування пружних та в'язкопружних тіл для моделей тріщин з зонами зчеплення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 “Механіка деформівного твердого тіла” (113 – прикладна математика). – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена розробці методів дослідження напружено-деформованого стану в'язкопружних плоских тіл, що містять тріщини з зонами передруйнування, та повільного поширення тріщин у в'язкопружному ортотропному середовищі.

Створена нова числово-аналітична методика математичного дослідження напружено деформованого стану тіл із тріщинами. Врахування впливу зон передруйнування, що утворюються біля фронту тріщини, здійснюється за допомогою моделі зони зчеплення. Модель забезпечує обмеженість напружень і дозволяє знести всі нелінійні ефекти деформування в зону зчеплення. Розроблено ефективні алгоритми побудови розв'язку як для рівномірного закону зчеплення-відриву, так і для нерівномірних законів. В останньому випадку розв'язується зв'язана задача теорії пружності. В основі алгоритму лежить процедура пошуку контактних напружень між берегами тріщини; використання алгоритму звільняє від необхідності розв'язання нелінійних рівнянь відносно довжин зчеплення. У випадку тріщини змішаного режиму руйнування розглянуто декілька моделей складної зони зчеплення, в рамках яких границі прикладання нормального та зсувного зчеплень не збігаються. У випадку незначних довжин зчеплення при отриманні відриву використовується концепція тонкої структури, яка суттєво спрощує алгоритм розв'язання й може надати початкове наближе-

ння при розв'язанні задачі для розвинутих зон передруйнування.

Критерієм граничного стану при використанні моделі зони зчеплення є одночасне досягнення нормальним або зсувним розкриттям у вершині тріщини та відповідною роботою зчеплення своїх граничних значень. На основі отриманих розв'язків для відриву побудовано визначальні системи для параметрів граничної рівноваги тріщини з зонами передруйнування. Використання нерівномірного закону зчеплення-відриву вимагає розв'язання системи нелінійних рівнянь відносно параметрів розподілу зчеплення та довжини зчеплення. Досліджено зв'язок параметрів граничного стану з характеристиками тріщиностійкості, які є параметрами закону зчеплення-відриву. Числові приклади побудовано для заданих рівномірно розподіленого навантаження на значному віддаленні від тріщин та системи зосереджених сил в околі тріщин, також розглянуто комбінацію зазначених двох типів навантаження. Змішаний тип використано для утворення зони часткового контакту берегів тріщини.

Розв'язок задачі про розкриття тріщини з зонами передруйнування покладено в основу дослідження повільного поширення тріщин вздовж наперед відомого шляху. Розроблено ефективну методику побудови кінетичних кривих зростання тріщин вздовж осі ортотропії композита, матеріали компонент якого виявляють в'язкопружні властивості. Показано, що у випадку наявності сил, що стягують береги тріщини, тріщина може зростати до розмірів в декілька разів більших за початкові. Досліджено зростання тріщини з частковим контактом її берегів, встановлено, що зникнення ділянки контакту може прискорити перехід тріщини на динамічний етап поширення.

Розглянуто задачі про багатоосередкове руйнування. Отримано відриви системи паралельних тріщин та кінетичні криві повільного зростання двох колінеарних тріщин різної довжини.

Ключові слова: модель зчеплення, складна зона зчеплення, закон зчеплення-відриву, довжина зчеплення, частковий контакт берегів тріщини, колінеарні тріщини, повільне зростання тріщин, кінетичні криві зростання тріщин, композит із в'язкопружними компонентами.

Список публікацій здобувача

1. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Перераспределение напряжений около эллиптического отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине вследствие ползучести материала. Доповіді НАН України. (6), 49-54 (2004)
2. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Влияние циклического нагружения на кинетику роста трещины в вязкоупругой ортотропной пластине из композитного материала. Прикл. механика. **40** (9), 116-122 (2004)
3. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О перераспределении напряжений со временем около прямолинейной трещины в пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (11), 51-55 (2004)
4. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Иницирование трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (2), 53-58 (2005)
5. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. Прикл. механика. **41** (5), 9-21 (2005)
6. Селиванов, М.Ф.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования многокомпонентного композита. Материалы. Инструменты. Технологии. (2), 14-20 (2005)
7. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов. Прикл. механика. **41** (8), 41-50 (2005)
8. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: On the application of branched operator

- continued fractions for a boundary problem of linear viscoelasticity. Прикл. механика. **42** (1), 133-143 (2006)
9. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate. Int. J. Fract. **139** (1), 153-160 (2006)
 10. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Развитие трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Прикл. механика. **42** (9), 89-97 (2006)
 11. Selivanov, M.F., Chernoiivan, Y.A.: A combined approach of the Laplace transform and Padé approximation solving viscoelasticity problems. Int. J. Solids and Struct. **44**, 66-76 (2007)
 12. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О развитии дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале. Прикл. механика. **44** (8), 45-51 (2008)
 13. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композиту, релаксація компонент якого описується експонентами різних дробових порядків. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **51** (3), 7-18 (2008)
 14. Селиванов, М.Ф.: Об эффективных свойствах линейно вязкоупругого композита. Прикл. механика. **45** (10), 62-70 (2009)
 15. Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А., Рудис, А.В.: О развитии трещины сдвига в композите с линейно вязкоупругими фазами. Теоретич. и прикл. механика. **45**, 71-78 (2009)
 16. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Определение и анализ эффективных релаксационных свойств композита с вязкоупругими компонентами. Прикл. механика. **46** (1), 22-33 (2010)
 17. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Про вплив на концентрацію напружень біля еліптичного отвору в пластині з композитного матеріалу в'язкопружних властивостей компонентів композиту. Доповіді НАН

- України. (1), 52-58 (2010)
18. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.: Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **53** (1), 99-108 (2010)
 19. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті. Доповіді НАН України. (11), 37-44 (2010)
 20. Селіванов, М.Ф.: О влиянии вязкоупругих свойств композита на поле напряжений около эллиптического отверстия. Прикл. механика. **46** (7), 76-83 (2010)
 21. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле. Теоретич. и прикл. механика. **48** (2), 40-50 (2011)
 22. Камінський А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. Доповіді НАН України. (11), 51-60 (2011)
 23. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины. Теоретич. и прикл. механика. **50** (4), 78-84 (2011)
 24. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Computational optimization of characteristics of composites of viscoelastic components. J. Eng. Math. **74**, 91-100 (2012)
 25. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Початковий етап руйнування в'язкопружної пластини з двома колінеарними тріщинами однакової довжини. Доповіді НАН України. (6), 54-59 (2012)
 26. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (1), 61-71 (2012)

27. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення переміщень берегів двох колінеарних тріщин різних довжин в рамках моделі Леонова–Панасюка. *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* **55** (4), 74-84 (2012)
28. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: О докритическом распространении трещины продольного сдвига в вязкоупругом композитном теле. *Прикл. механика.* **49** (3), 49-59 (2013)
29. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. *Int. J. Solids Struct.* **50** (19), 2929-2942 (2013)
30. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Про межі застосовності наближених підходів до дослідження макроскопічних тріщин поперечного зсуву у в'язкопружних анізотропних композитах. *Доповіді НАН України.* (7), 57-63 (2013)
31. Селіванов, М.Ф.: Поширення тріщини у в'язкопружному тілі внаслідок прикладання навантаження до її берегів. *Доповіді НАН України.* (12), 67-73 (2013)
32. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальный период роста трещины в вязкоупругом композите при смешанном нагружении. *Теоретич. и прикл. механика.* **53** (7), 18-29 (2013)
33. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальное разрушение вязкоупругой изотропной пластины с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины. *Прикл. механика.* **50** (3), 94-106 (2014)
34. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Злиття двох колінеарних тріщин різної довжини у в'язкопружній анізотропній пластині. *Доповіді НАН України.* (6), 58-63 (2014)
35. Селіванов, М.Ф.: Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування.

- Доповіді НАН України. (11), 58-64 (2014)
36. Селиванов, М.Ф.: Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения. Теоретич. и прикл. механика. **55** (9), 33-41 (2014)
37. Selivanov, M.F., Chornoivan, Yu.O.: The initial period of mixed-mode crack growth in viscoelastic composite with Rabotnov's relaxation law. *Int. J. Mech.* **8**, 371-376 (2014)
38. Селіванов, М.Ф.: Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. Доповіді НАН України. (7), 62-69 (2015)
39. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Моделювання повільного зростання тріщини зчеплення у в'язкопружному тілі. Доповіді НАН України. (8), 43-50 (2015)
40. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. *Mech. of Time-Dependent Materials.* **20** (2), 233-243 (2016)
41. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву. Доповіді НАН України. (5), 36-42 (2016)
42. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування анізотропної пластини. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (1), 53-58 (2016)
43. Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О., Вовкодав, О.В.: Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (3), 39-42 (2016)
44. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту. Доповіді НАН України. (1), 38-43 (2017)
45. Гаврилов, Г.В., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Длительное ра-

- зрушення стареючого слоисто-волокнистого композита тетрагональної симетрії. В: Матер. XIV Межд. Науч. школы, Таврич. нац. ун-т., Симферополь, 29-32 (2004) доповідь
46. Селиванов, М.Ф., Богданова, О.С.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования композитного материала при моделировании его однородной анизотропной средой. В: Dynamical systems modelling and stability investigation, Int. Conf., Kyiv (2005) заочна
47. Selivanov, M.F.: On a time-dependent redistribution of stress near a linear crack in a plate made from the viscoelastic composite material. In: Proceedings of 7th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2005) заочна
48. Selivanov, M.F.: Long-term crack growth in 3-D reinforced polymer. In: Proceedings of 8th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2007) заочна
49. Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Оптимізація представлення в'язкопружних характеристик полімерних матеріалів. В: Міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми технічної механіки", Дніпродзержинськ (2007) доповідь
50. Selivanov, M.F., Kaminsky, A.A., Chornoivan, Yu.O.: Initial fracture of viscoelastic plate with two equal collinear cracks. In: Proceedings of 9th Int. Fract. Conf., Istanbul, Turkey (2011) доповідь
51. Селіванов, М.Ф.: Дослідження докритичного і граничного станів тріщини зчеплення. В: Матеріали III Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки", Київ (2015) доповідь
52. Selivanov, M.F.: Study of the critical state and long-term fracture of viscoelastic anisotropic bodies using nonlinear fracture models. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016) доповідь

SUMMARY

Selivanov M.F. Quasi-static problems of fracture mechanics for elastic and viscoelastic bodies in the framework of cohesive zone models. – Qualification scientific thesis as a manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.04 “Mechanics of deformable solids” (113 – applied mathematics). – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of deformed state of two-dimensional viscoelastic bodies containing cracks with failure zones as well as to the slow crack growth in viscoelastic orthotropic media.

Numerical-analytical method for the investigation of deformed state of a cracked body is presented. Influence of failure zones which are formed in front of the crack tip is taken into account by introducing the cohesive zone model. The model provides the finite stress condition and allows ascribing all non-linear effects of deformation to the cohesive zone. Effective algorithms are developed to find solutions for the uniform traction-separation law as well as for the non-uniform ones. In the latter case, the coupled problem of elasticity is solved. The algorithm is based on the procedure of determination of contact stresses between crack faces; it allows avoiding the solution of nonlinear systems to find cohesive lengths. In the case of mixed mode cracks, some multiple cohesive zone model are considered; these models use unmatched intervals for normal and shear tractions. When the cohesive lengths are small enough the concept of thin structure is used to find the separation; the concept considerably simplifies the solving algorithm and provides initial estimate when the problem is solved for non-small failure zones.

When cohesive zone model is introduced, it is assumed that the crack growth occurs when the normal or shear separation and corresponding work of separation simultaneously reach their critical values. Basing on the found

solutions for separations the system of equation is obtained to find critical state parameters of a crack with failure zones. Using the non-uniform traction-separation law requires solving of nonlinear systems with unknown parameters of traction distribution and cohesive length. Correspondence between critical state parameters and parameters of fracture toughness, which is forming traction-separation law, is investigated. Numerical solutions are built for given uniformly distributed stresses at infinity and system of point forces in the vicinity of a crack. A combination of the above-mentioned types of loading is also considered. Mixed type is used to form the zone of partial contact between crack faces.

Solution of the problem on a separation of crack faces is used in the investigation of slow crack growth along the predefined path. Effective methodology is developed for finding the kinetic curves of crack growth along the orthotropic axes of composite, which phases shows viscoelastic properties. It is shown that in the case of compressive forces (i.e. the forces that diminish the separation) the crack can propagate the distance several times greater than its initial length. The growth of a crack with partially contacting faces is investigated; it is shown that disappearing of contact zone can fasten the transition to the dynamic crack propagation.

The problem of multisite fracture is considered. The solution for crack faces separation is obtained for the parallel cracks; kinetic curves are built for the slow growth of collinear cracks of different lengths.

Key words: cohesive zone model, multiple cohesive zone, traction-separation law, cohesive length, partial contact of crack faces, collinear cracks, slow crack growth, kinetic curves of crack growth, composite material with viscoelastic components.

Зміст

ВСТУП	15
1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	24
2 РУЙНУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ТІЛА ВНАСЛІДОК ПОВІЛЬНОГО ПОШИРЕННЯ ТРІЩИНИ	51
2.1 Поле пружних напружень і переміщень в околі тріщини . . .	53
2.2 В'язкопружні середовища. Функції повзучості та релаксації	67
2.3 Теорія докритичного поширення тріщини у в'язкопружному тілі	79
2.4 Приклади визначення ядра інтегрального рівняння повільного зростання тріщини	81
2.5 Результати та висновки	92
3 ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ З РІВНОМІРНИМ ЗАКОНОМ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ В ДОСЛІДЖЕННЯХ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНОЮ	95
3.1 Визначення переміщень берегів тріщини в рамках моделі зони зчеплення	98
3.2 Несиметричне зростання тріщини	129
3.3 Моделювання докритичного поширення тріщини у в'язкопружному тілі з використанням концепції тонкої структури. Зростання тріщини з частковим контактом берегів	142

3.4	Алгоритм розв'язання задач механіки тріщин у рамках моделі зони зчеплення та приклад його застосування при дослідженні повільного поширення тріщин	152
3.5	Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин із зонами передруйнування	159
3.6	Результати та висновки	165
4	ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ З РІВНОМІРНИМ ЗАКОНОМ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ В ДОСЛІДЖЕННЯХ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНОЮ	167
4.1	Врахування контактної взаємодії берегів тріщини при визначенні напружено-деформованого стану	169
4.2	Визначення переміщень берегів тріщини з ділянкою контакту в рамках моделі зони зчеплення	185
4.3	Алгоритми визначення розкриття тріщини, що враховують особливості моделі зони зчеплення	190
4.4	Повільне зростання системи двох колінеарних тріщин	203
4.5	Результати та висновки	209
5	АНАЛІЗ ЗАКОНІВ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДОКРИТИЧНОГО І КРИТИЧНОГО СТАНІВ ТІЛА З ТРІЩИНОЮ	212
5.1	Переміщень берегів тріщини та робота зчеплення за кусково-лінійного розподілу зчеплення	214
5.2	Визначення закону розподілу зчеплення для докритичного та граничного станів	240
5.3	Використання моделі зони зчеплення спільно з гіпотезою тонкої структури	257

5.4	Описання повільного зростання тріщини у в'язкопружному тілі на основі моделі зони зчеплення	266
5.5	Використання сингулярних інтегральних рівнянь при дослідженні докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною в рамках моделі зони зчеплення	273
5.6	Результати та висновки	293
	ВИСНОВКИ	296
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	298
	ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації	317

ВСТУП

Актуальність теми. Інженерним розрахункам, що враховують наявність тріщин в ізотропних та ортотропних в'язкопружних тілах, приділяється все більше уваги у зв'язку з тим, що вони зосереджені на виявленні границь опору руйнуванню й довговічності конструкцій, виготовлених із сучасних матеріалів, таких як армовані пластики, нанокompозити та ін. Переважно ці розрахунки базуються на результатах лінійно-пружної механіки руйнування. Коли нелінійною поведінкою матеріалу в околі вершини тріщини можна знехтувати лінійна механіка руйнування дає ефективні результати при прогнозуванні граничного стану тріщини.

У багатьох випадках визначення параметрів стану граничної рівноваги при наявності тріщини в конструкції з композитного матеріалу, бетону або іншого квазікрихкого матеріалу розмір зони передруйнування виявляється не достатньо малим у порівнянні з іншими характеристичними розмірами, що призводить до невідповідності умовам застосування силового критерію. Деякі механізми (утворення мікротріщин та порожнин у фронті тріщини, їх злиття, бріджинг та інші механізми на мікрорівні), що супроводжують розвиток тріщини, мають істотний вплив на невиконання цих умов. Якщо розмір зони не є достатньо малим за інші характерні розміри задачі, незамінним інструментом аналізу стає модель зони зчеплення (МЗЗ). Складні фізичні ефекти, що мають місце в околі вершини тріщини, можна змоделювати за допомогою введення нелінійних ефектів деформування, що знесені на відрізок на продовженні тріщини.

Більшість досліджень у рамках МЗЗ проведені за допомогою методу скінченних елементів. Апарат теорії функції комплексної змінної дозволяє виявити основні закономірності між параметрами моделі та параметрами стану граничної рівноваги, зробити висновки, що можуть бути використаними при розрахунках тіл складної геометрії та за умов різних схем наван-

таження. До того ж виникає можливість задовольнити умову скінченності напружень у тілі, виконання якої вимагають класичні теорії повільного поширення тріщин.

Неоднорідність поля напружень на лінії розташування тріщини може призводити до часткового контакту берегів тріщини, що необхідно враховувати при визначенні параметрів граничного стану та при дослідженні повільного підростання тріщини. Врахування зсувного поля напружень вимагає застосування сучасних моделей, що пов'язують зсувні та нормальні зчеплення, які вводяться при використанні моделі.

Врахування вищезгаданих обставини обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні наступних науково-дослідних робіт: НДР 1.3.1.445п “Дослідження довготривалого деформування та руйнування анізотропних в'язкопружних тіл” номер державної реєстрації 0103U008055, 2003–2004 рр.; НДР № 1.3.1.345 “Дослідження квазістатичних процесів розвитку тріщин у композитах на основі моделей нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0104U000300, 2004–2007 рр.; НДР № 1.3.1.358 “Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей деформування і руйнування композитних матеріалів для розв'язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій”, номер державної реєстрації 0107U000163, 2007–2011 рр.; НДР № 1.3.1.487п “Дослідження впливу в'язкопружних властивостей композитів на концентрацію напружень поблизу отворів при статичному навантаженні”, номер державної реєстрації 0109U000252, 2009–2010 рр.; НДР № 1.3.1.366 “Досліджен-

ня механізмів квазістатичного розвитку тріщин в анізотропних і кусково-однорідних тілах при розтязі і зсуві з застосуванням підходів мезомеханіки руйнування”, номер державної реєстрації 0107U008617, 2008–2012 рр.; НДР № 1.3.1.503п “Дослідження квазістатичних процесів деформування і початкового руйнування пружних і в’язкопружних ортотропних пластин з колінеарними тріщинами при розтязі”, номер державної реєстрації 0115U002393, 2011 р.; НДР № 1.3.1.385 “Розробка моделей нелінійного деформування та руйнування конструктивних матеріалів з урахуванням їх дефектності, анізотропії, в’язкопружних та пластичних властивостей”, номер державної реєстрації 0112U000252, 2012–2016 рр.; НДР № 1.3.1.386 “Дослідження квазістатичних процесів розвитку тріщин у в’язкопружних і нелінійно пружних тілах на основі моделей нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0113U002153, 2013–2015 рр.; НДР № 1.3.1.408 “Визначення тріщиностійкості і довговічності композитних матеріалів на основі методів нелінійної механіки руйнування”, номер державної реєстрації 0115U005710, 2016–2017 рр.

Мета та завдання дослідження. Мета роботи полягає в постановці й розв’язанні задач механіки тріщин на основі сучасних моделей для врахування наявних біля вершин тріщини зон передруйнування, визначенні на основі отриманих розв’язків параметрів граничної рівноваги пружних тіл із тріщинами та прогнозуванні кінетики повільного поширення тріщини у в’язкопружному середовищі.

Для досягнення цієї мети необхідно:

1. Розвинути метод розв’язання задач лінійної в’язкопружності для врахування в’язкопружних властивостей матеріалів компонент композита.
2. Сформулювати строгу математичну постановку задачі механіки тріщин із зоною передруйнування у в’язкопружних ізотропних та ортотропних тілах в умовах дії розтягувальних та зсувних зусиль.

3. Розробити ефективний підхід до визначення параметрів докритичного стану та стану граничної рівноваги тіла з тріщиною змішаного режиму руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув).
4. Отримати ефективний числово-аналітичний метод розв'язання задач повільного поширення тріщин нормального відриву у в'язкопружних середовищах; врахувати можливий частковий контакт берегів тріщини при докритичному зростанні.
5. Побудувати розв'язки нових плоских задач для необмеженого тіла з тріщиною за наявності зони передруйнування та за умови неоднорідного поля напружень на лінії розташування тріщини.
6. Провести апробацію алгоритму визначення параметрів стану граничної рівноваги тіла з тріщиною при дослідженні впливу параметрів форми закону зчеплення-відриву (ЗЗВ).

Об'єктом дослідження є кінетика повільного поширення тріщини нормального відриву в ізотропних і ортотропних в'язкопружних тілах та параметри стану граничної рівноваги тіла з тріщиною змішаного режиму руйнування в ізотропних і ортотропних пружних тілах.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан зазначених тіл із тріщинами, в околі вершин яких утворюються зони передруйнування.

Методи дослідження. При розв'язанні задач лінійного спряження з розривними правими частинами використовувалися точні аналітичні методи теорії функцій комплексної змінної. Розкриття тріщини шукалося для кусково-лінійного розподілу зчеплення або щільності розкриття, причому зчеплення пов'язано з відривом (який є розв'язком задачі) законом зчеплення-відриву. Цей закон у процесі пошуку розв'язку задачі задовольнявся за допомогою стандартних числових методів розв'язання нелінійних систем рівнянь з використанням їх лінеаризації. Вимога скінченності напружень у тілі вносить у систему для параметрів розподілу зчеплення

нелінійні рівняння, що унеможливають лінеаризацію. Щоб уникнути цієї незручності була використана модифікована постановка, в основі якої лежить методика врахування контактної взаємодії берегів тріщини. Реалізацію цієї методики зведено до використання ітеративної процедури, на кожному кроці якої розв'язується або лінійна система рівнянь (у разі рівномірного ЗЗВ), або нелінійна система (у разі нерівномірного ЗЗВ), що дозволяє лінеаризацію.

Для отримання розв'язку для в'язкопружного розкриття використано принцип пружно-в'язкопружної аналогії для залежних від часу граничних умов та запропоновані в роботі алгоритми оберненого перетворення Лапласа, що використовують методи раціональної апроксимації, та операторного методу, що використовують операторні ланцюгові дроби.

Отриману на основі критерію критичного розкриття тріщини систему інтегральних рівнянь та нерівностей, що описує зміну положення вершин тріщини з часом, розв'язано шляхом координатно-часової дискретизації та використання стандартних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:

1. Побудовані ефективні методики отримання розв'язків задач лінійної в'язкопружності. Розв'язки знайдено у вигляді інтеграла Больцмана з дробово-експоненційним ядром.
2. Отримано розв'язок задачі про розкриття тріщини в рамках МЗЗ з рівномірними розподілами нормального і зсувного зчеплень для схеми навантаження з розподіленим напруженням на нескінченності та системою зосереджених сил в околі тріщини. Враховано можливий контакт берегів тріщини.
3. Методику дослідження контактної взаємодії берегів тріщини застосовано для визначення розкриття тріщини в рамках МЗЗ з рівномірним законом розподілу зчеплення. Отриманий алгоритм не передбачає

розв'язання систем нелінійних рівнянь відносно довжин зчеплення, а використовує ітеративне розв'язання систем лінійних рівнянь.

4. Запропонована методика розв'язання системи інтегральних рівнянь та нерівностей, що описує положення вершин тріщини зі зміною часу. Реалізація методики зводиться до послідовного визначення положення вершин тріщини в дискретні моменти часу на основі координатно-часової дискретизації.
5. Побудовані системи для визначення параметрів докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною нормального відриву в рамках МЗЗ. Отримано асимптотичний розв'язок, який можна використовувати як початкове наближення для розв'язання нелінійних визначальних систем.
6. Запропонована постановка, яка дозволила використати МЗЗ при дослідженні стану граничної рівноваги тріщини змішаного режиму руйнування (нормальний відрив та поперечний зсув). Використано фізично обґрунтовані зв'язки між відривами та зчепленнями. Розв'язок для розкриття, отриманий на основі цієї постановки, задовольняє умови плавності змикання берегів тріщини та відсутності перекриття її берегів, а також неперервно збігається до розв'язку задачі для моделі без зон зчеплення при зникненні зсувної складової поля напружень. Постановка використовує модель складної зони зчеплення зі спільними хвостами прикладання нормальних та зсувних зчеплень. Використана постановка зводить задачу до розв'язання змішаної основної задачі теорії пружності (на одній частині границі задано напруження, на іншій – комбінацію нормального напруження та горизонтального переміщення).

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних поста-

новок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла та механіки руйнування; застосуванням обґрунтованих, здебільшого точних аналітичних методів розв'язання поставлених задач; використанням експериментально перевірених критеріїв руйнування; узгодженістю та збігом деяких одержаних розв'язків із відомими в літературі результатами, отриманими за допомогою інших методів; відповідністю постановок, результатів і висновків до фізичної суті задач.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання розроблених методів, що враховують сучасні моделі тріщин, для дослідження стану граничної рівноваги пружного тіла з тріщиною, механізму переходу наявної у в'язкопружному тілі тріщини до повільного зростання та механізму саме повільного поширення. Отримані розв'язки можна розглядати як еталонні при тестуванні результатів числових методів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародних наукових конференціях і форумах, зокрема: Міжнародна наукова школа (Симферополь, 2004), Dynamical systems modelling and stability investigation: International Conference (Київ, 2005), 7th, 8th, 9th International Fracture Conferences (Коджаелі, Туреччина, 2005, 2007, 2009), Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпродзержинськ, 2007), III міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки” (Київ, 2015), Китайсько-український науково-технологічний форум (Харбін, Китай, 2016)

У повному обсязі дисертація доповідалася й обговорювалася на науковому семінарі відділу механіки руйнування матеріалів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.ф.-м.н., професор А.О. Камінський, 2016 р.); на науковому семінарі за напрямком “Механіка руйнування та втоми” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН Укра-

їни (керівники – д.ф.-м.н., професор А.О. Камінський та д.т.н., професор В.П. Голуб, 2017 р.); на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2017 р.); на семінарі з механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2017 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертації висвітлено в 52 наукових працях, з них 6 статей [128, 130, 131, 169–171] у провідних міжнародних журналах, 37 статей [19–25, 27–47, 63–65, 68, 69, 71, 72, 74, 129] у наукових фахових виданнях України, та 8 тез доповідей і матеріалів міжнародних наукових конференцій. Праці [63–66, 69–72, 166–168] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У працях [4, 19–25, 27–47, 67, 68, 73, 74, 128–131, 169–172], що опубліковано в співавторстві, здобувачеві належить: 1) розробка методів розв’язання задач лінійної в’язкопружності для композита, матеріали компонент якого виявляють спадкові властивості; 2) аналітичні розв’язки для переміщень берегів тріщини внаслідок наявності системи зосереджених сил у постановці задачі, яка розв’язується в рамках МЗЗ з рівномірним ЗЗВ; 3) побудова моделей тріщини змішаного режиму руйнування; 4) розробка алгоритмів дослідження параметрів граничного та докритичного станів тіла з тріщиною при моделюванні ЗЗВ нерівномірним розподілом; 5) моделювання несиметричного поширення однієї та системи колінеарних тріщин. Здобувачеві повністю належить числова реалізація й ілюстрація отриманих результатів, частково – розробка методики дослідження кінетики симетричного зростання однієї тріщини та методи розв’язання задач лінійної в’язкопружності.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається

з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел зі 192 найменувань та одного додатку. Загальний обсяг дисертації становить 322 сторінки, разом зі 105 рисунками та 4 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультантові – доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Олексійовичу Камінському за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

При проектуванні елементів конструкцій або деталей машин важливим кроком є виявлення найбільш ймовірного типу їх виходу з ладу та вибір належного критерію. Для забезпечення заданого ресурсу експлуатації елемента конструкції необхідно вивчити особливості руйнування матеріалу елемента та конструкції в цілому. Руйнування характеризується утворенням нових поверхонь у матеріалі та є одним із видів механічного пошкодження. На базовому рівні основною особливістю процесу є порушення міжатомних зв'язків у твердому тілі. Проте, з макроскопічної точки зору, руйнування можна розглядати як розділення елемента конструкції на дві або більше частин через поширення тріщин. У процесі руйнування відбуваються зародження, зростання й об'єднання мікропор і тріщин у матеріалі. Отже, при вивченні руйнування твердих тіл в ідеалі треба було б розглядати такі різноманітні фактори, як мікроскопічні явища на різних масштабних рівнях та макроскопічні ефекти, що стосуються навантаження, умов навколишнього середовища й геометрії елемента конструкції. Через доволі складний характер цього явища, на сьогодні, як видається, немає єдиної теорії, що задовільно справляється з усіма його важливими аспектами. Цілком природно, що в цьому випадку всі теорії, розроблені для вивчення руйнування твердих тіл, намагаються розглянути руйнування з однієї з трьох точок зору, а саме, з мікроскопічної або атомної, мікроструктурної та макроскопічної або механіки суцільного середовища.

З точки зору технічних застосувань, саме макроскопічні теорії, засновані на поняттях механіки суцільного середовища і класичної термодинаміки, надали кількісні робочі інструменти для дослідження руйнування конструкційних матеріалів. У макроскопічному підході до руйнування, як правило, передбачається, що матеріал містить деякі дефекти, які можуть бути осередками руйнування, та що середовище являє собою однорідний континуум у тому сенсі, що розмір домінантного дефекту є великим у порівнянні з характерним мікроструктурним розміром матеріалу. Отже, задачею є дослідження впливу прикладених навантажень, геометрії дефекту, умов навколишнього середовища й поведінки матеріалу на процес руйнування в твердому тілі – предмет, який став відомим як механіка руйнування [107]. Проблема руйнування не може бути повністю вирішена лише на основі класичних континуальних моделей деформівного середовища. Теорія тріщин займає особливе місце в механіці твердого деформівного тіла оскільки поширення тріщини визначається процесами, що відбуваються як на макро-, так і на мікрорівні. Механіка руйнування як математичний інструмент аналізу опору зародженню та поширенню тріщин у своєму розвитку опирається на моделі й методи механіки суцільного середовища, використовуючи матеріалознавство, фізику твердого тіла, хімію та інші природничі науки.

Найважливішою метою досліджень механіки руйнування в'язкопружних тіл є встановлення закономірностей між реологічними властивостями в'язкопружних матеріалів та процесом повільного докритичного розвитку тріщин руйнування в таких матеріалах. Вивчення процесу руйнування матеріалів зі спадковими властивостями вимагає введення моделей та критеріїв, що якісно відрізняються від моделей та критеріїв руйнування крихких та квазікрихких матеріалів.

Численні експериментальні дослідження показують, що біля вершин тріщин у полімерах і композитах на їх основі виникають *зони передруй-*

нування, що потім рухаються разом із фронтом тріщини. Виникнення зон передруйнування викликано високим рівнем напружень поблизу фронту тріщини. Матеріал у цій зоні перебуває в напівзруйнованому стані. Форма зони передруйнування, її структура й розміри мають істотне значення для правильного опису механізмів руйнування. Застосування моделей руйнування, що враховують зони послаблених зв'язків (зони передруйнування), виявились найбільш ефективними для опису розвитку тріщин у в'язкопружних тілах. Ці моделі є двофазними: матеріал зазнає дві фази руйнування, на відміну від однофазних моделей Гріффітса [117] та Ірвіна [123], де суцільний матеріал у процесі руйнування одразу (без проміжного етапу) переходить у зруйнований стан. Перша фаза характеризується відсутністю поширення тріщини, у зоні передруйнування відбувається процес переходу до поширення. Друга фаза характеризується докритичним підростанням тріщини. Вибір тієї чи іншої моделі руйнування для опису росту тріщин у в'язкопружних тілах обумовлюється передусім фізичними та механічними властивостями матеріалу.

Основи механіки руйнування викладено в [55–57, 75, 81, 82, 85, 95, 97, 99, 100, 105, 112, 113, 119, 132, 139, 140, 156, 158, 160, 173, 177, 182, 191]. Кожну модель тріщини в механіці руйнування можна пов'язати з одним або декількома критеріальними співвідношеннями. Найважливіші критерії механіки руйнування включають: енергетичний критерій Гріффітса [117], силовий критерій Ірвіна [123], критерій критичного розкриття тріщини Велса [184], критерій руйнування при стиску Гузя [6], критерій критичного інваріантного J -інтеграла Черепанова – Райса [80, 159], енергетичний критерій повільного поширення тріщин Кнауца [134].

Серед досліджень граничної рівноваги пружних та пружнопластичних тіл із тріщинами слід відзначити роботи наступних вчених: Александров В.М., Андрейків О.Є., Баренблатт Г.І., Бережницький Л.Т., Бог-

данов В.Л., Болотін В.В., Вітвицкий П.М., Гольдштейн Р.В., Гузь І.О., Гузь О.М., Зозуля В.В., Камінський А.О., Качанов Л.М., Кіпніс Л.А., Кіт Г.С., Кушч В.І., Леонов М.Я., Лобода В.В., Мартиненко М.А., Меньшиков В.О., Меньшиков О.В., Морозов Е.М., Морозов М.Ф., Назаренко В.М., Острик В.І., Панасюк В.В., Партон В.З., Попов В.Г., Попов Г.Я., Саврук М.П., Слеп'ян Л.Й., Улітко А.Ф., Хорошун Л.П., Черепанов Г.П., Шевельова А.Є., Ярема С.Я., Broberg K.B., Cottrell A.H., Dugdale D.S., Erdogan F., Gdoutos E.E., Gross D., Liebowitz H., Rice J.R., Sih G.C., Williams M.L., Zak A.R.

Існує два основних підходи встановлення критерію руйнування або критерію розповсюдження тріщини: підхід, що використовує поле напружень в околі вершини тріщини (локальний) та баланс енергії (глобальний). У рамках першого підходу спочатку аналізується напружено-деформований стан і обчислюються параметри, що характеризують цей стан в околі вершини тріщини. В рамках лінійно-пружного аналізу тіла з тріщиною напруження в околі вершини тріщини змінюється як $r^{-1/2}$, де r – відстань до вершини. Напруження стає необмеженим з наближенням r до нуля. Ця сингулярність унеможливує застосування класичних критеріїв міцності матеріалів. Фундаментальна концепція механіки руйнування містить сингулярність напружень у вершині тріщини, але не використовує напруження безпосередньо при визначенні стану граничної рівноваги тіла з тріщиною. Це положення викликане вимогою обмеженості напружень у тілі деяким граничним значенням (границею текучості або міцністю зчеплення), а сингулярність напружень обумовлена результатами лінійної теорії пружності при аналізі ідеально гострої тріщини.

Також загально визнаною є думка, що сингулярне поле напружень достатньо точно описує реальне поле напружень, а розбіжності між цими двома полями містяться лише в невеликій області в околі вершини тріщи-

ни. Це стосується квазікрихкого руйнування. Напруження в околі вершини тріщини в лінійно пружному тілі мають наступну універсальну форму, незалежну від прикладеного навантаження та геометрії тіла з тріщиною.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), який залежить від прикладеного навантаження й геометрії тіла з тріщиною; (r, θ) – полярні координати з центром у вершині тріщини; навантаження та геометрія симетричні відносно лінії тріщини. Рівняння (1.1) демонструє, що K_I є мірою інтенсивності напружень біля вершини тріщини. На основі експериментальних спостережень Ірвін запропонував критерій руйнування, який стверджує, що тріщина почне поширюватись, коли КІН досягне свого критичного значення

$$K_I = K_{Ic}, \quad (1.2)$$

де K_{Ic} – критичний КІН – стала, що визначається експериментом. Таким чином Ірвіном було сформульовано силовий критерій руйнування. Цей критерій принципово відрізняється від класичних критеріїв міцності, побудованих на основі напружень. Він використовує не напруження чи деформації безпосередньо, а коефіцієнт пропорційності поля напружень у вершині тріщини. КІН став новим параметром матеріалу, що характеризує опір матеріалу поширенню тріщин (тріщиностійкість).

В основі критерію (1.2) лежать результати лінійної пружності, в рамках якої існує сингулярність у вершині ідеально гострої тріщини та можна визначити КІН. Реальні процеси руйнування в вершині тріщини не можна

описати на основі лінійної теорії пружності. Раціональність критерію обумовлена малістю зони передруйнування, яка міститься в сингулярному полі напружень (1.1), визначеному коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I .

Другий підхід для встановлення критерію руйнування оснований на розгляді глобального балансу енергії при поширенні тріщини. Згідно з цим підходом визначається потенціальна енергія тіла з тріщиною за заданого навантаження й аналізується віртуальний приріст довжини тріщини. Розглянемо двовимірне пружне тіло з тріщиною довжини λ . Повну потенційну енергію на одиницю товщини позначимо $\Pi = \Pi(\lambda)$. Для малого приросту довжини $d\lambda$ приріст потенційної енергії становить $-d\Pi$. Гріффітс припустив, що ця частина енергії в тілі з тріщиною буде йти на утворення нової поверхні тріщини. Позначимо поверхневу енергію на одиницю площі γ . Цю величину можна обчислити за допомогою фізики твердого тіла. Повна поверхнева енергія нової поверхні тріщини становить $2\gamma d\lambda$. Рівняння балансу енергії Гріффітса можна записати наступним чином

$$-d\Pi = 2\gamma d\lambda \quad \text{або} \quad \frac{d\Pi}{d\lambda} = -2\gamma.$$

Швидкість вивільнення енергії G , запропонована Ірвіном, визначається як зменшення потенційної енергії на утворення одиниці поверхні тріщини під дією сталого навантаження, тобто

$$G = -\frac{d\Pi}{d\lambda}. \quad (1.3)$$

Використовуючи підхід балансу енергії, критерій руйнування має наступний вигляд

$$G = G_c.$$

Цей критерій фундаментально відрізняється від класичного критерію міцності. Він містить загальну енергію тіла з тріщиною та поверхневу енергію, яку можна розглядати тільки на атомному рівні. Так само як і K_{Ic} , характеристика G_c є константою матеріалу, введеною в механіці руйнування для оцінки опору руйнуванню.

Критерії руйнування (1.2) і (1.3) в дійсності є еквівалентними. Однак, експериментально виміряні критичні значення швидкості вивільнення енергії для таких матеріалів як метали значно перевищують 2γ . Це відбувається тому, що пластичні деформації в околі вершини тріщини також роблять значний внесок в опір розповсюдженню тріщини.

Механіка руйнування вводить два нові поняття: КІН та швидкість вивільнення енергії. Ці дві величини відокремлюють механіку руйнування від класичної теорії міцності. Щоб використовувати критерії на основі коефіцієнтів інтенсивності для прогнозування руйнування матеріалу або конструкції, необхідно спочатку обчислити КІН для заданого навантаження та геометрії. На другому кроці треба визначитись із критичним значенням КІН. Далі рівняння (1.2) може бути використаним для визначення максимально допустимого рівня навантаження, що не викликає зростання тріщини заданої довжини, або максимально можливої довжини тріщини, яка не буде поширюватись при заданому рівні навантаження.

Перевагою використання підходу, що базується на КІН, є простота обчислення цієї величини та її критичного значення. На відміну від першого підходу, критерій (1.3), що використовує швидкість вивільнення енергії, більш природно можна поширити на випадки, у яких підлягають врахуванню нелінійні ефекти. Таке поширення можливе внаслідок універсальності поняття енергії.

КІН та швидкість вивільнення енергії покладено в основу лінійно-пружної механіки руйнування (ЛПМР). Тіло, що містить тріщину, розгляда-

ється як лінійно-пружне середовище, а нелінійні ефекти є незначними і ними можна знехтувати.

Модифікованим підходом, що використовує КІН, можна скористатися для прогнозування руйнування тіла з тріщиною, коли пластичні деформації, зосереджені в околі вершини тріщини, є малими. Але у випадку значних пластичних деформацій цей підхід, як і підхід, що базується на швидкості вивільнення енергії, не дає ефективного прогнозу щодо руйнування. Декілька інших параметрів було запропоновано для прогнозування руйнування за умови наявності значних нелінійних деформацій. Серед цих параметрів відзначимо J -інтеграл, критичне розкриття в вершині тріщини, кут розкриття в вершині тріщини. Однак критерії руйнування, що базуються на цих параметрах не стали настільки успішними як силовий та енергетичний критерії в ЛПМР.

Коли нелінійною поведінкою матеріалу в околі вершини тріщини можна знехтувати, ЛПМР дає ефективні результати при прогнозуванні граничного стану тріщини (визначенні параметрів задачі, що забезпечують початок розповсюдження тріщини). Найважливішим здобутком після появи ЛПМР стала модель тріщини з зоною послаблених зв'язків біля її вершини. При незначних розмірах цієї зони можна ефективно використовувати концепцію квазікрихкого руйнування, яка оперує найважливішим параметром ЛПМР – коефіцієнтом інтенсивності напружень.

У багатьох випадках визначення граничного стану при наявності тріщини в конструкції з композитного матеріалу, бетону або іншого квазікрихкого матеріалу, розмір зони передруйнування виявляється не достатньо малим у порівнянні з іншими характеристичними розмірами, що призводить до невідповідності умовам застосування КІН. Деякі механізми (утворення мікротріщин та порожнин біля фронту тріщини, їх злиття, бріджинг [87] та інші механізми на мікрорівні), що супроводжують розвиток тріщини,

мають істотний вплив на невиконання цих умов. Якщо розмір зони не є достатньо малим по відношенню до інших характерних розмірів задачі, незамінним інструментом аналізу стає *модель зони зчеплення*. Складні фізичні ефекти, що мають місце в околі вершини тріщини, можна змоделювати за допомогою введення нелінійних властивостей деформування, що знесені на відрізок на продовженні тріщини. При цьому в усій області поза цим відрізком матеріал можна вважати лінійно-пружним. Зона передруйнування моделюється двома поверхнями, які стягуються силами зчеплення (далі ці сили називатимемо *зчепленням*). Втрата несучої здібності матеріалом характеризується повним роз'єднанням поверхонь зчеплення. Зчеплення та відстань між поверхнями зчеплення (називатимемо їх *відривом*) пов'язані законом зчеплення-відриву (ЗЗВ).

Вперше ідея МЗЗ була висловлена Баренблатом [1, 88], але, з огляду на складну математичну реалізацію, була змінена гіпотезою сталості розподілу координата-зчеплення. Моделі Баренблата передували моделі Леонова й Панасюка [51] та Дагдейла [106], які було введено в припущенні, що напруження в тілі обмежені величиною σ – границею крихкої міцності (Леонов і Панасюк) або границею текучості (Дагдейл) та перед фронтом тріщини утворюється відрізок зі сталими стискальними силами цієї інтенсивності.

Вперше реалізувати головну ідею МЗЗ вдалося Хіллерборгу [120] за допомогою методу скінченних елементів. У роботі вперше висловлена думка, що ЗЗВ не є характеристикою міжмолекулярної взаємодії, про що йшлося в роботах Баренблата, Леонова та Панасюка, а є макрохарактеристикою матеріалу. У згаданій роботі запропоновано ЗЗВ у лінійній та білінійній формах розміщення.

Сучасні уявлення про моделювання в рамках МЗЗ викладено в [98, 101, 102, 109, 122, 154, 165, 179, 192]. Основна частина досліджень із використанням МЗЗ проводиться у формулюваннях методу скінчених елементів (див.

огляд [154]). Незначна кількість робіт, присвячених визначенню параметрів зони зчеплення, використовує метод комплексних потенціалів. Нормальний відрив знайдено в [61] для ступінчастого розподілу зчеплення та ЗЗВ у лінійній формі зміцнення. В [174] побудований вираз для вертикальних переміщень берегів тріщини для кусково-лінійного розподілу зчеплення та ЗЗВ у лінійній формі розміцнення. В [121] за допомогою комплексних потенціалів у рамках концепції квазікрихкого руйнування розроблено метод визначення параметрів зони зчеплення на основі пружного поля напружень в околі цієї зони. Перевагою використання комплексних потенціалів є можливість у явному вигляді включити у визначальну систему для параметрів зони зчеплення умову скінченності напружень, яка еквівалентна умові плавності змикання берегів тріщини. При використанні методу скінченних елементів для побудови розв'язків задач теорії тріщин у рамках МЗЗ спеціальної умови для плавного змикання берегів тріщини не накладається [175]. Відсутність такої умови вимагає задати довжину зчеплення, яка вводиться за допомогою характеристичного розміру $E\phi/\sigma_{\max}^2$ (E – модуль Юнга, ϕ – енергія руйнування, σ_{\max} – міцність зчеплення), що з точністю до числового множника збігається з довжиною зчеплення. Отже, довжина зчеплення не залежить від параметрів форми ЗЗВ.

Для застосування МЗЗ у найпростішій формі (для простого режиму руйнування) необхідно два параметри (рис. 1.1): енергія руйнування (граничне значення роботи зчеплення) та міцність зчеплення (максимальна інтенсивність зчеплення). Ці параметри мають бути визначеними за допомогою стандартизованих тестів [111] з метою прогнозування розвитку тріщини в інших структурних конфігураціях. Окрім енергії руйнування та міцності зчеплення ЗЗВ включає своїми параметрами ще й параметри форми, таким чином надаючи більшої гнучкості описанню тріщиностійкості. Існує набір базових законів, що успішно застосовуються в рамках

МЗЗ. Критичне розкриття тріщини перетворюється на характеристичний розмір, що залежить від параметрів ЗЗВ.

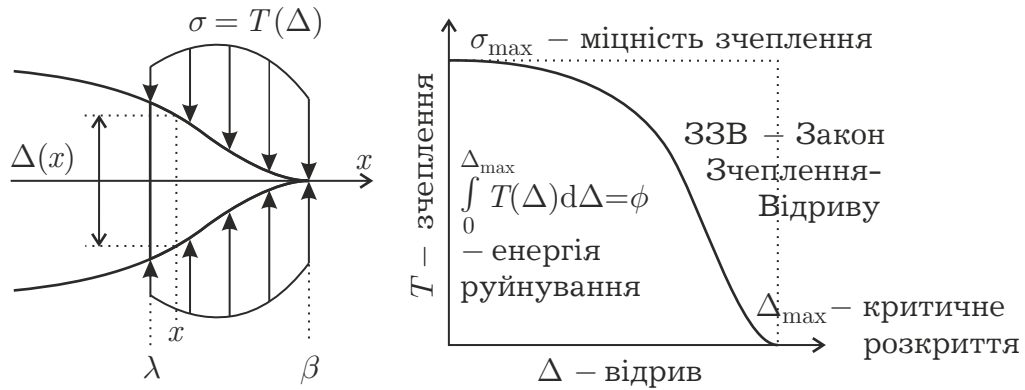


Рис. 1.1 – Модель зони зчеплення

Найпоширеніші форми ЗЗВ (рис. 1.2): а) кубічного полінома [180], б) трапецоїдальна [181], в) гладка трапецоїдальна [164], г) експоненційна [153], д) лінійного розміщення [120], е) білінійного розміщення [89, 157].

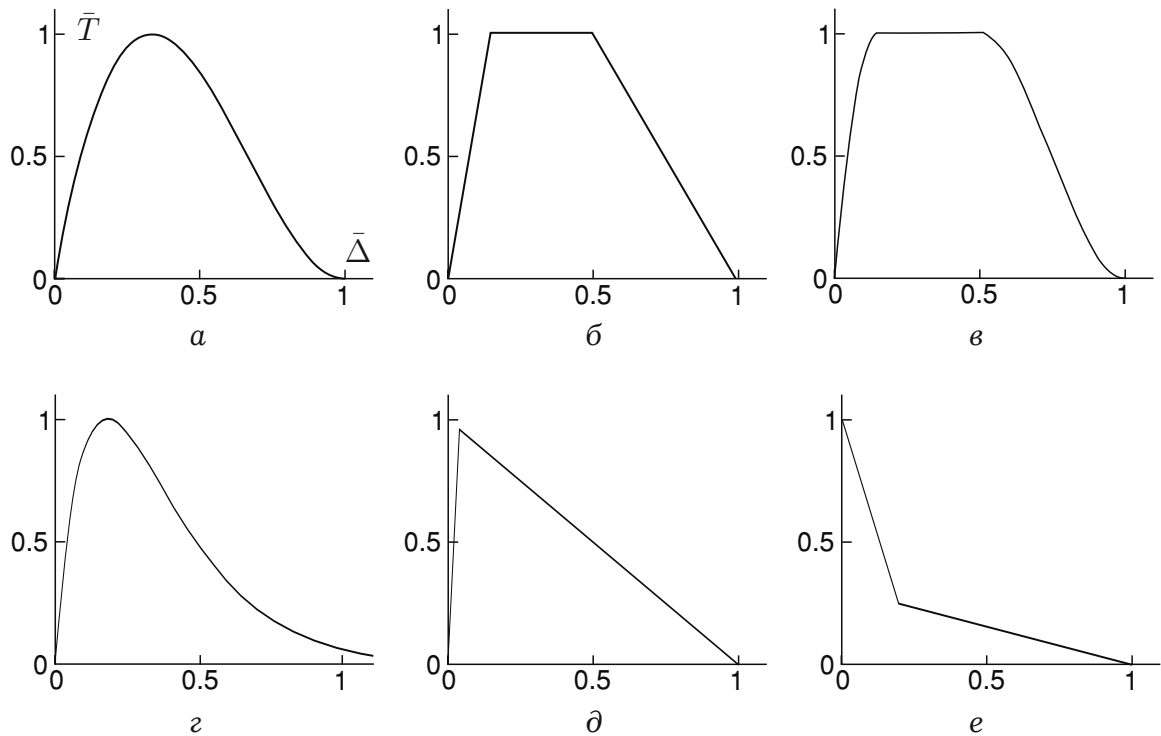


Рис. 1.2 – Найпоширеніші форми ЗЗВ (\bar{T} і $\bar{\Delta}$ – відповідно зчеплення та відрив, віднесені до своїх максимально можливих значень σ_{\max} і Δ_{\max})

При змішаному режимі руйнування параметрів тріщиностійкості більшає. Енергія руйнування, ϕ_I , міцність зчеплення, σ_{\max} та параметри фор-

ми для тріщини нормального відриву доповнюються енергією руйнування, ϕ_{II} , міцністю зчеплення, τ_{\max} та параметрами форми для тріщини зсуву, а також параметрами, що пов'язують ці два режими руйнування. Останні визначаються умовою потенційності поля зчеплення [154].

У роботі [91] у термінах методу функції комплексної змінної представлено розв'язок задачі про переміщення берегів тріщини змішаного режиму руйнування (до пластини на нескінченності прикладене навантаження σ_{∞} , σ_x^{∞} та τ_{∞}), коли нормальне та зсувне зчеплення розподілені рівномірно з інтенсивностями σ_{\max} і τ_{\max} відповідно, причому ділянки їх прикладання збігаються. Для цієї моделі використання умови скінченності напружень призводить до зв'язку між зчепленням і зовнішнім навантаженням у вигляді $\sigma_{\infty}/\sigma_{\max} = \tau_{\infty}/\tau_{\max}$, який не дозволяє незалежно вводити міцності зчеплення для двох режимів руйнування. Таку проблему вдалося вирішити [124] шляхом введення нормального і зсувного зчеплень на відмінних відрізках. Принцип моделювання отримав назву *складних зон зчеплення* [122].

Одним із найпоширеніших типів руйнування є повільне поширення тріщин внаслідок повзучості матеріалу. Явище поширення тріщин у в'язкопружних матеріалах обумовило численні теоретичні дослідження протягом останньої половини сторіччя (огляд основних концепцій моделювання повільного поширення тріщин у в'язкопружних матеріалах зроблено в [10, 133]). Були розглянуті три важливі етапи росту тріщини: ініціювання, повільне стійке поширення й початок швидкого нестабільного зростання. Вважається, що ініціація руйнування з наявної у в'язкопружному тілі тріщини, вимагає деякого часу (часу інкубації), що залежить від геометрії, схеми прикладеного навантаження й спадкових властивостей матеріалу. Рівень навантаження при цьому може бути суттєво нижчим за критичний рівень, що визначає стан граничної рівноваги у випадку відсутності спадковості механічних властивостей матеріалу. Протягом початкової ста-

дії матеріал у вершині тріщини поступово втрачає можливість опиратися поширенню тріщини. Друга стадія руйнування полягає в докритичному зростанні тріщини, що має місце навіть за незмінного рівня інтенсивності зовнішніх зусиль і характеризується незначною зміною швидкості поширення. Стан нестабільності характеризується суттєвим збільшенням швидкості вершини тріщини. Умова, що визначає початок критичного зростання, має важливе значення, оскільки вона визначає термін виходу елемента конструкції з ладу.

Розглянемо тіло з тріщиною, до границі ∂V якого прикладена система сил. Покладаємо, що береги тріщини вільні від навантаження. Складемо найпростіше рівняння балансу енергії в межах представлень Гріффітса, без врахування теплової, електромагнітної та інших немеханічних видів енергії, а також об'ємних сили та швидкості зміни кінетичної енергії [145]:

$$P_e = P_i + 2\gamma\dot{\lambda} \quad (1.4)$$

де $\lambda(t)$ – довжина тріщини; швидкості виконання роботи зовнішніми силами та зміни пружної енергії тіла

$$P_e = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i d\Gamma, \quad P_i = \frac{d}{dt} \int_V W(\varepsilon) dV. \quad (1.5)$$

Ввівши позначення

$$\dot{\Pi} = P_e - P_i, \quad (1.6)$$

з (1.4) отримаємо енергетичний критерій Гріффітса.

За відсутності поширення тріщини

$$P_i = \int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV. \quad (1.7)$$

При квазістатичному поширенні тріщини в лінійно-пружному тілі $\sigma_{ij} \sim r^{-1/2}$, $\varepsilon_{ij} \sim r^{-1/2}$ (r – відстань від вершини тріщини). Для обчислення похідної за часом в нерухомій системі координат (x, y) використаємо правило $\dot{f} = \dot{f}(\xi, \eta) - f_{,1}(\xi, \eta)\dot{\lambda}$, де $(\xi = x - \lambda, \eta = y)$ – рухома система координат, пов'язана з вершиною тріщини довжиною λ , “ $_{,1}$ ” означає похідну за ξ . Отже, $\varepsilon_{ij,1} \sim r^{-3/2}$ та інтеграл у (1.7) є розбіжним. У разі поширення тріщини треба “ізолювати” сингулярність у вершині:

$$P_i = \frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\varepsilon) dV + \frac{d}{dt} \int_{V-V_C} W(\varepsilon) dV, \quad (1.8)$$

де V_C – елементарний об'єм, що містить контурна поверхня C навколо фронту тріщини. Оскільки контур C є нерухомим у рухомій системі координат, то диференціювати можна під знаком інтеграла:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\varepsilon) dV = \int_{V_C} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}(\xi, \eta) dV. \quad (1.9)$$

Тепер $\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}(\xi, \eta) \sim r^{-1/2}$, інтеграл у (1.9) є збіжним.

Для другого доданку в (1.8) використаємо правило диференціювання за часом інтеграла за рухомим об'ємом:

$$\frac{d}{dt} \int_{V-V_C} W(\varepsilon) dV = \int_{V-V_C} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_C W(\varepsilon) \dot{\lambda} n_1 dC. \quad (1.10)$$

Скориставшись рівнянням рівноваги ($\sigma_{ij,j} = 0$) та теоремою Гауса – Остроградського, запишемо

$$\int_{V-V_C} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{V-V_C} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV = \int_{\partial V} \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j dC - \int_C \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j dC. \quad (1.11)$$

Підставимо (1.11) в (1.10), потім (1.9) і (1.10) – в (1.8), потім (1.5) і, насамкінець, (1.8) – в (1.6). Отримаємо

$$\dot{\Pi} = \int_C \left(W(\varepsilon) \dot{\lambda} n_1 + \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j \right) dC - \int_{V_C} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}(\xi, \eta) dV.$$

Унаслідок того, що $\dot{u}_i = \dot{u}_i(\xi, \eta) - u_{i,1}(\xi, \eta) \dot{\lambda}$, при стягуванні C в вершину тріщини величина \dot{u}_i матиме ту саму сингулярність, що й $-u_{i,1}(\xi, \eta) \dot{\lambda}$. Вираз (1.6) можна подати у вигляді

$$\dot{\Pi} = J \dot{\lambda}, \quad (1.12)$$

$$J = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C (W(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} u_{i,1} n_j) dC. \quad (1.13)$$

Величина J відноситься до вершини тріщини й містить пружний розв'язок задачі для околу цієї вершини. У механіці руйнування інтеграл у виразі (1.13) носить назву J -інтеграла Черепанова – Райса. J -інтеграл не залежить від вибору контура C та може бути використаний як параметр тріщиностійкості.

З урахуванням (1.12) рівняння енергетичного балансу (1.4) дає для пружного тіла

$$(2\gamma - J) \dot{\lambda} = 0. \quad (1.14)$$

Отже, повільне зростання тріщини неможливо описати на основі рівняння енергетичного балансу при $2\gamma \neq J$ (випадок $2\gamma = J$ відповідає катастрофічному зростанню тріщини з необмеженою швидкістю, оскільки інерційними ефектами було знехтувано).

Описати зростання тріщини у разі наявності в'язкопружних властивостей матеріалу вдалося за допомогою МЗЗ. Потужність поглинання енергії в зоні передруйнування можна подати у вигляді

$$\dot{\Phi} = \int_{\lambda}^{\beta} \sigma \dot{\Delta}(x, t) dx, \quad (1.15)$$

σ – напруження в зоні зчеплення, $\Delta(x, t)$ – в'язкопружне розкриття в зоні зчеплення. Залежно від моделі тріщини, зчеплення σ може бути як функцією координати, так і функцією розкриття $\Delta(x, t)$. Положення вершини зони зчеплення β в кожний момент часу має визначатись умовою скінченності напружень у точці $x = \beta$. Включимо $\dot{\Phi}$ в праву частину (1.4). З урахуванням обмеженості напружень у вершині модельної тріщини рівняння енергетичного балансу набуде вигляду

$$\int_{\lambda}^{\beta} \sigma \dot{\Delta}(x, t) dx = \phi \dot{\lambda}. \quad (1.16)$$

Критерій (1.16) вперше запропонував Кнаус зі співавторами [134–137, 150], звівши задачу до аналізу локального балансу енергії в зоні передруйнування.

Якщо в (1.16) перейти до рухомої системи координат ($\xi = x - \lambda$), енергія, що витрачається на руйнування, визначається величиною

$$\dot{\Phi} = \int_0^{\beta-\lambda} \sigma \{ \dot{\Delta}(\xi, t) - \dot{\lambda} \Delta_{,1}(\xi, t) \} d\xi.$$

Включимо цей доданок в ліву частину (1.4). За умови незалежності розкриття від часу в рухомій системі координат отримаємо

$$- \int_0^{\beta-\lambda} \sigma \Delta_{,1}(\xi, t) d\xi = \phi.$$

Очевидно, що це критеріальне співвідношення можна переписати у формі

$$\int_0^{\Delta_{\max}} \sigma d\Delta(\xi, t) = \phi, \quad (1.17)$$

де величина Δ_{\max} є розкриттям у вершині, що відповідає стану граничної рівноваги. Критерій руйнування (1.17) було запропоновано Шепері [161–163] і часто називається критерієм критичної роботи зчеплення.

У роботі [146] показано, що критерій енергетичного балансу (1.16) збігається з критерієм критичного розкриття у випадку рівномірного розподілу зчеплення, а також якщо розкриття має вигляд

$$\Delta(x, t) = f(x - \lambda).$$

Дійсно, підставивши цей вираз у (1.16), отримаємо

$$\phi \dot{\lambda} = -\sigma \dot{\lambda} \int_{\lambda}^{\beta} f'(x - \lambda) dx = \sigma \dot{\lambda} [f(0) - f(\beta - \lambda)].$$

Унаслідок того що $\Delta(\beta, t) = 0$,

$$\Delta(\lambda, t) = \Delta_{\max}, \quad (1.18)$$

де у випадку рівномірного розподілу зчеплення $\Delta_{\max} = \phi/\sigma$.

Цей критерій теорії повільного поширення тріщин вперше було запропоновано в роботі Савіна та Камінського [61], а також Кострова, Нікітіна та Флітмана [49, 50, 138].

Нормальний відрив задачі теорії тріщин знайдено в [161] для залежного від координати зчеплення з використанням концепції тонкої структури та умови скінченності напружень

$$\tilde{\Delta}(\xi) = \frac{C}{\pi} \int_0^{\ell} \sigma(\xi') g(\xi, \xi') d\xi' \cdot H(\xi),$$

$$g(\xi, \xi') = 2\sqrt{\frac{\xi}{\xi'}} - \ln \left| \frac{\sqrt{\xi'} + \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi}} \right|, \quad K_I = \sqrt{\frac{2\ell}{\pi}} I, \quad I = \int_0^1 \frac{\sigma(\ell\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta,$$

де $\xi = \beta - x$, $\ell = \beta - \lambda$, $C = 4(1 - \nu^2)/E$ (розглянуто випадок плоскої деформації), H – функція Гевісайда. Для визначення в'язкопружного розкриття використано узагальнений принцип відповідності [115, 116]. Якщо напруження на лінії тріщини є незалежними від модулів пружності та швидкість зростання тріщини $\dot{\lambda}$ є невід'ємною, то в'язкопружне розкриття має вигляд

$$\Delta(\xi, t) = \frac{2}{\pi} \int_{t_1}^t C(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Sigma[\xi(\tau)] d\tau, \quad \Sigma(\xi) = \int_0^\ell \sigma(\xi') g(\xi, \xi') d\xi', \quad (1.19)$$

де C є оберненим перетворенням Лапласа функції \bar{C} , що знаходиться зі співвідношення

$$\tilde{C} \equiv s\bar{C} = \frac{4(1 - \tilde{\nu}^2)}{\tilde{E}},$$

\tilde{E} і $\tilde{\nu}$ – помножені на параметр перетворення s перетворення Лапласа модуля релаксації E та коефіцієнта Пуасона ν відповідно. В (1.19) момент часу t_1 відповідає потраплянню вершини тріщини в точку x . Розв'язати задачу підстановкою (1.19) до критерію (1.17) виявилось складним завданням. Тому було запропоновано шукати наближений розв'язок, який отримано в припущенні, що кривина функції $C(t)$ у логарифмічній шкалі, n є малою. Нахил n запропоновано обчислювати в момент часу $t = \ell/(3\dot{\lambda})$. Відрив при використанні цієї гіпотези отримано у формі

$$\Delta = \frac{2}{\pi} C(\sqrt[n]{\lambda_n \xi / \dot{\lambda}}) \Sigma(\xi), \quad \lambda_n = \frac{3\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)}{4(n + 3/2) \Gamma(n + 3/2)}.$$

Підстановка цієї апроксимації для розкриття в (1.17) дає рівняння відносно довжини тріщини:

$$C(\sqrt[n]{\lambda_n \ell / \dot{\lambda}}) = \frac{4\phi}{K_I^2}.$$

У роботах Маккартні [147, 148] показано, що спроба використання рівняння енергетичного балансу для тріщини, що повільно зростає, на основі представлень Гріффітса (без урахування підведення тепла до тіла та швидкості зміни кінетичної енергії) у пружному випадку призводить до рівняння (1.14). У роботі [147] в'язкопружне розкриття тріщини напівдовжини λ в умовах плоскої деформації знайдено у формі

$$\Delta(x, t) = 4\pi(1 - \nu^2) \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial \Omega(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, t) = \frac{\sigma\lambda}{\pi^2} \left\{ \left(\frac{\xi}{\lambda} + 1 \right) \operatorname{arch} \left[\frac{1 + \lambda \cos^2 \theta}{(1 + \lambda) \cos \theta} \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{\xi}{\lambda} - 1 \right) \operatorname{arch} \left[\frac{1 - \lambda \cos^2 \theta}{|1 - \lambda| \cos \theta} \right] \right\}, \\ \lambda < \xi < \beta, \quad \frac{\lambda}{\beta} = \cos \theta, \quad \theta = \frac{\pi \sigma_\infty}{2\sigma}, \end{aligned}$$

$J(t)$ – функція повзучості реологічних співвідношень зі сталим коефіцієнтом Пуассона ν :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= (1 + \nu) \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ (1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} \} d\tau, \\ \varepsilon_{22} &= (1 + \nu) \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{ (1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} \} d\tau, \\ \varepsilon_{12} &= (1 + \nu) \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Підстановка (1.20) в (1.15) вимагає введення деяких спрощень шляхом апроксимації, її результати отримано в [147] у формі

$$\dot{\Phi} \approx \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi} \sigma^2 \lambda^2 \left[J(0) \left\{ \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (2\theta^2 + \theta^4) + \frac{\dot{\sigma}_\infty}{\sigma_\infty} \frac{4\theta^2}{3} \right\} + j(0) \frac{\theta^4}{3} \right]. \quad (1.21)$$

Точне значення для дисипації вдалось отримати лише для матеріалу

Максвелла ($J(t) = E^{-1} + \kappa t$):

$$\dot{\Phi} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \sigma^2 \lambda^2 \left[J(0) \left\{ 2 \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (\theta \operatorname{tg} \theta - \ln \sec \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\dot{\sigma}_\infty}{\sigma_\infty} (\theta^2 \sec^2 \theta - \theta \operatorname{tg} \theta) \right\} + \dot{J}(0) (\theta \operatorname{tg} \theta - \ln \sec \theta) \right].$$

Підстановка (1.21) в (1.16) дає рівняння повільного зростання тріщини

$$\dot{\lambda} \left[\frac{\phi}{(1-\nu^2)J(0)} - K_{\text{I}}^2 \right] = \frac{\pi K_{\text{I}}^4}{24\sigma^2} \left[4 \frac{\dot{\sigma}_\infty}{\sigma_\infty} + \frac{\dot{J}(0)}{J(0)} \right], \quad K_{\text{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi \lambda}.$$

У роботі [138] рівняння повільного зростання тріщини на основі критерію критичного розкриття знайдено у формі

$$\frac{4\sigma\ell}{\pi} \left\{ \omega_0 + \int_{t_0}^t \Omega(t-\tau) F \left[\frac{\dot{\lambda}}{\ell} (t-\tau) \right] d\tau \right\} = \Delta_{\max},$$

де ω_0 і Ω – відповідно миттєве значення оператора спадковості $2/E$ (у випадку плоского напруженого стану) та його ядро; t_0 – момент часу, що відповідає появі вершини зони зчеплення в поточний момент положення вершини тріщини: $\beta(t_0) = \lambda(t)$,

$$F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}. \quad (1.22)$$

У роботі [146] проведено порівняння рівнянь повільного зростання тріщини, отриманих на основі енергетичного критерію (1.16) та критерію критичного розкриття (1.18). Встановлено, що ці рівняння збігаються при використанні концепції квазікрихкого руйнування та незмінної з часом інтенсивності зовнішнього навантаження.

У роботах Камінського [11, 12, 14, 126] розроблено числово-аналітичний метод дослідження повільного зростання тріщини вздовж наперед відомого

шляху для вісесиметричних задач. В основу покладено розв'язок задачі теорії пружності для розрізу з контурними умовами, що містять залежне від координати зчеплення

$$\sigma^{\pm}(x) = -\sigma_{\infty} + \sigma[H(x - \lambda) - H(x - \beta)], \quad \tilde{\Delta}'_x(x = \beta, \lambda) = 0,$$

де H – функція Гевісайда, функція F визначена в (1.22), $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ – пружний відрив у точці x на лінії тріщини з координатою вершини λ .

Розв'язок задачі теорії в'язкопружності отримано за допомогою принципу Вольтерра для змінних із часом граничних умов [5, 18]. Згідно з принципом, частини границі, де задані переміщення, не можуть переходити на ділянки, де було задано напруження. Іншим важливим обмеженням є незалежність напруження на лінії тріщини від спадкових модулів матеріалу. В'язкопружне розкриття

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}[x, \lambda(t)] + \int_0^t \dot{l}(t - \tau)\tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]d\tau.$$

Застосування критерію критичного розкриття (1.18), $\Delta[t, \lambda(t)] = \Delta_{\max}$, який має виконуватися в кожний момент часу для тріщини, що зростає, дало змогу отримати рівняння для визначення тривалості інкубаційного періоду, $\Delta[t_0, \lambda(0)] = \Delta_{\max}$ та положень вершини тріщини λ як функції часу

$$l(t)\tilde{\Delta}[\lambda(t), \lambda(t)] + \int_0^t \dot{l}(t - \tau)\tilde{\Delta}[\lambda(t), \lambda(\tau)]d\tau = \Delta_{\max}.$$

Відзначено відмінності в дослідженнях граничного стану в пружному та в'язкопружному тілах із тріщиною. У першому випадку граничний стан визначається комбінацією параметрів зовнішнього навантаження та довжини тріщини, за яких розкриття у вершині набуває свого граничного значення.

Руйнування в'язкопружного матеріалу відбувається за докритичних рівнів навантаження відповідної пружної задачі. Протягом інкубаційного періоду тріщина не зростає, розкриття у вершині з часом досягає свого критичного значення. За обмеженої повзучості можна визначити граничний рівень навантаження, при якому розкриття у вершині не досягне свого граничного значення за як завгодно тривалий проміжок часу. При дослідженні повільного поширення тріщини для заданого приросту часу шукається таке положення вершини, що забезпечує досягнення в ній критичного значення в'язкопружним розкриттям (рис. 1.3). Виявилось, що за значних розмірів зони передруйнування періоди інкубаційного та перехідного (протягом якого тріщина проходить початковий розмір зони) періодів докритичного розвитку складають значну частину загальної довговічності.

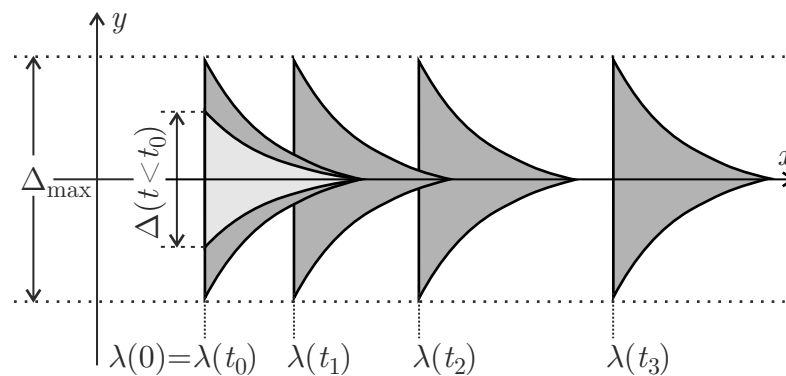


Рис. 1.3 – Положення зон зчеплення в дискретні моменти часу

Теорія повільного підростання тріщини була експериментально перевірена [15]. Порівняння експериментальних даних докритичного зростання наскрізної тріщини в тонкій пластині, виготовленій із трьох шарів кварцової тканини та поліетиленового наповнювача, з теоретичними результатами наведені на рис. 1.4. На цих рисунках K_I^s – безпечний КІН, K_I^* – КІН, за якого докритичний розвиток тріщини не відбувається, λ – напівдовжина тріщини, T – довговічність тріснутої пластини. Результати теоретичних розрахунків подано суцільною кривою, експериментальні результати) – кружками.

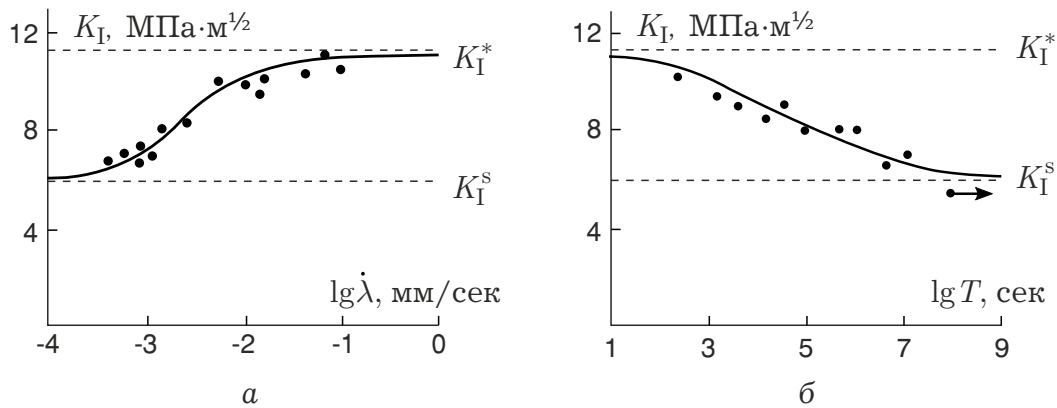


Рис. 1.4 – Кінетична крива (а) та довговічність пластини з тріщиною (б)

У роботах [13, 15, 16] експериментально встановлено, що при повільному зростанні тріщини в полімерах і композитах на їх основі розміри кінцевої зони ℓ та критичного розкриття Δ_{\max} практично не змінюються. На базі концепцій про сталість і малість розміру зони передруйнування отримано інтегро-диференційне рівняння докритичного розвитку тріщини у в'язко-пружному тілі

$$\frac{K_I^*}{K_I} = 1 + \frac{\ell}{\dot{\lambda}} \int_0^1 i\left(\frac{\ell}{\dot{\lambda}}s\right) F(s) ds - \frac{\dot{\sigma}_\infty}{\sigma_\infty} \left(\frac{\ell}{\dot{\lambda}}\right)^2 \int_0^1 i\left(\frac{\ell}{\dot{\lambda}}s\right) sF(s) ds,$$

де K_I та K_I^* – КІН та його критичне значення відповідно, λ – напівдовжина тріщини, σ_∞ – інтенсивність зовнішнього навантаження, i – ядро оператора в'язкопружності, а функція F визначена в (1.22).

Вільямс [185, 186] розглянув зростання сферичних порожнин із використанням глобального енергетичного балансу, що узагальнює ідеї Гріффітса [117] для в'язкопружних тіл.

Внук [187–189] запропонував критерій критичного відриву як альтернативу критерію критичного розкриття для випадку, коли критичне розкриття є залежним від часу. Введене критеріальне співвідношення постулює, що кількість деформації, створеної під час проходження зоною передруйнування фіксованої точки P , є величиною сталою:

$$\int_{t_0}^t \dot{\Delta}[\xi(\tau), \ell(\tau)] d\tau = \Delta_0,$$

$\xi = x - \lambda$, момент часу t_0 відповідає появі в точці $P = \lambda$ вершини зони передруйнування, t – досягненню в цій точці граничного стану. Пружне розкриття визначається в рамках концепції квазікрихкого руйнування

$$\tilde{\Delta}(\xi, \ell) = \frac{8\sigma\ell}{\pi E} F\left(\frac{\xi}{\ell}\right).$$

У всіх згаданих визначальних роботах, присвячених розробкам теорій повільного зростання тріщин, при отриманні числових результатів використана гіпотеза рівномірності розподілу зчеплення. Виключенням є [136], де передбачається білінійний розподіл зчеплення: ця величина змінюється від нуля до свого максимально можливого значення (міцності зчеплення) на ділянці біля вершини тріщини, а далі збігається з міцністю зчеплення. У роботі [190] досліджено розвиток просторової тріщини з кільцевою зоною зчеплення у в'язкопружному ізотропному масиві; покладається, що міцність зчеплення є залежною від історії навантаження. В [11] запропоновано модель, що постулює сталість довжини зчеплення під час зростання, міцність зчеплення вважається залежною від часу величиною. В [90, 143] запропоновано модель зростання тріщини в рамках МЗЗ з залежним від часу ЗЗВ у старіючому в'язкопружному матеріалі.

Про можливість описання квазістатичного зростання тріщини без використання моделі зони зчеплення розгорнулася дискусія в [104, 149]. Автори прийшли до спільного висновку, що при моделюванні необхідно задовольняти вимогу скінченності напружень у тілі, а введення моделі є одним зі способів це зробити.

Загальним для багатьох із вищезгаданих теорій є концепція зони передруйнування біля вершини тріщини, яка характеризується стрибком переми-

щень та відповідним розподілом зчеплення. Довжина зони передруйнування визначається умовою обмеженості напружень у вершині зони. Розподіл зчеплення покладається сталим під час повільного підростання тріщини. Здебільшого розглянуто рівномірний розподіл зчеплення.

Дослідження напружено-деформованого стану в'язкопружних анізотропних тіл із тріщиною, що поширюється, проводяться переважно за допомогою двох методів – принципу пружно-в'язкопружної відповідності та принципу Вольтерра для змінних із часом граничних умов.

У роботах Вольтерра зазначено, що при розв'язанні задач лінійної в'язкопружності (спадкової пружності) операції, що пов'язані з розв'язком диференціальних рівнянь теорії пружності та операцій інтегрування по часу, що пов'язані з обчисленням операторів Вольтерра, можуть виконуватися в довільному порядку. Звідси випливає наступне правило, яке називають принципом Вольтерра. Для розв'язання в'язкопружної задачі слід побудувати відповідний пружний розв'язок, а в кінцевому результаті замінити пружні сталі операторами в'язкопружності та розшифрувати отримані операторні функції.

У сорокові-п'ятдесяті роки минулого сторіччя, коли теорія в'язкопружності отримала новий розвиток у роботах американських авторів, при розв'язанні задач в'язкопружності широке розповсюдження отримав метод, який базується на перетворенні Лапласа. Для нього було сформульовано принцип відповідності, який по суті являє собою перефразування принципу Вольтерра. Виконавши перетворення Лапласа над рівняннями рівноваги, співвідношеннями зв'язку між деформаціями та напруженнями, співвідношеннями зв'язку між деформаціями, напруженнями та граничними умовами, отримаємо для зображень систему рівнянь, що збігається із системою теорії пружності. Її розв'язання нічим не відрізняється від розв'язання задачі звичайної теорії пружності: зображення напружень

та переміщень виявляються явно вираженими через зображення заданих на границі зусиль, переміщень та функцій в'язкопружності. Останній етап розв'язання в'язкопружної задачі буде полягати в тому, щоб перейти від зображень до оригіналів. Ця процедура повторює ту, що пропонувалася принципом Вольтерра, але в інших термінах.

Отже, при розв'язанні задач лінійної в'язкопружності анізотропних тіл застосування принципу Вольтерра призводить до розшифрування складних функцій операторів в'язкопружності. Таке розшифрування можна виконати шляхом представлення операторної функції операторним рядом Тейлора. Але при повільній збіжності такого ряду виникає необхідність в обчисленні великої кількості ітерованих ядер, що здебільшого є складною обчислювальною процедурою. До того ж одержаний на першому етапі розшифровки операторний ряд не буде належати до класу базового оператора та подальше розшифрування втратить сенс. Тому було запропоновано різні апроксимації операторної функції. Так у роботі [96] запропоновано квазіпружний метод, згідно з яким оператори в'язкопружності замінюються відповідними функціями повзучості та релаксації.

У роботах А.О. Камінського [8, 12, 17] було запропоновано апроксимувати функції резольвентних операторів операторним ланцюговим дробом (метод операторних ланцюгових дробів). Складну операторну функцію було розглянуто як суперпозицію елементарних функцій, послідовна розшифровка яких надала змогу отримати апроксимацію складної операторної функції у вигляді суми операторів базового типу.

Дослідження в'язкопружних властивостей композитів проводилось також у роботах [3, 58, 77–79, 83, 93, 94, 94, 110, 141, 151].

З огляду на сучасний стан проблеми моделювання зони послаблених зв'язків біля вершини тріщини виникає необхідність побудови числово-аналітичних методів дослідження стану граничної рівноваги тіла з трі-

щиною або їх системою. Важливою метою є поширення сучасних принципів моделювання на випадок змішаного режиму руйнування. Також необхідно включити сучасні принципи моделювання в рамках МЗЗ у теорії повільного поширення тріщин у в'язкопружних ортотропних матеріалах. Найпростіший варіант моделювання з рівномірним ЗЗВ треба поширити на випадок нерівномірного закону, враховуючи водночас умову скінченності напружень та наявність розвинених зон передруйнування. На розробку методів визначення параметрів стану граничної рівноваги пружних тіл із тріщинами в рамках МЗЗ та кінетики повільного поширення тріщин у в'язкопружному ортотропному матеріалі націлені дослідження даної дисертаційної роботи.

Розділ 2

РУЙНУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ТІЛА ВНАСЛІДОК ПОВІЛЬНОГО ПОШИРЕННЯ ТРІЩИНИ

У другій половині ХХ сторіччя виконувалися інтенсивні дослідження концентрації напружень біля отворів у пластинах і оболонках, виготовлених з в'язкопружних анізотропних матеріалів. При дослідженні композитів переважно розглядалися такі, що складаються з пружної арматури (скло, вуглеволокно) та в'язкопружного наповнювача (епоксидної смоли чи інших наповнювачів) [13,60]. Різниця між миттєвими й довготривалими модулями цих композитів була незначною, процес повзучості проходив за невеликий порівняно з терміном експлуатації проміжок часу. Тому для дослідження напруженого стану в таких композитних матеріалах здебільшого використовувались лише граничні значення спадкових характеристик: миттєве й довготривале [2,7].

Використання в сучасній промисловості нових матеріалів, які виявляють в'язкопружні властивості протягом усього часу експлуатації, призвело до більш уважного ставлення до описання релаксації чи повзучості таких матеріалів. З огляду на велику різницю між миттєвими й довготривалими модулями матеріалу, важливим фактором в описанні його механічних властивостей став час. Інформативними стали не тільки граничні значення модулів, а і їх значення під час деформування. Важливість отримання з достатньою точністю проміжних значень модулів обумовлена тим, що в багатьох дослідженнях проводиться моделювання механічних властиво-

стей композитів на основі матеріалів, що виявляють в'язкопружні властивості [9, 20, 21, 23–25, 30, 38, 42, 46, 63, 64, 66, 129]. Властивості композитів, своєю чергою, використовуються для досліджень напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Особливо уважно до таких досліджень треба підходити, коли з часом змінюються характеристики обох компонент композита. Зміна різниці між модулями двох матеріалів з часом обумовлює поведінку параметрів напруженого стану відмінну від тієї, що спостерігається за врахування властивостей спадковості лише матеріалу наповнювача.

Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ. Метод розв'язання задач теорії лінійної в'язкопружності, що базується на оберненому перетворенні Лапласа й апроксимації Паде, представлено в [169]. В [23–25, 38, 64, 66, 73, 129, 167, 170] розглянуто різноманітні аспекти моделювання спадкових властивостей композитного матеріалу на основі реологічних характеристик матеріалів його компонент. В [21, 63] досліджено перерозподіл із часом напружень в околі тріщини та еліптичного отвору в композитній пластині. Дослідження в [27, 30, 131] дає можливість зробити висновок про те, що напруження при немонотонній зміні співвідношення між модулями матеріалів компонент композита призводить до того, що напруження в точці околу еліптичного отвору може досягнути максимуму на дослідженому інтервалі зміни часу. В [28, 36, 42, 46, 68, 128] проведено дослідження впливу взаємного розташування кривих релаксації матеріалів компонент композита на кінетику зростання тріщини.

Розв'язання задач про повільне поширення тріщини умовно поділено в роботі на *три частини*: 1) визначення пружного розв'язку задачі; 2) знаходження ядер інтегральних рівнянь повільного зростання; 3) розв'язання системи інтегральних рівнянь і нерівностей, що описують поширення тріщин.

В даному розділі наведено основні співвідношення для дослідження кі-

нетики повільного поширення тріщини у в'язкопружному ортотропному тілі. Напружено-деформований стан тіла з тріщиною визначено в розділі 2.1 комплексними потенціалами у формі Колосова – Мусхелішвілі для ізотропного тіла та у формі Лехніцького для ортотропного тіла. Також для побудови розв'язків задачі використана інтегральна форма потенціалів. Плоска задача розв'язується шляхом зведення до задачі лінійного спряження (задачі Гільберта – Прівалова) для розривних самоврівноважених правих частин. Наведено алгоритм визначення розподілу напружень, що виникають внаслідок контакту берегів тріщини. У розділі 2.2 наведено вихідні форми функцій релаксації матеріалу композита або матеріалів його компонент; представлено методи побудови розв'язку задач лінійної теорії в'язкопружності, розв'язання яких вимагає теорія повільного поширення тріщини в ортотропному в'язкопружному тілі. Основні положення цієї теорії, в основу якої покладено принцип пружно-в'язкопружної аналогії для змінних з часом граничних умов та критерій критичного розкриття, наведено в розділі 2.3. У розділі 2.4 досліджено вплив спадкових характеристик матеріалу композита на ядра інтегральних рівнянь повільного поширення тріщини. Розглянуто як композити, властивості яких визначено експериментально, так і композити зі змодельованими властивостями.

2.1 Поле пружних напружень і переміщень в околі тріщини

Ізотропний матеріал. Напружений стан у пружному тілі у випадку плоскої задачі визначається трьома компонентами напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} . Вони задовольняють рівнянням рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Деформацію пружного тіла можна виразити через відносні подовження

ε_x і ε_y в напрямку осей x і y та через відносний зсув ε_{xy} . Величини ε_x , ε_y та ε_{xy} визначаються через переміщення u і v точок пружного тіла в горизонтальному й вертикальному напрямках

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Умова сумісності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

В умовах плоского напруженого стану компоненти деформацій пов'язані з компонентами напружень законом Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E}, & \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu) \tau_{xy}}{E}, & \varepsilon_z &= \frac{-\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}, \end{aligned}$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуасона.

Підставимо ε_x і ε_y разом зі співвідношенням

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right),$$

яке випливає з (2.10), в (2.2). Отримаємо

$$\frac{\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Рівняння рівноваги (2.10) можна задовольнити у випадку, коли компоненти напруження виражаються через функцію напружень $\phi(x, y)$ в наступний спосіб

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.4)$$

Підстановка (2.4) в (2.3) дає бігармонічне рівняння для знаходження ϕ :

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0.$$

Розв'язок цього рівняння дається формулою Гурси

$$\phi = \operatorname{Re}\{z\overline{\varphi(z)} + \chi(z)\}.$$

Напруження та переміщення визначаються формулами Колосова – Мусхелішвілі [54]

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re}\Phi(z), \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2.5)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)},$$

$$\psi(z) = \chi'(z), \quad \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z),$$

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \omega(z) = \int \Omega(z)dz.$$

Граничні умови на контурі розрізу вздовж $\Lambda = \cup_{k=1}^n (\beta_{k1}, \beta_{k2})$, згідно з другим рівнянням співвідношень (2.5),

$$\Phi^+(x) + \Omega^-(x) = \sigma_1^+, \quad \Phi^-(x) + \Omega^+(x) = \sigma_1^-,$$

де введено позначення $\sigma_1 = \sigma_y - i\tau_{xy}$. Додаючи та віднімаючи праві й ліві частини рівнянь, отримаємо задачу Гільберта – Прівалова для функцій $\Phi(z) \pm \Omega(z)$:

$$[\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- = \sigma_1^+ + \sigma_1^-,$$

$$[\Phi(x) - \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) - \Omega(x)]^- = \sigma_1^+ - \sigma_1^-.$$

Розв'язок цих задач у випадку наявності напружень у нескінченно віддалених точках має вигляд

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{\Lambda} \frac{[\sigma_i^+(x) + \sigma_i^-(x)] X^+(x)}{x - z} dx + 2 \frac{P(z)}{X(z)} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\sigma_i^+(x) - \sigma_i^-(x)}{x - z} dx - \Gamma_2 \end{array} \right\}, \quad (2.6)$$

$P(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + C_n$, сталі C_0 та Γ_2 визначаються умовами на нескінченності, сталі C_k ($k = 1, \dots, n$) – умовою однозначності переміщень,

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (z - \beta_{k1})^{1/2} (z - \beta_{k2})^{1/2}. \quad (2.7)$$

У випадку самоврівноважених контурних зусиль ($\sigma_i^+(x) = \sigma_i^-(x)$) розв'язок (2.6) набуває вигляду

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{\Lambda} \frac{\sigma^+(x) X^+(x)}{x - z} dx + 2 \frac{P(z)}{X(z)} \\ -\Gamma_2 \end{array} \right\}.$$

Ортотропний матеріал. Запишемо розв'язок задачі про напружено-деформований стан у лінійно-пружній ортотропній площині, що містить n розрізів $\Lambda_k = (\beta_{k1}, \beta_{k2})$ ($k = 1, \dots, n$) вздовж осі x .

Узагальнений закон Гука для головних напрямів осей ортотропії u і v подамо у вигляді

$$\varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E_{11}} - \frac{\nu_{21}\sigma_v}{E_{11}}, \quad \varepsilon_v = -\frac{\nu_{21}\sigma_u}{E_{11}} + \frac{\sigma_v}{E_{22}}, \quad \gamma_{uv} = \frac{\tau_{uv}}{G_{12}}. \quad (2.8)$$

Узагальнений закон Гука для напрямів x і y

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy},$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy},$$

де [53]

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{P}{E_{11}}, & a_{22} &= \frac{P + (k_a^2 - 1) \cos 2\theta}{E_{11}}, \\ a_{12} &= \frac{-\nu_{21} + \frac{r}{4} \sin^2 2\theta}{E_{11}}, & a_{66} &= \frac{m + 2\nu_{21} + r \sin^2 2\theta}{E_{11}}, \\ a_{16} &= \frac{1 - k_a^2 + r \cos 2\theta}{2E_{11}} \sin 2\theta, & a_{26} &= \frac{1 - k_a^2 - r \cos 2\theta}{2E_{11}} \sin 2\theta, \end{aligned}$$

$$m_a = \frac{E_{11}}{G_{12}} - 2\nu_{21}, \quad k_a = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}, \quad n_a = \sqrt{2k_a + m_a}, \quad r = 1 + k_a^2 - m_a, \quad (2.9)$$

$$P = 1/8 [3 + m_a + 3k_a^2 + 4(1 - k_a^2) \cos 2\theta + r \cos 4\varphi].$$

Коефіцієнти k_a і n_a у виразах (2.9) є параметрами узагальненого плоского напруженого стану ортотропної пластини та є мірою її анізотропії (для ізотропного випадку $k_a = 1$, $n_a = 2$).

В роботі [60] показано, що задачу двовимірної теорії пружності анізотропного тіла можна сформулювати в термінах двох аналітичних функцій φ та ψ узагальнених комплексної змінних $z_1 = x + s_1 y$ та $z_2 = x + s_2 y$ відповідно. Комплексні параметри анізотропії s_1 і s_2 є коренями характеристичного рівняння основного диференціального рівняння плоскої задачі теорії пружності

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0.$$

У випадку, коли анізотропний матеріал має три площини пружної симетрії та у разі збігу осей координат і головних осей ортотропії, це рівняння набуває вигляду

$$\hat{s}^4 + m_a \hat{s}^2 + k_a^2 = 0.$$

Корені рівняння $\hat{s}_1 = \gamma + i\beta_1$ і $\hat{s}_2 = -\gamma + i\beta_2$ або $\hat{s}_1 = i\beta_1$ і $\hat{s}_2 = i\beta_2$ ($0 < \beta_1 < \beta_2$), причому другий випадок відповідає більшості матеріалів із трьома площинами пружної симетрії.

При повороті системи координат відносно положення відповідного напрямку пружної симетрії

$$s_k = \frac{\hat{s}_k \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \hat{s}_k \sin \theta}.$$

Компоненти напружень і переміщень мають вигляд [52]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \{ s_1^2 \Phi(z_1) + s_2^2 \Psi(z_2) \}, & \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \{ \Phi(z_1) + \Psi(z_2) \}, \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \{ s_1 \Phi(z_1) + s_2 \Psi(z_2) \}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$u = 2 \operatorname{Re} \{ p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2) \}, \quad v = 2 \operatorname{Re} \{ q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2) \}, \quad (2.11)$$

де

$$p_k = a_{11}s_k^2 + a_{12} - a_{16}s_k, \quad q_k = a_{12}s_k + \frac{a_{22}}{s_k} - a_{26}, \quad (2.12)$$

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z)dz. \quad (2.13)$$

Для великих значень $|z|$

$$\Phi(z) = \Gamma + Az^{-1} + O(z^{-2}), \quad \Psi(z) = \Gamma' + Bz^{-1} + O(z^{-2}), \quad (2.14)$$

Γ і Γ' – визначаються на основі умов на нескінченності та (2.10) ($\text{Im}\Gamma = 0$) із системи

$$\begin{aligned} s_1^2\Gamma + s_2^2\Gamma' + \bar{s}_1^2\bar{\Gamma} + \bar{s}_2^2\bar{\Gamma}' &= \sigma_x^\infty \\ \Gamma + \Gamma' + \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}' &= \sigma_\infty \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$s_1\Gamma + s_2\Gamma' + \bar{s}_1\bar{\Gamma} + \bar{s}_2\bar{\Gamma}' = -\tau_\infty.$$

Для формулювання задачі Гільберта – Прівалова введемо функції [86]

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \Phi(z) + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} \Psi(z), & \Omega(z) &= \bar{\Phi}(z) + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{\Psi}(z), \\ \theta(z) &= \phi(z) + \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1} \psi(z), & \omega(z) &= \bar{\phi}(z) + \frac{\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1} \bar{\psi}(z). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введений параметр α є коренем квадратного рівняння

$$\frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} = \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1}. \quad (2.17)$$

Це співвідношення разом з (2.13) і (2.16) забезпечує рівність

$$\theta(z) = \int \Theta(z)dz.$$

Рівність

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz \quad (2.18)$$

випливає з того, що $\bar{\alpha}$ також є коренем квадратного рівняння (2.17), звідки

$$\frac{1 + \bar{\alpha}s_2}{1 + \bar{\alpha}s_1} = \frac{p_2 + \bar{\alpha}q_2}{p_1 + \bar{\alpha}q_1} \quad \text{і} \quad \frac{1 + \alpha\bar{s}_2}{1 + \alpha\bar{s}_1} = \frac{\bar{p}_2 + \alpha\bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha\bar{q}_1},$$

що забезпечує (2.18).

Утворимо комбінації напружень і переміщень

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha \equiv \sigma_y - \alpha\tau_{xy} = & (1 + \alpha s_1)\Theta(z_1) + (1 + \alpha\bar{s}_1)\Omega(\bar{z}_1) + \\ & + (1 + \alpha s_2)[\Psi(z_2) - \Psi(z_1)] + \\ & + (1 + \alpha\bar{s}_2)[\overline{\Psi(z_2)} - \overline{\Psi(z_1)}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha \equiv u + \alpha v = & (p_1 + \alpha q_1)\theta(z_1) + (\bar{p}_1 + \alpha\bar{q}_1)\omega(\bar{z}_1) + \\ & + (p_2 + \alpha q_2)[\psi(z_2) - \psi(z_1)] + \\ & + (\bar{p}_2 + \alpha\bar{q}_2)[\overline{\psi(z_2)} - \overline{\psi(z_1)}] \end{aligned}$$

відповідно. Переміщення берегів тріщини

$$u_\alpha^\pm(x) = (p_1 + \alpha q_1)\theta^\pm(x) + (\bar{p}_1 + \alpha\bar{q}_1)\omega^\mp(x). \quad (2.20)$$

З (2.15) випливає, що

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^\infty \equiv \sigma_\infty - \alpha\tau_\infty = \\ = (1 + \alpha s_1)\Gamma + (1 + \alpha s_2)\bar{\Gamma} + (1 + \alpha\bar{s}_1)\Gamma' + (1 + \alpha\bar{s}_2)\bar{\Gamma}'. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Функції, присутні у виразах для напружень (2.10) і переміщень (2.11), набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{\Theta(z) + \bar{\Omega}(z)}{2}, & \Psi(z) &= \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\Theta(z) - \bar{\Omega}(z)}{2}, \\ \phi(z) &= \frac{\theta(z) + \bar{\omega}(z)}{2}, & \psi(z) &= \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\theta(z) - \bar{\omega}(z)}{2}.\end{aligned}$$

На дійсній осі комплексної площини, коли y прямує до нуля зверху чи знизу до берегів розрізів, на основі (2.19) запишемо

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^+(x) &= (1 + \alpha s_1)\Theta^+(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega^-(x), \\ \sigma_\alpha^-(x) &= (1 + \alpha s_1)\Theta^-(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega^+(x).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Додамо та віднімемо праві й ліві частини рівнянь (2.22). Отримаємо дві задачі Гільберта – Прівалова

$$\begin{aligned}& [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^+ + \\ & + [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^- = \sigma_\alpha^+(x) + \sigma_\alpha^-(x), \\ & [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^+ - \\ & - [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)]^- = \sigma_\alpha^+(x) - \sigma_\alpha^-(x).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Розв'язок цих задач за наявності напружень у нескінченно віддалених точках має вигляд

$$\begin{aligned}(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) &= \\ &= \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_\Lambda \frac{[\sigma_\alpha^+(x) + \sigma_\alpha^-(x)]X^+(x)}{x - z} dx + 2 \frac{P(z)}{X(z)} \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{\sigma_\alpha^+(x) - \sigma_\alpha^-(x)}{x - z} dx - \Gamma_2 \end{aligned} \right\},\end{aligned}\tag{2.24}$$

$\Lambda = \cup_{k=1}^n \Lambda_k$, $P(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + C_n$, сталі C_0 та Γ_2 визначаються

умовами на нескінченності, сталі C_k ($k = 1, \dots, n$) – умовою однозначності переміщень, а функція $X(z)$ визначена в (2.7).

У випадку самоврівноважених контурних зусиль ($\sigma_\alpha^+(x) = \sigma_\alpha^-(x)$) розв'язок (2.24) набуде вигляду

$$(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\pi i X(z)} \int_{\Lambda} \frac{\sigma_\alpha^+(x) X^+(x)}{x - z} dx + 2 \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} \\ -\Gamma_2 \end{array} \right\}. \quad (2.25)$$

Інтегральне представлення комплексних потенціалів. Розглянемо першу граничну задачу плоскої теорії пружності для нескінченної ортотропної площини, послабленої прямолінійним розрізом із початком у точці $(-\lambda, 0)$ та кінцем у точці $(\lambda, 0)$. Отримаємо розв'язок задачі, коли на розрізі задано стрибки самоврівноважених напружень і похідних від переміщень

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\alpha^+(x) - \sigma_\alpha^-(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} [u_\alpha^+(x) - u_\alpha^-(x)] = iLg(x) \end{array} \right., \quad x \in \Lambda = (-\lambda, \lambda), \quad (2.26)$$

причому на кінцях розрізу стрибок переміщень $\Delta_\alpha(\pm\lambda) = 0$, а на нескінченності напруження та обертання відсутні. В (2.26) пружна стала

$$L = \frac{p_1 + \alpha q_1}{1 + \alpha s_1} - \frac{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1}{1 + \alpha \bar{s}_1}. \quad (2.27)$$

Скориставшись (2.22), з умови (2.26) отримаємо

$$\begin{aligned} \Theta^+(x) - \Theta^-(x) &= \frac{ig(x)}{1 + \alpha s_1}, \\ \Omega^+(x) - \Omega^-(x) &= \frac{ig(x)}{1 + \alpha \bar{s}_1}. \end{aligned}$$

Розв'язок цих задач лінійного спряження для функцій $\Theta(z)$ і $\Omega(z)$, що зникають на нескінченності, дається інтегралом типу Коші

$$\begin{cases} (1 + \alpha s_1)\Theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \frac{g(x)dx}{x - z}. \quad (2.28)$$

Нехай тепер на берегах розрізу задані самоврівноважені напруження

$$\sigma_{\alpha}^{\pm}(x) = p(x), \quad x \in \Lambda. \quad (2.29)$$

Комплексні потенціали $\Theta(z)$ і $\Omega(z)$ для цієї задачі шукаємо у вигляді (2.28). Задовольнимо за допомогою формул Сохоцького – Племеля граничну умову (2.29). Отримаємо для визначення функції $g(x)$ сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda} \frac{g(t)dt}{t - x} = p(x), \quad x \in \Lambda. \quad (2.30)$$

Розв'язок (2.30) має задовольняти умові

$$\int_{\Lambda} g(t)dt = 0,$$

яка забезпечує однозначність переміщень при обході контуру Λ .

Стрибок переміщень пов'язаний із їх щільністю співвідношенням

$$\Delta_{\alpha}(x) \equiv \Delta_{\text{I}}(x) + \alpha \Delta_{\text{II}}(x) = iL \int_{-\lambda}^x g(t)dt.$$

Умова контакту берегів тріщини. Важливість обчислення параметрів, що характеризують наявну в елементі конструкції тріщину, дала поштовх розвитку численних аналітичних та числових методів лінійної та нелінійної механік руйнування. Найважливішими характеристиками тріщини є КІН та розкриття берегів тріщини. Незалежно від типу тріщини (криволінійна чи прямолінійна, простого режиму руйнування чи змішано-

го) задача здебільшого розв'язується в припущенні відсутності взаємодії берегів, тобто для відкритої тріщини. Навіть якщо КІН тріщини нормального відриву K_I відмінний від нуля (від'ємний K_I свідчить про перекриття берегів тріщини в околі вершини), можливе перекриття берегів на деяких ділянках, що не містять вершин. Очевидним є факт впливу утвореної ділянки контакту на характеристики тріщини.

Відомо, що незначне перекриття берегів тріщини з'являється в розв'язку задачі навіть за прикладання тільки зсувних напружень у нескінченно віддалених точках пластини з тріщиною [91]. Розглянемо граничну умову, що містить вертикальні та горизонтальні переміщення берегів тріщини та похідні від функції серединної лінії тріщини. Цю умову можна сформулювати наступним чином: точки берегів тріщини при деформуванні залишаються на середній лінії тріщини (лінія, кожна точка якої ділить на дві рівні частини відрізок між сусідніми до деформування точками берегів).

Якщо вирази для переміщень берегів тріщини подати у формі

$$u^\pm(x) = u_0(x) \pm u_1(x), \quad v^\pm(x) = v_0(x) \pm v_1(x), \quad (2.31)$$

то середня лінія розташування тріщини в деформованому стані описується рівнянням $f(x + u_0) = v_0$ (рис. 2.1).

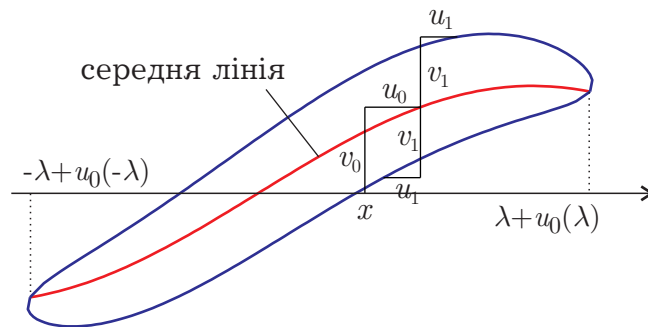


Рис. 2.1 – Деформований контур тріщини

Виберемо вектор, напрям якого збігається з напрямом нормалі до f у точці $x + u_0$,

$$\mathbf{n} = \left(-1, \frac{1}{f'(x + u_0)} \right), \quad f'(x + u_0) = \frac{v'_0}{1 + u'_0}. \quad (2.32)$$

Умову перекриття берегів можна записати у формі

$$\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{a}}) < 0, \quad \mathbf{a} = (u_1, v_1),$$

або, згідно з (2.32),

$$v_1(1 + u'_0) - u_1v'_0 < 0. \quad (2.33)$$

Рівняння для визначення контактних напружень запишеться відповідною рівністю

$$v_1(1 + u'_0) - u_1v'_0 = 0. \quad (2.34)$$

Це рівняння розв'яжемо у вузлах сітки на відрізку розташування тріщини. Контактні напруження будемо шукати в кусково-лінійній формі

$$\begin{aligned} \sigma(x) - \alpha\tau(x) &= \\ &= \frac{(b_k - x)(\sigma_{k-1} - \alpha\tau_{k-1}) + (x - b_{k-1})(\sigma_k - \alpha\tau_k)}{\Delta b_k}, \quad x \in (b_{k-1}, b_k) \end{aligned} \quad (2.35)$$

з напруженнями $\sigma_k - \alpha\tau_k$ у точках сітки b_k , $k = 0, \dots, n$ ($b_0 = -\xi\lambda$, $b_n = \xi\lambda$, $1 - \xi$ – додатна мала величина).

Нехай $\boldsymbol{\sigma}$ і $\boldsymbol{\tau}$ – вектори-стовпці з елементами σ_k і τ_k , які є значеннями нормальних та дотичних контактних напружень у вузлах апроксимації (2.35). Якщо пряма розташування тріщини збігається з однією з осей ортотропії та $\tau = k_{\text{tr}}\sigma$ (k_{tr} – коефіцієнт тертя між берегами тріщини), значення виразу лівої частини рівняння (2.34) у вузлових точках можна подати у

вигляді

$$\frac{LY}{4\pi^2\alpha_y}, \quad Y = V_1 \circ U_0 - V_0 \circ U_1,$$

$$V_1 = q_{22} - A\sigma, \quad U_0 = 2\pi e + L_2(q_{11} - \pi\sigma), \quad (2.36)$$

$$V_0 = L_2(q_{21} + \pi\alpha_y k_{tr}\sigma), \quad U_1 = q_{12} - \alpha_y k_{tr}A\sigma,$$

e – вектор-стовпець розмірності $n + 1$ з одиничними елементами, $a \circ b$ – добуток Адамара; α_y і L_2 – пружні сталі (L_2 відрізняється від L , визначеної в (2.27), знаком між доданками). Величини q_{ij} відповідають за переміщення, обумовлені дією сил поза контуром тріщини; матриця A містить геометричні параметри контактної взаємодії берегів тріщини.

Прирівнюванням Y до нуля отримаємо систему для визначення дискретного контактного напруження σ . Система $Y(\sigma) = 0$ є нелінійною, але можна легко записати її яacobіан:

$$A \circ [(\alpha_y k_{tr} V_0 - U_0) y] - \pi L_2 (V_1 + \alpha_y k_{tr} U_1) y,$$

де y – вектор-рядок розмірності $n + 1$ з одиничними елементами.

Для знаходження σ у разі часткового контакту берегів тріщини використовуємо наступний алгоритм:

1. Розв'язуємо систему рівнянь $Y(\sigma) = 0$.
2. Виключаємо із системи рівняння і змінні з номерами, що відповідають від'ємним елементам σ з отриманого на першому кроці розв'язку.

Повторюємо процедуру, доки всі елементи σ не стануть невід'ємними.

2.2 В'язкопружні середовища. Функції повзучості та релаксації

В основу досліджень в області лінійної теорії в'язкопружності покладене визначальне співвідношення у формі спадкового інтеграла або інтеграла згортки, вперше отримане Больцманом [92]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t C(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad (2.37)$$

де ядро згортки $C(t)$ є функцією релаксації; функції напруження $\sigma(t)$ та деформації $\varepsilon(t)$ є функціями класу Гевісайда.

Будемо шукати функцію релаксації в одному з двох виглядів

$$\begin{aligned} C(t) &= E_0 - \sum_{k=1}^n E_k [1 - E_{\delta,1}(-(t/\rho_k)^\delta)], \\ C(t) &= E_\infty + \sum_{k=1}^n E_k E_{\delta,1}[-(t/\rho_k)^\delta], \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)} \quad (2.39)$$

– функція Мітгаг-Леффлера ($0 < \delta \leq 1$), Γ – гамма-функція Ейлера. При $\delta = 1$ функція (2.39) перетворюється на експоненту. Для $t \geq 0$, $\gamma = 1$ і $0 < \delta < 1$ функцію Мітгаг-Леффлера часто називають експонентою дробового порядку δ [84].

У рівнянні (2.38) величина $E_0 = C(0)$ є миттєвим модулем пружності, а функція, що характеризує швидкість релаксації,

$$T(t) = -\frac{C'(t)}{E_0}$$

– ядром релаксації [59] або функцією впливу (функцією швидкості релаксації) [48]. Якщо функція повзучості подана у вигляді (2.38), з огляду на те, що

$$\frac{d}{dt} E_{\delta,1} \left(- \left[\frac{t}{\rho} \right]^{\delta} \right) = -\rho^{-\delta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\rho^{-\delta})^m t^{m\delta - (1-\delta)}}{\Gamma[(m+1)\delta]},$$

функція впливу набуде вигляду

$$T(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k R_{\alpha}(\beta_k, t), \quad \beta_k = \rho_k^{-\delta}, \quad \lambda_k = \frac{E_k}{E_0} \rho_k^{-\delta}, \quad \alpha = 1 - \delta,$$

$$R_{\alpha}(\beta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^m t^{m(1-\alpha) - \alpha}}{\Gamma[(m+1)(1-\alpha)]} \quad (\beta > 0)$$

– дробово-експоненційна функція Работнова [59].

Функція релаксації

$$C(t) = E_0 \left[1 - \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^n \lambda_k R_{\alpha}(\beta_k, t - \tau) d\tau \right], \quad (2.40)$$

або в операторній формі

$$C^* = E_0 \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k R_{\alpha}^*(\beta_k) \right]. \quad (2.41)$$

Дія оператора R^* на деформацію як функцію часу запишеться через інтеграл згортки

$$R^* \cdot \varepsilon(t) \equiv R(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau,$$

де $R(t)$ – ядро оператора R^* .

Функції характеристик релаксації. Головною проблемою при розв'язанні задачі лінійної теорії в'язкопружності є проблема переходу до часової області. Зазвичай, пружний розв'язок, якщо й існує в аналітичній формі, то вигляд його не є елементарним і точний перехід до часової області

за допомогою оберненого перетворення Лапласа (при використанні принципу відповідності) або алгебри резольвентних операторів (при використанні принципу Вольтерра) за умови збереження певної форми розв'язку практично неможливий. Точний перехід можливий лише якщо розв'язок в області перетворення чи операторній області подається у вигляді, що дозволяє отримати розв'язок на часовому проміжку в замкненій формі. Класичним є розвинення розв'язку в ряд в операторній області за степенями базового оператора [59]. Такий хід розв'язання приводить до оперування з ітерованими ядрами, що навіть у випадку найпростішого виду ядра призводить до суттєвих обчислювальних труднощів. При переході з трансформованої області часто застосовують метод колокацій [155] чи метод найменших квадратів, за допомогою якого фіксуються внутрішні параметри (множники часу в степенях спадних експонент), а визначаються лише зовнішні лінійні параметри (множники при експонентах).

Застосування перетворення Лапласа. Перетворення Карсона функцій релаксації матеріалів компонент композита (вираз (2.40) або (2.41)) має вигляд

$$\tilde{C}_{\alpha_i}(p) = E_{i0} \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{ik}}{p^{\alpha_i} + \beta_{ik}} \right],$$

де $i = 1, \dots, m$, m – кількість в'язкопружних компонент композита.

Розв'язок задачі лінійної в'язкопружності в області перетворення подамо у вигляді функції параметру перетворення

$$\tilde{F}(p) = F[\tilde{C}_{\alpha_1}(p), \dots, \tilde{C}_{\alpha_m}(p)], \quad (2.42)$$

або у вигляді функції параметра $q(p) = p^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$)

$$\tilde{F}(q^{1/\alpha}) = F[\tilde{C}_{\tilde{\alpha}_k}(q), \dots, \tilde{C}_{\tilde{\alpha}_m}(q)] \equiv \tilde{F}_\alpha(q), \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}. \quad (2.43)$$

Будемо шукати розклад функції $\tilde{F}_\alpha(q)$ у вигляді дробово-раціональної функції

$$\tilde{F}_\alpha(q) = c \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (q - z_k)(q - p_k)^{-1},$$

яка з огляду на (2.42) і (2.43) не може мати кратних полюсів p_k . Розглянемо апроксимацію Паде порядку (n, n)

$$\tilde{F}_\alpha^n(q) = \tilde{F}_\infty \cdot \prod_{k=1}^n (q - z_k)(q - p_k)^{-1},$$

і зведемо задачу про знаходження реологічних параметрів до знаходження коефіцієнтів представлення

$$\tilde{F}_\alpha^n(q) = \tilde{F}_\infty \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{q + \beta_k} \right]. \quad (2.44)$$

Коефіцієнти цього представлення знайдемо в наступній формі

$$\beta_k = -p_k, \quad \lambda_k = -\frac{1}{\tilde{F}_\infty} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n (p_k - z_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (p_k - p_j)}.$$

Отже, розв'язок задачі лінійної в'язкопружності подано у формі, у якій описані властивості спадковості матеріалів компонент

$$F(t) = F_0 \left[1 - \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^n \lambda_k R_\alpha(\beta_k, t - \tau) d\tau \right], \quad F_0 = \tilde{F}_\infty.$$

Застосування методу операторних ланцюгових дробів. Запишемо функції релаксації матеріалів компонент композита у вигляді (2.41):

$$C_{\alpha}^* \cdot 1 = E_{i0} \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} R_{\alpha}^*(\beta_{ik}) \right]$$

та використаємо представлення оператора Работнова [59]

$$R_{\alpha}^*(\beta) = \frac{I_{\alpha}^*}{1 + \beta I_{\alpha}^*},$$

де I_{α}^* – оператор Абеля з ядром

$$I_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція Ейлера.

Розв'язок задачі лінійної в'язкопружності в операторній області подамо у вигляді функції оператора Абеля $F(I_{\alpha}^*)$. Нехай ланцюговий дріб

$$c_0 + \mathop{\text{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k x}{1}$$

рівномірно збігається до функції $F(x)$. Тоді під функцією $F(I_{\alpha}^*)$ будемо розуміти операторний ланцюговий дріб (ОЛД)

$$c_0 + \mathop{\text{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k I_{\alpha}^*}{1}. \quad (2.45)$$

Дріб

$$\psi_1^{n*} = c_0 + \mathop{\text{D}}_{k=1}^n \frac{c_k I_{\alpha}^*}{1}$$

будемо розглядати як підхідний до дробу (2.45). Цей дріб отримується за допомогою граничного переходу при $x_i \rightarrow x_0 = 0$ та еквівалентних перетворень дробу [76, 125]

$$\psi_1^{n*} = V_0 + \mathop{\text{D}}_{k=1}^n \frac{I_{\alpha}^* - x_k}{V_k}, \quad (2.46)$$

який отримано з апроксимації відповідної функції дійсної змінної

$$\psi_1^n(x) = V_0 + \prod_{k=1}^n \frac{x - x_k}{V_k}.$$

Отже, оператори ψ_1^{n*} будуть апроксимувати $F(I_\alpha^*)$.

Введемо позначення для фрагменту ОЛД (2.46)

$$\psi_m^{n*} = V_{m-1} + \prod_{k=m}^n \frac{I_\alpha^* - x_k}{V_k}. \quad (2.47)$$

Теорема (про згортання фрагменту ОЛД). Фрагмент ОЛД ψ_m^{n*} , визначений співвідношенням (2.47), можна подати у вигляді

$$\psi_m^{n*} = a_m^n + \sum_{i=1}^{L_{n-m}} a_{m,i}^n R^*(\lambda_{m,i}^n), \quad L_s = \left[\frac{s}{2} \right] + 1,$$

де

$$a_m^n = V_{m-1} - \frac{x_m}{a_{m+1}^n}, \quad a_n^n = V_{n-1} - \frac{x_n}{V_n},$$

а $a_{m,i}^n$ і $\lambda_{m,i}^n$ визначаються з рекурентних співвідношень у наступний спосіб

Для фрагмента з непарною кількістю поверхів ($m = n - 2l$):

1) для одного поверху ($l = 0$)

$$a_{n,1}^n = \frac{1}{V_{n-1}V_n - x_n}, \quad \lambda_{n,1}^n = \lambda;$$

2) для трьох або більше поверхів ($l > 0$)

$$a_{m,1}^n = \frac{1}{V_{m-1}a_{m+1}^n - x_m} \left(1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m-1}} \frac{b_{m+1,i}^n}{\lambda - \mu_{m+1,i}^n} \right), \quad \lambda_{m,1}^n = \lambda,$$

$$a_{m,i}^n = \frac{b_{m+1,i-1}^n}{V_{m-1} a_{m+1}^n - x_m} \left(x_m + \frac{h}{\lambda - \mu_{m+1,i-1}^n} \right),$$

$$\lambda_{m+1,i-1}^n = \mu_{m+1,i-1}^n, \quad i = 2, \dots, L_{n-m}.$$

Для фрагмента з парною кількістю поверхів ($m = n - 2l - 1, l \geq 0$)

$$a_{m,i}^n = \frac{b_{m+1,i}^n}{V_{m-1} a_{m+1}^n - x_m} \left(x_m + \frac{h}{\lambda - \mu_{m+1,i}^n} \right),$$

$$\lambda_{m+1,i}^n = \mu_{m+1,i}^n, \quad i = 1, \dots, L_{n-m}.$$

У цих співвідношеннях $\mu_{m+1,i}^n$ ($i = 1, \dots, L_{n-m}$) – корені рівняння

$$1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m}} \frac{a_{m+1,i}^n}{\lambda_{m+1,i}^n - \mu} = 0,$$

а $b_{m+1,i}^n$ ($i = 1, \dots, L_{n-m}$) – розв'язок системи рівнянь

$$1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m}-1} \frac{b_{m+1,i}^n}{\lambda_{m+1,j}^n - \mu_{m+1,i}^n} = 0, \quad j = 1, \dots, L_{n-m}.$$

Отже, згідно з результатами теореми, апроксимацію операторної функції за допомогою n -го підхідного дроби можна подати у вигляді

$$F(I_\alpha^*) \approx \lambda_0 + \sum_{i=1}^{L_{n-1}} \lambda_i R_\alpha^*(\beta_i), \quad L_n = \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

Порядок підхідного дроби, необхідний для апроксимації операторної функції, може бути вибраним залежно від точності визначення функції $F^* \cdot 1$.

Важливим кроком у визначенні параметрів дробово-експоненційної функції є оптимальний вибір параметра α цієї функції. Цей параметр характеризує швидкість повзучості або релаксації на проміжку часу, де вона суттєво відрізняється від нуля. Геометрично α часто пов'язується з кутом

нахилу похилої ділянки кривої повзучості чи релаксації в логарифмічній шкалі. У випадку, коли тільки один компонент композита має в'язкопружні властивості, параметр α можна обирати довільним чином. Варіацією α є можливість оптимізувати число базових функцій.

Якщо розглядається задача про деформування композита, до складу якого входять декілька компонент із в'язкопружними властивостями, то, зафіксувавши α для одного з матеріалів, можна побудувати ряд дробово-експоненційних функцій, що описують деформування інших компонент, вже з зафіксованим параметром α . Це, безумовно, призведе до збільшення числа базових функцій, однак цей складніший випадок декількох в'язкопружних компонент композита знову зведеться до представлення функції деформування одним базовим оператором лінійної теорії в'язкопружності. Отже, розв'язок граничних задач лінійної в'язкопружності можна будувати на основі лише одного базового оператора, який відповідає за зміну напружено-деформованого стану з часом. Звичайно, параметр α можна вибрати як деяку середню характеристику значень цього параметру для функцій впливу матеріалів компонент композита. Це виявляється природним і коли застосовується метод перетворення Лапласа. У виразі (2.43) α має бути таким, що мінімізує кількість доданків в (2.44).

Оптимізація представлення функції впливу. Застосування методу перетворення Лапласа чи методу операторних ланцюгових дробів дозволяє звести знаходження розв'язку задач лінійної в'язкопружності в часовій області до апроксимації функції дійсної змінної раціональною функцією чи ланцюговим дробом. Оптимальність у цьому випадку досягається знаходженням апроксимаційного виразу з найменшою нормою похибки. Це, своєю чергою, досягається вирівнюванням екстремальних значень функції похибки. Оптимізація зовнішніх (лінійних) параметрів функції впливу не містить у собі жодних обчислювальних труднощів, оскільки зводиться до

розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Оптимізація внутрішніх параметрів функції впливу, β_k передбачає розв'язання систем нелінійних рівнянь. Щоб уникнути цього, можна, звичайно, зафіксувати внутрішні параметри, а оптимізацію проводити зовнішніми параметрами функції впливу, λ_k . Ідея, що розвивається в роботі, дозволяє оптимізувати і внутрішні параметри, уникаючи процедури розв'язань нелінійних систем.

За основу оптимізації оберемо метод, описаний у роботі [176]. Будемо шукати апроксимацію $F_{\text{ap}}(x)$ функції параметру перетворення (2.43) чи функції дійсної змінної, що відповідає операторній функції $F(I_\alpha^*)$, (позначимо її $F(x)$) у вигляді ланцюгового дроби. Мінімізуємо функцію похибки

$$D(x) = \frac{F_{\text{ap}}(x) - F(x)}{F(x)}.$$

Виберемо початкові значення параметрів $x_0 = 0, x_1, \dots, x_m$ ($m = 2n + 1$) та обчислимо коефіцієнти V_i ($i = 0, \dots, m$) за умови проходження функції $F(x)$ через точки

$$(x_0, F(x_0)), \quad (x_i, F(x_i) \cdot [1 + (-1)^i \lambda]),$$

де λ – малий параметр. Виберемо цей параметр, взявши мінімальний (за абсолютним значенням) із тих, що задовольняють умову на нескінченості: $D(x) = 0$ при $x \rightarrow \infty$. Обчислимо екстремальні точки апроксимації $F_{\text{ap}}(x)$ і візьмемо їх як наступне наближення параметрів x_i . Отже, побудовано просту ітеративну процедуру вирівнювання норми функції похибки.

Побудований алгоритм знаходження параметрів функції впливу є достатньо стійким за відсутності “гладкості” кривих повзучості й релаксації та може бути програмно реалізованим.

Числовий приклад. Розглянемо релаксацію напружень в односпрямованому волокнистому композиті, спадкові властивості матеріалів скла-

	Компонент	Матеріал	E_0 , МПа	δ	λ , доба ⁻¹	β , доба ⁻¹
1	Армування	Органічні волокна	$1.4 \cdot 10^5$	1	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$4.28 \cdot 10^{-3}$
2	Матриця	Фенолформаль- дегідна смола	$3.6 \cdot 10^3$	0.65	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$

Табл. 2.1 – Реологічні параметри матеріалів компонент композита

дових якого описуються дробово-експоненційними ядрами з параметрами [77], наведеними в табл. 2.1.

Залежності між середніми напруженнями й деформаціями в трансверсально ізотропному композитному матеріалі мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda_{11}\varepsilon_{11} + \lambda_{12}\varepsilon_{22} + \lambda_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{23} &= \lambda_{44}\gamma_{23}, \\ \sigma_{22} &= \lambda_{12}\varepsilon_{11} + \lambda_{11}\varepsilon_{22} + \lambda_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{13} &= \lambda_{44}\gamma_{13}, \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13}\varepsilon_{11} + \lambda_{13}\varepsilon_{22} + \lambda_{33}\varepsilon_{33}, & \sigma_{12} &= \lambda_{66}\gamma_{12},\end{aligned}$$

причому $\lambda_{66} = (\lambda_{11} - \lambda_{12})/2$.

Технічні сталі матеріалу композита E_{11} , E_{33} , G_{12} , G_{13} , ν_{12} , ν_{13} визначаються через характеристики λ_{ij} у вигляді

$$\begin{aligned}E_{11} &= \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, & E_{33} &= \frac{\Delta}{\Delta_{33}}, & \nu_{12} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}, \\ \nu_{13} &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{33}}, & G_{12} &= \lambda_{66}, & G_{13} &= \lambda_{44},\end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \quad \Delta_{12} = \lambda_{12}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2, \quad \Delta_{13} = \lambda_{13}(\lambda_{11} - \lambda_{12}),$$

$$\Delta_{33} = \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2, \quad \Delta = \lambda_{33}\Delta_{33} - 2\lambda_{13}\Delta_{13}.$$

Використаємо розв'язок пружної задачі про деформування матеріалу,

армованого односпрямованими хаотично розташованими волокнами [79]. Розв'язок подамо у формі (2.43) або операторному вигляді.

З огляду на те, що функція впливу матеріалу волокон є експонентою ($\delta_1 = 1$), а матриці – дробовою експонентою порядку $\delta_2 = 0.65$ за порядок дробових експонент розв'язку задачі про деформування композита оберемо $\delta = 1$. Такий вибір обумовлено тим, що параметри оптимізованих в області перетворення розв'язків при такому δ не мають комплексних параметрів, що спрощує числове дослідження.

Продемонструємо точність результату переходу від дробової експоненти порядку $\delta_2 = 0.65$ до звичайної експоненти. Перепишемо функцію релаксації матеріалу матриці у вигляді суми звичайних експонент із наперед заданою точністю. Зафіксуємо точність у часовій області на рівні 0.1%. Результати переходу проілюстровано на рис. 2.2, на якому подано отримані релаксаційні криві в трансформованій і часовій областях разом із відповідними похибками представлення. Як бачимо, щоб досягти заданої точності в часовій області, похибка в трансформованій мала становити 0.0015%, що забезпечувалося 22-х поверховим апроксимувальним ланцюговим дробом в області перетворення і, відповідно, сумою з 11-ти експонент у часовій області.

Об'ємний вміст матеріалу армування позначимо через c_1 . На рис. 2.3 наведені релаксаційні характеристики композита, що досліджується. Суцільні і штрих-пунктирні криві відповідають граничним випадкам ізотропних матеріалів матриці ($c_1 = 0$) та матеріалу армування ($c_1 = 1$) відповідно; пунктирні лінії відповідають $c_1 = 0.33$, штрихові – $c_1 = 0.67$.

Зміна в часі модуля E_{33} обумовлена властивостями матеріалу армування: ланцюговий дріб, що описує зміну цього модуля для $c_1 = 0.33$ у трансформованій області з точністю близькою до 0.001%, містить 6 поверхів, а сам, модуль, таким чином, описується функцією впливу з 3-х експонент;

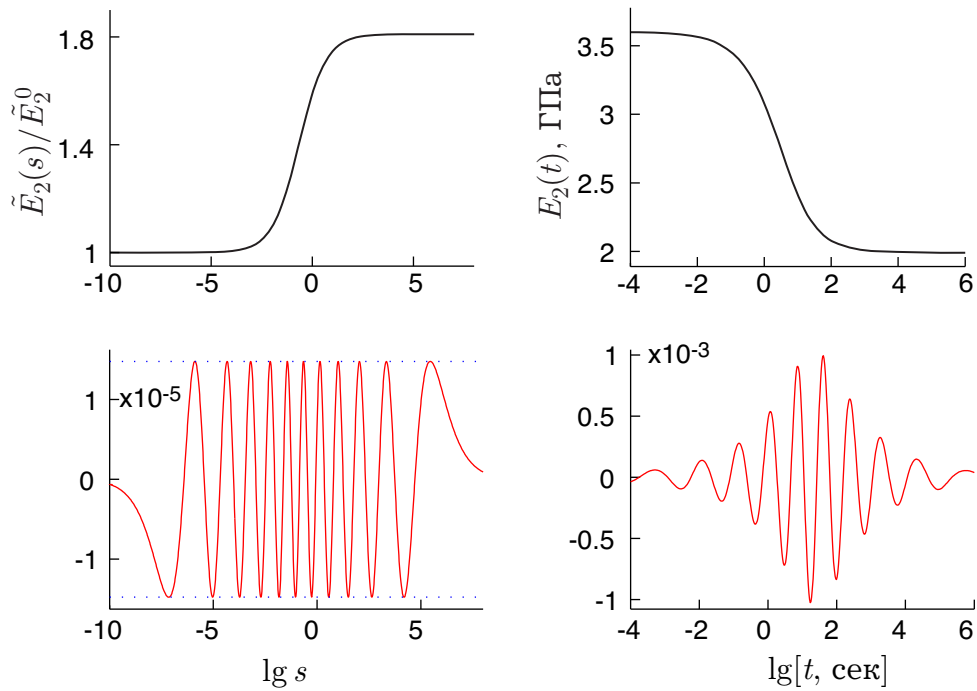


Рис. 2.2 – Модуль пружності в області перетворення та як функція часу (перший ряд блоків), відповідні похибки розв'язку

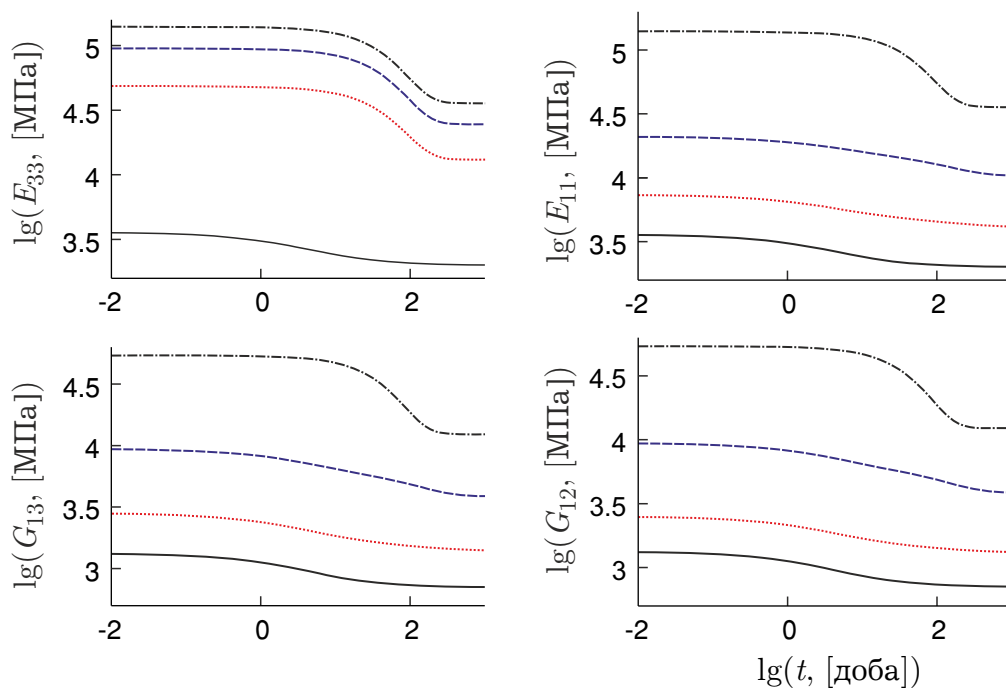


Рис. 2.3 – Характеристики релаксації

для $c_1 = 0.67$ маємо 4-х поверховий дріб і 2 експоненти у функції впливу. Зміна в часі модулів E_{11} , G_{12} і G_{13} обумовлена властивостями матеріалу матриці: розмірність ланцюгового дробу, що описує зміну цих модулів у трансформованій області для досліджених ненульових концентрацій близь-

кий до порядку дробу, що отримано при переході від експоненти порядку $\delta_2 = 0.65$ до суми звичайних експонент. Зауважимо, що більш логічним було б описати зміну в часі модулів E_{11} , G_{12} і G_{13} за допомогою експонент порядку $\delta_2 = 0.65$, але, як зазначалося вище, це призведе до того, що оператори матимуть комплексні параметри хоч і з меншим числом базових функцій у розв'язку.

Результати оберненого перетворення за допомогою викладеного підходу було порівняно з результатами застосування відомих у літературі методів [144, 183] у роботах [25, 63].

2.3 Теорія докритичного поширення тріщини у в'язкопружному тілі

В основу теорії покладено принцип пружно-в'язкопружної аналогії для змінних із часом граничних умов [114–116, 173] та критерій критичного розкриття (1.18). В'язкопружне розкриття отримується з відповідного виразу для пружного розкриття, який треба подати у вигляді добутку пружної сталої та функції геометричних і силових параметрів

$$\tilde{\Delta}(x, \lambda) = L \cdot F(x, \lambda),$$

L – функція модулів піддатливості ортотропної пластини a_{ij} , F не містить пружних сталей.

У випадку однієї тріщини, рівномірного ЗЗВ з міцністю зчеплення σ та розтягувального напруження на нескінченності σ_∞ вираз для пружного розкриття має вигляд

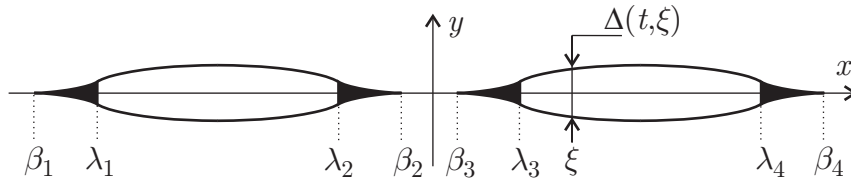


Рис. 2.4 – Система двох ($n = 2$) колінеарних тріщин, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ – положення вершин фізичної тріщини

$$\tilde{\Delta}(x, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{L\sigma}{\pi} [Q(x, \boldsymbol{\lambda}) - Q(x, -\boldsymbol{\lambda})],$$

$$Q(x, \boldsymbol{\lambda}) = (x - \lambda) \ln \left| \frac{\check{X}(x) - \check{X}(\lambda)}{\check{X}(x) + \check{X}(\lambda)} \right|, \quad \check{X}(x) = \sqrt{\frac{x + \beta}{\beta - x}}, \quad \beta = \lambda \operatorname{csc} \frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma}.$$

Пружна стала

$$L = \frac{\operatorname{Re}\{\Lambda_1 - \Lambda_3\}}{\operatorname{Im}\{\alpha\}}, \quad \Lambda_k = \frac{p_k + \alpha q_k}{1 + \alpha s_k}, \quad (2.48)$$

величини p , q та α визначені в (2.12) та (2.17). Для частинних випадків напряму осі ортотропії вздовж тріщини та ізотропії відповідно отримаємо

$$L = 2\sqrt{a_{22}(2(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}}) + a_{66})}, \quad L = 4/E. \quad (2.49)$$

Система інтегральних рівнянь і нерівностей, що описує повільне зростання тріщин вздовж наперед відомого шляху (геометричні параметри проілюстровано на рис. 2.4)

$$\max_k \{ \Delta[t, \lambda_k(t)] \} = \Delta_{\max},$$

$$\Delta(t, x) = \tilde{\Delta}[x, \boldsymbol{\lambda}(t)] + \int_0^t l(t - \tau) \tilde{\Delta}'_\tau[x, \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau, \quad l(t) = \frac{L(t)}{L(0)},$$

$$\Delta'_x(x = \beta_k, \boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

розв'язується в дискретні моменти часу $t_m = t_0 + m \cdot \Delta t$, $m = 1, 2, \dots$

Тривалість інкубаційного періоду, t_0 визначається рівнянням

$$\max_k \{ \Delta[t_0, \lambda_k(0)] \} = \Delta_{\max},$$

величини $\lambda(t_m)$ визначаються послідовно із системи

$$\Delta[t_m, \lambda_k(t_m)] = \Delta_{\max}, \quad k \in K \tag{2.50}$$

$$\Delta[t_m, \lambda_k(t_m)] < \Delta_{\max}, \quad k \notin K,$$

індекси K відповідають вершинам, що рухаються. Положення вершин на інтервалах дискретизації шукається у вигляді лінійної функції часу

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(t_{m-1}) + \frac{t - t_{m-1}}{\Delta t} [\lambda_k(t_m) - \lambda_k(t_{m-1})], \quad t \in (t_{m-1}, t_m).$$

Якщо при знаходженні $\lambda(t_m)$ одна з нерівностей у системі (2.50) не виконується, то номер цієї нерівності включаємо до K і розв'язуємо систему заново.

2.4 Приклади визначення ядра інтегрального рівняння повільного зростання тріщини

Розглянемо напружений стан нескінченної в'язкопружної ортотропної пластини з прямолінійною тріщиною. Пластина розтягується прикладеними на нескінченності рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності σ_∞ . Покладаємо, що одна з площин пружної симетрії паралельна серединній площини пластини, а головні напрями пружності u і v утворюють кут θ з прямою розташування тріщини.

Моделювання процесу релаксації матеріалів і побудова розв'язку. Запишемо основний закон спадкової пружності у формі (2.37):

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau), \quad (2.51)$$

де R – функції релаксації матеріалу. Ці функції з необхідною точністю можна описати фізично обґрунтованою моделлю (2.38):

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 - \sum_i \lambda_k [1 - E_{\delta,1}(-b_i t^\delta)] \quad \text{або} \\ R(t) &= R_\infty + \sum_i a_i E_{\delta,1}(-b_i t^\delta), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де R_0 і R_∞ – миттєве й довготривале значення механічної характеристики. При $\delta = 1$ функція Міттаг-Леффлера $E_{\delta,1}$ перетворюється на експоненту.

Застосування перетворення Лапласа до співвідношень (2.51) зводить їх до форми закону Гука для пружного тіла

$$\bar{\sigma}_{ij} = \tilde{R}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}, \quad \tilde{R} = s \bar{R},$$

де рискою над величиною позначено її перетворення Лапласа, s – параметр перетворення.

В області перетворення вирази (2.52) набудуть вигляду

$$\tilde{R}(s) = R_0 - \sum_i \frac{\lambda_i}{s^\delta + b_i}, \quad \tilde{R}(s) = R_\infty + \sum_i \frac{a_i}{1 + b_i s^{-\delta}}. \quad (2.53)$$

Для якісного дослідження напруженого стану при моделюванні релаксаційних властивостей матеріалів компонент композита будемо використовувати лише один доданок у (2.53). У цьому разі згаданий вираз і його перетворення перепишемо у формі

$$R(t) = R_\infty + (R_0 - R_\infty) E_{\delta,1}(-bt^\delta), \quad \tilde{R}(s) = R_\infty + \frac{R_0 - R_\infty}{1 + bs^{-\delta}}. \quad (2.54)$$

У формі (2.52) можна подати як механічні характеристики ізотропних матеріалів компонент композита, так і представити функції цих характеристик (ефективні модулі, характеристику повзучості L). Відповідно до принципу пружно-в'язкопружної аналогії [103], замінимо залежні від часу характеристики релаксації у формі (2.52) відповідними перетвореними величинами (2.53), отримаємо розв'язок в області перетворення \tilde{R} . З необхідною точністю знайдемо представлення \tilde{R}_n функції \tilde{R} у формі (2.53). Саме в такий спосіб у числовому прикладі, наведеному нижче, здійснюється обернене перетворення (повернення з області перетворення до часової області). Знайдені коефіцієнти представлення функції в області перетворення у вигляді (2.53) миттєво дають розв'язок в області зміни часу (2.52).

Розв'язок задачі в області перетворення представимо ланцюговим дробом

$$\tilde{R}_n(q) = V_0 + \frac{q - q_0}{V_1 + \frac{q - q_1}{V_2 + \dots + \frac{q - q_{m-1}}{V_m}}}, \quad q = s^\delta. \quad (2.55)$$

Для оптимізації числа доданків у представленнях (2.53) точки q_i можна вибрати так, щоб мінімізувати функцію похибки $|\tilde{R}_n - \tilde{R}|$ або $|\tilde{R}_n/\tilde{R} - 1|$. Реалізувати такий вибір можна, наприклад, за допомогою методу, запропонованого в [176].

Перетворимо (2.55) у раціональну функцію

$$V_0 + \prod_{k=1}^{2n} \frac{q - q_{k-1}}{V_k} = \frac{A_n(q)}{B_n(q)},$$

де $A_n(q) = \sum a_i q^i$ і $B_n(q) = \sum b_i q^i$ – поліноми параметра q степені n . Їх

легко можна визначити за допомогою рекурентних співвідношень [125]

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = V_0, \quad A_m(q) = V_m A_{m-1}(q) + (q - q_{m-1}) A_{m-2}(q),$$

$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_m(q) = V_m B_{m-1}(q) + (q - q_{m-1}) B_{m-2}(q),$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Виділимо цілу частину раціональної функції $A_n(q)/B_n(q)$,

$$\frac{A_n(q)}{B_n(q)} = \tilde{R}_\infty + \frac{C_{n-1}(q)}{B_n(q)}, \quad C_{n-1}(q) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i \tilde{R}_\infty) q^i, \quad \tilde{R}_\infty = \frac{a_n}{b_n},$$

і розкладемо на елементарні дроби функцію $C_{n-1}(q)/B_n(q)$. Отримаємо вираз

$$\tilde{R}_n(q) = \tilde{R}_\infty - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{q + b_i}, \quad \lambda_i = -\frac{C_{n-1}(-b_k)}{B'_n(-b_k)},$$

що відповідає першому представленню (2.52) в області оригінала ($-b_k$ – корінь полінома $B_n(q)$), або

$$\tilde{R}_n(q) = \tilde{R}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i q}{q + b_i}, \quad a_i = \frac{\lambda_i}{b_i},$$

що відповідає другому представленню (2.52) в області оригінала. Отже, визначено коефіцієнти обох представлень (2.52) розв'язку задачі.

Для отримання ефективних в'язкопружних модулів композитного матеріалу E_{11} , E_{22} , G_{12} і ν_{21} будемо використовувати як ефективні характеристики релаксації, отримані обробкою результатів експерименту на повзучість матеріалу пластини, так і характеристики, отримані моделюванням, проведеним з використанням відповідних пружних розв'язків механі-

ки композитних матеріалів.

Розв'язки для композитної пластини, характеристики якої отримані експериментально. Отримаємо розв'язки задачі для випадку, коли параметри представлень релаксаційних модулів пластини отримано моделюванням кривих релаксації композита. В [13] наведені реологічні параметри кривих релаксації для композитів, виготовлених у СКТБ Інституту механіки НАН України; ці параметри знайдені для представлення функцій релаксації в операторній формі

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{11}^*} &= \frac{1}{E_{11}^0} [1 + \lambda_1 R_\alpha^*(\beta_1)], & \frac{1}{E_{22}^*} &= \frac{1}{E_{22}^0} [1 + \lambda_2 R_\alpha^*(\beta_2)], \\ \frac{1}{G_{12}^*} &= \frac{1}{G_{12}^0} [1 + \lambda_G R_\alpha^*(\beta_G)], & \nu_{12}^* &= \nu_{12}^0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

У представленнях (2.56) $R_\alpha^*(\beta)$ – інтегральний оператор,

$$R_\alpha^*(\beta) \cdot f(t) = \int_{-\infty}^t R_\alpha(\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau$$

з ядром у формі функції Работнова

$$R_\alpha(\beta, t) = t^{-\alpha} E_{\delta, \delta}(-\beta t^\delta) \quad \text{або} \quad R_\alpha(\beta, t) = -(\beta t)^{-1} E_{\delta, 0}(-\beta t^\delta),$$

де $E_{\delta, \gamma}$ – функція Міттаг-Лефлера, $\delta = 1 - \alpha$.

В області перетворення модулі податливості ортотропної пластини $a_{11} = 1/E_{11}$, $a_{22} = 1/E_{22}$, $a_{12} = -\nu_{21}/E_{11} = -\nu_{12}/E_{22}$ і $a_{66} = 1/G_{12}$, відповідно до виразів для технічних характеристик (2.56), набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= \frac{1}{E_{11}^0} \left(1 + \frac{\lambda_1}{s^\alpha + \beta_1} \right), & \tilde{a}_{12} &= -\nu_{12}^0 \tilde{a}_{22}, \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{1}{E_{22}^0} \left(1 + \frac{\lambda_2}{s^\alpha + \beta_2} \right), & \tilde{a}_{66} &= \frac{1}{G_{12}^0} \left(1 + \frac{\lambda_G}{s^\alpha + \beta_G} \right).\end{aligned}$$

Для використання представлення релаксаційних властивостей (2.54), параметри E_∞ , b і δ цієї форми через параметри E_0 , λ , β форми (2.56) можна легко обчислити в такий спосіб

$$E_\infty = E_0 / (1 + \lambda / \beta), \quad b = \lambda + \beta, \quad \delta = 1 - \alpha.$$

Матеріал пластини є композитом із трьох шарів кварцової тканини та двох видів полімерного наповнювача:

1. поліетиленовий наповнювач

$$\begin{aligned}E_{11}^0 &= 19.7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_1 &= 0.0180 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_1 &= 0.0928 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ E_{22}^0 &= 11.7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_2 &= 0.0608 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_2 &= 0.1283 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ G_{12}^0 &= 0.637 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_G &= 0.1398 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_G &= 0.0407 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ \nu_{12} &= 0.14, & \alpha &= 0.717,\end{aligned}$$

2. епоксидний наповнювач

$$\begin{aligned}E_{11}^0 &= 23.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_1 &= 0.0323 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_1 &= 0.1570 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ E_{22}^0 &= 16.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_2 &= 0.1295 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_2 &= 0.2745 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ G_{12}^0 &= 3.08 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & \lambda_G &= 0.0717 \text{ сек}^{\alpha-1}, & \beta_G &= 0.0276 \text{ сек}^{\alpha-1}, \\ \nu_{12} &= 0.11, & \alpha &= 0.846.\end{aligned}$$

На рис. 2.5 зображені залежності модулів релаксації (2.56) від часу для

композитів із поліетиленовим (рис. 2.5а) та епоксидним (рис. 2.5б) наповнювачами.

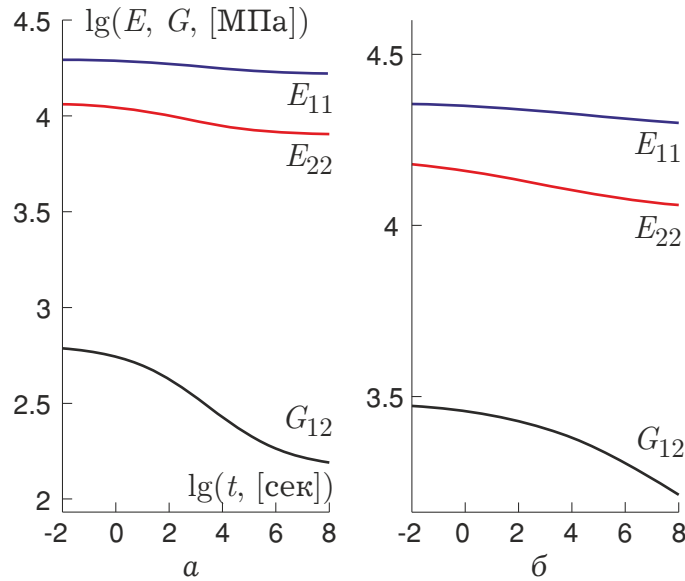


Рис. 2.5 – Модулі релаксації композитних матеріалів

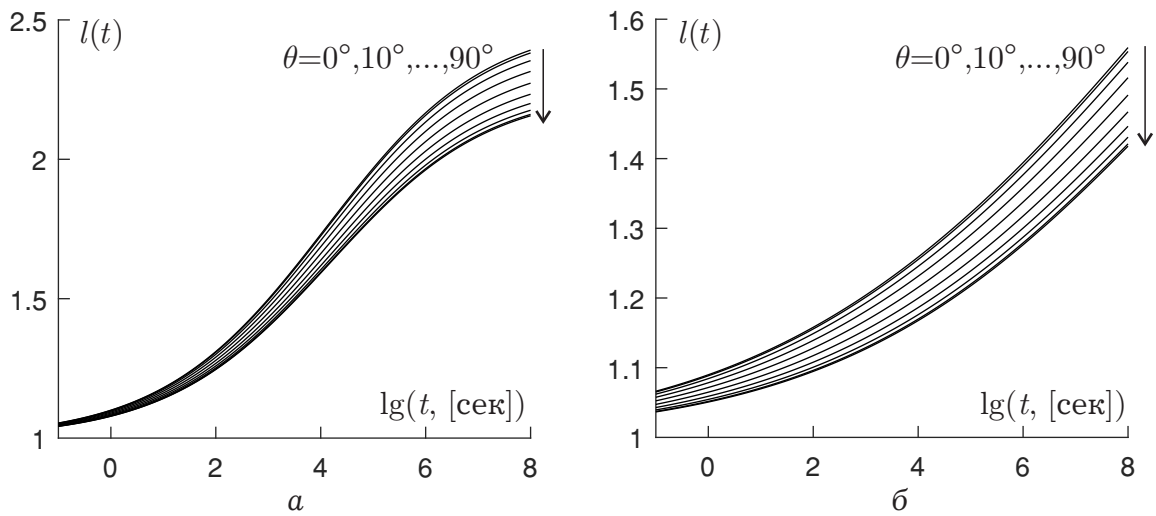


Рис. 2.6 – Ядро інтегрального рівняння для різних орієнтацій θ осі ортотропії щодо лінії розташування тріщини; a відповідає матеріалу з поліетиленовим наповнювачем, b – епоксидним

На рис. 2.6 проілюстрована безрозмірна характеристика повзучості $l(t) = L(t)/L(0)$. Відповідна $L(t)$ пружна величина наведена в першому виразі (2.49). Рис. 2.6 а відповідає матеріалу з поліетиленовим наповнювачем, рис. 2.6 б – епоксидним.

Розв'язок для композитної пластини, матеріали компонент

якої виявляють в'язкопружні властивості. Будемо моделювати матеріал пластини ортотропним середовищем з ефективними характеристиками. Ці характеристики отримаємо за допомогою результатів механіки композитних матеріалів [2] як функції механічних характеристик ізотропних матеріалів компонент композита (матеріалів армування та наповнювача) і їхнього об'ємного вмісту (c_1 – армування, $c_2 = 1 - c_1$ – наповнювача).

Технічні сталі, знайдені в роботі [2], наведені як функції модулів зсуву, G_i і коефіцієнтів Пуассона, ν_i ізотропних матеріалів компонент композита (індекс $i = 1$ відповідає матеріалу армування, $i = 2$ – наповнювача):

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= c_1 E_1 + c_2 E_2 + \frac{8G_1 c_1 c_2 (\nu_1 - \nu_2)}{d_1}, \\
 \frac{1}{E_{22}} &= \frac{\nu_{21}^2}{E_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{8G_2} \left[\frac{2 + (\kappa_1 - 1)\tilde{G}}{d_1} - \frac{2c_1(1 - \tilde{G})}{d_2} \right], \\
 \frac{G_{12}}{G_{12}^0} &= 1 + n^2(n-1) \frac{G_{12}^0}{G_2} \left[\frac{\tilde{G} - 1}{c_2 \tilde{G} + 1 + c_1} \right]^2 \frac{\sin^n \alpha_n}{\pi^n} \times \\
 &\quad \times \left(c_1^2 - c_1^{2n} \left[\frac{\tilde{G} - 1}{\tilde{G} + 1} \right]^2 \right), \quad G_{12}^0 = G_2 \frac{1 + c_1 + c_2 \tilde{G}}{c_2 + (1 + c_1)\tilde{G}}, \\
 G_{23} &= G_2 \frac{d_2}{c_2 \kappa_2 + (1 + \kappa_2 c_1)\tilde{G}}, \quad \nu_{21} = \nu_2 - \frac{(\kappa_2 + 1)(\nu_2 - \nu_1)c_1}{d_1},
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$d_1 = 2 + c_1(\kappa_2 - 1) + c_2(\kappa_1 - 1)\tilde{G}, \quad d_2 = \kappa_2 + c_1 + c_2\tilde{G},$$

$$E_i = 2G_i(1 + \nu_i), \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad \tilde{G} = G_2/G_1,$$

у виразі для модуля G_{12} $\alpha_n = 2\pi/n$, n – число, що визначає тип пакування волокон (наприклад, $n = 4$ відповідає тетрагональному пакуванню).

На основі аналізу експериментальних даних у [93] наведено ідеалізовану схему типової в'язкопружної поведінки матеріалів двокомпонентного композита. Ця схема ілюструє величини співвідношень між миттєвими й довготривалими характеристиками релаксації матеріалів компонент композита, а також між їхніми характерними часами релаксації (рис. 2.7, пунктирні

криві).

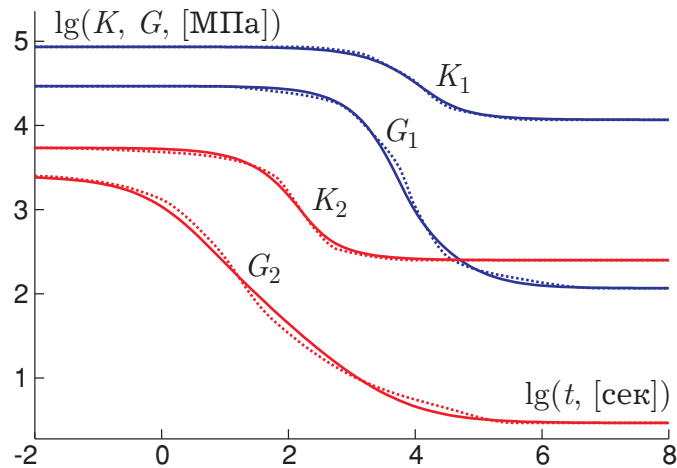


Рис. 2.7 – Ідеалізована схема типової в'язкопружної поведінки матеріалів двокомпонентного композита

На рисунку K_i і G_i – відповідно об'ємні і зсувні модулі матеріалів компонент композита (індекс $i = 1$ відповідає армуванню, $i = 2$ – наповнювачу). Відзначимо, що для моделювання властивостей композита важливим є те, що один із матеріалів компонентів залишається більш “штивним” на всьому часовому проміжку.

Підберемо параметри моделі (2.54). Для матеріалу армування:

$$K_0 = 8.58 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad K_\infty = 1.17 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$\delta_K = 0.8, \quad b_K = 9 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-\delta_K},$$

$$G_0 = 2.93 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad G_\infty = 1.17 \cdot 10^2 \text{ МПа},$$

$$\delta_G = 0.9, \quad b_G = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-\delta_G};$$

для матеріалу наповнювача:

$$K_0 = 5.41 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad K_\infty = 2.51 \cdot 10^2 \text{ МПа},$$

$$\delta_K = 0.86, \quad b_K = 3 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-\delta_K},$$

$$G_0 = 2.51 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad G_\infty = 2.93 \cdot 10^0 \text{ МПа},$$

$$\delta_G = 0.69, \quad b_G = 9 \cdot 10^{-1} \text{ сек}^{-\delta_G}.$$

Криві релаксації (2.54) за наведених параметрів матеріалів компонент у часовій області проілюстровані на рис. 2.7 суцільними кривими. Отримана точність цілком задовільна для проведення якісного аналізу.

На рис. 2.8 наведені залежності характеристики повзучості від часу. Всі криві побудовані для $c_1 = 0.2$ і відповідають різним величинам кута θ нахилу осі ортотропії до лінії розташування тріщини.

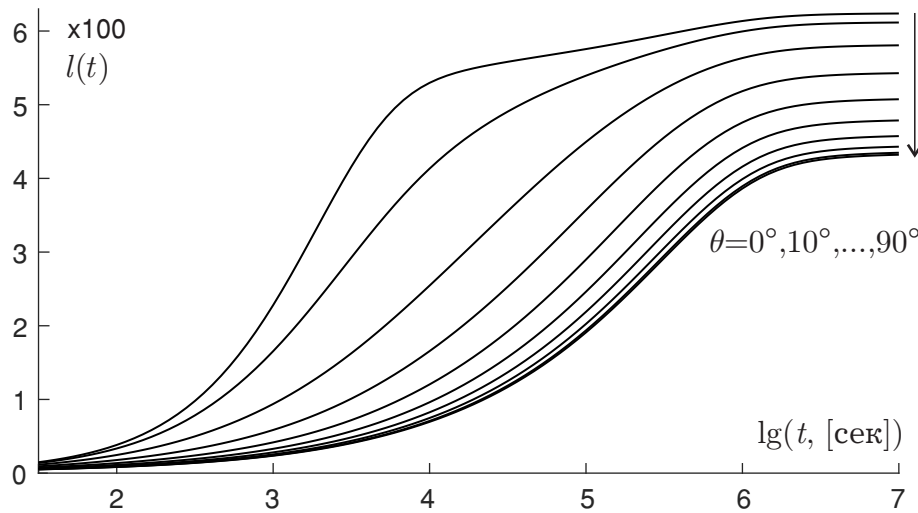


Рис. 2.8 – Ядро інтегрального рівняння для різних орієнтацій θ осі ортотропії по відношенню до лінії розташування тріщини

Розв'язки для композитної пластини залежно від співвідношення модулів в'язкопружних матеріалів компонент. Будемо вивчати якісну сторону задачі, тому залишимо лише один доданок у виразі (2.52); до спрощення віднесемо також опис релаксаційних властивостей обох матеріалів компонент композита за допомогою одного параметра δ функції (2.39). Покладаємо, що коефіцієнти Пуассона матеріалів не змінюються з

часом.

Зафіксуємо характеристики функції релаксації матеріалу наповнювача та введемо коефіцієнти, які характеризують взаємне розташування залежностей від часу для модулів матеріалів армування та наповнювача:

$$k_G = \lg \frac{G_0^{(1)}}{G_0^{(2)}}, \quad k_1 = \lg \frac{G_0^{(1)}}{G_\infty^{(1)}}, \quad k_\beta = -\frac{1}{\delta} \lg \frac{b_G^{(1)}}{b_G^{(2)}}. \quad (2.58)$$

Коефіцієнт k_β визначає зсув у додатному напрямку логарифмічної часової осі кривої, що описує зміну модуля матеріалу армування, відносно цієї ж залежності для матеріалу наповнювача, k_G – співвідношення між миттєвими зсувними модулями двох матеріалів, k_1 – відношення миттєвого й довготривалого модулів для матеріалу армування.

Зафіксуємо залежність модуля зсуву матеріалу наповнювача від часу, а модулі матеріалу армування визначимо за допомогою коефіцієнтів у (2.58).

Для матриці візьмемо

$$G_0^{(2)} = 2 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \nu_0^{(2)} = 0.35, \quad \lg \frac{G_0^{(2)}}{G_\infty^{(2)}} = 1,$$

$$b_G^{(2)} = 10^{-1} \text{ сек}^{-\delta}, \quad \delta = 0.8,$$

а для наповнювача зафіксуємо $\nu_0^{(1)} = 0.3$.

Дослідимо напружений стан в односпрямованому волокнистому композиті з об'ємним вмістом волокон $c_1 = 0.2$.

Вивчимо залежність від часу характеристики повзучості $L(t)$ для двох напрямів осі ортотропії ($\theta = 0^\circ, 90^\circ$). У першому стовпці блоків на рис. 2.9 наведені залежності від часу модулів матеріалів компонент: у кожному блоці нижня крива відповідає релаксації матеріалу матриці, три верхні – матеріалу армування для різних значень одного з параметрів (2.58) і фіксованих значень двох інших параметрів. У другому стовпці проілюстрована зміна з часом відношення модулів зсуву матеріалів компонент. Всі залежності

третього стовпця блоків на рис. 2.9 отримані для $\theta = 0^\circ$, четвертого – для $\theta = 90^\circ$.

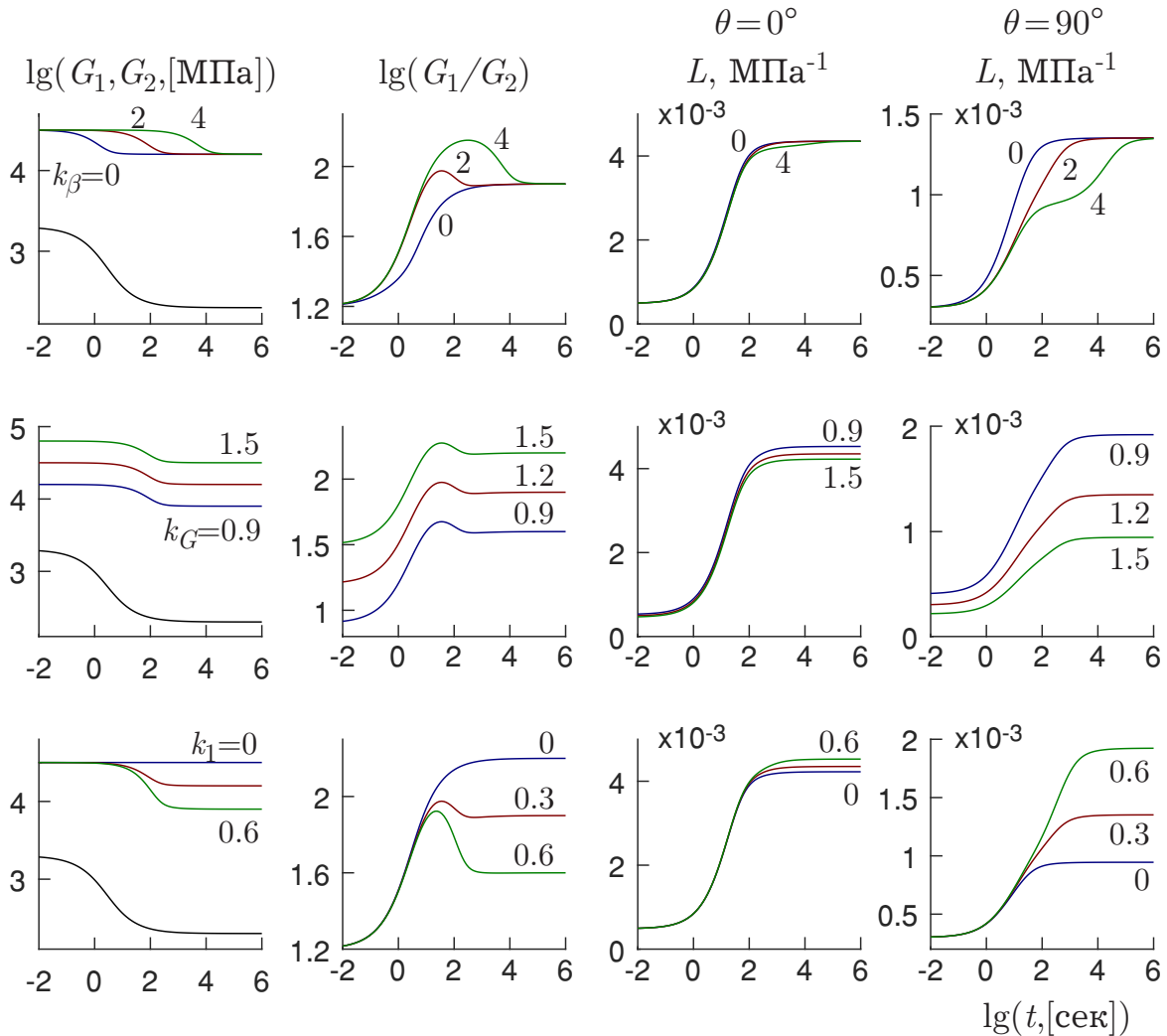


Рис. 2.9 – Модулі релаксації матеріалів компонент композита, їх співвідношення та характеристики повзучості $L(t)$ для двох орієнтацій осі ортотропії відносно лінії тріщини

Перший ряд блоків на рис. 2.9 побудовано при $k_G = 1.2$, $k_1 = 0.3$ і наведених k_β , другий ряд блоків – для $k_1 = 0.3$, $k_\beta = 2$ і наведених k_G , третій – для $k_G = 1.2$, $k_\beta = 2$ і наведених k_1 .

2.5 Результати та висновки

1. Наведено співвідношення для визначення напружено-деформованого стану пружних ізотропних та ортотропних тіл із тріщинами на основі

класичних комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі та Лехніцького. Сформульовано умову перекриття берегів тріщини за наявності зсувного поля напружень та запропоновано методику визначення контактних напружень на основі форми розв'язку метода Мусхелішвілі для переміщень берегів тріщини.

2. Теорію повільного поширення тріщини у в'язкопружному ортотропному матеріалі, розроблену та експериментально обґрунтовану у відділі механіки руйнування матеріалів Інституту механіки НАН України, узагальнено на випадок несиметричного відносно початкового положення середини тріщини зростання та на випадок поширення системи колінеарних тріщин. Побудовано визначальні системи інтегральних рівнянь та нерівностей, що описують положення вершин тріщин як функцій часу.
3. Запропоновано ефективні методики отримання ядер інтегральних рівнянь докритичного поширення тріщин. У ролі матеріалу пластини досліджено композити з експериментально визначеними параметрами моделі лінійної в'язкопружності та композити зі змодельованими за допомогою механіки композитних матеріалів властивостями на основі експериментально визначених параметрів релаксації матеріалів компонент. Розглянуто матеріали волокон як з незмінними з часом механічними характеристиками, так і такими, що виявляють в'язкопружні властивості. Характер залежності ядер від часу суттєво змінюється, якщо використовувати для армування в'язкопружні матеріали. Якщо матеріал волокон не виявляє спадкових властивостей, то відношення відповідних модулів матеріалів компонент змінюються з часом монотонно. Зміна з часом модулів релаксації волокон призводить до того, що відношення модулів матеріалів компонент втрачають характер монотонності та можуть досягти екстремуму на заданому часовому інтер-

валі. Проведено дослідження залежності ядер інтегральних рівнянь повільного поширення тріщин від співвідношеннями між кривими релаксації матеріалів компонент композита. Проілюстрована монотонність ядер.

Розділ 3

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ З РІВНОМІРНИМ ЗАКОНОМ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ В ДОСЛІДЖЕННЯХ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНОЮ

Для побудови аналітичних розв'язків задач теорії тріщин у розділі використовуються класичні потенціали [53, 60] та інтегральне представлення потенціалів [62]. Напруження контактної взаємодії берегів тріщини знаходиться у вигляді кусково-лінійної функції. Розв'язок задачі про пружне переміщення берегів тріщини використано для визначення кінетичних кривих повільного поширення тріщини в лінійно-в'язкопружному матеріалі. Методика визначення контактної взаємодії берегів використана в розділі для знаходження переміщень берегів тріщини в рамках МЗЗ; її застосування дало змогу не розв'язувати систем нелінійних рівнянь для знаходження границь зон зчеплення.

Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ. В [34, 37, 40, 43–45] у рамках МЗЗ з рівномірним ЗЗВ побудовано вирази для переміщень берегів двох колінеарних тріщин, довжини зчеплення визначено системою чотирьох нелінійних рівнянь. Числово-аналітичний метод розв'язання інтегральних рівнянь, що описують зростання двох колінеарних тріщин вздовж наперед відомого шляху розроблено в [33, 172]. Вираз для вертикальних переміщень берегів тріщини побудовано в [130] для системи трьох колінеарних тріщин, проаналізовано типи граничних умов, що враховують можли-

вість об'єднання зон передруйнування двох сусідніх тріщин. В [72] побудовано алгоритм розв'язання системи інтегральних рівнянь, що описує несиметричне зростання тріщини відносно середини свого початкового положення. Методику визначення розкриття двох паралельних тріщин із зонами передруйнування розроблено в [74]. В [39] представлено методику врахування часткового контакту берегів тріщини, а в [32] досліджено зростання тріщини з ділянкою часткового контакту.

В розділі 3.1 наведені приклади побудови аналітичних розв'язків для переміщень берегів тріщини. Поле напружень в околі тріщини формується прикладанням розподілених напружень на значній відстані від тріщини та зосереджених сил, прикладених до берегів тріщини й на незначних відстанях до них. Розглянуто модель складної зони зчеплення, в якій збігаються лише вершини зон нормальних і зсувних зчеплень.

Задача розбивається на дві частини:

1. визначаються границі зон зчеплення, для чого на основі умови скінченності напружень будується система рівнянь, яку можна розв'язати лише числовим методом;
2. з урахуванням аналітичного вигляду умови скінченності напружень будуються аналітичні вирази для переміщення берегів тріщини. У випадку, коли довжина зчеплення є незначною, вираз для відриву замінюється асимптотичним. У цьому разі в основі розв'язання задачі лежить знаходження КІН.

Описано метод врахування контактної взаємодії берегів тріщини. В основу методу покладено ітеративну процедуру, на кожному кроці якої розв'язується система лінійних рівнянь відносно величин контактних напружень у вузлах розподілу, що шукається в кусково-лінійній формі.

У розділі 3.2 запропоновано алгоритм розв'язання рівнянь докритичного зростання тріщини для випадку її несиметричного відносно початково-

го положення середини поширення. Алгоритм проілюстровано числовими розв'язками, отриманими за наявності в постановці систем зосереджених сил, що розтягують або притискають береги тріщини, та розподіленого навантаження на нескінченності. Описано принцип побудови кінетичних кривих при несиметричному зростанні. Проілюстровано використання концепції тонкої структури при дослідженні повільного підростання тріщини.

У розділі 3.3 побудовано алгоритм для дослідження докритичного зростання тріщини у в'язкопружному тілі при незначних довжинах зчеплення. Алгоритм проілюстровано числовими розв'язками декількох задач. У постановку цих задач введено зосереджені сили, що діють вздовж нормалей до тріщини. Ці сили можуть змінювати швидкість поширення тріщини, а також обумовлювати контакт її берегів. В рамках концепції тонкої структури розв'язана задача про докритичне підростання тріщини з частковим контактом берегів.

У розділі 3.4 запропоновано алгоритм розв'язання задачі про повільне поширення тріщини нормального відриву з ділянкою контакту між її берегами. Запропонована модифікована постановка дозволила розв'язувати задачі механіки тріщин у рамках МЗЗ без накладання умови малості довжини зчеплення. В основу розв'язання задачі з модифікованою постановкою покладено ітеративну процедуру, що використовується для вивчення контактної взаємодії берегів тріщини. В розділі оптимізовано алгоритм розв'язання інтегральних рівнянь повільного поширення тріщини. При обчисленні інтеграла згортки ядра і пружного відриву використовується координатно-часова дискретизація.

У розділі 3.5 наведено підхід до розв'язання задач багатоосередкового руйнування. Розглянуто систему двох паралельних тріщин із достатньо розвиненими зонами передруйнування, розмір яких не дозволяє використовувати концепцію тонкої структури. Застосовується модель зі складною

зоною зчеплення для тріщини змішаного режиму руйнування. Запропоновано числово-аналітичний метод розв'язання такого класу задач. Ефективність методу проілюстрована числовим прикладом.

3.1 Визначення переміщень берегів тріщини в рамках моделі зони зчеплення

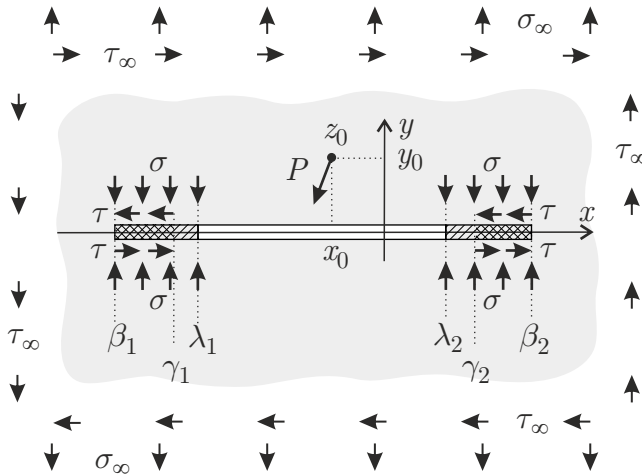


Рис. 3.1 – Схема навантаження та параметри моделі

Визначимо напружено-деформований стан пластини з тріщиною, в околі якої діє зосереджена сила. Нехай точка прикладання сили належить верхній півплощині. На нескінченності до пластини прикладені розтягувальні і зсувні навантаження (рис. 3.1).

Комплексні потенціали, за допомогою яких описується напружено-деформований стан пружної площини за наявності в точці $z_0 = x_p + iy_p$ ($y_p > 0$) зосередженої сили $P = P_x + iP_y$, [54]

$$\Phi(z) = -\frac{\varkappa_1 P}{\pi(z - z_0)}, \quad \Psi(z) = \frac{\varkappa_1}{\pi} \left[\frac{\varkappa \bar{P}}{z - z_0} - \frac{P \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} \right],$$

де $\varkappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$, $\varkappa_1 = \frac{1}{2}(\varkappa + 1)^{-1}$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Напруження в тілі

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \\ &= \frac{\varkappa_1}{\pi} \left[-\frac{P}{z - z_0} + \frac{\varkappa P - \bar{P}}{z - \bar{z}_0} + \frac{(z - z_0)\bar{P}}{(z - \bar{z}_0)^2} \right]. \end{aligned}$$

Напруження на осі x :

$$\sigma_0(x) - i\tau_0(x) = \frac{\varkappa_1}{\pi} \left[P \sum_k \frac{A_k}{x - z_0^k} - \bar{P} \frac{z_0^1 - z_0^2}{(x - z_0^2)^2} \right], \quad (3.1)$$

де введено позначення $z_0^1 = z_0$, $z_0^2 = \bar{z}_0$, $A_1 = -1$, $A_2 = \varkappa$; також позначимо через Λ_σ і Λ_τ ділянки контуру, де діють зчеплення σ і τ відповідно:

$$\Lambda = (\beta_1, \beta_2), \quad \Lambda_\sigma = \Lambda \setminus (\lambda_1, \lambda_2), \quad \Lambda_\tau = \Lambda \setminus (\gamma_1, \gamma_2).$$

За контурних умов

$$\sigma_y^\pm(x) = -\sigma_0(x) + \begin{cases} \sigma, & x \in \Lambda_\sigma \\ 0, & x \in \Lambda \setminus \Lambda_\sigma \end{cases}, \quad \tau_{xy}^\pm(x) = -\tau_0(x) + \begin{cases} \tau, & x \in \Lambda_\tau \\ 0, & x \in \Lambda \setminus \Lambda_\tau \end{cases}$$

та умов на нескінченності $\sigma = \sigma_\infty$, $\tau = \tau_\infty$, $|z| \rightarrow \infty$, розв'язок задачі Гільберта – Прівалова знаходимо із системи двох рівнянь відносно функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \begin{cases} \frac{\sigma H_\sigma(z) - i\tau H_\tau(z) - H_0(z, z_0, P)}{\pi} + 2 \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} \\ -\bar{\Gamma}' \end{cases},$$

де $\Gamma' = \frac{1}{2}\sigma_\infty + i\tau_\infty$, $X(z) = \sqrt{(z - \beta_1)(z - \beta_2)}$,

$$H_\sigma(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{\Lambda_\sigma} \frac{X(x)}{x - z} dx, \quad H_\tau(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{\Lambda_\tau} \frac{X(x)}{x - z} dx, \quad (3.2)$$

$$H_0(z, z_0, P) = \frac{1}{iX(z)} \int_\Lambda \frac{[\sigma_0(x) - i\tau_0(x)] X(x)}{x - z} dx,$$

$X(x)$ – значення функції $X(z)$ на верхньому березі розрізу ($X(x) = X^+(x)$).

З огляду на те, що

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda} \frac{X(t)dt}{(t-\zeta)(t-z)} &= \pi i [R(z, \zeta) - 1], \\ \int_{\Lambda} \frac{X(t)dt}{(t-\zeta)^2(t-z)} &= \frac{\pi i}{z-\zeta} \left[R(z, \zeta) + \frac{e-\zeta}{X(\zeta)} \right],\end{aligned}$$

де $e = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)$, а функція $R(z, \zeta)$ визначена в (3.34), запишемо

$$\int_{\Lambda} \frac{[\sigma_0(x) - i\tau_0(x)]X(x)}{x-z} dx = i\kappa_1 T(z, z_0, P),$$

де введено функцію

$$T(z, z_0, P) = P \sum_k A_k [R_0^k(z) - 1] - \bar{P} \frac{z_0^1 - z_0^2}{z - z_0^2} \left[R_0^2(z) + \frac{e - z_0^2}{X_0^2} \right], \quad (3.3)$$

$R_m^k(z) = R(z, z_m^k)$, $X_m^k = X(z_m^k)$. Зазначимо також, що $X_m^2 = \bar{X}_m^1$.

Отже,

$$H_0(z, z_0, P) = \kappa_1 \frac{T(z, z_0, P)}{X(z)}.$$

Визначимо інтеграли в (3.2). З огляду на те, що

$$\int \frac{X(x)dx}{x-z} = X(z)C(x, z) - i(z-e)I(x) + X(x),$$

отримаємо

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda_\sigma} \frac{X(x)}{x-z} dx &= X(z) [\pi i - C_\lambda(z)] - i(z-e)B_\lambda - i\hat{X}_\lambda, \\ \int_{\Lambda_\tau} \frac{X(x)}{x-z} dx &= X(z) [\pi i - C_\gamma(z)] - i(z-e)B_\gamma - i\hat{X}_\gamma,\end{aligned}$$

де $C_\lambda(z)$ і $C_\gamma(z)$ – прирости функції

$$C(\xi, z) = \ln \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(z)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(z)}, \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z - \beta_1}{\beta_2 - z}}, \quad (3.4)$$

що відповідають приросту першого аргументу на (λ_1, λ_2) та (γ_1, γ_2) відповідно:

$$C_\lambda(z) = C(\lambda_2, z) - C(\lambda_1, z), \quad C_\gamma(z) = C(\gamma_2, z) - C(\gamma_1, z);$$

$\pi - C_\lambda(z)$ та $\pi - C_\gamma(z)$ – прирости $C_\lambda(z)$ і $C_\gamma(z)$ на Λ_σ і Λ_τ відповідно.

Величини \hat{X}_λ і \hat{X}_γ є приростами функції

$$\hat{X}(x) = \sqrt{(x - \beta_1)(\beta_2 - x)}$$

на (λ_1, λ_2) та (γ_1, γ_2) відповідно:

$$\hat{X}_\lambda = \hat{X}(\lambda_2) - \hat{X}(\lambda_1), \quad \hat{X}_\gamma = \hat{X}(\gamma_2) - \hat{X}(\gamma_1);$$

величини B_λ і B_γ – прирости функції $I(x) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(x)$ на Λ_σ і Λ_τ відповідно:

$$B_\lambda = \pi - \operatorname{arctg} \check{X}(\lambda_2) + \operatorname{arctg} \check{X}(\lambda_1) = 2 \operatorname{arcctg} \left[\frac{\check{X}(\lambda_2) - \check{X}(\lambda_1)}{1 + \check{X}(\lambda_1)\check{X}(\lambda_2)} \right],$$

$$B_\gamma = \pi - \operatorname{arctg} \check{X}(\gamma_2) + \operatorname{arctg} \check{X}(\gamma_1) = 2 \operatorname{arcctg} \left[\frac{\check{X}(\gamma_2) - \check{X}(\gamma_1)}{1 + \check{X}(\gamma_1)\check{X}(\gamma_2)} \right].$$

Запишемо комплексний потенціал задачі:

$$2\pi\Phi(z) = \sigma H_\sigma(z) - i\tau H_\tau(z) - \varkappa_1 \frac{T(z, z_0, P)}{X(z)} + 2\pi \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} - \pi \bar{\Gamma}', \quad (3.5)$$

$$H_\sigma(z) = iC_\lambda(z) + \pi - \frac{(z-e)B_\lambda + \hat{X}_\lambda}{X(z)},$$

$$H_\tau(z) = iC_\gamma(z) + \pi - \frac{(z-e)B_\gamma + \hat{X}_\gamma}{X(z)}.$$

В (3.5) стала $C_0 = \frac{1}{2}(\sigma_\infty - i\tau_\infty)$ визначається напруженнями на нескінченності, а стала C_1 – умовою однозначності переміщень. Визначимо C_1 . З огляду на те, що

$$\int_{\Lambda'} H_\sigma(z) dz = \int_{\Lambda'} H_\tau(z) dz = \int_{\Lambda'} H_0(z, z_0, P) dz = 0,$$

$$\int_{\Lambda'} \frac{C_0 z + C_1}{X(z)} dz = -2\pi i(C_0 e + C_1)$$

(Λ' – контур, що обходить розріз Λ проти годинникової стрілки), отримаємо прирости потенціалів при обході розрізу

$$[\varphi(z)]_{\Lambda'} = \int_{\Lambda'} \Phi(z) dz = -2\pi i(C_0 e + C_1), \quad [\omega(\bar{z})]_{\Lambda'} = -[\phi(z)]_{\Lambda'}.$$

Звідки

$$2\mu[u(z) + iv(z)]_{\Lambda'} = \varkappa[\varphi(z)]_{\Lambda'} - [\omega(\bar{z})]_{\Lambda'} = -2\pi i(\varkappa + 1)(C_0 e + C_1).$$

Прирівнявши останній вираз до нуля, отримаємо

$$C_1 = -C_0 e. \tag{3.6}$$

Прикладемо декілька сил у точках z_m . Умова однозначності переміщень буде збігатися з відповідною умовою для випадку однієї сили (вираз (3.6)). Функція $\Phi(z)$ (вираз (3.5)) з урахуванням умови однозначності переміщень набуде наступного вигляду

$$\begin{aligned}
2\pi\Phi(z) = & \sigma(iC_\lambda(z) + \pi) - i\tau(iC_\gamma(z) + \pi) - \pi\bar{\Gamma}' + \\
& + \frac{1}{X(z)} \left\{ [2\pi C_0 - (\sigma B_\lambda - i\tau B_\gamma)](z - e) - \right. \\
& \left. - (\sigma\hat{X}_\lambda - i\tau\hat{X}_\gamma) - \varkappa_1 \sum_m T(z, z_m, P_m) \right\}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Прирівняємо вираз у фігурних дужках, обчислений у точках $z = \beta_{1,2}$, до нуля. Отримаємо систему рівнянь для визначення $\beta_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
2\pi C_0 - (\sigma B_\lambda - i\tau B_\gamma) = \\
= \varkappa_1 \sum_m \left[P_m \sum_k \frac{A_k}{X_m^k} - \bar{P}_m \frac{(z_m^1 - z_m^2)(e - z_m^2)}{(X_m^2)^3} \right] \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\hat{X}_\lambda - i\tau\hat{X}_\gamma = \\
= \varkappa_1 \sum_m \left[P_m \sum_k A_k \left(\frac{e - z_m^k}{X_m^k} + 1 \right) - \bar{P}_m \beta^2 \frac{z_m^1 - z_m^2}{(X_m^2)^3} \right],
\end{aligned}$$

де $\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ – напівдовжина розрізу.

Підставимо $2\pi C_0 - (\sigma B_\lambda - i\tau B_\gamma)$ і $\sigma\hat{X}_\lambda - i\tau\hat{X}_\gamma$ у вираз (3.7). Після деяких перетворень отримаємо

$$\begin{aligned}
2\pi\Phi(z) = & \sigma(iC_\lambda(z) + \pi) - i\tau(iC_\gamma(z) + \pi) - \pi\bar{\Gamma}' + \\
& + \varkappa_1 \sum_m \left\{ P_m \sum_k A_k \frac{R_m^k(z)}{X_m^k} - \frac{\bar{P}_m(z_m^1 - z_m^2)}{(z - z_m^2)X_m^2} \left[R_m^2(z) + \frac{e - z_m^2}{(X_m^2)^2} X(z) \right] \right\}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Проінтегруємо $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned}
2\pi\varphi(z) &= \sigma(iK_\lambda(z) + \pi z) - i\tau(iK_\gamma(z) + \pi z) - \pi\bar{\Gamma}'z + \\
&+ \varkappa_1 \sum_m \left\{ P_m \sum_k A_k \left[C(z_m^k, z) + \frac{i(e - z_m^k)I(z) + X(z)}{X_m^k} - \ln(z - z_m^k) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \bar{P}_m \frac{z_m^1 - z_m^2}{X_m^2} \left[R_m^2(z) - \frac{i\beta^2 I(z) + (e - z_m^2) X(z)}{(X_m^2)^2} \right] \right\}, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$K_\lambda(z) = K(\lambda_2, z) - K(\lambda_1, z), \quad K_\gamma(z) = K(\gamma_2, z) - K(\gamma_1, z),$$

$$K(\xi, z) = \int C(\xi, z) dz,$$

інтеграл визначено в (3.14). Також зазначимо, що функція $C(z, z_m^k)$, яка була отримана при інтегруванні виразу (3.9), була змінена в (3.10) на $C(z_m^k, z)$, яка відрізняється від першої суто уявною сталою. Деякі властивості функції $C(z, \zeta)$ наведено нижче.

Переміщення берегів тріщини визначаються виразом

$$2\mu(u + iv)^\pm = \varkappa\varphi^\pm(x) - \omega^\mp(x), \quad \omega(z) = \varphi(z) + \bar{\Gamma}'z,$$

який не виписано з причини громіздкості.

Властивості функції $C(z, \zeta)$. Коли другий аргумент прямує до берегів розрізу при $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ отримуємо:

$$C^\pm(z, x) = \pm[C_x(z, x) + iC_y(z, x)],$$

$$\begin{aligned}
C_x(z, x) &= \ln \left| \frac{\check{X}(z) - \check{X}(x)}{\check{X}(z) + \check{X}(x)} \right|, \\
C_y(z, x) &= \arccos \frac{|\check{X}(z)|^2 - \check{X}^2(x)}{|\check{X}(z) - \check{X}(x)| \cdot |\check{X}(z) + \check{X}(x)|}.
\end{aligned} \quad (3.11)$$

З огляду на те, що $\check{X}(\bar{z}) = -\overline{\check{X}(z)}$,

$$\begin{aligned} C^\pm(z, x) &= \pm [C_x(z, x) + iC_y(z, x)], \\ C^\pm(\bar{z}, x) &= \pm [-C_x(z, x) + iC_y(z, x)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Зазначимо, що

$$\lim_{x \rightarrow \beta_1^+} C^\pm(z, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \beta_2^-} C^\pm(z, x) = \pm \pi i, \quad z \notin \Lambda$$

і приріст функції $C(z, \zeta)$ при обході другим аргументом контуру навколо розрізу проти годинникової стрілки дорівнює $-2\pi i$.

У випадку, коли перший аргумент функції $C(z, \zeta)$ є дійсним числом із Λ , а другий аргумент прямує до берегів розрізу, отримаємо

$$C^\pm(\xi, x) = \pm C_x(\xi, x) + iC_y(\xi, x), \quad \xi \in \Lambda, \quad (3.13)$$

$$C_x(\xi, x) = \ln \left| \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(x)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(x)} \right|, \quad C_y(\xi, x) = -\pi H(x - \xi),$$

$H(t)$ – функція Гевісайда. Коли $\xi \in \Lambda$, а z прямує до точки розрізу з координатою x ,

$$\lim_{\xi \rightarrow \beta_1^+} C^\pm(\xi, x) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \beta_2^-} C^\pm(\xi, x) = \pi i.$$

Отже, приріст функції $C^\pm(\xi, x)$, коли ξ змінюється від β_1 до β_2 дорівнює πi , а приріст при обході другим аргументом контуру навколо розрізу проти годинникової стрілки дорівнює нулю. Той самий результат можна отримати, якщо розглянути інтегральне представлення функції $C(z, \zeta)$:

$$C(z, \zeta) = X(\zeta) \int \frac{dz}{X(z)(z - \zeta)}.$$

Приріст цієї функції при обході першим аргументом контуру навколо розрізу проти годинникової стрілки:

$$[C(z, \zeta)]_{\Lambda'} = X(\zeta) \int_{\Lambda'} \frac{dz}{X(z)(z - \zeta)} = \begin{cases} -2\pi i, & \zeta \notin \Lambda \\ 0, & \zeta \in \Lambda \end{cases}.$$

Наведемо декілька вживаних у роботі інтегралів, що містять функцію $C(\xi, z)$:

$$\begin{aligned} \int C(\xi, z) dz &= (z - \xi)C(\xi, z) - \hat{X}(\xi)I(z), \\ 2 \int (z - \xi)C(\xi, z) dz &= (z - \xi)^2 C(\xi, z) + \hat{X}(\xi) [\xi I(z) + \hat{X}(z)], \\ 3 \int (z - \xi)^2 C(\xi, z) dz &= (z - \xi)^3 C(\xi, z) - \frac{1}{2} \hat{X}(\xi) \times \\ &\quad \times [(2\xi^2 + \beta^2)I(z) + (4\xi - z)\hat{X}(z)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

β – напівдовжина розрізу, що моделює тріщину з зонами передруйнування.

Концепція тонкої структури. Якщо довжина зчеплення менша за розмір зони К-домінації, то для отримання розв'язку задачі теорії пружності можна скористатися *концепцією тонкої структури*, згідно з якою пружний розв'язок для відриву замінюється його асимптотичним представленням. Згідно концепції зона зчеплення розглядається частиною модельної напівнескінченної тріщини.

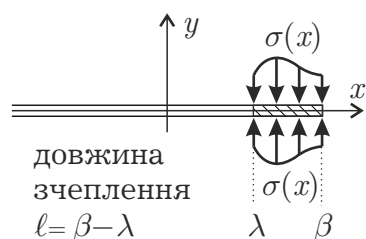


Рис. 3.2 – Схема прикладання сил зчеплення

Прикладене до тіла з тріщиною навантаження обумовлює КІН у вершині модельної тріщини. Умову скінченності напружень можна задовольнити, тільки якщо K_I , обумовлений зовнішнім навантаженням, нівелюється $K_I^{(2)}$, обумовленим силами зчеплення: $K_I + K_I^{(2)} = 0$.

Розкриття для двох задач і умова скінченності напружень

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}(x) &= L\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_I\hat{X}(x), \\ \Delta^{(2)}(x) &= \frac{L}{\pi}\int_{\lambda}^{\beta}\sigma(t)C(x,t)dt, \quad \overbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\lambda}^{\beta}\frac{\sigma(t)}{\hat{X}(t)}dt}^{K_I^{(2)}} = K_I, \\ C(x,t) &= \ln\left|\frac{\hat{X}(x)-\hat{X}(t)}{\hat{X}(x)+\hat{X}(t)}\right|, \quad \hat{X}(t) = \sqrt{\beta-t},\end{aligned}$$

пружна стала L визначена в (2.48).

Асимптотичні представлення виразів для розкриття при $\sigma(x) = \sigma_{\max}$

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}(x) &= L\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_I\sqrt{\ell(1-s)}, \quad \Delta^{(2)}(x) = \frac{L\sigma_{\max}}{\pi}2\ell[F(s) - 2\sqrt{1-s}], \\ \sqrt{\frac{8\ell}{\pi}}\sigma_{\max} &= K_I, \quad s = \frac{x-\lambda}{\ell},\end{aligned}$$

функція F визначена в (1.22). Для задачі в цілому

$$\Delta(x) = \frac{LK_I^2}{4\sigma_{\max}}F(s), \quad \ell = \frac{\pi}{8}\frac{K_I^2}{\sigma_{\max}^2}. \quad (3.15)$$

Використання концепції тонкої структури для визначення відриву. Визначимо напружено-деформований стан в околі тріщини за наявності в точці $z = x_p + iy_p$ ($y_p \geq 0$) зосередженої сили $P = P_x + iP_y$ (рис. (3.3)). За контурних умов

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^{\pm} = -[\sigma_0(x) - i\tau_0(x)], \quad x \in (\lambda_1, \lambda_2)$$

($\sigma_0 - i\tau_0$ визначено в (3.1)) та умов на нескінченності $\sigma_y = \sigma_{\infty}$, $\tau_{xy} = \tau_{\infty}$ ($z \rightarrow \infty$), знаходимо розв'язок задач Гільберта – Прівалова

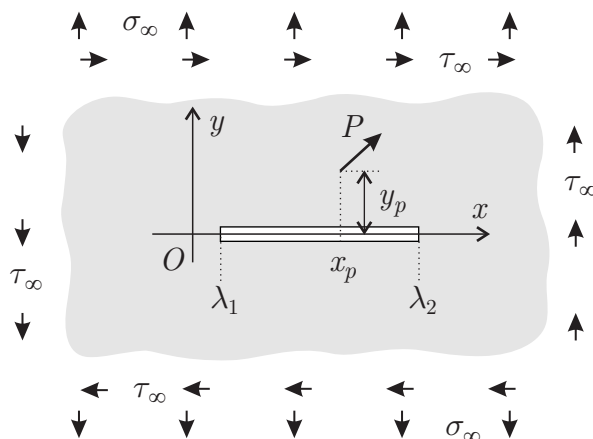


Рис. 3.3 – Схема навантаження

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\pi} H_0(z, z_0, P) + 2C_0 \frac{z - e}{X(z)} \\ -\bar{\Gamma}' \end{array} \right\},$$

($\bar{\Gamma}' = \frac{1}{2}\sigma_\infty - i\tau_\infty$, $e = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$), звідки

$$2\pi \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{array} \right\} = \frac{-\varkappa_1 T(z, z_0, P) + 2\pi C_0 (z - e)}{X(z)} \mp \pi \bar{\Gamma}', \quad (3.16)$$

функція $T(z, z_0, P)$ визначена в (3.3).

КІН у лівому і правому кінцях

$$\begin{aligned} K_I(\lambda_1) - iK_{II}(\lambda_1) &= \lim_{x \rightarrow \lambda_1^-} \sqrt{2\pi(\lambda_1 - x)} [\Phi(x) + \Omega(x)] = \\ &= \frac{\varkappa_1}{\sqrt{\pi\lambda}} T(\lambda_1, z_0, P) + \sqrt{\pi\lambda} (\sigma_\infty - i\tau_\infty) = \\ &= -\frac{\varkappa_1}{\sqrt{\pi\lambda}} \left[P \sum_k A_k \left(1 - \frac{z_0^k - \lambda_2}{X_0^k} \right) + \bar{P} \frac{(z_0^1 - z_0^2)(\lambda_1 - e)}{(\lambda_1 - z_0^2) X_0^2} \right] + \\ &\quad + \sqrt{\pi\lambda} (\sigma_\infty - i\tau_\infty), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
K_I(\lambda_2) - iK_{II}(\lambda_2) &= \lim_{x \rightarrow \lambda_2^+} \sqrt{2\pi(x - \lambda_2)} [\Phi(x) + \Omega(x)] = \\
&= -\frac{\varkappa_1}{\sqrt{\pi\lambda}} T(\lambda_2, z_0, P) + \sqrt{\pi\lambda}(\sigma_\infty - i\tau_\infty) = \\
&= -\frac{\varkappa_1}{\sqrt{\pi\lambda}} \left[P \sum_k A_k \left(1 - \frac{z_0^k - \lambda_1}{X_0^k} \right) + \bar{P} \frac{(z_0^1 - z_0^2)(\lambda_2 - e)}{(\lambda_2 - z_0^2)X_0^2} \right] + \\
&\quad + \sqrt{\pi\lambda}(\sigma_\infty - i\tau_\infty),
\end{aligned}$$

де $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ – напівдовжина розрізу.

За допомогою інтегралів

$$\begin{aligned}
\int \frac{X_0^2 dz}{X(z)(z - z_0^2)} &= C(z, z_0^2), \\
\int \frac{X_0^2 dz}{X(z)(z - z_0^2)^2} &= -\frac{1}{X_0^2} \left[\frac{z_0^2 - e}{X_0^2} C(z, z_0^2) + \frac{X(z)}{z - z_0^2} \right], \\
\int \frac{dz}{X(z)} &= -iI(z), \quad \int \frac{z - e}{X(z)} dz = X(z)
\end{aligned}$$

($z_0^1 = z_0$, $z_0^2 = \bar{z}$, $X_0^k = X(z_0^k)$) проінтегруємо в (3.16):

$$\begin{aligned}
2\pi \begin{Bmatrix} \varphi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} &= \varkappa_1 \left\{ P \sum_k A_k [C(z_0^k, z) - \ln(z - z_0^k) - iI(z)] + \right. \\
&\quad \left. + \bar{P} \frac{z_0^1 - z_0^2}{X_0^2} R_0^2(z) \right\} + \pi(\sigma_\infty - i\tau_\infty)X(z) \mp \pi\bar{\Gamma}'z.
\end{aligned}$$

Якщо дві сили прикладено симетрично відносно лінії розташування тріщини (рис. 3.3)

$$2\pi \begin{Bmatrix} \varphi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} = \pi\sigma_\infty X(z) \mp \pi\bar{\Gamma}'z + \\ + P \left\{ \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k C(z_0^k, z) + F(z, z_0) + \frac{G(z, z_0)}{\varkappa + 1} \right\}, \quad (3.18)$$

$$F(z, z_0) = \operatorname{arcctg} \frac{z - x_p}{y_p}, \\ G(z, z_0) = \frac{2y_p}{(z - x_p)^2 + y_p^2} \left[\frac{x_0(z - x_p) + y_0 y_p}{x_0^2 + y_0^2} X(z) - z + x_p \right], \quad (3.19)$$

$x_0 = \operatorname{Re}X_0^1$, $y_0 = \operatorname{Im}X_0^1$. Переміщення берегів тріщини

$$2\pi u^\pm(x) = L_2 P \left[\operatorname{arcctg} \frac{x - x_p}{y_p} - \frac{2y_p(x - x_p)}{(\varkappa + 1)[(x - x_p)^2 + y_p^2]} \right] - L\pi\bar{\Gamma}'x, \\ 2\pi v^\pm(x) = \pm L \left(\pi\sigma_\infty \hat{X}(x) + \right. \\ \left. P \left[-C_x(z_0, x) + \frac{2y_p(x_0(x - x_p) + y_0 y_p)\hat{X}(x)}{(\varkappa + 1)[(x - x_p)^2 + y_p^2](x_0^2 + y_0^2)} \right] \right),$$

функція $C_x(z, x)$ визначена в (3.11).

Числовий приклад. Розв'язки для тріщини з зонами зчеплення (3.10) і розв'язок для тріщини Гріффітса (3.18) проілюструємо числовим прикладом рис. 3.4, побудованим для $\sigma = 35$ МПа, $\tau = 45$ МПа, $\sigma_\infty = \sigma/2.5$, $\tau_\infty = \tau/4$, $\sigma/P_y = -3$ см⁻¹, $\tau/P_x = -10$ см⁻¹, $x_p = 0$ см, $y_p = 0.1$ см.

Тріщина із симетричними відносно лінії її розташування зусиллями. Прикладемо сили інтенсивності P симетрично відносно лінії розташування тріщини в точках z_0 і \bar{z}_0 , напрями дії сил перпендикулярні до лінії розташування тріщини (рис. 3.5). Нехай z_0 належить верхній півплощині.

Система (3.8) для знаходження границь розрізу $\beta_{1,2}$ перетвориться для

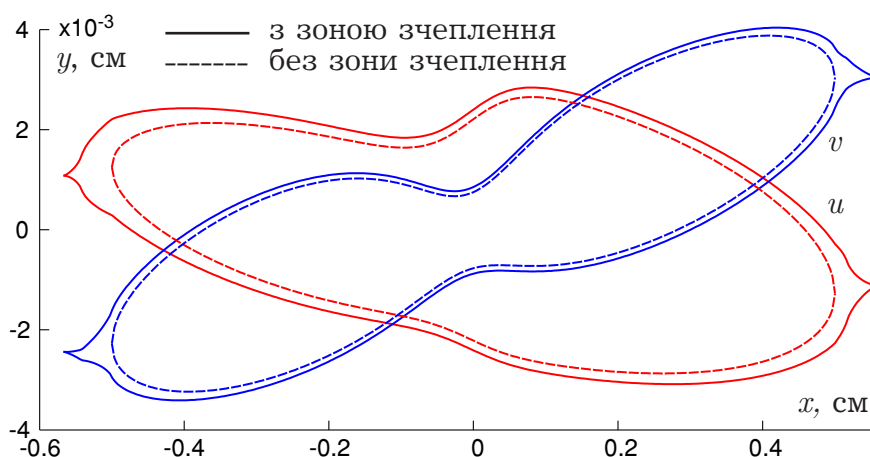
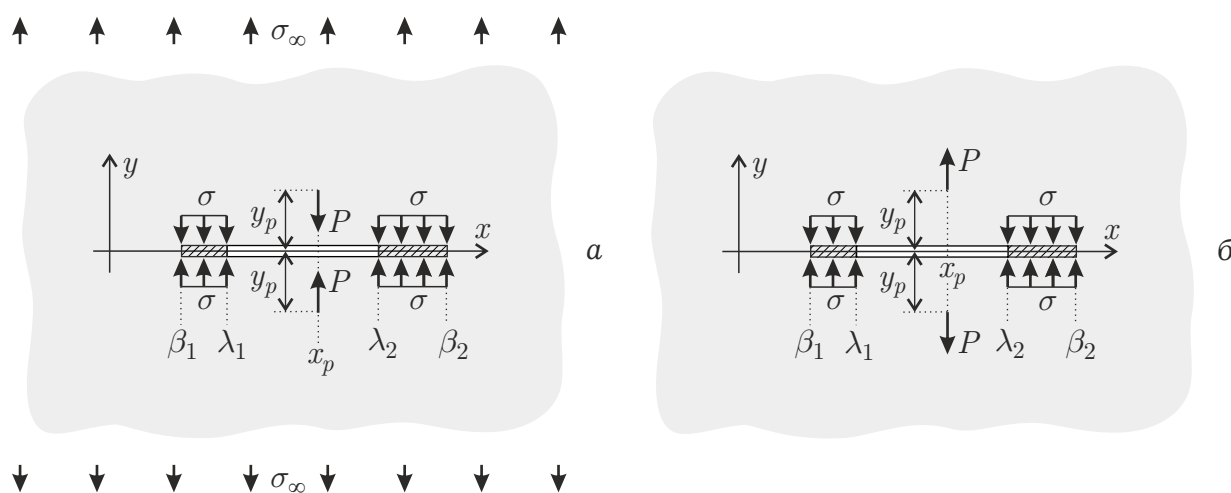
Рис. 3.4 – Горизонтальні (u) й вертикальні (v) переміщення берегів тріщини

Рис. 3.5 – Схема навантаження та параметри моделі

цієї задачі до вигляду

$$\begin{aligned} \pi\sigma_\infty - \sigma B_\lambda &= P \left[q_1 - \frac{2y_p}{\varkappa + 1} q_4 \right] \\ \sigma \hat{X}_\lambda &= P \left[q_2 - \frac{2y_p l^2}{\varkappa + 1} q_3 \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

де

$$P = P_y, \quad \begin{aligned} q_1 &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{X_0^1} \right\}, & q_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{e - z_0^1}{X_0^1} \right\}, \\ q_3 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(X_0^1)^3} \right\}, & q_4 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{e - z_0^1}{(X_0^1)^3} \right\}. \end{aligned}$$

При $y_p = 0$ (сила прикладена до берегів розрізу) з урахуванням того,

що $X_0^1 = i\hat{X}(x_p)$, система (3.20) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\pi\sigma_\infty - \sigma B_\lambda &= -P\hat{X}^{-1}(x_p) \\ \sigma\hat{X}_\lambda &= -P(e - x_p)\hat{X}^{-1}(x_p).\end{aligned}$$

Комплексні потенціали задачі:

$$\begin{aligned}2\pi\Phi(z) &= \sigma(iC_\lambda(z) + \pi) - \pi\bar{\Gamma}' + P\left\{\frac{i}{2}\sum_k(-1)^k\frac{R_0^k(z)}{X_0^k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_p}{\varkappa + 1}\sum_k\frac{1}{X_0^k(z - z_0^k)}\left[R_0^k(z) + \frac{(e - z_0^k)X(z)}{(X_0^k)^2}\right]\right\}, \quad \bar{\Gamma}' = \frac{1}{2}\sigma_\infty, \quad (3.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\pi\varphi(z) &= \sigma(iK_\lambda(z) + \pi z) - \pi\bar{\Gamma}'z + \\ &\quad + P\left\{\frac{i}{2}\sum_k(-1)^k\left[C(z_0^k, z) + \frac{i(e - z_0^k)I(z) + X(z)}{X_0^k} - \ln(z - z_0^k)\right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_p}{\varkappa + 1}\sum_k\frac{1}{X_0^k}\left[R_0^k(z) - \frac{il^2I(z) + (e - z_0^k)X(z)}{(X_0^k)^2}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Перепишемо останній потенціал у формі

$$\begin{aligned}2\pi\varphi(z) &= \sigma(iK_\lambda(z) + \pi z) - \pi\bar{\Gamma}'z - \\ &\quad + P\left\{\frac{i}{2}\sum_k(-1)^kC(z_0^k, z) + F(z, z_0) + \frac{G(z, z_0)}{\varkappa + 1}\right\}, \quad (3.22)\end{aligned}$$

де введено функції

$$F(z, z_0) = \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k \left[\frac{i(e - z_0^k)I(z) + X(z)}{X_0^k} - \ln(z - z_0^k) \right],$$

$$G(z, z_0) = \sum_k \frac{y_p}{X_0^k} \left[R_0^k(z) - \frac{il^2 I(z) + (e - z_0^k)X(z)}{(X_0^k)^2} \right]$$

(цим співвідношенням відповідають вирази (3.18) і (3.19) для тріщини Гріффітса). Перепишемо функції в останньому виразі:

$$F(z, z_0) = \operatorname{arccctg} \frac{z - x_p}{y_p} + iq_1 I(z) + q_2 X(z),$$

$$G(z, z_0) = 2y_p \left\{ \frac{1}{(z - x_p)^2 + y_p^2} \left(\frac{x_0(z - x_p) + y_0 y_p}{x_0^2 + y_0^2} X(z) - \right. \right. \quad (3.23)$$

$$\left. \left. -z + x_p \right) - [il^2 q_3 I(z) + q_4 X(z)] \right\},$$

$$x_0 = \operatorname{Re} X_0^1, \quad y_0 = \operatorname{Im} X_0^1.$$

На берегах розрізу функції F і G прийматимуть значення

$$F^\pm(x, z_0) = \operatorname{arccctg} \frac{x - x_p}{y_p} \pm i[q_1 I(x) + q_2 \hat{X}(x)],$$

$$G^\pm(x, z_0) = 2y_p \left\{ \frac{1}{(x - x_p)^2 + y_p^2} \left(\pm i \hat{X}(x) \frac{x_0(x - x_p) + y_0 y_p}{x_0^2 + y_0^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. -x + x_p \right) \mp i[q_3 l^2 I(x) + q_4 \hat{X}(x)] \right\}.$$

Згідно з (3.12),

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k C^\pm(z_0^k, x) = \mp C_x(z_0, x)$$

$$\begin{aligned}
2\pi\varphi^\pm(x) &= \sigma[\pi x - K_y(x)] - \pi\bar{\Gamma}'x + \\
&+ P\left[\operatorname{arctg}\frac{x - x_p}{y_p} - \frac{2y_p(x - x_p)}{(\varkappa + 1)[(x - x_p)^2 + y_p^2]}\right] \pm \\
&\pm i\left\{\sigma K_x(x) + P\left(-C_x(z_0, x) + q_1 I(x) + q_2 \hat{X}(x) + \right.\right. \\
&\left.+\frac{2y_p}{\varkappa + 1}\left[\frac{(x_0(x - x_p) + y_0 y_p)\hat{X}(x)}{((x - x_p)^2 + y_p^2)(x_0^2 + y_0^2)} - q_3 l^2 I(x) - q_4 \hat{X}(x)\right]\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$K_x(x) = \operatorname{Re}K_\lambda^+(x), \quad K_y(x) = \operatorname{Im}K_\lambda^+(x).$$

Вирази для горизонтального й вертикального переміщень берігів:

$$\begin{aligned}
2\pi u^\pm(x) &= L_2\sigma[\pi x - K_y(x)] + \\
&+ L_2 P\left[\operatorname{arctg}\frac{x - x_p}{y_p} - \frac{2y_p(x - x_p)}{(\varkappa + 1)((x - x_p)^2 + y_p^2)}\right] - L\pi\bar{\Gamma}'x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi v^\pm(x) &= \pm L\left\{\sigma K_x(x) + P\left(-C_x(z_0, x) + q_1 I(x) + q_2 \hat{X}(x) + \right.\right. \\
&\left.+\frac{2y_p}{\varkappa + 1}\left[\frac{(x_0(x - x_p) + y_0 y_p)\hat{X}(x)}{((x - x_p)^2 + y_p^2)(x_0^2 + y_0^2)} - q_3 l^2 I(x) - q_4 \hat{X}(x)\right]\right)\right\}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Розглянемо вісесиметричну задачу, що відповідає рис. 3.6 (на рисунку вибрано від'ємний напрям сили P). Коли $x_p = e = 0$, $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ отримаємо

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -\frac{1}{\tilde{X}}, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = \frac{y_p}{\tilde{X}^3}, \quad \tilde{X} = \sqrt{\beta^2 + y_p^2}.$$

Згідно з (3.23),

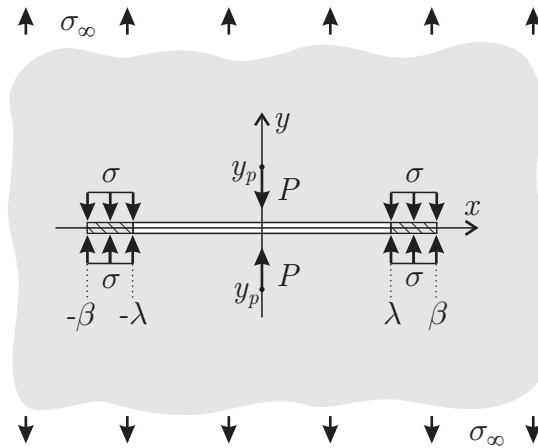


Рис. 3.6 – Схема навантаження та параметри моделі

$$F(z, z_0) = \operatorname{arctg} \frac{z}{y_p} - \frac{X(z)}{\tilde{X}}, \quad G(z, z_0) = -\frac{2y_p}{z^2 + y_p^2} \left[z + y_p \frac{X^3(z)}{\tilde{X}^3} \right],$$

$$F^\pm(x, z_0) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y_p} \mp \frac{i\hat{X}(x)}{\tilde{X}}, \quad G^\pm(x, z_0) = \frac{2y_p}{x^2 + y_p^2} \left[-x \pm iy_p \frac{\hat{X}^3(x)}{\tilde{X}^3} \right],$$

підставимо $F(z, z_0)$ і $G(z, z_0)$ у вираз для $\varphi(z)$ (3.22); на берегах розрізу $\varphi(z)$ прийматиме значення

$$2\pi\varphi^\pm(x) = \sigma[\pi x - K_y(x)] - \pi\bar{\Gamma}'x + P \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{y_p} - \frac{2y_p x}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2)} \right] \pm$$

$$\pm i \left[\sigma K_x(x) + P \left(-C_x(iy_p, x) - \frac{\hat{X}(x)}{\tilde{X}} + \frac{2y_p^2 \hat{X}^3(x)}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2) \tilde{X}^3} \right) \right],$$

функція $C_x(iy_p, x)$ визначена в (3.37).

Переміщення берегів розрізу

$$2\pi u^\pm(x) = L_2 \left(\sigma[\pi x - K_y(x)] + \right.$$

$$\left. + P \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{y_p} - \frac{2y_p x}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2)} \right] \right) - L\pi\bar{\Gamma}'x, \quad (3.25)$$

$$2\pi v^{\pm}(x) = \pm L \left[\sigma K_x(x) + P \left(-C_x(iy_p, x) - \frac{\hat{X}(x)}{\tilde{X}} + \frac{2y_p^2 \hat{X}^3(x)}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2) \tilde{X}^3} \right) \right].$$

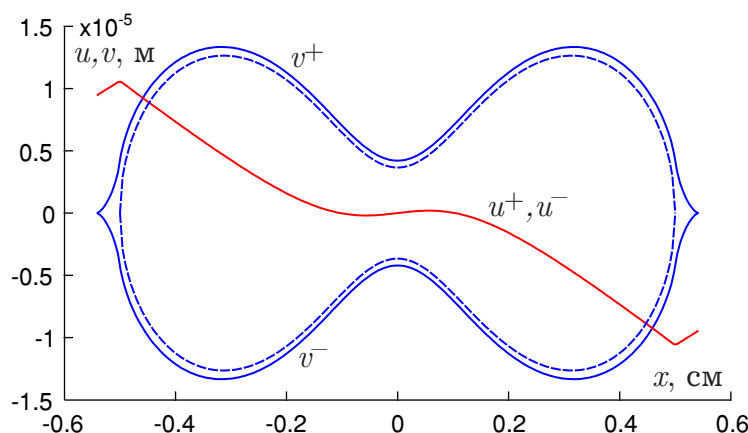


Рис. 3.7 – Горизонтальні (u) й вертикальні (v) переміщення берегів тріщини

На рис. 3.7 представлено числові розв'язки, отримані для наступних значень параметрів задачі: $\varkappa = 2.077$, $\mu = 1539$ МПа, $\sigma = 35$ МПа, $\sigma/P = -4$ см $^{-1}$, $\beta = 0.5$ см, $y_p = 0.2$ см. Для порівняння на цьому ж рисунку наведені переміщення берегів розрізу без зон зчеплення (штрихова крива).

Проілюструємо числовими прикладами розв'язки (3.24) для невісесиметричних задач. Зафіксуємо значення механічних сталей $K = 5410$ МПа, $\mu = 2510$ МПа ($\varkappa = \frac{5}{3} + \frac{8\mu}{9K}$) і параметра моделі $\sigma = 35$ МПа. Розв'язки на рис. 3.8 а отримані при $y_p = 0.1$ см, $\sigma_{\infty} = \sigma/2$, $\sigma/P = 4$ см $^{-1}$, а розв'язки на рис. 3.8 б – при $y_p = 0.1$ см, $\sigma/P = 2$ см $^{-1}$. Також покажемо вплив віддалення точки прикладання сили від лінії розташування тріщини. На рис. 3.9 а наведене вертикальне переміщення берегів тріщини, отримане при $x_p = 0.2$ см, $\sigma_{\infty} = \sigma/2$, $\sigma/P = 4$ см $^{-1}$, а розв'язки на рис. 3.9 б – при $x_p = 0.2$ см, $\sigma/P = 2$ см $^{-1}$.

Проілюструємо розв'язки (3.25) для горизонтальних переміщень берегів тріщини. На рис. 3.10 а,б побудовані горизонтальні переміщення, що

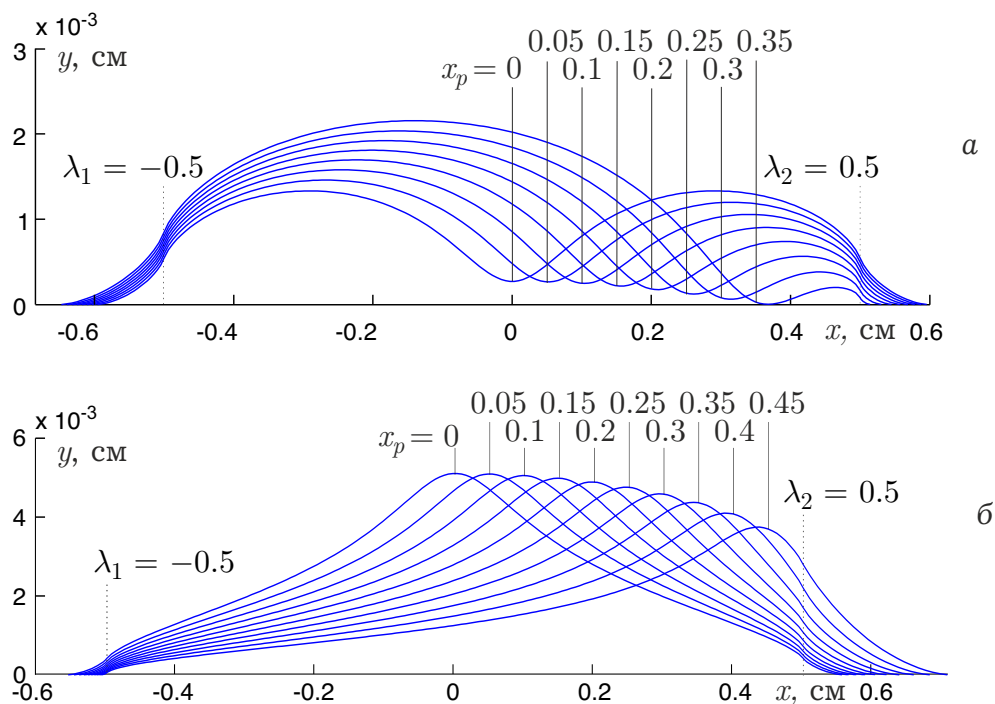


Рис. 3.8 – Вертикальні переміщення берегів тріщини, що відповідають схемі навантаження рис. 3.5

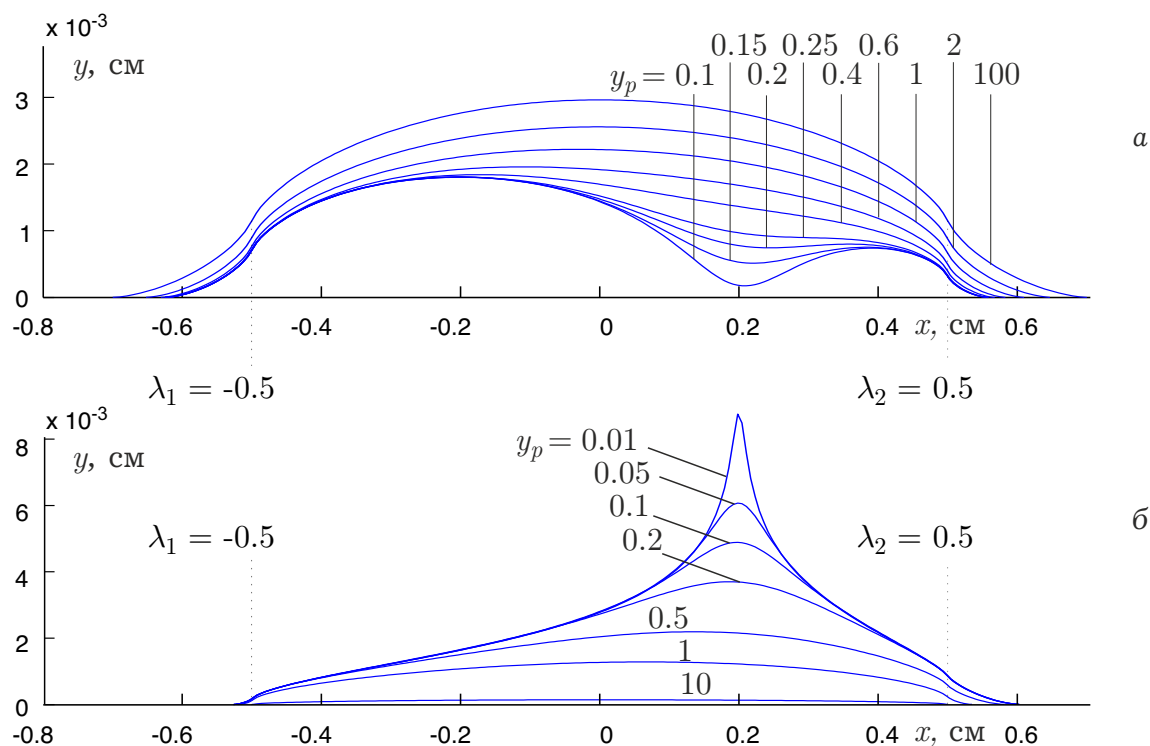


Рис. 3.9 – Вертикальні переміщення берегів тріщини, що відповідають схемі навантаження рис. 3.5

відповідають вертикальним переміщенням, зображеним на рис. 3.8, блоки в,г відповідають рис. 3.9.

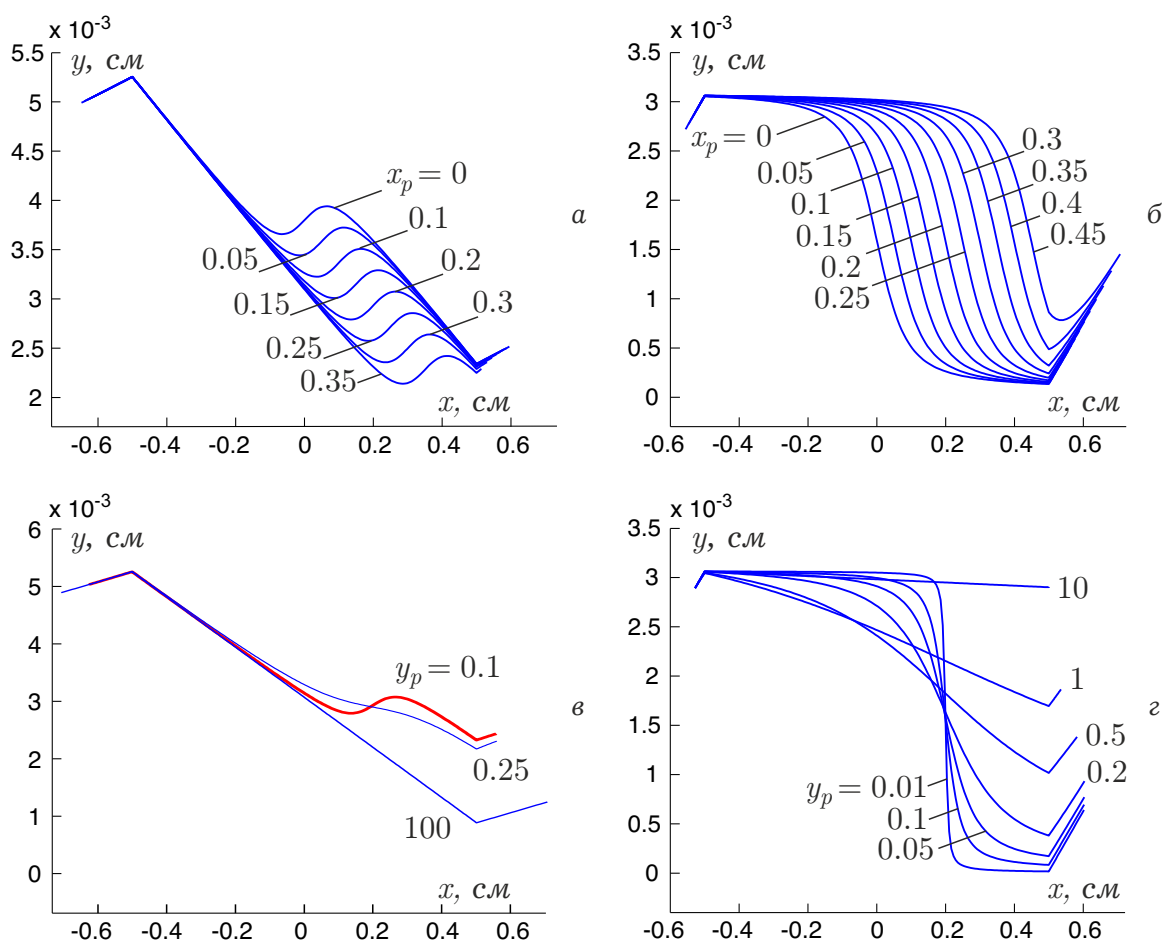


Рис. 3.10 – Горизонтальні переміщення берегів тріщини

Покажемо на числовому прикладі, як впливає на результати розрахунку використання концепції тонкої структури. Розглянемо задачу, що відповідає рис. 3.5 а. Обчислимо вертикальне переміщення й довжину зчеплення для значень x_p з відрізка $[0, 0.35]$ та декількох інтенсивностей P . При знесенні сил вправо від центру тріщини вертикальне переміщення в її правому кінці й розмір відповідної зони зчеплення зменшуються, у лівому – збільшуються. Вертикальне переміщення у вершині тріщини й довжина лівої зони зчеплення наведені на рис. 3.11 а і б як функції абсциси точки прикладання зосереджених сил. Криві з номерами без штрихів отримані за допомогою (3.24), (3.20), зі штрихами – за допомогою (3.15). Криві 1 відповідають $\sigma/P = 4 \text{ см}^{-1}$, криві 2 – $\sigma/P = 8 \text{ см}^{-1}$, характеристики матеріалу обрано такими, як і в попередньому числовому прикладі, $y_p = 0.1 \text{ см}$, $\sigma/\sigma_\infty = 2$.

Зазначимо, що для цієї задачі величини, отримані з використанням концепції тонкої структури, менше за ті, які отримано при використанні точної постановки.

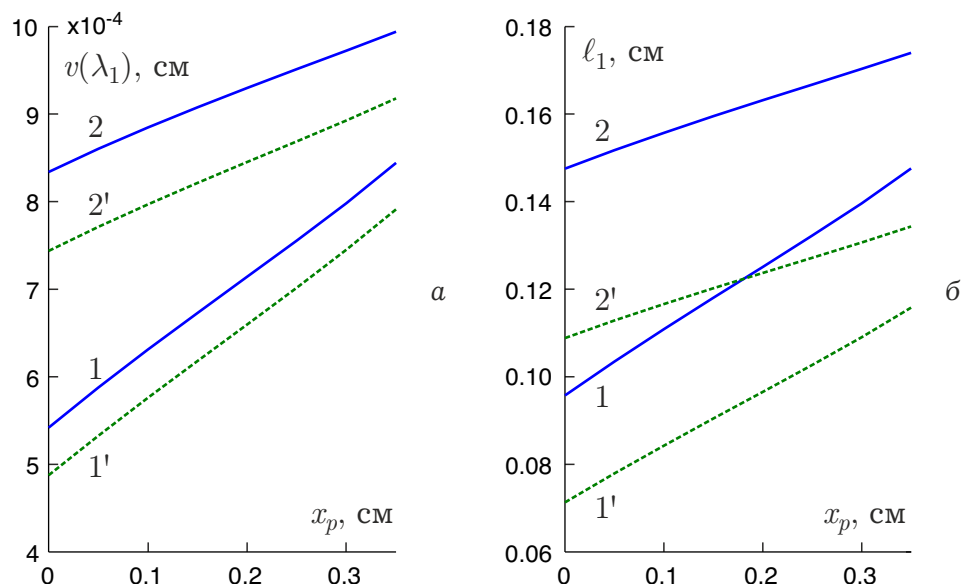


Рис. 3.11 – Вертикальне переміщення у вершині тріщини (а) та відповідна довжина зчеплення (б)

На основі потенціалів (3.21) і (3.22), що відповідають рис. 3.5 а, не важко отримати розв'язок задачі, що відповідає рис. 3.12.

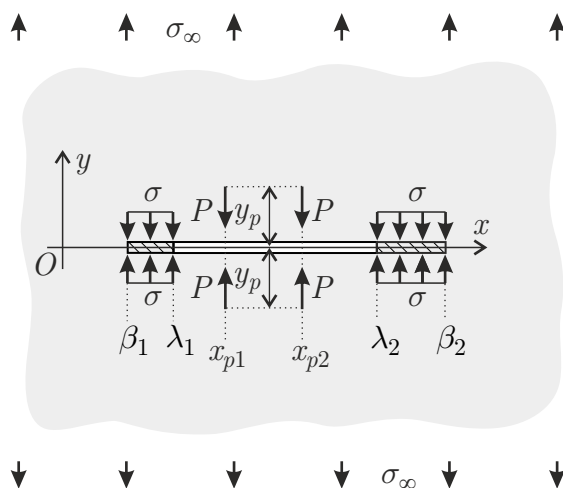


Рис. 3.12 – Схема навантаження та параметри моделі

У цьому разі границі розрізу знаходимо із системи (3.20), у якій величини q приймають значення

$$q_1 = \sum_m \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{X_m} \right\}, \quad q_2 = \sum_m \operatorname{Im} \left\{ \frac{e - z_m}{X_m} \right\},$$

$$q_3 = \sum_m \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(X_m)^3} \right\}, \quad q_4 = \sum_m \operatorname{Re} \left\{ \frac{e - z_m}{(X_m)^3} \right\},$$

$z_m \equiv z_m^1$, $\bar{z}_m \equiv z_m^2$ – точки прикладання сил, $X_m \equiv X_m^1 = X(z_m)$. Потенціали задачі, згідно з (3.21) і (3.22), набудуть вигляду

$$2\pi\Phi(z) = \sigma(iC_\lambda(z) + \pi) - \pi\bar{\Gamma}' + P \sum_m \left\{ \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k \frac{R_m^k(z)}{X_m^k} - \frac{y_p}{\varkappa + 1} \sum_k \frac{1}{X_m^k(z - z_m^k)} \left[R_m^k(z) + \frac{e - z_m^k}{(X_m^k)^2} X(z) \right] \right\},$$

$$2\pi\varphi(z) = \sigma(iK(z) + \pi z) - \pi\bar{\Gamma}'z - P \sum_m \left\{ \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k C(z_m^k, z) + F(z, z_m) + \frac{G(z, z_m)}{\varkappa + 1} \right\}. \quad (3.26)$$

Числові розв'язки рис. 3.13 ілюструють вирази (3.26) для вертикальних переміщень у випадку схеми навантаження рис. 3.12. Криві отримано при $y_p = 0.1$ см, $\sigma_\infty = \sigma/2$, $\sigma/P = 6$ см⁻¹ і наведених на рисунку x_{p2} та $x_{p1} = -x_{p2}$.

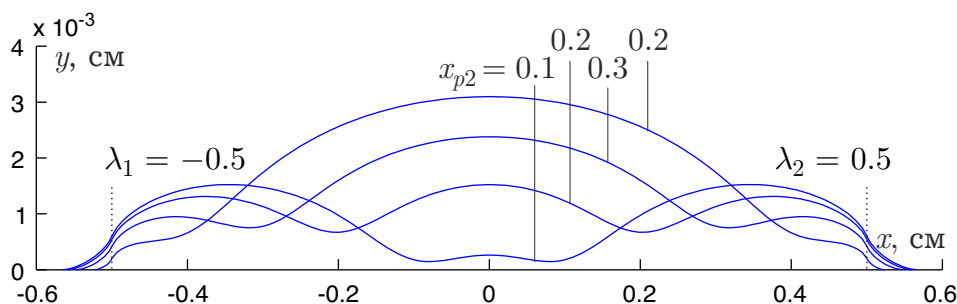


Рис. 3.13 – Вертикальні переміщення берегів тріщини, що відповідають схемі навантаження рис. 3.12

Врахування часткового контакту берегів тріщини. Схема навантаження елемента конструкції з наявною тріщиною може спричинити повний або частковий контакт берегів тріщини. Незначне перекриття берегів з'являється в розв'язку задачі навіть за наявності лише зсувних напружень у нескінченно віддалених точках пластини з тріщиною [91]. З'ясуємо умову наявності перекриття й побудуємо визначальні рівняння для параметрів контактної зони. Зробимо це для найпростіших схем навантаження: а) зсувного напруження на нескінченності; б) комбінації розтягувального напруження на нескінченності й зосереджених сил, що стягують береги тріщини.

Спочатку розглянемо задачу з прикладеними в нескінченно віддалених точках зсувними напруженнями τ_∞ (рис. 3.14 а). Напружено-деформований стан в околі тріщини визначається потенціалами

$$2 \begin{Bmatrix} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{Bmatrix} = i\tau_\infty \left(-\frac{z}{X(z)} \pm 1 \right), \quad 2 \begin{Bmatrix} \varphi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} = i\tau_\infty (-X(z) \pm z),$$

де $X(z) = \sqrt{z^2 - \lambda^2}$. Вирази для переміщень берегів тріщини у формі (2.31) будуть визначатися функціями

$$\begin{Bmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{Bmatrix} = \frac{\kappa + 1}{4\mu} \tau_\infty \begin{Bmatrix} 0 & \hat{X} \\ x & 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{X}(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2}. \quad (3.27)$$

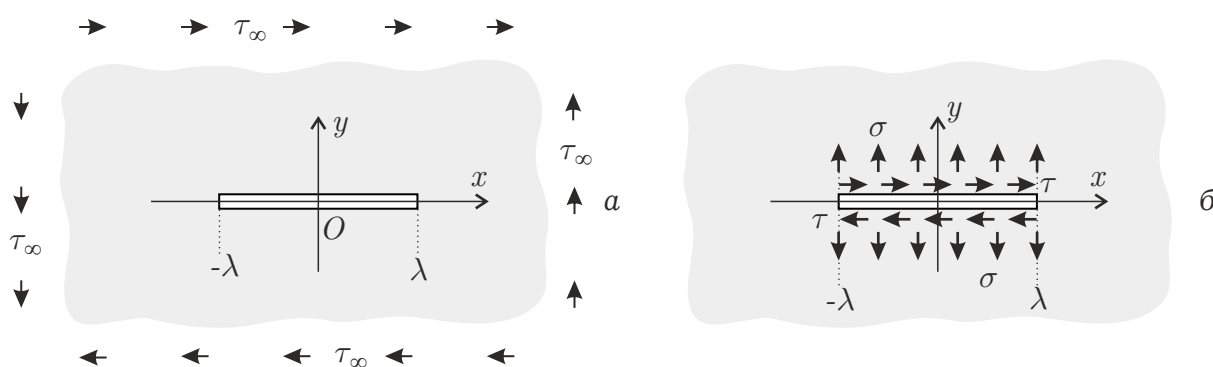


Рис. 3.14 – Схеми прикладання навантаження

Використаємо умову перекриття берегів тріщини (2.33):

$$v_1(1 + u'_0) - u_1v'_0 = -\left(\frac{\varkappa + 1}{4\mu}\tau_\infty\right)^2 \hat{X} < 0, \quad |x| < \lambda.$$

Від'ємність виразу визначає наявність перекриття берегів вздовж всієї тріщини.

Напружено-деформований стан в околі тріщини з контурними напруженнями, що відповідають рис. 3.14 б, визначається потенціалами

$$2 \begin{Bmatrix} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{Bmatrix} = (\sigma - i\tau) \left(\frac{z}{X(z)} - 1 \right), \quad 2 \begin{Bmatrix} \varphi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} = (\sigma - i\tau)(X(z) - z);$$

функції, що визначають переміщення берегів тріщини у формі (2.31), мають вигляд

$$\begin{Bmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\mu} \begin{Bmatrix} -\sigma(\varkappa - 1)x & \tau(\varkappa + 1)\hat{X} \\ \tau(\varkappa - 1)x & \sigma(\varkappa + 1)\hat{X} \end{Bmatrix}. \quad (3.28)$$

Додавши (3.27) до (3.28), отримаємо розв'язок задачі зі зсувними напруженнями на нескінченності й зумовленими ними контактними напруженнями. На основі цього розв'язку та умови (2.33) складемо рівняння для визначення контактних напружень:

$$\sigma[4\mu - \sigma(\varkappa - 1)] - (\tau_\infty + \tau)[\tau_\infty(\varkappa + 1) + \tau(\varkappa - 1)] = 0.$$

Покладемо $\tau = -k_{\text{tr}}\sigma$ (дотичне контактне напруження буде мати напрям, протилежний вказаному на рис. 3.14 б), тоді

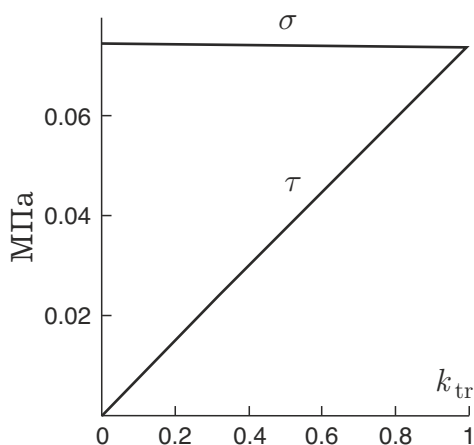
$$\sigma = \frac{2\mu + \varkappa k_{\text{tr}}\tau_\infty - \sqrt{(2\mu + \varkappa k_{\text{tr}}\tau_\infty)^2 - (\varkappa^2 - 1)(k_{\text{tr}}^2 + 1)\tau_\infty^2}}{(\varkappa - 1)(1 + k_{\text{tr}}^2)}.$$

За відсутності тертя ($k_{\text{tr}} = 0$)

$$\sigma = \frac{2\mu - \sqrt{4\mu^2 - (\varkappa^2 - 1)\tau_\infty^2}}{\varkappa - 1} = \frac{\varkappa + 1}{4\mu}\tau_\infty^2 + O\left(\left[\frac{\tau_\infty}{2\mu}\right]^4\right).$$

КІН з урахуванням контактної напруженні

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi\lambda}, \quad K_{II} = (\tau_\infty - \tau)\sqrt{\pi\lambda}.$$



Отже, введене контактне напруження несуттєво зменшує K_{II} на відносну величину порядку $\frac{1}{2}k_{tr}L\tau_\infty$.

На рис. 3.15 наведена залежність контактних напружень від коефіцієнта тертя, обчислена при $\varkappa = 2$, $\mu = 1$ ГПа, $\tau_\infty = 10$ МПа.

Рис. 3.15 – Контактні напруження

Тріщина Гріффітса з ділянкою контакту між берегами. Сумісна дія навантаження на нескінченності й системи зосереджених сил в околі тріщини може призвести до часткового контакту її берегів.

Розглянемо конфігурацію сил, що зображена на рис. 3.16. За певного співвідношення інтенсивностей P і σ_∞ між берегами тріщини буде утворюватися ділянка контакту. У разі симетрично прикладених відносно осі Ox сил, у виразах для переміщень берегів тріщини (2.31) матиме $v_0 = 0$. Умова перекриття берегів (2.33) перепишеться у вигляді

$$v_1(x) < 0, \quad |x| < \lambda.$$

Рівняння для знаходження довжини ділянки контакту й контактної напруженні:

$$v_1(x) = 0 \quad \text{або} \quad \Delta(x) = 0, \quad |x| < \lambda. \quad (3.29)$$

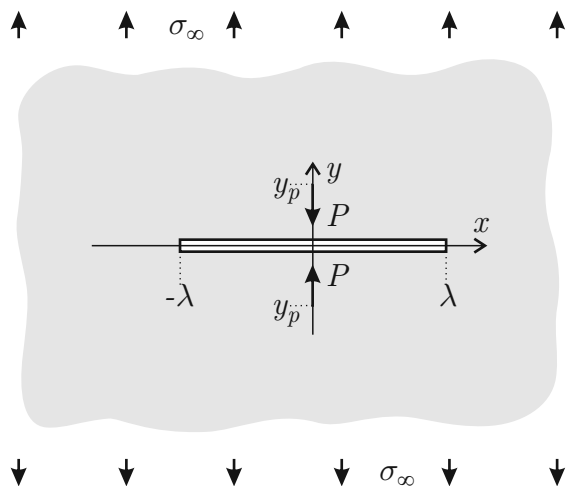


Рис. 3.16 – Схема навантаження

Визначимо границі ділянки контакту й контактне напруження для розглянутої схеми навантаження. За відсутності тертя між берегами тріщини контурні умови мають вигляд

$$\sigma_y^\pm(x) = -\sigma_0(x) - \sigma_c(x), \quad \tau_{xy}^\pm = 0, \quad |x| < \lambda. \quad (3.30)$$

Для системи двох сил $-P_1 = P_2 = iP$ ($P > 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &= \frac{\varkappa_1}{\pi} \sum_{m=1}^2 \left[P_m \sum_k \frac{A_k}{x - z_m^k} - \bar{P}_m \frac{z_m^1 - z_m^2}{(x - z_m^2)^2} \right] = \\ &= -\frac{Py_p}{\pi(x^2 + y_p^2)} \left[1 - \frac{2(x^2 - y_p^2)}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2)} \right] \end{aligned}$$

$$(A_1 = -1, A_2 = \varkappa, z_1^1 = z_2^2 = -z_1^2 = -z_2^1 = iy_p).$$

Контурні напруження апроксимуємо кусково-лінійною функцією

$$\sigma_c(x) = \begin{cases} \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, & x \in (b_{k-1}, b_k) \\ 0, & x \in (b_n, \lambda) \end{cases},$$

$$0 < k < n, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma_c(-x) = \sigma_c(x)$$

з напруженнями σ_k у вузлах сітки b_k на відрізку $(b_0 = 0, b_n)$. Величини σ_k разом із границею ділянки контакту, b_n знайдемо в процесі розв'язання

задачі.

За заданих напружень на нескінченності

$$\sigma_y = \sigma_\infty, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

розв'язок задачі з контурними умовами 3.30 знаходимо із системи двох рівнянь відносно функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{H(z) + H_0(z)}{\pi} + 2\frac{C_0 z}{X(z)} \\ -\bar{\Gamma}' \end{array} \right\}, \quad C_0 = \bar{\Gamma}' = \frac{1}{2}\sigma_\infty,$$

$$H(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{-b_n}^{b_n} \frac{\sigma_c(x)X^+(x)}{x-z} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{2N_k z}{X(z)} \right],$$

де функції $h_k(z)$ визначені в (3.32), а сталі N_k – в (3.33),

$$H_0(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sigma_0(x)X^+(x)}{x-z} dx.$$

Отже,

$$\begin{aligned} 2\pi\Phi(z) = & -\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{2N_k z}{X(z)} \right] + P \left\{ \frac{i}{2} \sum_k (-1)^k \frac{R_0^k(z)}{X_0^k} - \right. \\ & \left. - \frac{y_p}{\varkappa + 1} \sum_k \frac{1}{X_0^k \cdot (z - z_0^k)} \left[R_0^k(z) - \frac{z_0^k \cdot X(z)}{(X_0^k)^2} \right] \right\} + \frac{\pi\sigma_\infty z}{X(z)} - \pi\bar{\Gamma}', \quad (3.31) \end{aligned}$$

де $R_0^k(z) = R(z, z_0^k)$, $X_0^k = X(z_0^k)$, функція $R(z, \zeta)$ визначена в (3.34).

Проінтегруємо в (3.31):

$$2\pi\varphi(z) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k [iJ_k(z) - 2N_k X(z)] + \\ + P \left\{ \frac{i}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k C(z_0^k, z) + F(z, y_p) + \frac{G(z, y_p)}{\varkappa + 1} \right\} + \pi\sigma_\infty X(z) - \pi\bar{\Gamma}'z,$$

де функції $J_k(z)$ визначені в (3.35), $C(\xi, z)$ – в (3.4), а $F(z, y_p)$ і $G(z, y_p)$ – в (3.36).

На берегах розрізу

$$2\pi\varphi^\pm(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \left\{ i [\pm J_{kx}(x) + iJ_{ky}(x)] \mp 2iN_k \hat{X}(x) \right\} + \\ + P \left\{ \mp C_x(iy_p, x) + F(x, y_p) + \frac{G^\pm(x, y_p)}{\varkappa + 1} \right\} \pm i\pi\sigma_\infty \hat{X}(x) - \pi\bar{\Gamma}'x,$$

$J_{kx}(x) = \operatorname{Re}\{J_k^+(x)\}$, $J_{ky}(x) = \operatorname{Im}\{J_k^+(x)\}$, $C_x(iy_p, x)$ визначено в (3.37),

$$G^\pm(x, y_p) = \frac{2y_p}{x^2 + y_p^2} \left[\pm \frac{iy_p}{\tilde{X}} \hat{X}(x) - x \right].$$

Нормальний відрив, $\Delta = v^+ - v^-$ знайдемо з виразу

$$\frac{\pi}{L} \Delta(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k [-J_{kx}(x) + 2N_k \hat{X}(x)] + \\ + P \left\{ -C_x(iy_p, x) + \frac{2y_p^2 \hat{X}(x)}{(\varkappa + 1)(x^2 + y_p^2) \tilde{X}} \right\} + \pi\sigma_\infty \hat{X}(x).$$

Половину довжини ділянки контакту визначимо з (3.29). Це рівняння будемо розв'язувати числовим методом. На кожній ітерації будемо визначати напруження $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ із системи лінійних рівнянь

$$\Delta(b_m) = 0, \quad m = 0, \dots, n - 1,$$

яка в розширеній формі має вигляд

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{mk} \sigma_k = B_m, \quad m = 0, \dots, n - 1,$$

$$A_{mk} = -J_{xk}(b_m) + 2N_k \hat{X}(b_m),$$

$$B_m = -P \left\{ -C_x(iy_p, b_m) + \frac{2y_p^2 \hat{X}(b_m)}{(\varkappa + 1)(b_m^2 + y_p^2) \tilde{X}} \right\} - \pi \sigma_\infty \hat{X}(b_m).$$

На рис. 3.17 *а* наведені вертикальне переміщення берегів розрізу з урахуванням і без урахування контактного напруження (в останньому випадку наявне перекриття берегів); на рис. 3.17 *б* наведене відповідне контактне напруження. Залежності отримано для наступних значень параметрів задачі: $\varkappa = 2.077$, $\mu = 1539$ МПа, $\sigma = 35$ МПа, $\sigma_\infty = \sigma/2.5$, $\sigma/P = 3.5$ см⁻¹, $\lambda = 0.5$ см, $y_p = 0.2$ см.

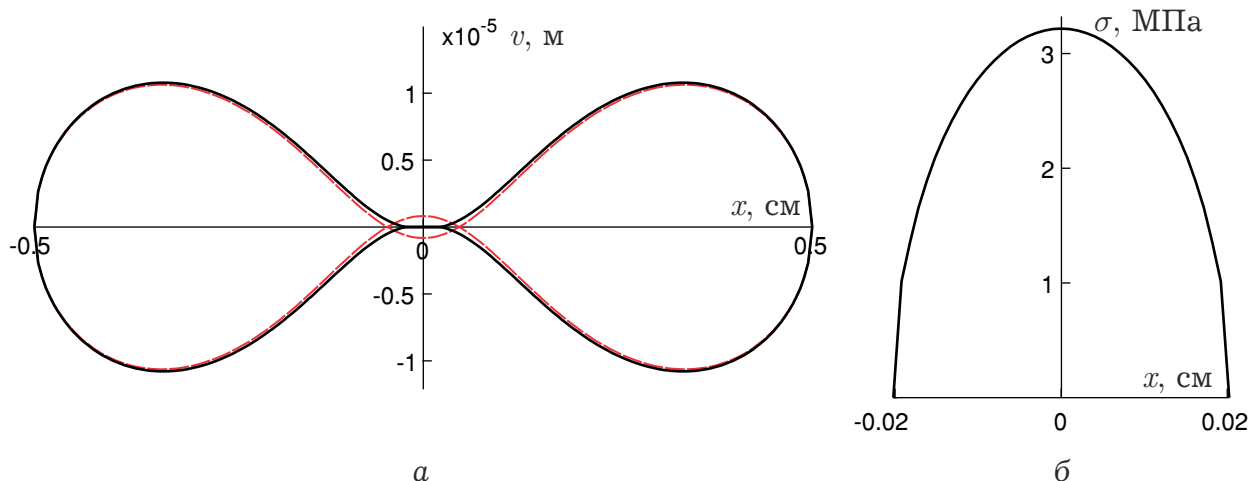


Рис. 3.17 – Контур тріщини (*а*) та контактне напруження (*б*)

При зменшенні інтенсивності зовнішнього навантаження або збільшенні сили P ділянка контакту буде збільшуватися. На рис. 3.18 проілюстро-

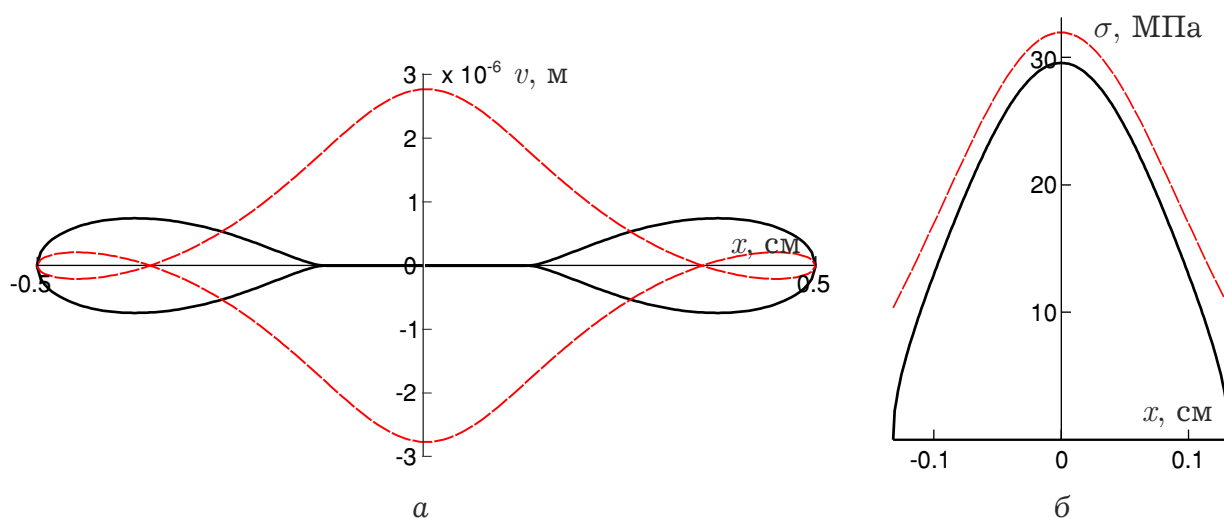


Рис. 3.18 – Контур тріщини (а) та контактне напруження (б)

вано ті самі величини, що й на попередньому рисунку, розраховані при $\sigma/P = 2 \text{ см}^{-1}$. З подальшим збільшенням P контактувати будуть береги вздовж всієї тріщини; за такої умови контактне напруження становитиме $-\sigma_0(x) - \sigma_\infty$. Ця величина на ділянці контакту, визначеній в останньому числовому прикладі, наведена на рис. 3.18 б разом із відповідним контактним напруженням.

Аналіз числових розв'язків вказує на те, що розмір ділянки контакту можна оцінити за допомогою розв'язку задачі без контактного напруження (задача I). Цю оцінку використовуємо як початкове наближення при числовому розв'язанні задачі. За незначного у порівнянні з довжиною тріщини розміру зони перекриття довжина зони контакту визначається ділянкою перекритих берегів задачі I, а при значних розмірах – розміром ділянки з від'ємним контактним напруженням задачі I.

Використані в розділі 3.1 позначення:

$$\begin{aligned}
 h_0(z) &= Q'_1(z), \quad h_k(z) = Q'_{k+1}(z) - Q'_k(z), \quad 0 < k < n \\
 \Delta b_k \cdot Q'_k(z) &= Q_k(z) - Q_{k-1}(z) \\
 Q_k(z) &= (z + b_k)C(-b_k, z) + (z - b_k)C(b_k, z)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

$$N_0 = R'_1 - I(b_0), \quad N_k = R'_{k+1} - R'_k, \quad 0 < k < n \quad (3.33)$$

$$\Delta b_k \cdot R'_k = R_k - R_{k-1}, \quad R_k = b_k I(b_k) + \hat{X}(b_k)$$

$$R(z, \zeta) = \frac{X(z) - X(\zeta)}{z - \zeta} \quad (3.34)$$

$$J_0(z) = T'_1(z), \quad J_k(z) = T'_{k+1}(z) - T'_k(z), \quad 0 < k < n$$

$$\Delta b_k \cdot T'_k(z) = T_k(z) - T_{k-1}(z) \quad (3.35)$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2} [(z + b_k)^2 C(-b_k, z) + (z - b_k)^2 C(b_k, z)] + \hat{X}(b_k) \hat{X}(z)$$

$$C(\zeta, z) = \ln \frac{\check{X}(\zeta) - \check{X}(z)}{\check{X}(\zeta) + \check{X}(z)}, \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z + \lambda}{\lambda - z}}$$

$$F(z, y_p) = \operatorname{arccctg} \frac{z}{y_p} \quad (3.36)$$

$$G(z, y_p) = \frac{2y_p}{z^2 + y_p^2} \left[\frac{y_p}{\check{X}} X(z) - z \right], \quad \check{X} = \sqrt{\lambda^2 + y_p^2}$$

$$\check{X}(\pm iy_p) = \frac{\pm \lambda + iy_p}{\check{X}}, \quad C_x(iy_p, x) = \frac{1}{2} \ln \frac{[\check{X}(x)\check{X} - \lambda]^2 + y_p^2}{[\check{X}(x)\check{X} + \lambda]^2 + y_p^2} \quad (3.37)$$

3.2 Несиметричне зростання тріщини

Руйнування матеріалів зі спадковими властивостями часто відбувається шляхом повільного докритичного зростання тріщини. У випадку, коли зона послаблених зв'язків біля фронту тріщини не виходить з області К-домінування, в основу теорії тривалого поширення тріщини [12] можна покласти концепцію тонкої структури, яка використовує КІН для визначення розкриття та довжини зчеплення.

Більшість задач про тривале поширення тріщин у матеріалі зі спадковими механічними властивостями розв'язано для зовнішніх навантажень, прикладених на достатньому віддаленні від тріщини. Врахування силових факторів, що впливають на напружений стан в околі тріщини, є досить складним завданням при використанні теорії комплексних потенціалів при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності. Однак, щоб простежити деякі ефекти, які викликані наявністю силових факторів в околиці тріщини, можна використовувати розв'язок для зосереджених сил.

Для ілюстрації впливу силових факторів в околі тріщини розглянемо класичну задачу механіки руйнування для прямолінійної тріщини нормального відриву. Будемо використовувати модель довготривалого руйнування вважаючи, що параметри тріщиностійкості не залежать від часу при докритичному поширенні тріщини. Вивчатимемо квазістатичне стійке поширення тріщини, наявної в тілі до моменту прикладання навантаження. Зростання тріщини вздовж площини її розташування відбувається в ізотермічних умовах за докритичного рівня навантаження відповідної пружної задачі внаслідок повзучості матеріалу.

В основу досліджень довготривалого зростання тріщини покладемо МЗЗ з рівномірним ЗЗВ. В момент $t = 0$ прикладання навантаження тріщина знаходиться в докритичному стані, розкриття у вершині не перевищує граничного рівня: $\Delta[t = 0, \lambda(0)] < \Delta_{\max}$ ($\lambda(t)$ – напівдовжина тріщини). За рахунок повзучості розкриття $\Delta[t, \lambda(0)]$ з часом досягає гранично можливого значення Δ_{\max} , завершуючи інкубаційний період та ініціюючи початок зростання.

Нормальне розкриття тріщини в лінійно-в'язкопружному тілі

$$\Delta(t, x) = \int_{-\infty}^t l(t - \tau) \frac{\partial \tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.38)$$

де величини $\Delta(t, x)$ та $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ мають розмірність довжини, функція повзу-

чості l – безрозмірна. Величина $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ є значенням пружного розкриття в точці x для тріщини напівдовжини λ ; тильда над Δ вказує на те, що ця величина не є інтегральною характеристикою, її вираз містить тільки миттєві пружні сталі.

Розглянемо схему навантаження (рис. 3.19 а), у якій до протилежних берегів тріщини в точці $x = x_p$ прикладені дві рівні за інтенсивністю протилежно спрямовані розтягувальні зосереджені сили P . КІН задачі

$$K_I(\lambda_1) = \frac{P}{\sqrt{\pi\lambda} \cdot \check{X}(x_p)}, \quad K_I(\lambda_2) = \frac{P \cdot \check{X}(x_p)}{\sqrt{\pi\lambda}},$$

$$\check{X}(z) = \sqrt{(z - \lambda_1)(\lambda_2 - z)}, \quad \lambda = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

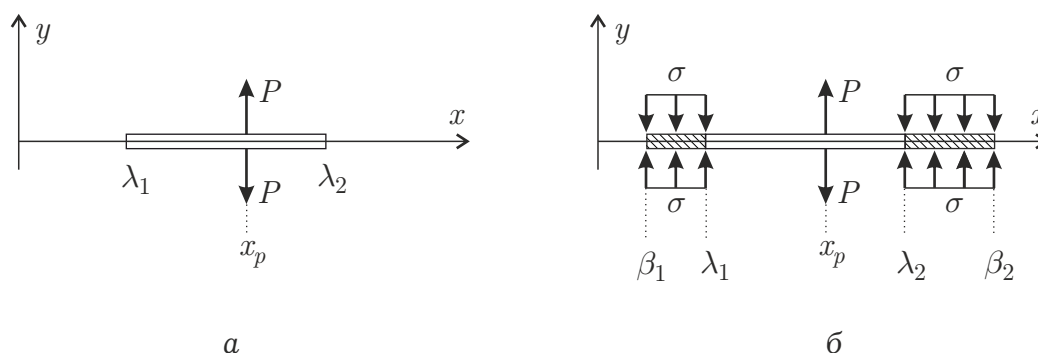


Рис. 3.19 – Схема навантаження та параметри моделі

Якщо точка $x = x_p$ не збігається з координатою середини тріщини $e = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ (нехай $x_p > e$), то граничне значення КІН, рівне K_{Ic} , при зростанні P досягається спочатку в точці $x = \lambda_2$ при значенні сили P

$$P_* = \frac{\sqrt{\pi\lambda} \cdot K_{Ic}}{\check{X}(x_p)}.$$

Тріщина почне поширюватись вправо з нерухомим лівим кінцем. При значенні сили $P = P_{**} = K_{Ic} \sqrt{\pi(x_p - \lambda_1)}$ граничне значення КІН досягається вже в точці $x = \lambda_1$; у цей момент правий кінець тріщини знаходиться в точці $x = 2x_p - \lambda_1$. При подальшому збільшенні сили P обидва кінці симетрично поширюються. В цій задачі поширення тріщини викликає

збільшення сили P , це свідчить про стійке квазістатичне зростання тріщини [82].

Розглянемо поширення тріщини, що відбувається не за рахунок збільшення P (цю силу ми покладаємо сталою), а за рахунок зміни з часом релаксаційних властивостей матеріалу пластини $L(t)$. Побудуємо визначальні рівняння для координат кінців фізичної тріщини як функцій часу. Дослідимо, як впливає на розв'язок задачі використана при його побудові концепція тонкої структури.

Вираз для розкриття у вершині тріщини, що зростає, має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta[t, \lambda_k(t)] &= \tilde{\Delta}[\lambda_k(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] + \int_0^t \dot{l}(t - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_k(t), \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau, \\ k = 1, 2, \quad \boldsymbol{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2), \quad l(t) = \frac{L(t)}{L_0}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

пружне розкриття тріщини з вершинами в $\boldsymbol{\lambda}$ у точці x , $\tilde{\Delta}(x, \boldsymbol{\lambda})$ обчислюється для миттєвого значення L_0 характеристики повзучості $L(t)$.

Інкубаційний період розвитку тріщини характеризується збільшенням розкриття за відсутності поширення. Час закінчення інкубаційного періоду (позначимо його t_0) визначається досягненням розкриттям в одній із вершин тріщини критичного значення. Після інкубаційного періоду ініціюється зростання довжини тріщини. Як і раніше, покладаємо $x_p > \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Отже, в момент часу t_0 відрив досягає свого критичного значення в правій вершині; тривалість інкубації можна визначити з рівняння

$$l(t_0) \tilde{\Delta}[\lambda_k(0), \boldsymbol{\lambda}(0)] = \Delta_{\max}. \quad (3.40)$$

Далі тріщина починає зростання, яке описується переміщенням правої вершини. Положення правого кінця $\lambda_2(t)$ при $\lambda_1(t) = \lambda_1(0)$ визначаємо з рівняння

$$\Delta[t, \lambda_2(t)] = \Delta_{\max}, \quad (3.41)$$

доки $\Delta[t, \lambda_1(t)] < \Delta_{\max}$. Момент часу, що відповідає перетворенню цієї нерівності на рівність, характеризується ініціацією зростання тріщини в лівий бік. Положення кінців тріщини $\lambda(t)$ при зростанні в обидва боки будемо шукати із системи рівнянь

$$\Delta[t, \lambda_k(t)] = \Delta_{\max}, \quad k = 1, 2. \quad (3.42)$$

Перейдемо до визначення характеристики релаксації $L(t)$.

Модуль Юнга матеріалу представимо у формі

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_i \xi_i E_{\delta,1}(-\mu_i t^{\delta}), \quad (3.43)$$

де E_{∞} – довготривале значення механічної характеристики, а її миттєве значення $E_0 = E_{\infty} + \sum \xi_i$; $E_{\delta,\gamma}(z)$ – функція Міттаг-Леффлера. Для якісного дослідження при врахуванні релаксаційних властивостей матеріалу будемо використовувати лише один доданок у (3.43). У цьому випадку модуль (3.43) в області зміни часу запишеться у вигляді

$$E(t) = E_{\infty} + (E_0 - E_{\infty})E_{\delta,1}(-\mu t^{\delta}). \quad (3.44)$$

Для побудови залежності від часу вертикального переміщення на лінії розташування тріщин скористаємося принципом пружно-в'язкопружної аналогії [103], згідно з яким замінимо в'язкопружний модуль Юнга у формі (3.44) відповідною перетвореною величиною

$$\tilde{E}(s) = E_{\infty} + (E_0 - E_{\infty}) \frac{s^{\delta}}{s^{\delta} + \mu},$$

де $\tilde{E}(s) = s\mathcal{L}\{E(t)\}$ – перетворення Лапласа – Карсона функції часу $E(t)$,

s – параметр перетворення. Зображення Лапласа – Карсона функції $l(t)$ та його обернене перетворення

$$\tilde{l}(s) = l_\infty + (1 - l_\infty) \frac{s^\delta}{s^\delta + \eta}, \quad l(t) = l_\infty + (1 - l_\infty) E_{\delta,1}(-\eta t^\delta),$$

де $l_\infty = E_0/E_\infty$, $\eta = \mu/l_\infty$.

Пружне розкриття тріщини, що відповідає рис. 3.19 б

$$\tilde{\Delta}(x, \lambda) = \frac{L}{\pi} [\sigma K_\lambda(x) + P K_p(x)], \quad (3.45)$$

$$K_\lambda(x) = K(x, \lambda_2) - K(x, \lambda_1),$$

$$K_p(x) = -x_h [(e - x_p)I(x) + \hat{X}(x)] - C(x, x_p),$$

$$e = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1), \quad x_h = \hat{X}^{-1}(x_p),$$

$$I(x) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(x), \quad \hat{X}(x) = \sqrt{(x - \beta_1)(\beta_2 - x)},$$

$$K(x, \xi) = (x - \xi)C(x, \xi) - \hat{X}(\xi)I(x), \quad C(x, \xi) = \ln \left| \frac{\check{X}(x) - \check{X}(\xi)}{\check{X}(x) + \check{X}(\xi)} \right|.$$

Зовнішні границі зон зчеплення $\beta_{1,2}$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho B = x_h \\ \rho \hat{X}_\lambda = x_h(x_p - e) \end{cases}, \quad \rho = \frac{\sigma}{P},$$

$$\hat{X}_\lambda = \hat{X}(\lambda_2) - \hat{X}(\lambda_1), \quad B = 2 \operatorname{arccotg} \left[\frac{\check{X}(\lambda_2) - \check{X}(\lambda_1)}{1 + \check{X}(\lambda_1)\check{X}(\lambda_2)} \right].$$

Використання концепції тонкої структури дає довжини лівої $\ell_1 = \lambda_1 - \beta_1$ та правої $\ell_2 = \beta_2 - \lambda_2$ зон зчеплення (з урахуванням другого виразу в (3.15))

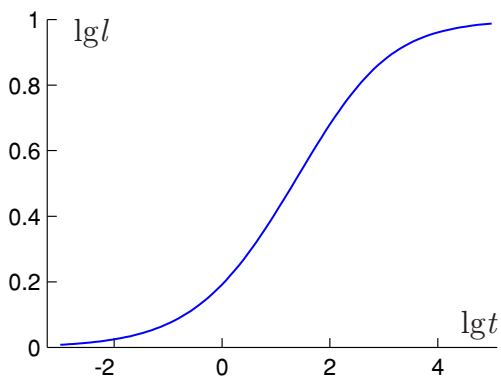


Рис. 3.20 – Характеристика повзучості

$$\ell_1 = \frac{\pi K_I^2(\lambda_1)}{8 \sigma^2} = \frac{1}{(2\rho)^2(\lambda_2 - \lambda_1)\check{X}^2(x_p)},$$

$$\ell_2 = \frac{\pi K_I^2(\lambda_2)}{8 \sigma^2} = \frac{\check{X}^2(x_p)}{(2\rho)^2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Розкриття вздовж зон зчеплення, згідно з першим виразом у (3.15),

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x, \lambda_1) &= \frac{L\sigma}{\pi} 2\ell_1 F\left(\frac{\lambda_1 - x}{\ell_1}\right), & \beta_1 < x < \lambda_1, \\ \tilde{\Delta}(x, \lambda_2) &= \frac{L\sigma}{\pi} 2\ell_2 F\left(\frac{x - \lambda_2}{\ell_2}\right), & \lambda_2 < x < \beta_2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Числовий приклад. Всі числові розрахунки проведемо для матеріалу пластини з наступними параметрами моделі (3.44):

$$E_0 = 4000 \text{ МПа}, \quad l_\infty = 10, \quad \delta = 0.5, \quad (3.47)$$

а параметр η візьмемо таким, щоб інкубаційний період при заданих геометричних і силових параметрах задачі дорівнював одиниці часу (одиницю часу позначатимемо od). Тим самим вводимо безрозмірний час, який вимірюється частками інкубаційного періоду. Ядро інтегрального рівняння повільного поширення тріщини в числових розв'язках побудоване при $\eta = 0.5746 \text{ од}^{-\delta}$ та наведене на рис. 3.20.

Перейдемо до визначення кінетики розвитку тріщини.

Будемо шукати розв'язок рівняння (3.41) у моменти часу $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$

($k = 1, 2, \dots$). На кожному інтервалі часової дискретизації вважатимемо швидкість зростання функції $\lambda_2(t)$ сталою:

$$\lambda_2(t) = \lambda_2(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t} [\lambda_2(t_k) - \lambda_2(t_{k-1})], \quad t_{k-1} < t < t_k.$$

Величини $\lambda_2(t_k)$ послідовно визначаються зі співвідношення (3.41), яке на основі (3.39) можна записати у такий спосіб

$$\begin{aligned} & \tilde{\Delta}[\lambda_2(t_k), (\lambda_1(0), \lambda_2(t_k))] + \\ & + \int_0^{t_k} \dot{i}(t_k - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_2(t_k), (\lambda_1(0), \lambda_2(\tau))] d\tau = \Delta_{\max}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Це рівняння буде визначальним для $\lambda_2(t_k)$ доки величина

$$\tilde{\Delta}[\lambda_1(0), (\lambda_1(0), \lambda_2(t_k))] + \int_0^{t_k} \dot{i}(t_k - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_1(0), (\lambda_1(0), \lambda_2(\tau))] d\tau$$

менша за Δ_{\max} . Інакше величини $\lambda_{1,2}(t_k)$ будемо визначати із системи

$$\begin{aligned} & \tilde{\Delta}[\lambda_1(t_k), (\lambda_1(t_k), \lambda_2(t_k))] + \\ & + \int_0^{t_k} \dot{i}(t_k - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_1(t_k), (\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau))] d\tau = \Delta_{\max} \\ & \tilde{\Delta}[\lambda_2(t_k), (\lambda_1(t_k), \lambda_2(t_k))] + \\ & + \int_0^{t_k} \dot{i}(t_k - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_2(t_k), (\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau))] d\tau = \Delta_{\max}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

причому на кожному інтервалі часової дискретизації $\lambda_{1,2}(t)$ змінюються лінійно.

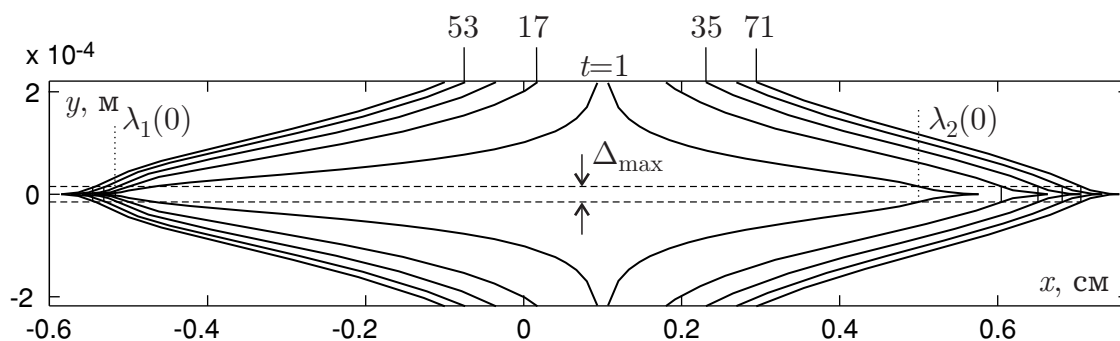


Рис. 3.21 – Контури тріщини, що зростає

При розрахунку кінетичних кривих використано наступні значення параметрів тріщиностійкості:

$$\sigma = 35 \text{ МПа}, \quad \Delta_{\max} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \quad (3.50)$$

На рис. 3.21 наведені вертикальні переміщення берегів тріщини для вказаних значень безрозмірного часу. Початкові геометричні параметри задачі $-\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0.5 \text{ см}$, координати прикладання зосередженого зусилля $x_p = 0.1 \text{ см}$, відносний силовий параметр $\rho = 2 \text{ см}^{-1}$.

Вертикальні переміщення в зонах зчеплення окремо винесено на рис. 3.22, де також проілюстровано принцип побудови кінетичних кривих.

На рис. 3.23 проведено порівняння кінетичних кривих, отриманих із використанням (криві 2) та без використання (криві 1) концепції тонкої структури. Математично ця різниця означає різне представлення функції $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ у визначальних рівняннях (3.48), (3.49) (кривим 1 відповідає представлення (3.45), кривим 2 – (3.46)).

На перший погляд, можливим варіантом докритичного розповсюдження тріщини внаслідок прикладання зосередженої сили до її берегів є наступний: тріщина підростає до симетричної конфігурації ($x_p - \lambda_1(t) = \lambda_2(t) - x_p$) і, починаючи з відповідного моменту часу, зростає з однаковою швидкістю в обидва боки. Для проведених числових розрахунків у межах дослідженого інтервалу часу симетричної конфігурації досягти не вдалось:

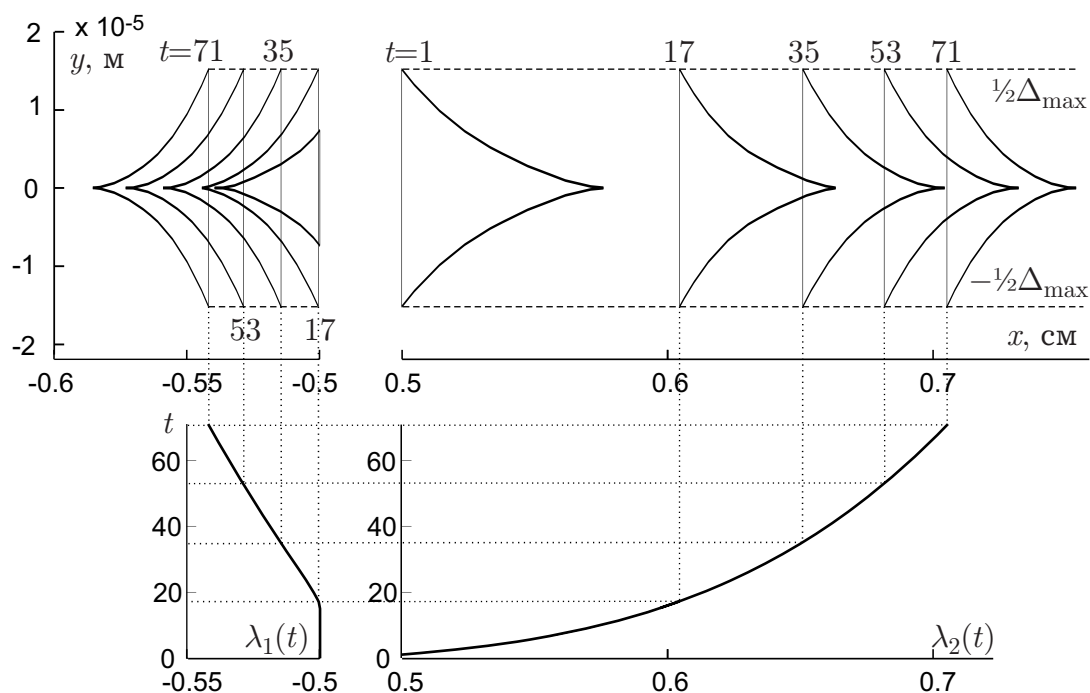


Рис. 3.22 – Переміщення берегів у зоні зчеплення та відповідне положення вершин тріщини як функцій часу

величина $[\lambda_2(t) - x_p] - [x_p - \lambda_1(t)]$ для останнього поданого на рис. 3.23 моменту часу складала 0.003 і змінювалась досить повільно. Тобто можна казати про такий варіант докритичного розповсюдження, коли симетрична конфігурація не буде досягнута аж до зупинення тріщини (коли $L(t)$ наблизиться до граничного максимального значення).

Приклади кінетики зростання тріщини з прикладеними в її околі зосередженими силами. Розглянемо задачу, що відповідає розташуванню тріщини та прикладеним зусиллям на рис. 3.5 а з $\sigma/\sigma_\infty = 2$, $\sigma/P = 4 \text{ см}^{-1}$ та $x_p = y_p = 0.1 \text{ см}$.

Числові розрахунки проведемо для матеріалу пластини з числовими значеннями (3.47) параметрів релаксації для моделі (3.44). Також зафіксуємо $\eta = 0.4703 \text{ од}^{-\delta}$ (од – одиниця часу, що дорівнює t_0). Як впливає з розв'язку пружної задачі (див. (3.20) та (3.24)), у випадку прикладання зосереджених сил не на лінії розташування тріщини, розміри зон зчеплення та розкриття тріщини залежать від коефіцієнта Пуассона. Якщо ця

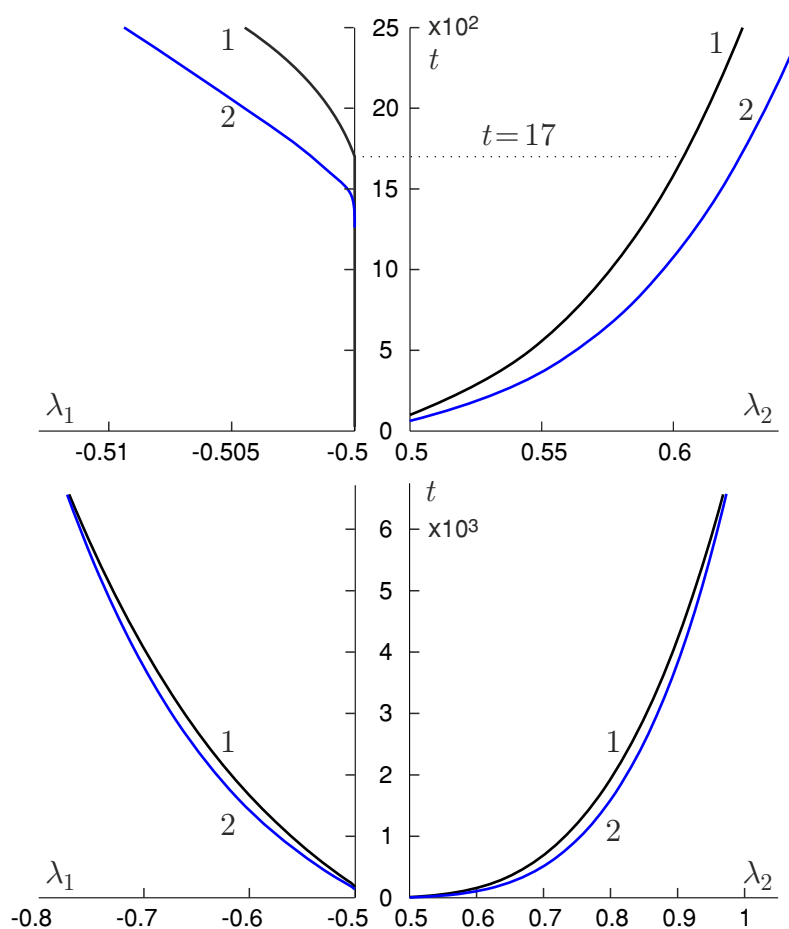


Рис. 3.23 – Кінетичні криві: 1 – в основі точний пружний розв’язок, 2 – асимптотичний

характеристика матеріалу залежить від часу, рівняння зростання тріщини (3.40)-(3.42) не можна застосовувати з тієї причини, що пружний розв’язок неможливо подати у вигляді добутку пружної сталої та функції геометричних та силових параметрів. При дослідженні докритичного розвитку тріщини нормального відриву під дією симетричного відносно лінії тріщини навантаження [12] було виявлено дуже малий вплив зміни коефіцієнта Пуассона на кінетику зростання тріщини. Якщо покласти значення коефіцієнта Пуассона незалежним від часу, отримані рівняння (3.40)-(3.42) зберігають свою форму. В числовому прикладі покладаємо $\nu = 0.3$. Параметри тріщиностійкості візьмемо такими, як і в попередніх числових прикладах (див. (3.50)).

На рис. 3.24 наведені графіки вертикальних переміщень берегів тріщи-

ни для вказаних моментів часу та початкових положень кінців фізичної тріщини. Під час поширення тріщини вліво розкриття в правому кінці не досягло свого критичного значення. Отже, критичного розміру тріщина досягла зростанням лише в один бік.

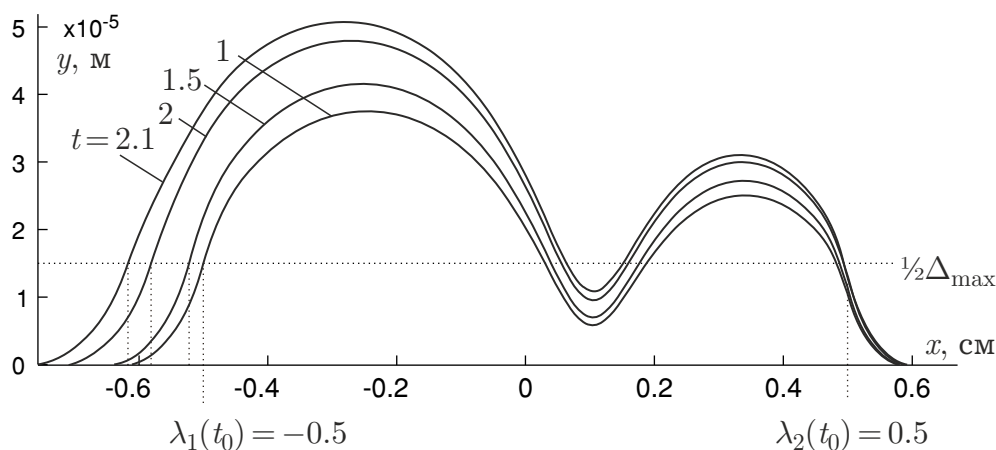


Рис. 3.24 – Переміщення верхнього берега тріщини, що зростає

Далі розглянемо задачу, що відповідає розташуванню тріщини та прикладеним зусиллям рисунка 3.5 б з $\sigma/P = 2 \text{ см}^{-1}$ та $x_p = y_p = 0.1 \text{ см}$.

Числові розрахунки проведемо для матеріалу пластини з параметрами релаксації (3.47) моделі (3.44) при $\eta = 0.5543 \text{ од}^{-\delta}$. Параметри тріщиностійкості візьмемо такими, як і в попередніх числових прикладах (див. (3.50)).

На рис. 3.25 наведені графіки вертикальних переміщень берегів тріщини для вказаних моментів часу та початкових положень кінців фізичної тріщини.

На рис. 3.26 наведені кінетичні криві зростання тріщини, отримані в рамках гіпотези тонкої структури; криві побудовані для $x_p = 0.1 \text{ см}$, декількох зазначених значень y_p та реологічної характеристики $\eta = 0.5746 \text{ од}^{-\delta}$. Рисунок ілюструє як з віддаленням точок прикладання сили від лінії тріщини зменшується швидкість розповсюдження.

На рис. 3.27 наведені кінетичні криві зростання тріщини; криві побудовані для $y_p = 0.1 \text{ см}$ та декількох зазначених значень x_p . Рисунок ілюструє, як з віддаленням точок прикладання сили вправо від центра тріщини змен-

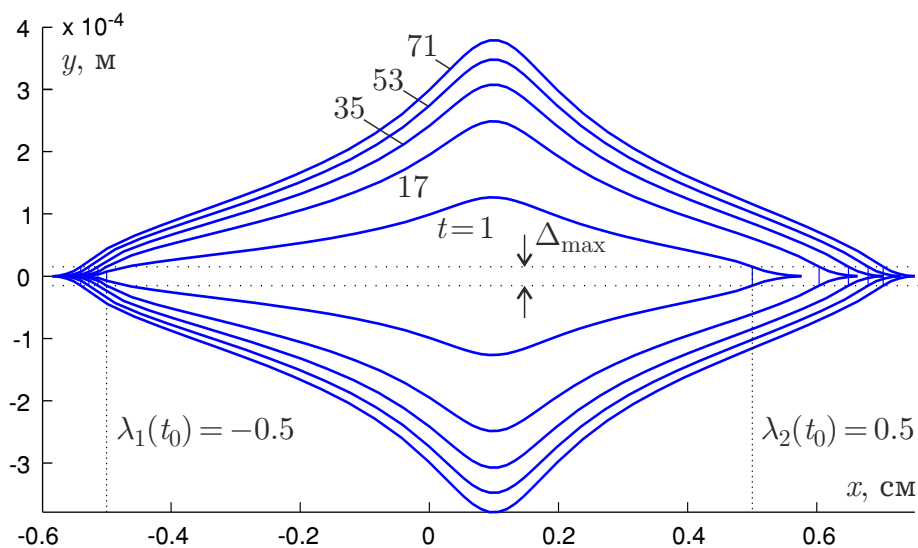


Рис. 3.25 – Контури тріщини, що поширюється

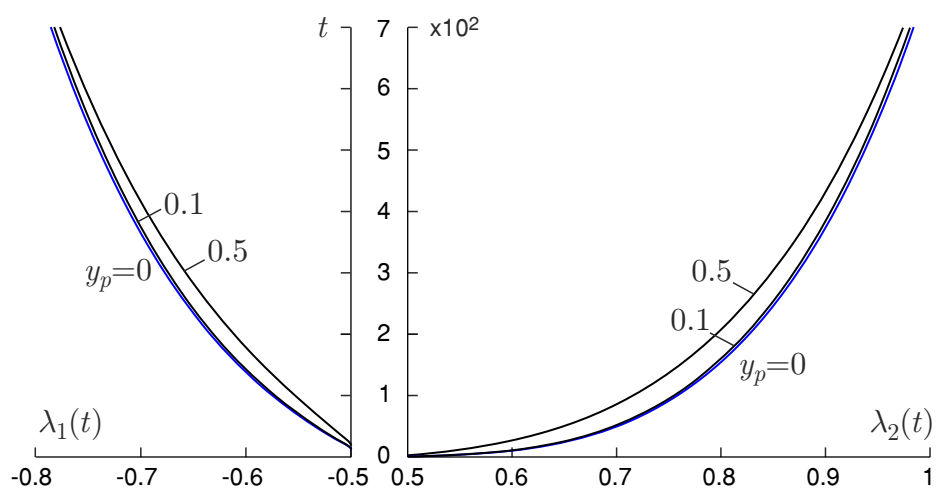


Рис. 3.26 – Кінетичні криві

шується швидкість розповсюдження вліво і збільшується вправо.

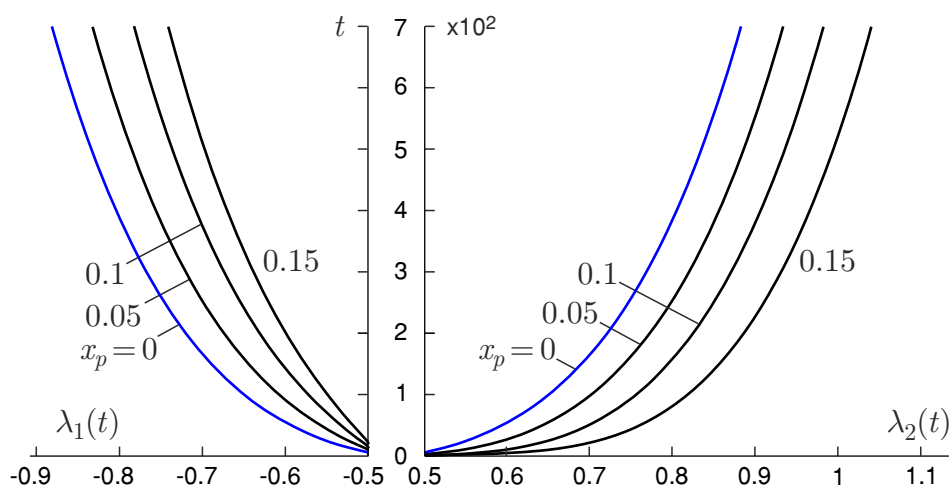


Рис. 3.27 – Кінетичні криві

3.3 Моделювання докритичного поширення тріщини у в'язкопружному тілі з використанням концепції тонкої структури. Зростання тріщини з частковим контактом берегів

Розглянемо вісесиметричну постановку: $\lambda = (-\lambda, \lambda)$. Використання концепції тонкої структури дає змогу отримати наступний вираз для пружного розкриття (див. (3.15))

$$\tilde{\Delta}(x, \lambda) = \frac{L\sigma}{\pi} 2\ell F\left(\frac{x - \lambda}{\ell}\right),$$

$L = 4/E$ (E – модуль Юнга), довжина зчеплення визначається КІН, K_I та міцністю зчеплення, σ :

$$\ell(\lambda) = \frac{\pi K_I^2(\lambda)}{8 \sigma^2}.$$

В'язкоупруге розкриття отримуємо на основі відповідного пружного розв'язку задачі та принципу пружно-в'язкопружної аналогії.

Нехай зовнішнє навантаження прикладене в момент часу $t = 0$. Замінимо в (3.38) функцію $\tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]$ на $H(\tau)\tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]$ (H – функція Гевісайда) та запишемо вираз для відриву в точці x , що відповідає моменту часу t :

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] + \int_0^t l(t - \tau)\tilde{\Delta}'_\tau[x, \lambda(\tau)]d\tau. \quad (3.51)$$

З огляду на те, що під час інкубаційного періоду, який триває до моменту часу $t = t_0$, напівдовжина тріщини λ не змінюється, $\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] = \tilde{\Delta}[x, \lambda(t_0)]$. Вираз для розкриття (3.51) у вершині тріщини, що зростає, має вигляд

$$\Delta[t, \lambda(t)] = l(t)\tilde{\Delta}[\lambda(t), \lambda(t_0)] + \int_{t_0}^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}[\lambda(t), \lambda(\tau)]d\tau. \quad (3.52)$$

Будемо шукати положення вершини λ у моменти часу $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, \dots$. Позначимо $\lambda_k = \lambda(t_k)$ та прирівняємо вираз для розкриття (3.52) критичному значенню, отримаємо рівняння для визначення λ_k :

$$l(t_k)D_0 + \sum_{i=1}^k \Lambda_i(D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max}, \quad (3.53)$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau)d\tau, \quad D_i = \tilde{\Delta}(\lambda_k, \lambda_i).$$

Геометричні характеристики D і $\tilde{\Delta}$ ілюструє рис. 3.28.

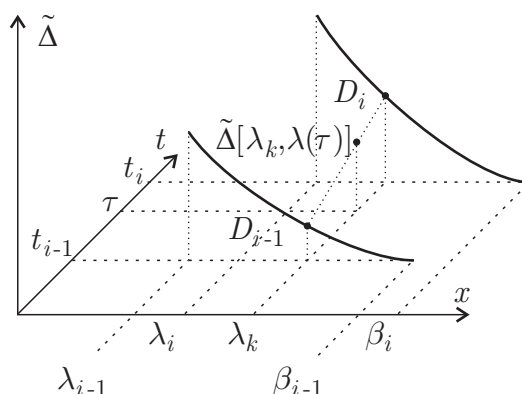


Рис. 3.28 – Координатно-часова дискретизація

Отже, рівняння (3.53) дозволяє послідовно визначати λ_k . Тривалість інкубаційного періоду t_0 знайдемо з рівняння

$$l(t_0)D_0 = \Delta_{\max}, \quad D_0 = \tilde{\Delta}(\lambda_0, \lambda_0). \quad (3.54)$$

Якщо характеристика повзучості $l(t)$ знайдена у формі

$$\begin{aligned}
l(t) &= 1 + \sum_r \gamma_r \int_0^t \exp(-\eta_r \tau) d\tau = \\
&= l_\infty - \sum_r \xi_r \exp(-\eta_r t), \quad \xi_r = \frac{\gamma_r}{\eta_r}, \quad l_\infty = 1 + \sum_r \xi_r,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

то при знаходженні λ_k будемо визначати

$$\Lambda_i = l_\infty - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\eta_r (k-i) \cdot \Delta t) [1 - \exp(-\eta_r \cdot \Delta t)]}{\eta_r \cdot \Delta t}.$$

Коли $r = 1$

$$l(t) = l_\infty - (l_\infty - 1) \exp(-\eta t). \tag{3.56}$$

В цьому випадку тривалість інкубаційного періоду визначається з (3.54):

$$t_0 = \eta^{-1} \ln \frac{l_\infty - 1}{l_\infty - \Delta_{\max}/D_0}.$$

Умова існування періоду докритичного поширення тріщини

$$l_\infty^{-1} < \frac{D_0}{\Delta_{\max}} < 1.$$

Нерівність $D_0/\Delta_{\max} \leq l_\infty^{-1}$ забезпечує неможливість досягнення розкриттям у вершині тріщини свого граничного значення впродовж скільки завгодно тривалого проміжку часу, нерівність $D_0/\Delta_{\max} \geq 1$ відповідає початку динамічного зростання тріщини в момент прикладання навантаження.

Числові приклади. Розглянемо задачу, що відповідає схемі навантаження рис. 3.29.

КІН задачі

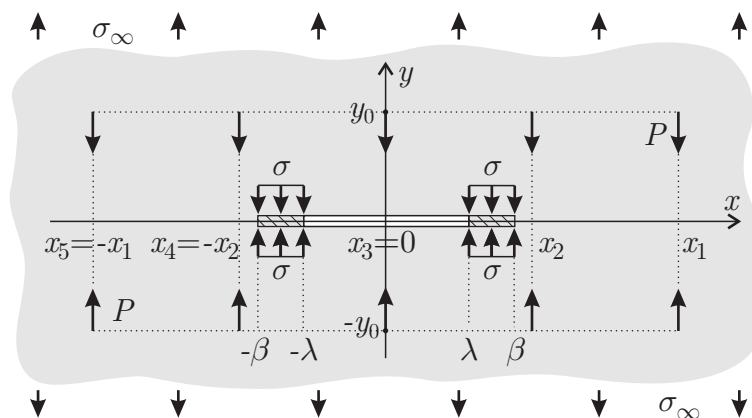


Рис. 3.29 – Схема навантаження та параметри моделі

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi \lambda} - \frac{P}{\sqrt{\pi \lambda}} \sum_{m=1}^M \left[-\operatorname{Im} \left\{ \frac{z_m + \lambda}{X_m} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda y_0}{\varkappa + 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(\lambda - z_m) X_m} \right\} \right], \quad X_m = \sqrt{z_m^2 - \lambda^2}, \quad (3.57)$$

$z_m = x_m + iy_0$ – положення точок прикладання сил, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона, який будемо вважати незалежним від часу.

На рис. 3.30 наведені кінетичні криві й відповідні відносні довжини зчеплення.

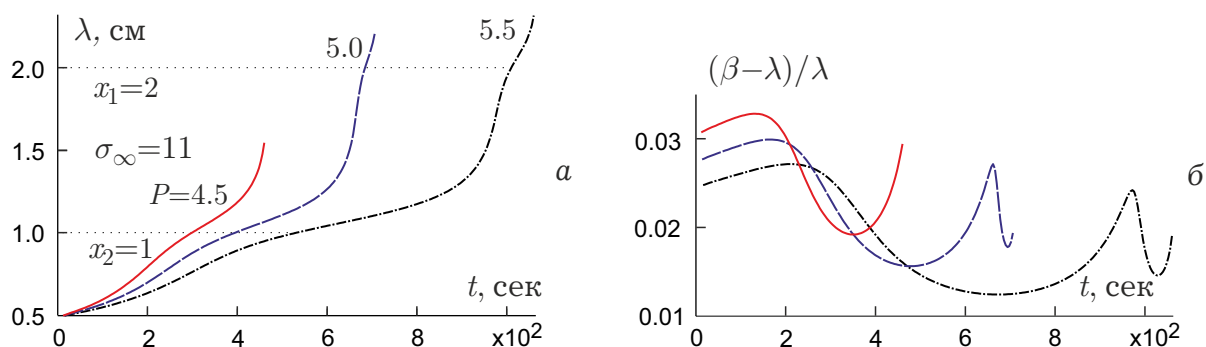


Рис. 3.30 – Залежності від часу напівдовжини тріщини (а) та відносної довжини зчеплення (б)

Остання точка (t, λ) кожної кривої відповідає критичному розміру тріщини, після відповідного моменту часу ініціюється динамічний розвиток. У даному прикладі зосереджені сили сповільнюють поширення тріщини,

вершина якої наближається до лінії дії системи двох стискальних сил. Отже, тріщина може продовжувати повільне зростання протягом достатньо тривалого проміжку часу, досягаючи розміру, що в рази перевищує початковий.

Розглянемо ще одну схему прикладання сил (рис. 3.31). КІН для цієї задачі неважко отримати з (3.57), поклавши $\sigma_\infty = 0$ і змінивши знак другого доданку на плюс.

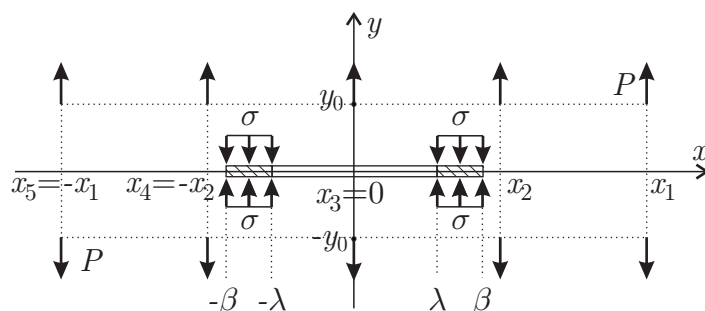


Рис. 3.31 – Схема навантаження та параметри моделі

Кінетичні криві та відповідні відносні довжини зчеплення наведені на рис. 3.32. При наближенні вершини тріщини до лінії дії системи двох стискальних сил швидкість зростання збільшується.

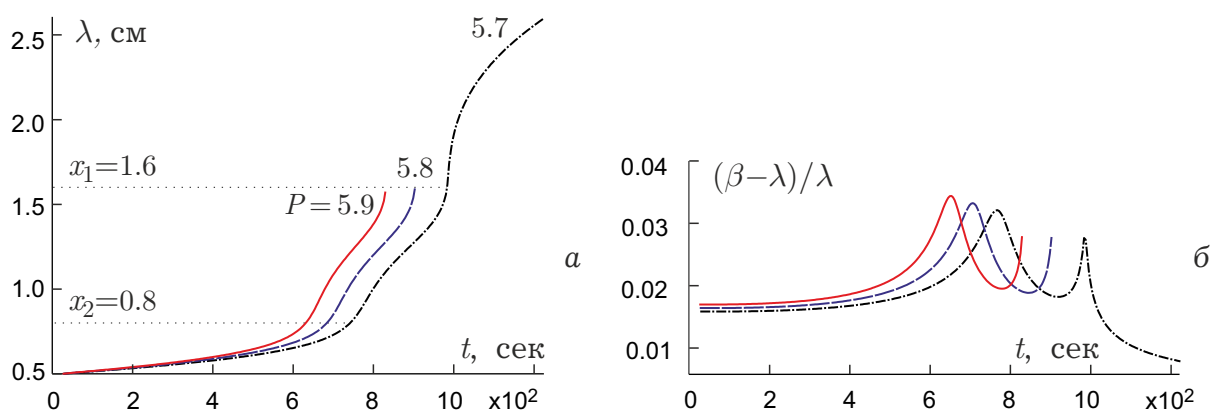


Рис. 3.32 – Залежності від часу напівдовжини тріщини (а) та відносної довжини зчеплення (б)

Розв'язки, наведені на рис. 3.30 та рис. 3.32, отримано при $E = 10^4$ МПа, $l_\infty = 40$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.01$ сек (реологічні параметри), $\sigma = 35$ МПа, $\Delta_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ см (параметри тріщиностійкості), $\Delta t = 4$ сек (параметр

дискретизації), силові та геометричні параметри наведено на рисунках.

Якщо при розв'язанні пружної задачі отримано від'ємний відрив, то в постановку треба ввести контактне напруження та знайти його з умови невід'ємності відриву. Знайдемо розподіл контактного напруження в кусково-лінійній формі

$$\sigma(x) = \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, \quad x \in (b_{k-1}, b_k),$$

$b_k = \lambda_1 + k \cdot \Delta b$ ($k = 0, \dots, n$), $\Delta b = \frac{2}{n}\lambda$, λ – напівдовжина тріщини.

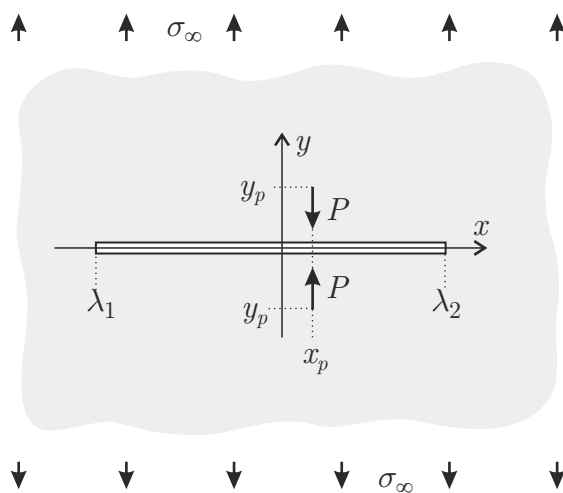


Рис. 3.33 – Схема навантаження

Знайдемо розкриття для схеми навантаження рис. 3.33

$$\frac{\pi}{L}\Delta(x) = \tilde{\Delta}(x) - \begin{cases} 0, & \min_{x \in (\lambda_1, \lambda_2)} \tilde{\Delta}(x) \geq 0 \\ \sum_{k=0}^n \sigma_k A_k(x), & \min_{x \in (\lambda_1, \lambda_2)} \tilde{\Delta}(x) < 0 \end{cases}, \quad (3.58)$$

де перший доданок відповідає розкриттю без урахування контактного напруження:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x) = \pi\sigma_\infty \hat{X}(x) + \\ + P \left[-C_x(z_0, x) + \frac{2y_p(x_0(x - x_p) + y_0y_p)\hat{X}(x)}{(\varkappa + 1)[(x - x_p)^2 + y_0^2](x_0^2 + y_0^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

$X(z_0) = x_0 + iy_0$, $X(z) = \sqrt{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}$, $C_x(z, \xi) = \operatorname{Re}\{C(z, \xi)\}$, функція $C(z, \zeta)$ визначена в (3.62),

$$A_k(x) = J_{kx}(x) - \sum_{s=0}^2 (\Delta b)^{1-k} N_{sk} F_s(x),$$

$J_{kx}(x) = \operatorname{Re}\{J_k^+(x)\}$ (функції $J_k(z)$ визначені в (3.61)), $F_s(x) = F_s^+(x)$ (функції $F_s(z)$ визначені в (3.63)), коефіцієнти N визначені в (3.64).

Для знаходження розподілу контактного напруження скористаємось ітеративною процедурою:

1. Прирівняємо вираз (3.58) при $x = b_k$ до нуля:

$$\sum_{k \in M} a_{mk} \sigma_k = \delta_m, \quad m \in M, \quad (3.60)$$

$$a_{mk} = j_{mk} + I_m N_{0k} - \hat{X}_m N_{1k} - S_m N_{2k}, \quad j_{mk} = J_{kx}(b_m), \quad \delta_m = \tilde{\Delta}(b_m),$$

функція $\tilde{\Delta}(x)$ визначена в (3.59), коефіцієнти j – в (3.66), інші величини – в (3.65). На першій ітерації $M = 1, \dots, n - 1$.

2. Виключимо з (3.60) рівняння та змінні з номерами, що відповідають від'ємним σ_k отриманого на попередньому кроці розв'язку: $M = \{k : \sigma_k \geq 0\}$.

Процедура закінчується, коли всі σ_k стануть невід'ємними.

Розглянемо числовий приклад визначення розкриття за допомогою опи-

саної ітеративної процедури. Розв'язки на рис. 3.34 відповідають декільком значенням інтенсивності системи сил, що стягують береги тріщини.

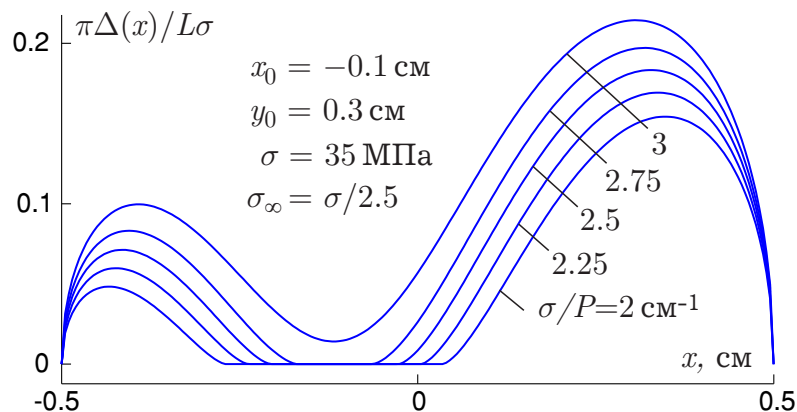


Рис. 3.34 – Контури тріщини з ділянкою контакту між берегами

Визначивши контактне напруження, запишемо вирази для КІН:

$$K_I(\lambda_{1,2}) = \sum_{k=1}^3 K_I^{(k)}(\lambda_{1,2}),$$

$$K_I^{(1)}(\lambda_{1,2}) = \frac{P}{\sqrt{\pi\lambda}} \operatorname{Im} \frac{\left\{ \begin{matrix} \lambda_2 - z_0 \\ z_0 - \lambda_1 \end{matrix} \right\}}{X(z_0)} + \frac{2y_0\lambda}{\varkappa + 1} \operatorname{Re} \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} z_0 - \lambda_1 \\ z_0 - \lambda_2 \end{matrix} \right\} X(z_0)},$$

$$K_I^{(2)}(\lambda_{1,2}) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left(N_{1k} \pm \left[\frac{n}{2} N_{2k} - \frac{2}{n} N_{0k} \right] \right), \quad K_I^{(3)}(\lambda_{1,2}) = \sigma_\infty \sqrt{\pi\lambda},$$

λ – напівдовжина тріщини.

Перейдемо до дослідження повільного поширення тріщини. Якщо пружне розкриття не є симетричним відносно середньої нормалі тріщини, відповідна в'язкопружна величина (3.52) у вершинах тріщини, що зростає, (по аналогії з (3.39)) визначається в такий спосіб

$$\Delta[t, \lambda_k(t)] = l(t)\tilde{\Delta}[\lambda_k(t), \boldsymbol{\lambda}(t_0)] + \int_{t_0}^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}[\lambda_k(t), \boldsymbol{\lambda}(\tau)]d\tau, \quad k = 1, 2, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Рівняння (3.53), за допомогою якого послідовно визначається положення вершини в дискретні моменти часу, перетворюється на систему двох рівнянь. Метод розв'язання такої системи детально розглянуто в розділі 3.2.

На рис. 3.35 наведено кінетичні криві та відповідні відносні довжини зчеплення $\ell_k(t)/\lambda(t)$, λ – залежна від часу напівдовжина тріщини.

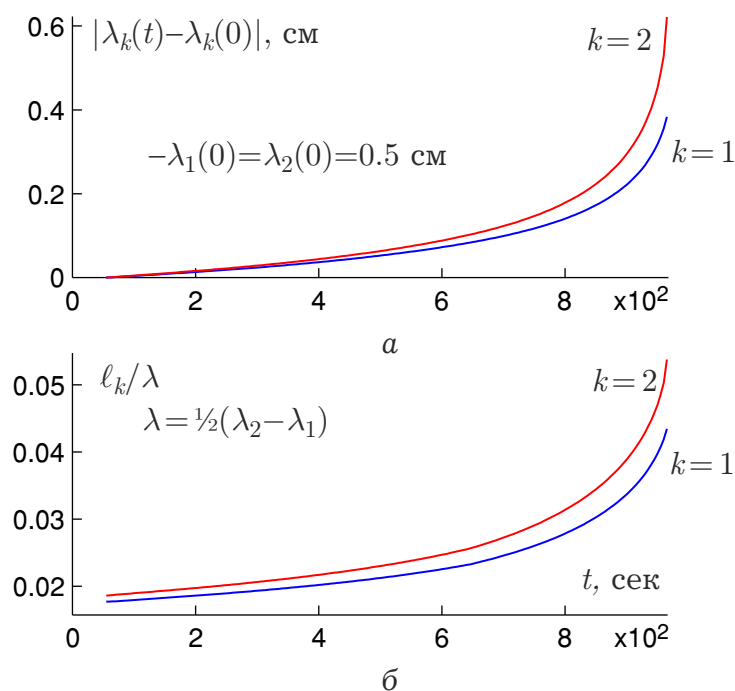


Рис. 3.35 – Зміна положень вершин тріщини відносно своїх початкових положень (а) та відносні довжини зчеплення (б)

Розв'язки отримано при $E = 10^4$ МПа, $l_{\infty} = 20$, $\nu = 0.3$, $\eta = 0.01$ сек (реологічні параметри), $\sigma = 35$ МПа, $\Delta_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-3}$ см (параметри тріщиностійкості), $\sigma_{\infty} = \sigma/2.5$, $\sigma/P = 2.7 \text{ см}^{-1}$, $-\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0.5$ см, $x_0 = -0.005$ см $y_0 = 0.3$ см (силові та геометричні параметри), $n = 200$, $\Delta t = 5$ сек (параметри дискретизації).

Числові розв'язки дають можливість зробити висновок про суттєвий вплив зміщення лінії прикладання зусиль відносно середини тріщини: перенесення лінії на 1 % напівдовжини тріщини призвело до значної різниці між швидкостями двох вершин. Прискорення зростання в отриманих числових розв'язках обумовлене зникненням ділянки контакту.

Використані в розділі 3.3 позначення:

$$J_0(z) = T_1'(z), \quad J_k(z) = T_{k+1}'(z) - T_k'(z), \quad J_n(z) = -T_n'(z)$$

$$\Delta b \cdot T_k'(z) = T_k(z) - T_{k-1}(z), \quad C_k(z) = C(z, b_k) \quad (3.61)$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2} \{ (z - b_k)^2 C_k(z) + \hat{X}(b_k) [\hat{X}(z) + b_k I(z)] \}$$

$$\hat{X}(z) = \sqrt{(z - \lambda_1)(\lambda_2 - z)}, \quad I(z) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(z)$$

$$C(z, \zeta) = \ln \frac{\check{X}(z) - \check{X}(\zeta)}{\check{X}(z) + \check{X}(\zeta)}, \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z - \lambda_1}{\lambda_2 - z}} \quad (3.62)$$

$$F_0(z) = -I(z), \quad F_1(z) = \hat{X}(z), \quad F_2(z) = \frac{1}{2} \{ \lambda^2 I(z) - z \hat{X}(z) \}, \quad (3.63)$$

$$N_{00} = \Delta S_1, \quad N_{0k} = \Delta S_{k+1} - \Delta S_k, \quad N_{0n} = -\Delta S_n$$

$$N_{10} = \Delta R_1 - I_0, \quad N_{1k} = \Delta R_{k+1} - \Delta R_k, \quad N_{1n} = -\Delta R_n + I_n \quad (3.64)$$

$$N_{20} = \Delta I_1, \quad N_{2k} = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k, \quad N_{2n} = -\Delta I_n$$

$$\check{X}_k = \sqrt{k(n-k)^{-1}}, \quad \hat{X}_k = \sqrt{k(n-k)}, \quad I_k = 2 \operatorname{arctg} \check{X}_k \quad (3.65)$$

$$S_k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{n^2}{4} I_k - \left(k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k \right\}, \quad R_k = \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) I_k$$

$$j_{m0} = \Delta t_{m1}, \quad j_{mk} = \Delta t_{m(k+1)} - \Delta t_{mk}, \quad j_{mn} = -\Delta t_{mn}$$

$$\Delta t_{mk} = t_{m(k-1)} - t_{mk} \quad (3.66)$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2} \left\{ (m-k)^2 c_{mk} + \hat{X}_m \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k I_m \right\}$$

$$c_{mk} = \ln \left| (\check{X}_m - \check{X}_k)(\check{X}_m + \check{X}_k)^{-1} \right|$$

3.4 Алгоритм розв'язання задач механіки тріщин у рамках моделі зони зчеплення та приклад його застосування при дослідженні повільного поширення тріщин

В розділі запропоновано числовий алгоритм розв'язання задач механіки тріщин у рамках МЗЗ з використанням апарату сингулярних інтегральних рівнянь. Алгоритм дозволяє не включати в розв'язувальну систему нелінійні рівняння відносно положень границь зон. В основу покладено ітеративну процедуру, що використана при дослідженні контактної взаємодії берегів тріщини.

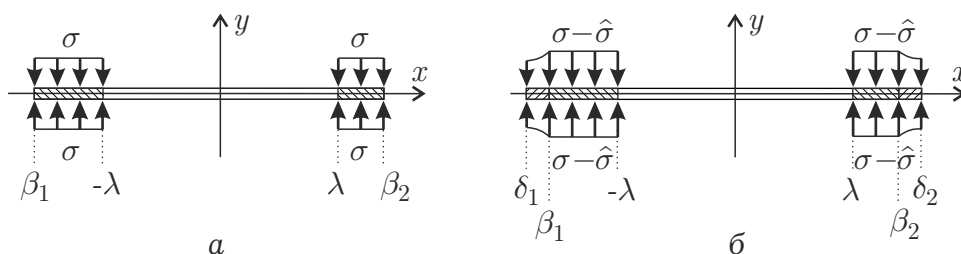


Рис. 3.36 – Параметри моделі

Розглянемо задачу з контурними умовами (рис. 3.36 а)

$$\sigma^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + T(x), \quad x \in (\beta_1, \beta_2), \quad \Delta'(\beta_{1,2}) = 0,$$

$\tilde{\sigma}$ – напруження на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини; умова містить зчеплення

$$T(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in (\beta_1, -\lambda) \cup (\lambda, \beta_2) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}. \quad (3.67)$$

В модифікованих контурних умовах (рис. 3.36 б)

$$\sigma^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x), \quad x \in (\delta_1, \delta_2) \quad (3.68)$$

зчеплення (3.67) замінимо різницею відповідної модифікованої величини

$$\hat{T}(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in (\delta_1, -\lambda) \cup (\lambda, \delta_2) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}$$

та додаткового напруження $\hat{\sigma}$, яке знайдемо з умови невід'ємності відриву. Розв'язок задачі (3.68) дається системою інтегральних рівнянь і нерівностей

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{g(t) dt}{t-x} &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x) \\ \int_{\delta_1}^{\delta_2} g(t) dt &= 0, \quad \int_{\delta_1}^x g(t) dt \geq 0, \quad x \in (\delta_1, \delta_2). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Перепишемо систему (3.69) після заміни змінних

$$\begin{Bmatrix} t \\ x \end{Bmatrix} = \delta_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \left(\begin{Bmatrix} \tau \\ \xi \end{Bmatrix} + 1 \right), \quad |\tau|, |\xi| < 1,$$

перепозначення $g(\delta_1 + \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)(\tau + 1))$ через $g(\tau)$ та аналогічного перепозначення для функцій $\tilde{\sigma}$, \hat{T} та $\hat{\sigma}$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - \xi} = -\tilde{\sigma}(\xi) + \hat{T}(\xi) - \hat{\sigma}(\xi)$$

$$\int_{-1}^1 g(\tau) d\tau = 0, \quad \int_{-1}^{\xi} g(\tau) d\tau \geq 0.$$

За допомогою квадратурно-колокаційного методу (щільність розкриття шукається в кусково-лінійній формі – рис. 3.37) отримуємо визначальну систему

$$J\mathbf{g} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{N}\mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{W}\mathbf{g} \geq 0.$$

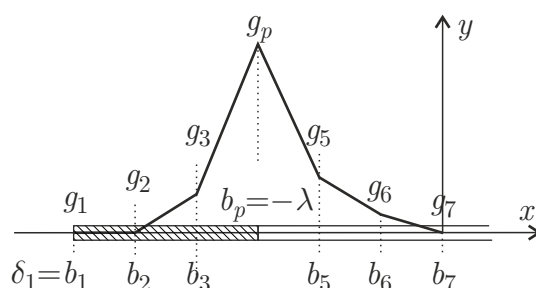


Рис. 3.37 – Дискретизація $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{n+1})^T$, $g_k = g(b_k)$, b_k – квадратурні точки

Першому виразу відповідає n рівнянь, що будують розв'язок інтегрального рівняння в точках колокації $\eta_m = b_m + \frac{1}{2}\Delta b$ ($m = 1, \dots, n$), другому – умова однозначності переміщень, третьому – умова невід'ємності відриву. Елементами векторів $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\mathbf{T}}$ та $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ є величини $\tilde{\sigma}(\eta_m)$, $\hat{T}(\eta_m)$ та $\hat{\sigma}(\eta_m)$ відповідно ($m = 1, \dots, n$). У випадку розбивки на рівні відрізки

$$b_k = -1 + (k - 1) \cdot \Delta b \quad (k = 1, \dots, n + 1), \quad \Delta b = 2/n,$$

$$\mathbf{N} = (1/2, 1, \dots, 1, 1/2),$$

$$W_{n \times (n+1)} = \frac{2}{n} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 7/8 & 1/8 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 7/8 & 1/8 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 7/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

\mathbf{W}_m – вектор-рядок, елементи якого дорівнюють m -му рядку матриці W , елементи матриці $J_{n \times (n+1)}$, $j_{mk} = J_k(\eta_m)$,

$$\begin{aligned} \pi J_1(\xi) &= -1 - (\xi - b_2)G_1(\xi), & \pi J_{n+1}(\xi) &= 1 + (\xi - b_n)G_n(\xi), \\ \pi J_k(\xi) &= (\xi - b_{k-1})G_{k-1}(\xi) - (\xi - b_{k+1})G_k(\xi), & k &= 2, \dots, n, \\ \Delta b \cdot G_k(\xi) &= \ln |(b_{k+1} - \xi)(b_k - \xi)^{-1}|. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Для знаходження дискретної щільності відриву, \mathbf{g} використаємо ітеративну процедуру. На першому кроці процедури $M = \{m : 0 \leq m \leq n\}$, $P = \emptyset$. Далі покроково:

1. Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} \mathbf{W}_m \mathbf{g} = 0, & m \in M \\ \mathbf{J}_m \mathbf{g} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}}, & m \in P \end{cases}.$$

2. Обчислюємо додаткове напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{J}\mathbf{g} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{T}}$.
3. Переозначуємо $M = \{m : \hat{\sigma}_m \geq 0\}$, $P = \{m : \hat{\sigma}_m < 0\}$.

Продовжуємо 1-3 доки всі $\hat{\sigma}_m$ не стануть невід'ємними.

Проілюструємо алгоритм застосуванням для отримання пружного розв'язку задачі при дослідженні повільного зростання тріщини. Розглянемо вісесиметричну постановку рис. 3.38.

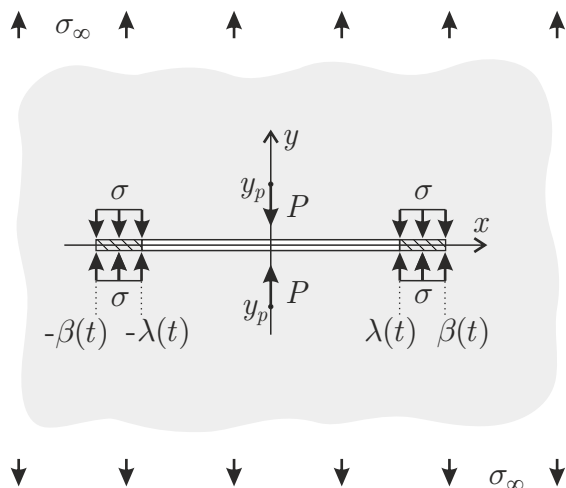


Рис. 3.38 – Схема навантаження та параметри моделі

Для цієї задачі

$$\tilde{\sigma}(x) = \sigma_\infty - \frac{Py_p}{\pi(x^2 + y_p^2)} \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} \cdot \frac{x^2 - y_p^2}{x^2 + y_p^2} \right].$$

Введемо позначення

$$\Delta(b_k) = L_0 W g(b_k)$$

– вектор, який утворюють величини відриву в точках колокації η_m , знайдений для тріщини з вершиною в квадратурній точці b_k , $L_0 = 4/E$ – миттєва характеристика повзучості. Тоді для довільного положення вершини тріщини $\lambda \in (b_{k-1}, b_k)$ можна наближено отримати відрив у вузлах колокації в наступний спосіб

$$\Delta(\lambda) = \Delta(b_{k-1}) + \frac{\lambda - b_{k-1}}{\Delta b} [\Delta(b_k) - \Delta(b_{k-1})]. \quad (3.72)$$

Положення вершини тріщини в дискретні моменти часу, $\lambda_k = \lambda(t_k)$ можна послідовно визначити за допомогою (3.53):

$$l(t_k)D_0 + \sum_{i=1}^k \Lambda_i(D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max}, \quad \Lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) d\tau,$$

$$D_i = \tilde{\Delta}(\lambda_k, \lambda_i) = \tilde{\Delta}_{i,j-1} + \frac{\lambda_k - \eta_{j-1}}{\Delta b} (\tilde{\Delta}_{ij} - \tilde{\Delta}_{i,j-1}), \quad \eta_{j-1} < \lambda_k < \eta_j,$$

величина $\tilde{\Delta}_{k,\cdot} = \mathbf{\Delta}(\lambda_k)$ визначається пружним розв'язком (3.72). Величини λ_k будемо знаходити числовим методом, для кожної варіації цієї величини треба переобчислювати величини $\tilde{\Delta}_{k,\cdot}$ та D_i ($i = 0, \dots, k$), використовуючи знайдені на попередніх кроках значення $\tilde{\Delta}_{m,\cdot}$ ($m = 0, \dots, k-1$). Визначення величин D і $\tilde{\Delta}$ проілюстровано на рис. 3.39.

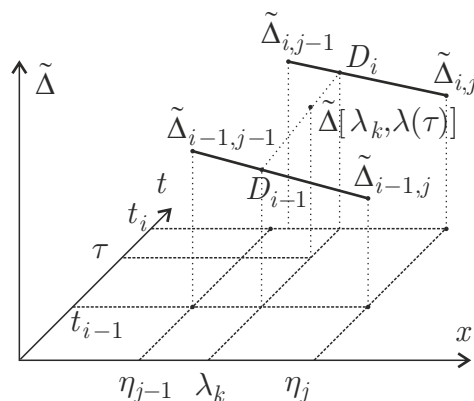


Рис. 3.39 – Координатно-часова дискретизація

На рис. 3.40 наведено експоненційне ядро інтегрального рівняння повільного поширення тріщини ((3.56) при $\eta = 0.01 \text{ сек}^{-1}$, $l_\infty = 10$), контури зростаючої тріщини для декількох моментів часу та відповідна кінетична крива. На графіку ядра позначено часовий відрізок, на якому відбувається докритичне зростання тріщини. Числові розв'язки отримано при $E = 1 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $\sigma = 35 \text{ МПа}$, $\sigma_\infty = 17.5 \text{ МПа}$, $P = \sigma_\infty \cdot 1 \text{ см}$, $\Delta_{\max} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $\lambda_0 = 0.5 \text{ см}$, $\delta_2 = 1.2 \text{ см}$, $\Delta b = 0.008 \text{ см}$, $\Delta t = 1 \text{ сек}$.

Останньому контуру відповідає відсутність контактної взаємодії берегів.

Числові розв'язки рис. 3.41 відповідають вихідним даним рис. 3.40 за винятком $l_\infty = 30$.

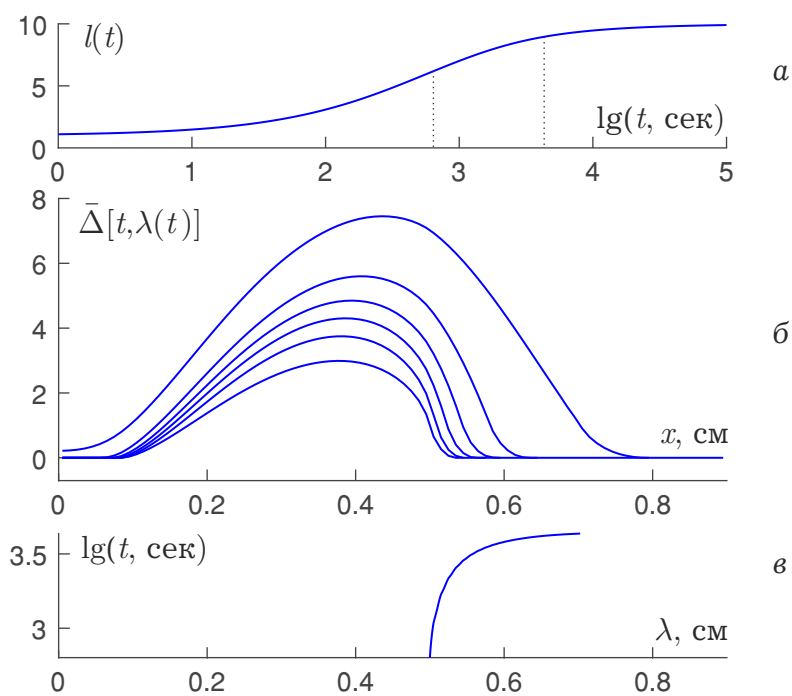


Рис. 3.40 – Характеристика повзучості (*a*), розкриття тріщини, що зростає (*б*), кінетична крива (*в*)

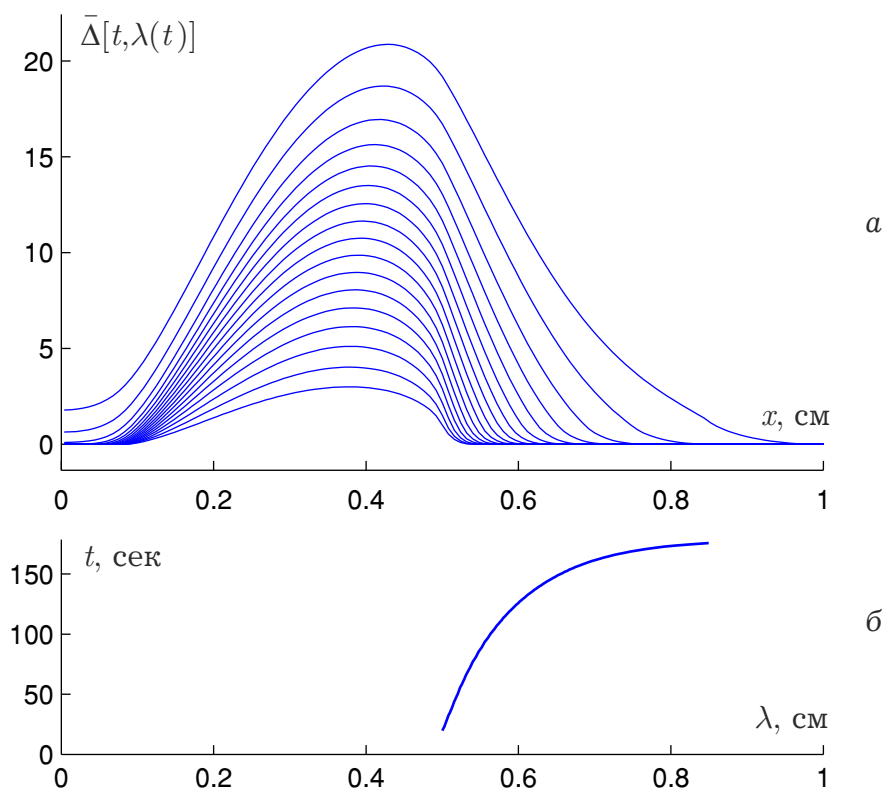


Рис. 3.41 – Розкриття тріщини, що зростає (*a*), кінетична крива (*б*)

3.5 Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин із зонами передруйнування

Модель тріщини з зонами зчеплення використовується для аналізу тріщиностійкості конструкцій, виготовлених із сучасних матеріалів, для широко спектра конфігурацій елементів конструкцій із тріщиною або їх системою. Згідно з цією моделлю, нелінійність зв'язку напружень із деформаціями в околі вершини тріщини зноситься на сегмент на продовженні тріщин.

Існує два типи моделей тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. Вони відрізняються взаємним розташуванням зони нормального відриву та зсувної зони. Згідно з першою моделлю в двох вказаних зон суміщені вершини [124], згідно з другою – хвости [122]. Використання першої моделі виглядає більш простим [26, 65, 71], оскільки в її основі лежить розв'язання першої основної задачі теорії пружності, друга модель є більш реалістичною, але вимагає розв'язання змішаної задачі. У розділі запропоновано алгоритм розв'язання задач другого типу. Цей алгоритм дозволяє за декілька ітерацій, на кожній із яких розв'язується система лінійних рівнянь, отримати переміщення берегів тріщини при рівномірному розподілі сил зчеплення (узагальнена модель Леонова – Панасюка – Дагдейла). В основу алгоритму покладено розв'язання системи інтегральних рівнянь [62] квадратурно-колокаційним методом [108].

Постановка задачі. В рамках моделі тріщини зі складною зоною зчеплення визначимо переміщення берегів паралельних тріщин, в околі вершин яких діють незначні за інтенсивністю поля зсувних напружень.

Розглянемо задачу, що відповідає рис. 3.42 а з умовами на i -му контурі ($x \in (\beta_{i1}, \beta_{i2})$), що відповідають рис. 3.42 б,

$$\sigma^{\pm}(x) + i\tau^{\pm}(x) = p_i(x), \quad (3.73)$$

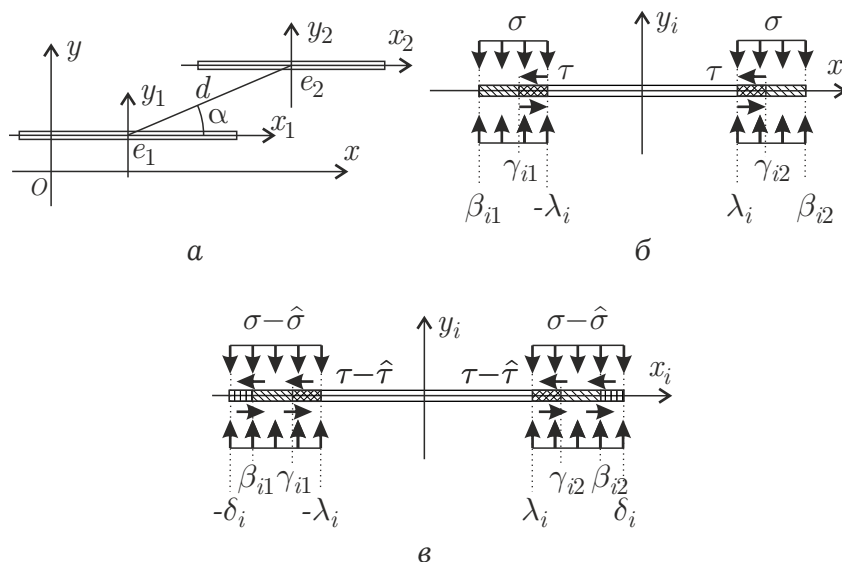


Рис. 3.42 – Геометричні параметри (а), параметри моделі (б) та параметри модифікованої постановки (в)

$$p_i(x) = -[\tilde{\sigma}_i(x) - i\tilde{\tau}_i(x)] + T_i(x) - iS_i(x), \quad (3.74)$$

$$T_i(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in \Xi_i \\ 0, & x \notin \Xi_i \end{cases}, \quad S_i(x) = \begin{cases} \tau, & x \in \Pi_i \\ 0, & x \notin \Pi_i \end{cases}, \quad (3.75)$$

де $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\tau}_i$ – нормальні та зсувні напруження, що діють на лінії розташування i -ої тріщини в тілі без тріщини, σ і τ – сили нормального і зсувного зчеплень, $\Xi_i = (\beta_{i1}, -\lambda_i) \cup (\lambda_i, \beta_{i2})$, $\Pi_i = (\gamma_{i1}, -\lambda_i) \cup (\lambda_i, \gamma_{i2})$.

Також у постановку задачі включаємо умову обмеженості напружень у тілі. Ця умова для задачі, що розглядається, еквівалентна умові плавності змикання берегів

$$\Delta'_{I_i}(\beta_{i1,i2}) = 0,$$

Δ_{I_i} – нормальне розкриття i -ої тріщини. Також включаємо до постановки аналогічну умову для зсувного розкриття

$$\Delta'_{\Pi i}(\gamma_{i1,i2}) = 0, \quad \Delta_{\Pi}(x) = 0, \quad x \in (\beta_{i1}, \gamma_{i1}) \cup (\gamma_{i2}, \beta_{i2}).$$

Далі, розглянемо модифіковану постановку (рис. 3.42 в), яка не включає в явному вигляді умови плавності змикання берегів. Оберемо інтервал пошуку розв'язку $(-\delta_i, \delta_i)$ таким чином, щоб він напевне містив зону зчеплення. Контурне напруження

$$p_i(x) = -[\tilde{\sigma}_i(x) - i\tilde{\tau}_i(x)] + \hat{T}_i(x) - i\hat{S}_i(x) - [\hat{\sigma}_i(x) - i\hat{\tau}_i(x)], \quad (3.76)$$

$$\hat{T}_i(x) = \begin{cases} \sigma, & |x| > \lambda_i \\ 0, & |x| < \lambda_i \end{cases}, \quad \hat{S}_i(x) = \begin{cases} \tau, & |x| > \lambda_i \\ 0, & |x| < \lambda_i \end{cases}.$$

Додаткові напруження $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$ унеможливають перекриття берегів тріщини; ці напруження після дискретизації знайдемо разом з іншими невідомими величинами за допомогою ітеративної процедури.

Методика розв'язування. Розв'язок задачі з контурними напруженнями (3.76) дається системою інтегральних рівнянь [62]

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{g_1(t)dt}{t-x_1} + \frac{1}{2} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \sum_i \frac{g_2(t)dt}{t-(x_1+\zeta_i)} + \\ & \quad + \zeta \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{\overline{g_2(t)}dt}{[t-(x_1+\zeta_2)]^2} = p_1(x_1) \\ & \frac{1}{2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \sum_i \frac{g_1(t)dt}{t-(x_2-\zeta_i)} - \zeta \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{g_1(t)dt}{[t-(x_2-\zeta_2)]^2} + \\ & \quad + \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{g_2(t)dt}{t-x_2} = p_2(x_2), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$|x_i| < \delta_i, \quad \zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2), \quad \zeta_1 = e_1 - e_2, \quad \zeta_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2.$$

До (3.77) треба додати умови однозначності переміщень

$$\Delta_i(\delta_i) = 0, \quad \Delta_i(x) = \Delta_{Ii}(x) + i\Delta_{\Pi i}(x) = L \int_{-\delta_i}^x g_i(t) dt,$$

L є пружною сталою (у випадку ізотропності матеріалу та за умов плоского напруженого стану $L = 4/E$, E – модуль Юнга).

Перепишемо систему (3.77) після заміни змінних $t = \delta_i \tau$, $x_i = \delta_i \xi$ ($|\tau|, |\xi| < 1$) та перепозначення $g_i(\delta_i \tau)$ через $g_i(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_1} \int_{-1}^1 \frac{g_1(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\delta_2} \int_{-1}^1 \sum_i \frac{g_2(t) dt}{t - (\delta_1 x + \zeta_i)/\delta_2} + \\ + \frac{\zeta}{\delta_2^2} \int_{-1}^1 \frac{\overline{g_2(t)} dt}{[t - (\delta_1 x + \zeta_2)/\delta_2]^2} = \pi p_1(\delta_1 x) \\ \frac{1}{2\delta_1} \int_{-1}^1 \sum_i \frac{g_1(t) dt}{t - (\delta_2 x - \zeta_i)/\delta_1} - \\ - \frac{\zeta}{\delta_1^2} \int_{-1}^1 \frac{\overline{g_1(t)} dt}{[t - (\delta_2 x - \zeta_2)/\delta_1]^2} + \frac{1}{\delta_2} \int_{-1}^1 \frac{g_2(t) dt}{t-x} = \pi p_2(\delta_2 x). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Функції щільностей розкриття g_i знайдемо як кусково-лінійні апроксимації

$$g_i(x) = \frac{x - b_{k-1}}{\Delta b} g_{ik} + \frac{b_k - x}{\Delta b} g_{i(k-1)}, \quad b_{k-1} < x < b_k,$$

квадратурні точки $b_k = -1 + k \cdot \Delta b$, $k = 0, \dots, n$, $\Delta b = 2/n$.

Після інтегрування в (3.78) отримаємо систему

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta_1} \sum_{k=0}^n J_k(\eta_m) g_{1k} + \frac{1}{2\delta_2} \sum_{k=0}^n \sum_i J_k \left[\frac{\delta_1 \eta_m + \zeta_i}{\delta_2} \right] g_{2k} + \\
& \quad + \frac{\zeta}{\delta_2^2} \sum_{k=0}^n K_k \left[\frac{\delta_1 \eta_m + \zeta_2}{\delta_2} \right] \bar{g}_{2k} = p_1(\delta_1 \eta_m) \\
& \quad \frac{1}{2\delta_1} \sum_{k=0}^n \sum_i J_k \left[\frac{\delta_2 \eta_m - \zeta_i}{\delta_1} \right] g_{2k} - \\
& \quad - \frac{\zeta}{\delta_1^2} \sum_{k=0}^n K_k \left[\frac{\delta_2 \eta_m - \zeta_2}{\delta_1} \right] \bar{g}_{1k} + \frac{1}{\delta_2} \sum_{k=0}^n J_k(\eta_m) g_{2k} = p_2(\delta_2 \eta_m),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

яку доповнюємо умовами однозначності переміщень

$$\frac{g_{i0}}{2} + g_{i1} + \dots + g_{i(n-1)} + \frac{g_{in}}{2} = 0. \tag{3.80}$$

В (3.79) η_m ($m = 1, \dots, n$) – точки колокації, які є серединами інтервалів (b_{m-1}, b_m) ,

$$\pi J_0(z) = -1 - (z - b_1)G_1(z), \quad \pi J_n(z) = 1 + (z - b_{n-1})G_n(z),$$

$$\pi J_k(z) = (z - b_{k-1})G_k(z) - (z - b_{k+1})G_{k+1}(z), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\Delta b \cdot G_k(z) = \ln \{ (b_k - z)(b_{k-1} - z)^{-1} \},$$

$$\pi K_0(z) = -G_1(z) - (z - b_1)H_1(z),$$

$$\pi K_n(z) = G_n(z) + (z - b_{n-1})H_n(z),$$

$$\pi K_k(z) = G_k(z) + (z - b_{k-1})H_k(z) -$$

$$- G_{k+1}(z) - (z - b_{k+1})H_{k+1}(z), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\Delta b \cdot H_k(z) = -(b_k - z)^{-1} + (b_{k-1} - z)^{-1}.$$

Ітеративна процедура для знаходження допоміжних напружень $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$. Позначимо через P_i індекси, що відповідають точкам колокації $|\eta_m| < \lambda_i$ і M_i – індекси, що відповідають точкам колокації в зоні зчеплення. Далі покроково:

1. Розв'язуємо в системі з (3.80) рівняння

$$\operatorname{Re}\{\Delta_i(\eta_m)\} = 0, \quad m \in M_{xi},$$

$$\operatorname{Re}\{F_i(\eta_m)\} = -\tilde{\sigma}_i(\eta_m) + \hat{T}_i(\eta_m), \quad m \in P_{xi},$$

$$\operatorname{Im}\{\Delta_i(\eta_m)\} = 0, \quad m \in M_{yi},$$

$$\operatorname{Im}\{F_i(\eta_m)\} = -\tilde{\tau}_i(\eta_m) + \hat{S}_i(\eta_m), \quad m \in P_{yi},$$

де F_i – позначення лівих частин у (3.79).

2. Обчислюємо допоміжні напруження

$$\hat{\sigma}_i(\eta_m) = -\operatorname{Re}\{F_i(\eta_m)\} - \tilde{\sigma}(\eta_m) + \hat{T}_i(\eta_m),$$

$$\hat{\tau}_i(\eta_m) = -\operatorname{Im}\{F_i(\eta_m)\} - \tilde{\tau}(\eta_m) + \hat{S}_i(\eta_m).$$

3. Переозначуємо

$$M_{xi} = \{m : \hat{\sigma}_i(\eta_m) \geq 0\}, \quad P_{xi} = \{m : \hat{\sigma}_i(\eta_m) < 0\},$$

$$M_{yi} = \{m : \hat{\tau}_i(\eta_m) \geq 0\}, \quad P_{yi} = \{m : \hat{\tau}_i(\eta_m) < 0\}.$$

Повторюємо 1-3 доки

$$\hat{\sigma}_i(\eta_m) \geq 0, \quad \hat{\tau}_i(\eta_m) \geq 0, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Приклад розв'язання. На рис. 3.43 наведений розв'язок задачі (відносні нормальне $\bar{\Delta}_I = \Delta_I/\Delta_I^*$ та зсувне $\bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II}/\Delta_{II}^*$ розкриття), отриманий для $\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа (напрямок протилежним представ-

леному на рис. 3.42), $\Delta_I^* = 0.003$ см, $\Delta_{II}^* = 0.002$ см, $\tilde{\sigma}_i = \sigma_\infty = \sigma_{\max}/3$, $\tilde{\tau}_i = 0$, $E = 4000$ МПа, $\lambda_1 = 0.7$ см, $\lambda_2 = 0.65$ см, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ см, $d = 2$ см, $\alpha = \pi/12$, $e_1 = 0$, $e_2 = d \exp\{i\alpha\}$, $n = 400$. Суцільні криві відповідають першій тріщини ($i = 1$), пунктирні – другій ($i = 2$).

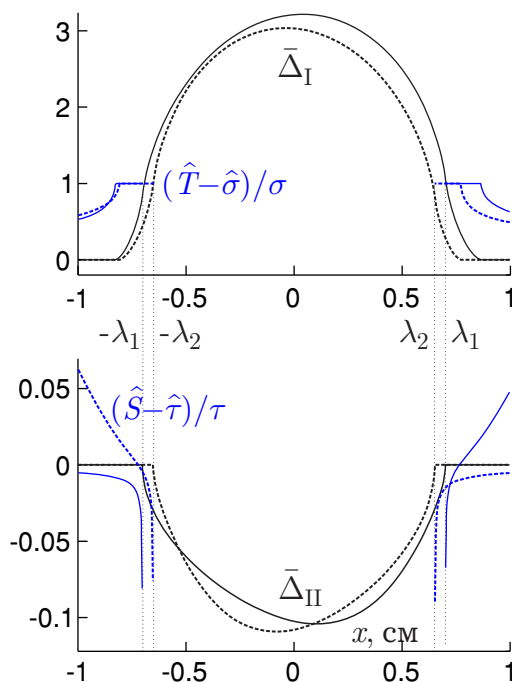


Рис. 3.43 – Відносні нормальні ($\bar{\Delta}_I$) та зсувні ($\bar{\Delta}_{II}$) розкриття, відносні зчеплення та напруження поза зонами зчеплення

Отже, у даному розділі ефективний метод досліджень нелінійної механіки руйнування перенесено на систему паралельних тріщин. Цей метод надає змогу визначати розкриття тріщин не розв'язанням нелінійних рівнянь відносно положень вершин зон зчеплення [130], а використанням ітеративної процедури, на кожному кроці якої розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.6 Результати та висновки

1. Наведено і проілюстровано загальну схему розв'язання задач визначення переміщень берегів тріщини в рамках моделі складної зони зчеплення (для вершин зон нормального і зсувного зчеплень, що збігаються).

В основі схеми лежить числовий метод пошуку границь зон зчеплення, на кожній ітерації якого розв'язується перша основна задача теорії пружності.

2. Запропоновано алгоритм для дослідження докритичного зростання тріщини у в'язкопружному тілі. Алгоритм проілюстровано числовими розв'язками задач, у постановку яких введено зосереджені сили, що діють вздовж нормалей до лінії тріщини. Ці сили можуть уповільнювати або прискорювати поширення тріщини, робити розмір довжини зчеплення немонотонним із часом, а також обумовлювати контакт берегів тріщини. В останньому випадку встановлено значний вплив наявності області контакту на кінетичні криві. Також виявлено істотний вплив несиметричності навантаження відносно серединної нормалі до відрізка розташування тріщини. Описано зменшення ділянки контакту при повільному поширенні тріщини. Встановлено, що зникнення зони може призводити до початку етапу динамічного зростання тріщини.
3. Розв'язання задач проведено як із використанням концепції тонкої структури, так і без її використання. В останньому випадку, для знаходження пружного розкриття берегів тріщини запропоновано модифіковану постановку граничної задачі теорії пружності, що дозволяє не включати у визначальну систему рівняння, пов'язані з умовою скінченності напружень. Ця постановка дозволила звести процедуру пошуку розв'язку до декількох ітерацій, на кожній з яких розв'язується лінійна система рівнянь. Ефективність запропонованої методики розв'язання задач теорії тріщини в рамках МЗЗ проілюстровано розв'язанням задачі для системи двох паралельних тріщин.

Розділ 4

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ ЗОНИ ЗЧЕПЛЕННЯ З РІВНОМІРНИМ ЗАКОНОМ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ В ДОСЛІДЖЕННЯХ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНОЮ

Для побудови аналітичних розв'язків задач теорії тріщин у розділі використовуються класичні потенціали [53, 60]. Контактне напруження фігурує в цих потенціалах у вигляді кусково-лінійної функції з невідомими напруженнями у вузлах. Для знаходження розподілу контактних напружень будуються системи лінійних чи нелінійних рівнянь (останні можна легко лінеаризувати), які отримано з умови розташування точок берегів тріщини на її середній лінії після деформування. Поряд зі згаданими класичними потенціалами механіки тріщин у розділі використовується інтегральне представлення потенціалів [62], за допомогою якого контактна задача зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язання цього рівняння квадратурно-колокаційним методом зводиться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь для значень модифікованої (для врахування сингулярностей похідної за координатою від переміщення берегів тріщини) кусково-лінійної апроксимації щільності розкриття. Врахування контакту берегів здійснюється за допомогою ітеративної процедури, на кожному кроці якої розв'язується система лінійних рівнянь. Ця процедура використана в розділі для знаходження переміщень берегів тріщини в рамках МЗЗ; її застосування дало змогу не розв'язувати систем нелінійних рівнянь для

знаходження границь зон зчеплення.

Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ. В [19] досліджено вплив циклічного розтягувального напруження на нескінченності на кінетику зростання тріщини. В [128] описано ініціацію зростання тріщини поперечного зсуву, а в [28] – зростання тріщини поперечного зсуву вздовж осі ортотропії. В [22, 166] розв’язано задачу про зростання дископодібної тріщини в композитному масиві. В [36, 42, 46, 68] досліджено вплив взаємного розташування кривих релаксації матеріалів компонент композита на кінетичні криві зростання тріщин поперечного та поздовжнього зсувів. Межі застосовності принципу тонкої структури для обчислення довговічності в’язкопружної ортотропної пластини визначено в [47]. В [35, 171] розглянуто ініціацію тріщини змішаного режиму руйнування. Кінетику поширення двох колінеарних тріщин описано в [29]. В [41] запропоновано алгоритм визначення розкриття тріщини з ділянкою контакту її берегів у рамках МЗЗ.

У розділі 4.1 наведено приклади побудови числово-аналітичних розв’язків для переміщень берегів тріщини в ортотропній пластині за наявності повного або часткового контакту берегів. Поле напружень на лінії тріщини формується прикладанням розподілених напружень на значній відстані від тріщини й зосереджених сил у її околі. Контактні напруження визначаються з умови перекриття берегів тріщини, яка містить як нормальні, так і зсувні компоненти переміщення. Розподіл контактних напружень визначається за допомогою алгоритму, що дозволяє не включати в розв’язувальну систему границі наперед невідомої ділянки контакту.

У розділі 4.2 наведено приклад визначення переміщень берегів тріщини нормального відриву з урахуванням наявності зон передруйнування та ділянки контакту берегів.

Алгоритми визначення розкриття тріщини, які враховують особливості

МЗЗ, наведено в розділі 4.3. Перший алгоритм включає умову плавності змикання берегів і забезпечує точне визначення довжини зчеплення. До розв'язувальної системи другого алгоритму не включено нелінійні рівняння відносно довжин зчеплення. Цей алгоритм базується на модифікованій постановці, в основу якої покладено представлення зчеплення різницею його подовження на від'ємний відрив та допоміжного напруження. Границі зони зчеплення при реалізації запропонованого алгоритму визначаються з точністю до кроку сітки. Ефективність другого алгоритму проілюстрована визначенням розкриття системи колінеарних тріщин у рамках МЗЗ.

Визначальні рівняння для положення вершин зростаючих тріщин, розташованих вздовж однієї прямої, побудовано в розділі 4.4. Рівняння повільного поширення колінеарних тріщин вздовж наперед відомого шляху (осі ортотропії матеріалу) побудовано на основі МЗЗ, розв'язку задачі лінійної в'язкопружності для відриву у формі Больцмана та критерію критичного розкриття. Визначальна система включає в себе інтегральні рівняння для рухомих і нерівності для нерухомих вершин тріщин. Отримана система розв'язується послідовно в дискретні моменти часу.

4.1 Врахування контактної взаємодії берегів тріщини при визначенні напружено-деформованого стану

Прикладена в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0, y_0 > 0$) зосереджена сила $P_x + iP_y$ зумовлює поле напружень із потенціалами

$$\Phi(z) = \frac{A_1}{z_1 - z_0^1}, \quad \Psi(z) = \frac{A_2}{z_2 - z_0^2}, \quad A_k = -\frac{p_k P_x + q_k P_y}{2\pi i a_{11} \tilde{s}_k}, \quad k = 1, 2,$$

величини p_k та q_k визначені в (2.12),

$$\tilde{s}_1 = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4), \quad \tilde{s}_2 = (s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4),$$

$$z_k = x + s_k y, \quad z_0^k = x_0 + s_k y_0, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2.$$

Напруження, обумовлені дією зосередженої сили, вздовж осі Ox приймають значення

$$\sigma_0 - \alpha\tau_0 = \sum_{k=1}^4 \frac{A_k(1 + \alpha s_k)}{x - z_0^k}, \quad A_3 = \bar{A}_1, \quad A_4 = \bar{A}_2. \quad (4.1)$$

Визначимо напружено-деформований стан в околі тріщини при наявності в точці $z = x_0 + iy_0$ ($y_0 > 0$) зосередженої сили (P_x, P_y) .

Розглянемо контурні умови та умови на нескінченності (рис. 4.1)

$$(\sigma_y - \alpha\tau_{xy})^\pm = -[\sigma_0(x) - \alpha\tau_0(x)] - [\sigma(x) - \alpha\tau(x)], \quad x \in (-\beta, \beta),$$

$$\sigma_y(z) = \sigma_\infty, \quad \tau_{xy}(z) = \tau_\infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

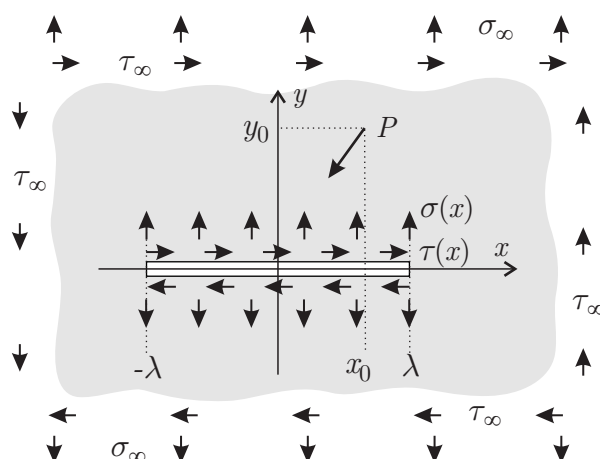


Рис. 4.1 – Схема навантаження (σ , τ – контактні напруження)

Напруження на лінії розташування тріщини $\sigma_0 - \alpha\tau_0$ у тілі без тріщини, які виникають внаслідок дії зосередженої сили, визначено в (4.1). Напруже-

ння $\sigma(x) - \alpha\tau(x)$ є відмінними від нуля у випадку контакту берегів тріщини.

Ці напруження будемо шукати в кусково-лінійній формі

$$\begin{aligned} \Delta b \cdot [\sigma(x) - \alpha\tau(x)] &= (b_k - x)(\sigma_{k-1} - \alpha\tau_{k-1}) + \\ &+ (x - b_{k-1})(\sigma_k - \alpha\tau_k), \quad x \in (b_{k-1}, b_k), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$b_k = -\lambda + k \cdot \Delta b, \quad k = 0, \dots, n, \quad \Delta b = \frac{2}{n}\lambda.$$

Розв'язок задач Гільберта – Прівалова (2.23) для функцій $(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z)$, знайдемо з (2.25):

$$(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} [-H_1(z) - H_2(z) + H_3(z)] \\ -\Gamma_2 \end{array} \right\}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sigma_0(x) - \alpha\tau_0(x)}{x - z} X(x) dx, \\ H_2(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sigma(x) - \alpha\tau(x)}{x - z} X(x) dx, \\ H_3(z) &= 2\pi \frac{C_0 z + C_1}{X(z)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$X(x)$ – значення функції $X(z) = \sqrt{z^2 - \lambda^2}$ на верхньому березі розрізу ($X(x) = X^+(x)$).

З умови однозначності переміщень встановимо, що $C_1 = 0$. Далі визначимо сталі C_0 і Γ_2 . При $|z| \rightarrow \infty$, згідно з (2.14),

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \Gamma + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} \Gamma' + \left(A + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} B \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \\ \Omega(z) &= \bar{\Gamma} + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{\Gamma}' + \left(\bar{A} + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{B} \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \end{aligned}$$

Γ і Γ' – визначаються умовами (2.15). Рівняння для визначення C_0 і Γ_2 :

$$(1 + \alpha s_1)\Gamma + (1 + \alpha s_2)\Gamma' \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_2)\bar{\Gamma}' = \begin{Bmatrix} 2C_0 \\ -\Gamma_2 \end{Bmatrix}.$$

Використовуючи позначення (2.21), отримаємо

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2}\sigma_\alpha^\infty, \\ \Gamma_2 &= -(1 + \alpha s_1)\Gamma - (1 + \alpha s_2)\Gamma' + (1 + \alpha \bar{s}_1)\bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_2)\bar{\Gamma}'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Підставимо (4.1) до першого з виразів (4.4), а (4.2) – у другий. Проінтегруємо в (4.4):

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{i}{2X(z)} \sum_{k=1}^4 (D_k P_y - iE_k P_x) (R(z, z_0^k) - 1), \\ H_2(z) &= \sum_{k=0}^n (\sigma_k - \alpha \tau_k) \left[i h_k(z) - \frac{N_{0k} + N_{1k}z - N_{2k}z^2}{X(z)} \right], \end{aligned}$$

де функція $R(z, \zeta)$ визначена в (4.15), $h_k(z)$ – в (4.18), сталі N_{sk} – в (4.20);

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} D_k \\ E_k \end{Bmatrix} &= \frac{a_k(1 + \alpha s_k)}{a_{11}\tilde{s}_k} \cdot \begin{Bmatrix} q_k \\ p_k \end{Bmatrix}, \quad k = 1, \dots, 4, \\ a_1 &= a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = -1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

У випадку збігу напрямку осі ортотропії з координатною віссю пружні сталі в (4.6) можна переписати у формі

$$\begin{aligned} D_{1,3} &= \frac{1}{2} \left[\mp 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right] \frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, & E_{1,3} &= \frac{1}{2\beta_1} \left[-1 \pm \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right] \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \\ D_{2,4} &= \frac{1}{2} \left[\pm 1 - \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right] \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, & E_{2,4} &= \frac{1}{2\beta_2} \left[1 \mp \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right] \frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

інші співвідношення між пружними сталими:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 D_k &= c_{\varkappa}, & \sum_{k=1}^4 E_k &= \alpha_y c_{\varkappa}, & c_{\varkappa} &= L_2 L^{-1}, \\ \alpha_x &= 0, & \alpha_y &= k_a^{-1/2}, & L &= 2n_a k_a^{1/2} a_{11}, & L_2 &= 2(a_{12} + k_a a_{11}), \\ \Gamma_2 &= \gamma \sigma_{\infty} - i\beta_2^{-1} \tau_{\infty}, & \gamma &= k_a^{1/2} n_a^{-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

КІН у правій вершині

$$\begin{aligned} K_{\text{I}} - \alpha K_{\text{II}} &= \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \sqrt{2\pi(x - \lambda)} [(1 + \alpha s_1)\Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(x)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{k=1}^4 (D_k P_y - iE_k P_x) [i - \check{X}(z_0^k)] + \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sum_{k=0}^n (\sigma_k - \alpha \tau_k) N_k + \sigma_{\alpha}^{\infty} \sqrt{\pi\lambda}, \end{aligned}$$

причому $\check{X}(z_0^3) = -\overline{\check{X}(z_0^1)}$, $\check{X}(z_0^4) = -\overline{\check{X}(z_0^2)}$. З (4.3) інтегруванням отримуємо

$$2\pi \left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha s_1)\theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1)\omega(z) \end{array} \right\} = \int [-H_1(z) - H_2(z)] dz + \pi [\sigma_{\alpha}^{\infty} X(z) \mp \Gamma_2 z], \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \int H_1(z) dz &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^4 (D_k P_y - iE_k P_x) [\ln(z - z_0^k) - C(z_0^k, z) + iI(z)], \\ \int H_2(z) dz &= i \sum_{k=0}^n (\sigma_k - \alpha \tau_k) \left[J_k(z) - \sum_{s=0}^2 F_s(z) N_{sk} \right], \end{aligned}$$

$C(z_0^k, z)$ визначені в (4.16), $I(z)$ – в (4.17), $J_k(z)$ – в (4.18), $F_s(z)$ – в (4.19).

Тоді, на основі (4.9) можна визначити переміщення берегів у формі (2.31):

$$\frac{2\pi}{L} \begin{Bmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 W_k, \quad (4.10)$$

$$W_1 = \begin{Bmatrix} c_{\varkappa} q_{11} & q_{12} \\ c_{\varkappa} q_{21} & q_{22} \end{Bmatrix}, \quad W_3 = \pi \begin{Bmatrix} -\gamma \sigma_{\infty} & \alpha_y \tau_{\infty} \hat{X} \\ \beta_2^{-1} \tau_{\infty} & \sigma_{\infty} \hat{X} \end{Bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$W_2 = - \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} \pi c_{\varkappa} \sigma_k h_{ky} & \alpha_y \tau_k A_k \\ -\alpha_y \pi c_{\varkappa} \tau_k h_{ky} & \sigma_k A_k \end{Bmatrix}.$$

Величини W_1 складаються з функцій q_{ij} , які визначаємо наступним чином:

$$q = \begin{Bmatrix} P_y u'_{0y} - P_x u'_{0x} & -P_y u_{1y} + P_x u_{1x} \\ -P_y v'_{0y} - P_x v'_{0x} & P_y v_{1y} + P_x v_{1x} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} u'_{0y} \\ v_{1y} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 D'_k \begin{Bmatrix} \operatorname{Im} f_k \\ \operatorname{Re} g_k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u'_{0x} \\ v_{1x} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 E''_k \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} f_k \\ \operatorname{Im} g_k \end{Bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1y} \\ v'_{0y} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 D''_k \begin{Bmatrix} \operatorname{Im} g_k \\ \operatorname{Re} f_k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ v'_{0x} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^2 E'_k \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} g_k \\ \operatorname{Im} f_k \end{Bmatrix},$$

пружні сталі D і E визначені в (4.21), а

$$2f_k(x) = \frac{1}{x - z_0^k}, \quad 2g_k(x) = C_x(z_0^k, x) - iI(x), \quad C_x(z_0^k, x) = \operatorname{Re}\{C^+(z_0^k, x)\}.$$

Величини W_2 визначаються функціями $h_{ky}(x) = \operatorname{Im}\{h_k^+(x)\}$ і

$$A_k(x) = J_{kx}(x) - \sum_{s=0}^2 F_s(x) N_{sk}, \quad J_{kx}(x) = \operatorname{Re}\{J_k^+(x)\},$$

$h_k(z)$ разом з $J_k(z)$ визначені в (4.18), а $F_s(x)$ – значення функції $F_s(z)$

на верхньому березі розрізу ($F_s(z)$ визначені в (4.19)). Окремо випишемо переміщення середньої лінії тріщини внаслідок дії контактних напружень:

$$2\pi \begin{Bmatrix} u_0 \\ \alpha_y v_0 \end{Bmatrix} = L_2 \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} J_{ky} \sigma_k \\ -\alpha_y J_{ky} \tau_k \end{Bmatrix}, \quad J_{ky}(x) = \text{Im}\{J_k^+(x)\}.$$

Дискретні переміщення середньої лінії

$$2\pi \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_0 & \mathbf{u}_1 \\ \alpha_y \mathbf{v}'_0 & \alpha_y \mathbf{v}_1 \end{Bmatrix} = -L \begin{Bmatrix} \pi c_z \boldsymbol{\sigma} & \alpha_y A \boldsymbol{\tau} \\ -\alpha_y \pi c_z \boldsymbol{\tau} & A \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix},$$

$$2\pi \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \alpha_y \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} = L_2 \begin{Bmatrix} J^y \boldsymbol{\sigma} \\ -\alpha_y J^y \boldsymbol{\tau} \end{Bmatrix},$$

де елементи матриць A і J^y визначаються наступним чином

$$J_{mk}^y \equiv J_{ky}(b_m) = -\frac{\pi}{2} \Delta b \cdot j_{mk}, \quad A_{mk} = A_k(b_m),$$

$$j_{m0} = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ 1, & m > 0 \end{cases}, \quad j_{mn} = \begin{cases} 0, & m < n \\ 1, & m = n \end{cases},$$

$$j_{mk} = \begin{cases} 0, & m < n \\ 1, & m = n, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ 2, & m > n \end{cases}.$$

Отже, матриця, що містить геометричні параметри контактної взаємодії берегів, введена в (2.36), визначена у формі

$$A = \Delta b \cdot (J^x - FN),$$

елементи матриць J^x і F відповідно

$$J_{mk}^x = J_{kx}(b_m), \quad F_{ms} = F_s(b_m),$$

J^x – матриця розмірності $(n+1) \times (n+1)$, F – $(n+1) \times 3$, N – $3 \times (n+1)$.

У випадку повного контакту берегів тріщини з рівномірним розподілом контактних напружень (при $n = 1$, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$, $\tau_0 = \tau_1 = \tau$) отримаємо

$$W_2 = \pi \begin{Bmatrix} -c_x \sigma & \alpha_y \tau \hat{X} \\ \alpha_y c_x \tau & \sigma \hat{X} \end{Bmatrix}. \quad (4.13)$$

Приклад визначення контактних напружень, обумовлених навантаженням на нескінченності. Розглянемо задачу за відсутності зосереджених сил. Комплексні потенціали задачі визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} 2 \begin{Bmatrix} (1 + \alpha s_1) \Theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(z) \end{Bmatrix} &= \frac{\sigma_\alpha^\infty z}{X(z)} \mp \Gamma_2, \\ 2 \begin{Bmatrix} (1 + \alpha s_1) \theta(z) \\ (1 + \alpha \bar{s}_1) \omega(z) \end{Bmatrix} &= \sigma_\alpha^\infty X(z) \mp \Gamma_2 z, \end{aligned}$$

переміщення берегів тріщини

$$2 \begin{pmatrix} u^\pm \\ v^\pm \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \pm \hat{X} \\ x \end{pmatrix},$$

елементи матриці B

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\operatorname{Im}\{L\sigma_\alpha^\infty\} - \alpha_x b_{21}, & b_{21} &= \alpha_y^{-1} \operatorname{Re}\{L\sigma_\alpha^\infty\}, \\ b_{12} &= -\operatorname{Re}\{L\Gamma_2\} - \alpha_x b_{22}, & b_{22} &= -\alpha_y^{-1} \operatorname{Im}\{L\Gamma_2\}. \end{aligned}$$

У разі збігу осей координат і ортотропії величина L є дійсною, $\alpha_x = 0$ і для $\sigma_\alpha^\infty = -\sigma_\infty + i\alpha_y \tau_\infty$ ($\sigma_\infty, \tau_\infty \geq 0$). Згідно з (4.10), отримаємо

$$\frac{2\pi}{L} \begin{Bmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{Bmatrix} = -W_3,$$

де величина W_3 визначена в (4.11). Ліва частина (2.33) набуде вигляду

$$v_1(1 + u'_0) - u_1 v'_0 = -\frac{L^2 \hat{X}}{4\alpha_y} [\sigma_\infty(2L^{-1} + \gamma\sigma_\infty) + \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2],$$

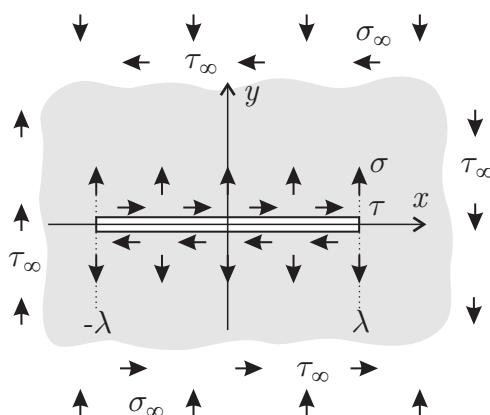


Рис. 4.2 – Схема навантаження (σ , τ – контактні напруження)

умова перекриття берегів тріщини:

$$\sigma_{\infty}(2L^{-1} + \gamma\sigma_{\infty}) + \alpha_y\beta_2^{-1}\tau_{\infty}^2 > 0.$$

У випадку відсутності нормального напруження на нескінченності ($\sigma_{\infty} = 0$) має місце контакт берегів тріщини. Можна з'ясувати, яке мінімальне розтягувальне зусилля треба прикласти, щоб цей контакт унеможливити. Розв'яжемо відносно σ_{∞} рівняння, отримане з останньої нерівності. Визначимо

$$\sigma_{\infty} = (L\gamma)^{-1} \left(1 - \sqrt{1 - L^2\gamma\alpha_y\beta_2^{-1}\tau_{\infty}^2} \right).$$

Розв'язок задачі зі зсувними напруженнями на нескінченності та зумовленими ними контактними напруженнями (рис. 4.2) запишемо на основі (4.10):

$$\frac{2\pi}{L} \begin{Bmatrix} u'_0 & u_1 \\ \alpha_y v'_0 & \alpha_y v_1 \end{Bmatrix} = W_2 - W_3,$$

де W_2 визначено в (4.13), W_3 – в (4.11). Рівняння для визначення контактних напружень (2.34) прийме вигляд

$$(\sigma - \sigma_\infty) (2L^{-1} - c_x \sigma + \gamma \sigma_\infty) - \alpha_y (\tau - \tau_\infty) (c_x \alpha_y \tau - \beta_2^{-1} \tau_\infty) = 0.$$

Покладемо $\tau = k_{\text{tr}} \sigma$ та визначимо нормальне контактне напруження

$$\sigma = (2a)^{-1} (b - \sqrt{b^2 - 4ac}),$$

$$a = c_x (1 + \alpha_y^2 k_{\text{tr}}^2), \quad c = (2L^{-1} + \gamma \sigma_\infty) \sigma_\infty + \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2,$$

$$b = 2L^{-1} + (\gamma + c_x) \sigma_\infty + k_{\text{tr}} (\alpha_y \beta_2^{-1} + \alpha_y^2 c_x) \tau_\infty.$$

Якщо $k_{\text{tr}} = 0$ і $\sigma_\infty = 0$

$$\sigma = L_2^{-1} \left(1 - \sqrt{1 - LL_2 \alpha_y \beta_2^{-1} \tau_\infty^2} \right) \approx \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \frac{\tau_\infty^2}{E_{11}}.$$

Отже, контактними напруженнями, що виникають внаслідок деформування середньої лінії тріщини, при незначних рівнях зовнішнього зсувного навантаження можна нехтувати.

Приклад визначення контактного напруження, обумовленого зосередженими силами та навантаженням на нескінченності. Задача 1. Розглянемо задачу з розтягувальним навантаженням на нескінченності та двома силами, які прикладені симетрично вздовж перпендикуляра до відрізка розташування тріщини та стягують її береги (рис. 4.3). За різних співвідношень геометричних параметрів та параметрів навантаження можливий контакт берегів як вздовж всієї тріщини, так і її частини. Контакт характеризується напруженням $\sigma(x)$, прикладеним до берегів тріщини. Ця функція наперед невідома, шукатимемо її в кусково-лінійній формі

$$\Delta b_k \cdot \sigma(x) = (b_k - x) \sigma_{k-1} + (x - b_{k-1}) \sigma_k, \quad x \in (b_{k-1}, b_k)$$

з напруженнями σ_k у точках сітки b_k ($k = 0, \dots, n$), які визначаємо ітеративним методом, описаним у розділі 2.1.

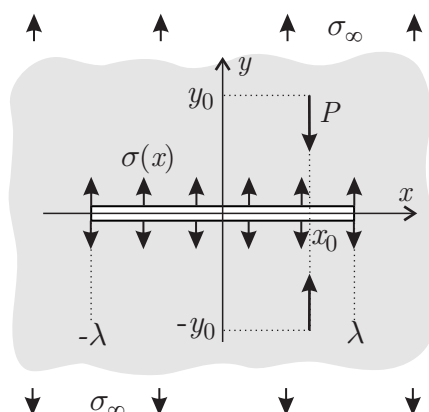


Рис. 4.3 – Схема навантаження (σ – контактне напруження)

Вертикальне переміщення берегів тріщини

$$\frac{2\pi\alpha_y}{L}v_1(x) = q_{22}(x) - \begin{cases} 0, & \min_{|x|<\lambda} q_{22}(x) \geq 0 \\ \sum_{k=0}^n \sigma_k A_k(x), & \min_{|x|<\lambda} q_{22}(x) < 0 \end{cases},$$

$$q_{22}(x) = P \sum_{k=1}^2 D'_k C_x(z_0^k, x) + \pi\sigma_\infty \hat{X}(x).$$

На рис. 4.4 пунктирним кривим відповідають розв'язки задачі, отримані без урахування контактного напруження (функція $Lq_{22}/(2\pi\alpha_y)$). Для першого блока це напруження на відрізку розташування тріщини в тілі без тріщини. Вказане напруження зображено з протилежним знаком для зручності порівняння з контактним напруженням, що відповідає суцільним кривим. Зазначимо, що для розв'язку, отриманого при $P/\sigma_\infty = 1.1$ см, хоч і існує невелика ділянка від'ємних напружень, контакту берегів не відбувається: $v_1(x) > 0$, $|x| < \lambda$. Інтенсивність зовнішнього навантаження $\sigma_\infty = 5$ МПа; параметри розташування сили – $x_0 = 0.05$ см, $y_0 = 0.5$ см; пружні сталі – $\nu_{21} = 0.3112$, $\beta_1 = 0.6963$, $\beta_2 = 2.1868$, $E_{11} = 21.07$ ГПа.

Пружні сталі отримано шляхом моделювання матеріалу пластини ор-

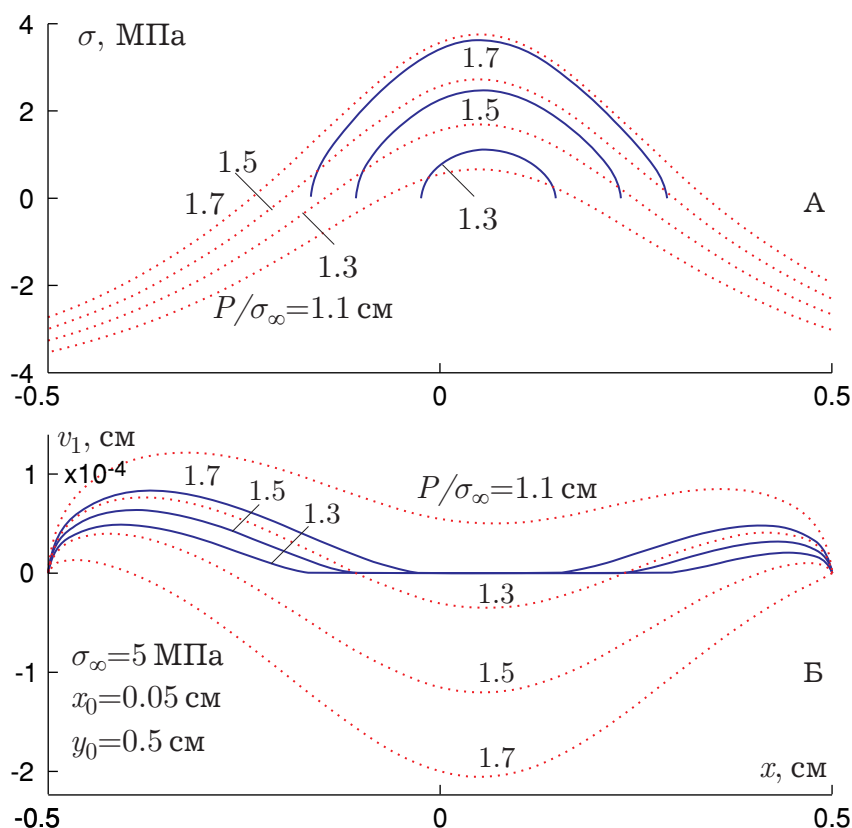


Рис. 4.4 – Контактне напруження (а) та переміщення верхнього берега тріщини (б)

тотропним середовищем з ефективними характеристиками. Ці характеристики знайдено за допомогою результатів механіки композитних матеріалів [2] як функції механічних характеристик ізотропних матеріалів компонент композита (матеріалу армування та наповнювача) і їхнього об'ємного вмісту (c_1 – армування, $c_2 = 1 - c_1$ – наповнювача).

Технічні сталі в законі Гука (2.8), згідно з результатами [2], можна розглядати як функції модулів зсуву, G_i і коефіцієнтів Пуассона, ν_i ізотропних матеріалів компонент композита (індекс $i = 1$ для механічних характеристик відповідає матеріалу армування, $i = 2$ – наповнювача). Значення пружних параметрів ортотропної пластини E_{11} , $\beta_{1,2}$ та ν_{21} отримані на основі (2.57) для композита з об'ємними і зсувними модулями матеріалів компонент

$$K_1 = 85.8 \text{ ГПа}, \quad G_1 = 29.3 \text{ ГПа},$$

$$K_2 = 5.41 \text{ ГПа}, \quad G_2 = 2.51 \text{ ГПа},$$

концентрацією армування $c_1 = 0.2$ і напрямком армування, що збігається з прямою розташування тріщини.

КІН у лівій та правій вершинах для розглянутої задачі:

$$K_{\text{I}}(\mp\lambda) = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi\lambda} \mp \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \left\{ P \sum_{k=1}^2 D'_k \operatorname{Re}\{\pm \check{X}^{\mp 1}(z_0^k)\} + \lambda \sum_{k=0}^n \sigma_k \left[\frac{2}{n} N_{0k} \mp N_{1k} - \frac{n}{2} N_{2k} \right] \right\}. \quad (4.14)$$

На рис. 4.5 наведені залежності КІН у лівій і правій вершинах від інтенсивності сил P , які стягують береги тріщини. Пунктирні криві відповідають першим двом доданкам у (4.14). Отже, рисунок ілюструє важливість врахування контактного напруження, що виникає між берегами тріщини.

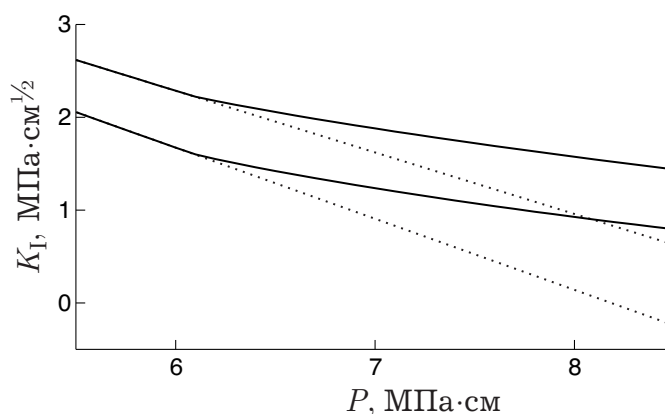


Рис. 4.5 – КІН тріщини з ділянкою контакту берегів

Задача 2. Розглянемо задачу для двох сил, що прикладені симетрично вздовж лінії, яка проходить через середину тріщини (рис. 4.6), напруження в нескінченно віддалених точках відсутні. Відбувається повний контакт берегів тріщини.

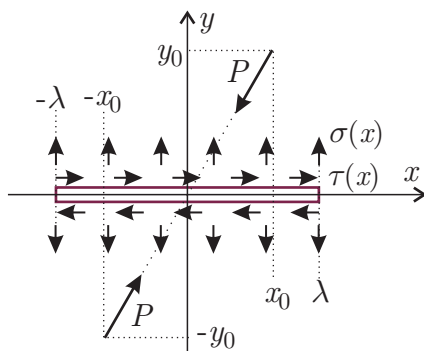


Рис. 4.6 – Схема навантаження (σ , τ – контактні напруження)

Переміщення берегів тріщини знайдемо за допомогою (4.10). При визначенні величин W_1 у виразах (4.12) слід покласти

$$2f_k(x) = (x - z_0^k)^{-1} - (x + z_0^k)^{-1}, \quad 2g_k(x) = C_x(z_0^k, x) - C_x(-z_0^k, x).$$

КІН для цієї задачі визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} K_I \\ \alpha_y K_{II} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{k=1}^2 \left[P_y \left\{ \begin{array}{c} D'_k g_{kx} \\ D''_k g_{ky} \end{array} \right\} + P_x \left\{ \begin{array}{c} E''_k g_{ky} \\ E'_k g_{kx} \end{array} \right\} \right] + \\ &+ 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sum_{k=0}^n N_k \left\{ \begin{array}{c} \sigma_k \\ \alpha_y \tau_k \end{array} \right\}, \quad g_{kx} + ig_{ky} = \check{X}(z_0^k) + \check{X}^{-1}(z_0^k). \end{aligned}$$

На рис. 4.7 наведені всі характеристики деформованої лінії тріщини в пластині, властивості матеріалу якої описано при представленні числових результаті рис. 4.4. Перший рядок блоків відповідає армуванню вздовж лінії тріщини, другий – вздовж нормалі до лінії тріщини. Перший стовпець блоків – напруження на відрізку розташування тріщини в тілі без тріщини (з протилежним знаком) та нормальне контактне напруження, другий – різниця між цими двома напруженнями, третій ілюструє вплив коефіцієнта тертя на величину контактного напруження (випадок армування вздовж лінії тріщини – вплив у межах 0.1 %, випадок армування вздовж норма-

лі до лінії тріщини – вплив вимірюється одним відсотком), у четвертому проілюстровано складові компонент переміщень берегів.

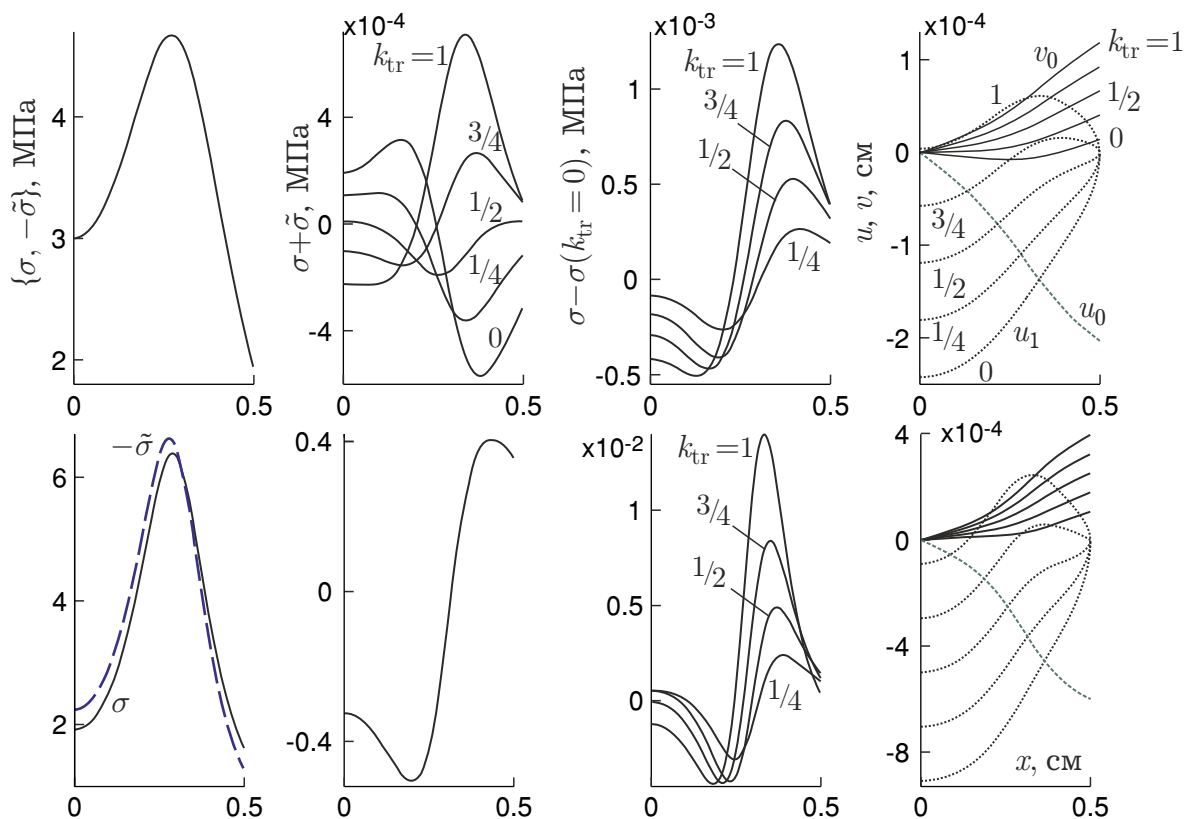


Рис. 4.7 – Результати дослідження контактної взаємодії берегів тріщини

Використані в розділі 4.1 позначення:

$$R(z, \zeta) = \frac{X(z) - X(\zeta)}{z - \zeta}, \quad \hat{X}(z) = -iX(z) = \sqrt{(z - \beta_1)(\beta_2 - z)} \quad (4.15)$$

$$C(z, \zeta) = \ln \frac{\check{X}(z) - \check{X}(\zeta)}{\check{X}(z) + \check{X}(\zeta)} \quad (4.16)$$

$$I(z) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(z), \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z - \beta_1}{\beta_2 - z}} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
h_0(z) &= Q'_1(z) + C_0(z), & J_0(z) &= T'_1(z) + K_0(z) \\
h_k(z) &= Q'_{k+1}(z) - Q'_k(z), & J_k(z) &= T'_{k+1}(z) - T'_k(z) \\
h_n(z) &= -Q'_n(z) - C_n(z), & J_n(z) &= -T'_n(z) - K_n(z)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\Delta b \cdot Q'_k(z) = Q_k(z) - Q_{k-1}(z), \quad \Delta b \cdot T'_k(z) = T_k(z) - T_{k-1}(z)$$

$$Q_k(z) = (z - b_k)C_k(z), \quad C_k(z) = C(z, b_k)$$

$$K_k(z) = Q_k(z) - \hat{X}(b_k)I(z)$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - b_k)^2 C_k(z) + \hat{X}(b_k) [\hat{X}(z) + b_k I(z)] \right\}$$

$$F_0(z) = -I(z), \quad F_1(z) = \hat{X}(z), \quad F_2(z) = \frac{1}{2} \left[e_2^2 I(z) - z \hat{X}(z) \right], \tag{4.19}$$

де $e_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ (у випадку $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$ отримаємо $e_2 = \beta$)

$$\begin{aligned}
N_{00} &= \Delta S_1, & N_{0k} &= \Delta S_{k+1} - \Delta S_k, & N_{0n} &= -\Delta S_n \\
N_{10} &= \Delta R_1 - I_0, & N_{1k} &= \Delta R_{k+1} - \Delta R_k, & N_{1n} &= -\Delta R_n + I_n \\
N_{20} &= \Delta I_1, & N_{2k} &= \Delta I_{k+1} - \Delta I_k, & N_{2n} &= -\Delta I_n
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\check{X}_k = \sqrt{\frac{n_\xi(1 - \xi) + k}{n_\xi(1 + \xi) - k}}, \quad \hat{X}_k = \check{X}_k[n_\xi(1 + \xi) - k], \quad n_\xi = \frac{n}{2\xi}$$

$$S_k = \frac{1}{2} \left[n_\xi^2 I_k - \left(k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k \right]$$

$$R_k = \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) I_k, \quad I_k = 2 \operatorname{arctg} \check{X}_k$$

$$J_{m0} = \Delta T_{m1} + K_{m0}, \quad J_{mk} = \Delta T_{m(k+1)} - \Delta T_{mk}, \quad J_{mn} = -\Delta T_{mn} - K_{mn}$$

$$T_{mk} = \frac{1}{2} \left[(m-k)^2 C_{mk} + \hat{X}_m \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k I_m \right]$$

$$C_{mk} = \ln \left| \frac{\check{X}_m - \check{X}_k}{\check{X}_m + \check{X}_k} \right|$$

$$K_{m0} = m C_{m0} - \hat{X}_0 I_m, \quad K_{mn} = (m-n) C_{mn} - \hat{X}_n I_m$$

$$D'_1 = -\frac{\beta_2^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad D'_2 = \frac{\beta_1^2 + \nu_{21}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad E'_1 = \frac{D'_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}}, \quad E'_2 = \frac{D'_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \quad (4.21)$$

$$D''_1 = -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} D'_1, \quad D''_2 = -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} D'_2, \quad E''_1 = -\frac{D'_2}{\beta_1}, \quad E''_2 = -\frac{D'_1}{\beta_2}$$

4.2 Визначення переміщень берегів тріщини з ділянкою контакту в рамках моделі зони зчеплення

Розглянемо задачу, що відповідає схемі прикладання зовнішнього навантаження та сил зчеплення рис. 4.8.

Задовольнимо контурні умови

$$\sigma_y^\pm(x) = -\sigma_0(x) - \sigma_c(x) - \sigma_\infty + T(x), \quad x \in (\beta_1, \beta_2),$$

$$T(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in (\beta_1, \lambda_1) \cup (\lambda_2, \beta_2) \\ 0, & x \in (\lambda_1, \lambda_2) \end{cases}, \quad \Delta'(\beta_{1,2}) = 0. \quad (4.22)$$

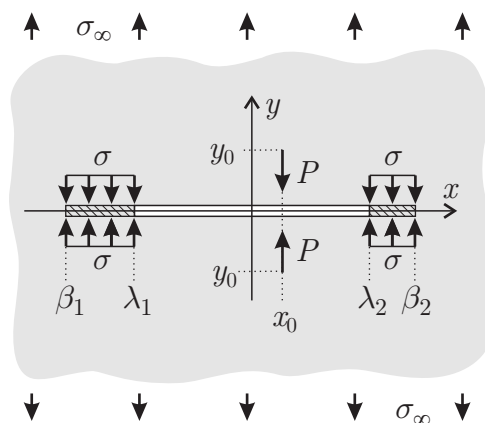


Рис. 4.8 – Схема навантаження та параметри моделі

Положення зовнішніх границь зон зчеплення $\beta_{1,2}$ наперед невідомі й визначаються в процесі розв'язання задачі. Напруження $\sigma_0(x)$, що виникають внаслідок дії зосередженої сили на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини, визначено в (4.1), напруження $\sigma_c(x)$ є відмінним від нуля у випадку контакту берегів тріщини. Це напруження визначатимемо у вигляді кусково-лінійної апроксимації

$$\Delta b_k \cdot \sigma_c(x) = (b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k, \quad x \in (b_{k-1}, b_k),$$

σ_k – контактні напруження у вузлах апроксимувальної функції, $b_0 = \beta_1$, $b_n = \beta_2$. Розглянемо лише частковий контакт берегів, коли в обох вершинах тріщина розкрита.

Розв'язок задач Гільберта – Прівалова (2.23) для функцій $(1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z)$, знаходимо за допомогою (2.25):

$$\begin{aligned} (1 + \alpha s_1)\Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1)\Omega(z) = \\ = \left\{ \frac{1}{\pi} \left[-H_1(z) - H_2(z) + H_3(z) + H_4(z) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sigma_0(x)}{x-z} X(x) dx, \\
H_2(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sigma_c(x)}{x-z} X(x) dx, \\
H_3(z) &= 2\pi \frac{C_0 z + C_1}{X(z)}, \quad H_4(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{T(x)}{x-z} X(x) dx,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$X(x)$ – значення функції $X(z) = \sqrt{(z - \beta_1)(z - \beta_2)}$ на верхньому березі розрізу ($X(x) = X^+(x)$).

З умови однозначності переміщень встановимо, що $C_1 = -eC_0$ ($e = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ – напівдовжина модельного розрізу). Сталі C_0 і Γ_2 визначені в (4.5), причому пружну сталу Γ_2 у випадку збігу осей ортотропії з осями вибраної системи координат можна визначити з (4.8).

Проінтегруємо в (4.24). Отримаємо (див. інтеграли в розділі 3.1)

$$\begin{aligned}
H_1(z) &= \frac{iP_y}{2X(z)} \sum_{k=1}^4 D_k [R(z, z_0^k) - R(z, \bar{z}_0^k)], \\
H_2(z) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{N_{0k} + N_{1k}(z - e) - N_{2k}(z - e)^2}{X(z)} \right], \\
H_3(z) &= \pi \sigma_\infty \frac{z - e}{X(z)}, \quad H_4(z) = \sigma \left[iC_\lambda(z) + \pi - \frac{(z - e)B_0 + \hat{X}_\lambda}{X(z)} \right],
\end{aligned} \tag{4.25}$$

де

$$C_\lambda(z) = C(z, \lambda_2) - C(z, \lambda_1),$$

$$\hat{X}(z) = \sqrt{(z - \beta_1)(\beta_2 - z)}, \quad \hat{X}_\lambda = \hat{X}(\lambda_2) - \hat{X}(\lambda_1),$$

пружні сталі D_k для випадку збігу напрямів осей ортотропії з осями координат визначені в (4.7), функція $R(z, \zeta)$ – в (4.15), функції $h_k(z)$ – в (4.18), геометричні параметри N_{sk} – в (4.20) при $\xi = 1$, функція $C(z, \zeta)$ визначена

в (4.16), а деякі властивості цієї функції зазначені в розділі 3.1.

Координати вершин зон зчеплення $\beta_{1,2}$ мають задовольняти умову скінченності напружень, яку отримуємо підстановкою функції H з (4.25) до співвідношення (4.23) і прирівнюванням обчисленого в цих точках виразу при $X^{-1}(z)$ до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{P}{2} \sum_{k=1}^2 D'_k g_{1k} + e_2 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[\frac{2}{n} N_{0k} - \frac{n}{2} N_{2k} \right] - \sigma \hat{X}_\lambda &= 0 \\ \frac{P}{2} \sum_{k=1}^2 D'_k g_{2k} + e_2 \left[- \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k N_{1k} + \sigma B_0 - \pi \sigma_\infty \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

де сталі D'_k визначені в (4.21),

$$\begin{aligned} g_{(1,2)k} &= \operatorname{Re} \{ \check{X}^{-1}(z_0^k) \mp \check{X}(z_0^k) \}, \\ B_0 &= 2 \operatorname{arccctg} \left[\frac{\check{X}(\lambda_2) - \check{X}(\lambda_1)}{1 + \check{X}(\lambda_1) \check{X}(\lambda_2)} \right], \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z - \beta_1}{\beta_2 - z}}. \end{aligned}$$

Отримаємо вираз для вертикальних переміщень берегів тріщини. Для цього проінтегруємо (4.25):

$$\begin{aligned} \int H_1(z) dz &= \frac{iP_y}{2} \sum_{k=1}^4 D_k \left[\ln \frac{z - z_0^k}{z - \bar{z}_0^k} - C(z_0^k, z) + C(\bar{z}_0^k, z) \right], \\ \int H_2(z) dz &= i \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[J_k(z) - \sum_{s=0}^2 F_s(z) N_{sk} \right], \\ \int H_3(z) dz &= \pi \sigma_\infty X(z), \\ \int H_4(z) dz &= iK_\lambda(z) + \pi z - B_0 X(z) + i\hat{X}_\lambda I(z), \end{aligned} \quad (4.27)$$

коефіцієнти N визначаються з (4.20) при $\xi = 1$,

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda_2) - K(z, \lambda_1), \quad K(z, \zeta) = \int C(z, \zeta) dz,$$

а інтеграл визначено в (3.14). Згідно з (2.20),

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\alpha_y}{L}v_1(x) = P_y \sum_{k=1}^2 D'_k C_x(z_0^k, x) - \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[J_k(x) - \sum_{s=0}^2 F_s(x) N_{sk} \right] + \\ + \pi\sigma_\infty \hat{X}(x) + \sigma [K_\lambda(x) - B_0 \hat{X}(x) + \hat{X}_\lambda I(x)]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Розв'язок (4.26) знайдемо за допомогою одного зі стандартних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь. Для першої ітерації $\beta_{1,2}$ обчислюємо КІН у правій та лівій вершинах тріщини $K_I(\beta_{1,2})$ (КІН для даної задачі визначений в (4.14)), застосування концепції тонкої структури дає

$$\begin{cases} \lambda_1 - \beta_1 \\ \beta_2 - \lambda_2 \end{cases} = \frac{\pi K_I^2(\lambda_{1,2})}{8\sigma^2}.$$

На кожній ітерації розв'язання системи (4.26) застосовуємо алгоритм:

1. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь $v_1(b_m) = 0$ з невідомими значеннями контактних напружень у вузлах сітки. Цю систему, використовуючи (4.28), можна подати у вигляді

$$A\sigma = B, \quad (4.29)$$

де елементи матриці A і вектора B приймають наступні значення

$$\begin{aligned} A_{mk} = J_k(b_m) - \sum_{s=0}^2 F_s(b_m) N_{sk}, \\ B_m = P_y \sum_{k=1}^2 D'_k C_x(z_0^k, b_m) + \pi\sigma_\infty \hat{X}(b_m) + \\ + \sigma [K_\lambda(b_m) - B_0 \hat{X}(b_m) + \hat{X}_\lambda I(b_m)], \end{aligned}$$

$$m, k = 1, \dots, n-1.$$

2. Виключаємо із системи (4.29) рівняння і змінні з номерами, що відпо-

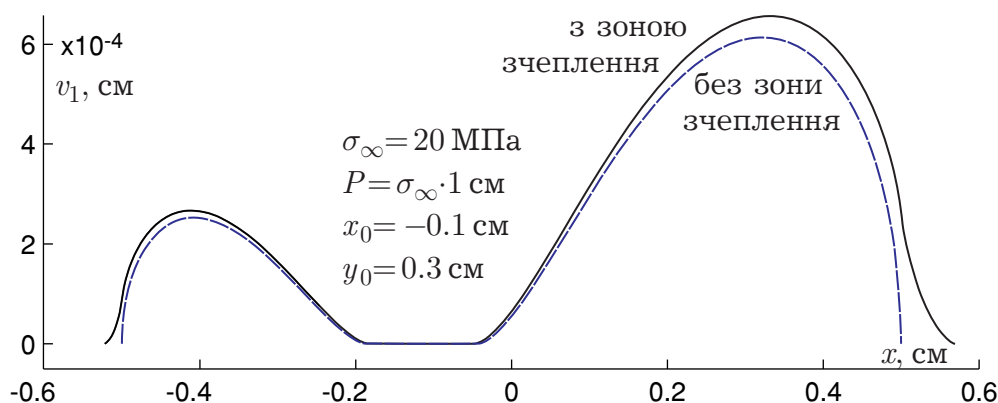


Рис. 4.9 – Вертикальні переміщення верхнього берегу тріщини з ділянкою контакту, отримані з використанням МЗЗ та без її використання

відають від'ємним елементам отриманого розв'язку σ .

Повторюємо процедуру, доки всі елементи σ не стануть невід'ємними.

Отже, алгоритм передбачає застосування ітеративної процедури на кожній ітерації числового методу розв'язання системи двох нелінійних рівнянь (4.26).

Проілюструємо алгоритм числовим прикладом рис. 4.9. Розв'язок побудовано для пружних сталей матеріалу, використаних для отримання аналогічних результатів, представлених на рис. 4.4 (армування композита вздовж лінії тріщини). Для порівняння на цьому ж рисунку штриховою лінією зображено аналогічний розв'язок для тріщини Гріффітса. Концепція тонкої структури дає границі зон зчеплення $\beta_1 = -0.5177$ см і $\beta_2 = 0.5521$ см; розв'язання задачі дає $\beta_1 = -0.5220$ см і $\beta_2 = 0.5693$ см. Похибка концепції тонкої структури при визначенні довжин зчеплення становить для цієї задачі 0.82 % для лівої зони та 3.11 % для правої.

4.3 Алгоритми визначення розкриття тріщини, що враховують особливості моделі зони зчеплення

В [108] вперше було запропоновано метод розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь квадратурно-колокаційним методом. Згідно з цим мето-

дом сингулярний інтеграл замінюється числовою апроксимацією без регуляризації. Після представлення невідомої функції добутком вагової функції $\omega(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}$ і деякої гладкої функції з невідомими параметрами використовуються квадратурні формули Гауса. Якщо $P_n^{(\alpha,\beta)}$ – поліноми Якобі, ортогональні з зазначеною вагою ω , то нулі цих поліномів використовуються як квадратурні вузли в інтегральній формулі Гауса – Якобі, а нулі інших пов'язаних поліномів використовуються як точки колокації ($P_n^{(1/2,1/2)} = T_n(x)$ – поліноми Чебишева I роду, пов'язаними поліномами яких є $U_{n-1}(x)$ – поліноми Чебишева II роду). Як невідому функцію форми ефективно можна використовувати не тільки гладку, а й кусково-лінійну функцію [118, 142]. Застосування квадратурно-колокаційного методу для задач механіки тріщин дало можливість отримати ефективні методики визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень [178]. Застосування зазначених підходів для тріщини зчеплення ускладнюється вимогою плавності змикання берегів. Ця вимога не дозволяє використовувати поліноми Чебишева I роду оскільки похідна їхньої вагової функція має сингулярність на кінцях розрізу. До того ж похідна від переміщень берегів тріщини має бути сингулярною в точках, що належать цьому інтервалу (ці точки відповідають вершинам фізичної тріщини). Через це в роботі представлено два алгоритми, що враховують особливості моделювання при використанні МЗЗ.

В рамках МЗЗ розглянемо класичну задачу про тріщину в нескінченній пластині, що перебуває під дією розтягувальних напружень на нескінченності, які діють вздовж нормалі до лінії розташування тріщини (рис. 4.10 а). Розглянемо рівномірний ЗЗВ: $\sigma(\Delta) = \sigma = \text{const}$.

Контурна умова

$$\sigma_y^\pm = p(x), \quad p(x) = -\sigma_\infty + \begin{cases} \sigma, & x \in (-\beta, -\lambda) \cup (\lambda, \beta) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases}, \quad (4.30)$$

де границі зон зчеплення $\pm\beta$ визначаються умовою скінченності напружень в тілі. Ця умова еквівалентна умові плавності змикання берегів тріщини.

Вертикальне переміщення верхнього берега тріщини можна отримати у вигляді

$$v(x) = \frac{L\sigma}{2\pi} [(x - \lambda)C(x, \lambda) - (x + \lambda)C(x, -\lambda)],$$

$$C(x, \lambda) = \ln \left| \frac{\check{X}(x) - \check{X}(\lambda)}{\check{X}(x) + \check{X}(\lambda)} \right|, \quad \check{X}(x) = \sqrt{\frac{x + \beta}{\beta - x}}, \quad \beta = \lambda \operatorname{csc} \frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma}. \quad (4.31)$$

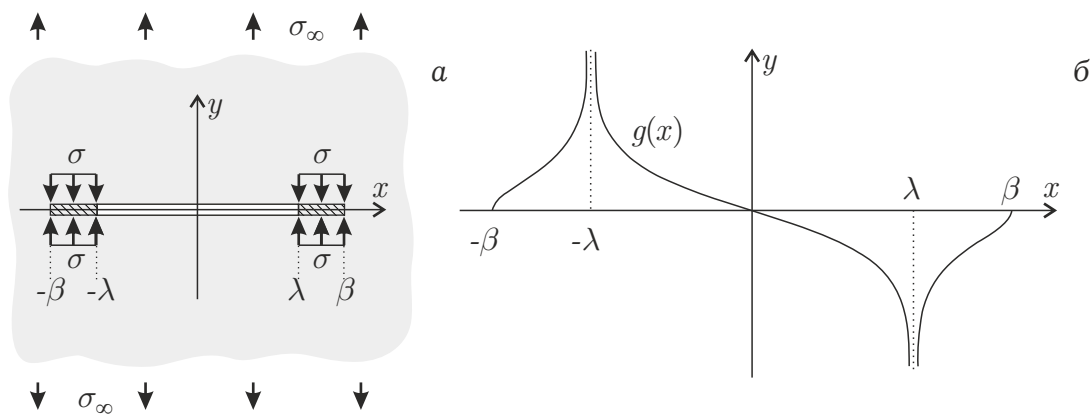


Рис. 4.10 – Схема навантаження та параметри моделі (а), похідна від вертикального переміщення верхнього берега тріщини (б)

Похідна від переміщення за координатою має в точках $x = \pm\lambda$ логарифмічну особливість (рис. 4.10 б).

Знайдемо розв'язок цієї задачі механіки тріщин за допомогою сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{g(t)dt}{t - x} = p(x), \quad |x| < \beta. \quad (4.32)$$

У розв'язувальній системі рівняння (4.32) слід доповнити умовою однозначності переміщень

$$\int_{-\beta}^{\beta} g(t) dt = 0, \quad (4.33)$$

яка у вісесиметричному випадку виконується автоматично.

Алгоритм 1. Щоб врахувати особливість функції g розглянемо три типи елементів функції форми, яка збігається з g у квадратурних точках:

1. сингулярні елементи, розташовані ліворуч від точок $x = \pm\lambda$ (їм відповідають номери $k \in M_1 = \{s, s + r\}$);
2. сингулярні елементи, розташовані праворуч від точок $x = \pm\lambda$ (їх номери $k \in M_2 = \{s + 1, s + r + 1\}$);
3. звичайні лінійні елементи (їх номери $k \in M_3 = \{1, \dots, n\} \setminus M_1 \setminus M_2$).

Загальна кількість елементів становить $n = 2s + r$.

Будемо шукати щільність переміщень на кожному з інтервалів (b_{k-1}, b_k) , які розбивають відрізок $(-\beta, \beta)$, у формі

$$g_k(x) = \begin{cases} g_{k-1} - g_k \ln[1 - A_k(x)], & k \in M_1 \\ -g_{k-1} \ln A_k(x) + g_k, & k \in M_2, \\ g_{k-1}[1 - A_k(x)] + g_k A_k(x), & k \in M_3 \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\Delta b_k \cdot A_k(x) = x - b_{k-1}.$$

Ліву частину (4.32) можна подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^n [g_{k-1} \xi_k(x) + g_k \zeta_k(x)] = \sum_{k=0}^n g_k J_k(x), \quad (4.35)$$

$$J_0(x) = \xi_1(x), \quad J_n(x) = \zeta_n(x),$$

$$J_k(x) = \xi_{k+1}(x) + \zeta_k(x) \quad (k = 1, \dots, n - 1),$$

$$\xi_k = \frac{1}{\pi} \begin{cases} C_k, & k \in M_1 \\ -I_{1k} & k \in M_2, \\ C_k - \zeta_k, & k \in M_3 \end{cases}, \quad \zeta_k = \frac{1}{\pi} \begin{cases} -I_{2k}, & k \in M_1 \\ C_k & k \in M_2 \\ C_k A_k + 1, & k \in M_3 \end{cases}$$

(тут для стислості опущений аргумент x всіх функцій),

$$\begin{aligned} I_{1k}(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{\ln[1 - A_k(t)]}{t - x} dt = \\ &= C_k(t) \ln |1 - A_k(x)| - \frac{\pi^2}{6} + \text{Li}_2 \left[\frac{A_k(x)}{A_k(x) - 1} \right], \\ I_{2k}(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{\ln A_k(t)}{t - x} dt = \\ &= C_k(x) \ln |A_k(x)| + \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2 \left[\frac{A_k(x) - 1}{A_k(x)} \right], \\ C_k(x) &= \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{dt}{t - x} = \ln \left| \frac{1 - A_k(x)}{A_k(x)} \right|, \end{aligned}$$

$\text{Li}_2(x)$ – ділогарифмічна функція:

$$\text{Li}_2(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1 - t)}{t} dt. \quad (4.36)$$

Ліва частина (4.33) після інтегрування:

$$\sum_{k=1}^n \Delta b_k (g_{k-1} + g_k) \cdot \begin{cases} 1, & k \in M_1 \cup M_2 \\ 1/2, & k \in M_3 \end{cases},$$

і (4.33) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=0}^n N_k g_k = 0.$$

Отже, розв'язання задачі зводиться до знаходження кореня рівняння

$$g(\pm\beta) = 0, \quad (4.37)$$

яке впливає з умови плавності змикання берегів тріщини. Для кожної ітерації змінної β , що визначає положення вершини зони зчеплення, треба розв'язувати систему лінійних рівнянь відносно g_k , $k = 0, \dots, n$:

$$\sum_{k=0}^n J_{mk} g_k = p(\eta_m), \quad \sum_{k=0}^n N_k g_k = 0, \quad (4.38)$$

де $\eta_m = \frac{1}{2}(b_{m-1} + b_m)$ ($m = 1, \dots, n$) є точками колокації, $J_{mk} = J_k(\eta_m)$. Для задачі з контурними умовами (4.30) останнє рівняння в (4.38) виконується автоматично, а

$$p(\eta_m) = -\sigma_\infty + \begin{cases} \sigma, & |\eta_m| > \lambda \\ 0, & |\eta_m| < \lambda \end{cases}.$$

На рис. 4.11 а зображено вертикальне переміщення верхнього берега тріщини v_a , що відповідає аналітичному розв'язку (4.31), отриманому при $\sigma = 35$ МПа, $\sigma_\infty = 20$ МПа. На рис. 4.11 б наведено похибку для вертикального переміщення з щільністю (4.34), що містить сингулярні елементи. Для порівняння на рис. 4.11 в наведено похибку при використанні щільності виключно з лінійними елементами. Для представлених числових результатів $r = 60$, $s = 20$, тобто загальна кількість інтервалів сітки $n = 100$.

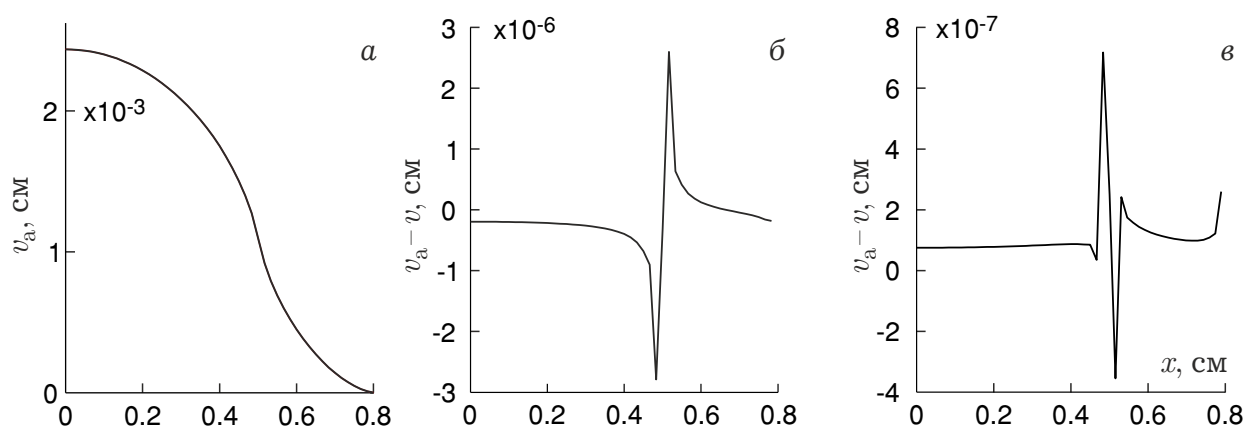


Рис. 4.11 – Аналітичний розв'язок (а), похибка розв'язків, отриманих за допомогою першого алгоритму, з лінійними (б) та сингулярними (в) елементами

Алгоритм 2. Методику першого алгоритму можна вдосконалити, виправивши основні незручності, що виникають при його застосуванні. До цих незручностей віднесемо, по-перше, необхідність знаходження величини β з нелінійного рівняння (4.37), а по-друге – необхідність обчислення коефіцієнтів системи (4.38) на кожній ітерації для β .

Виберемо інтервал пошуку функції щільності переміщень $(-\delta, \delta)$ таким чином, щоб він напевне містив інтервал $(-\beta, \beta)$ і будемо розв'язувати задачу з контурним напруженням

$$p(x) = -\sigma_\infty + \hat{T}(x) - \hat{\sigma}(x), \quad \hat{T}(x) = \begin{cases} \sigma, & |x| > \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}.$$

Напруження $\hat{\sigma}$ унеможливилює перекриття берегів тріщини й разом із вертикальним переміщенням берегів може бути знайденим за допомоги наступної ітеративної процедури.

Позначимо $M = \{m : 0 \leq m \leq n\}$, $P = \emptyset$. Далі покроково:

1. Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} v(\eta_m) = 0, & m \in M \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(t)dt}{t - \eta_m} = -\sigma_\infty + \hat{T}(\eta_m), & m \in P \end{cases}.$$

2. Обчислюємо допоміжне напруження

$$\hat{\sigma}(\eta_m) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(t)dt}{t - \eta_m} - \sigma_\infty + \hat{T}(\eta_m).$$

3. Перепозначуємо $M = \{m : \hat{\sigma}(\eta_m) \geq 0\}$, $P = \{m : \hat{\sigma}(\eta_m) < 0\}$.

Повторюємо 1-3 доки всі $\hat{\sigma}(\eta_m)$ не стануть невід'ємними.

Реалізація ітеративної процедури не дає точного значення для β , але цей параметр часто не є характеристикою тріщиностійкості й може бути віднесеним до внутрішніх параметрів задачі.

Шукатимемо функцію щільності переміщень у формі кусково-лінійної функції з вагою

$$\omega(x) = -\ln|x^2 - \lambda^2|. \quad (4.39)$$

Система для визначення значень щільності переміщень g_k у квадратурних точках матиме вигляд (4.38), де

$$\begin{aligned} J_{m0} &= -T'_{m1} - K_{m0}, & J_{mk} &= T'_{mk} - T'_{m(k+1)}, & J_{mn} &= T'_{mn} + K_{mn}, \\ N_0 &= -G'_1 - R_0, & N_k &= G'_k - G'_{k+1}, & N_n &= G'_n + R_n, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta b_k \cdot T'_{mk} &= T_{mk} - T_{m(k-1)}, & \Delta b_k \cdot G'_k &= G_k - G_{k-1}, \\ T_{mk} &= R_k + (\eta_m - b_k)K_{mk}, & R_k &= R(b_k), & K_{mk} &= K(b_k, \eta_m), \\ G_k &= S_k - b_k R_k, & S_k &= S(b_k), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= \int \omega(t)dt = 2t - (t - \lambda) \ln|t - \lambda| - (t + \lambda) \ln|t + \lambda|, \\ R(\lambda) &= -R(\lambda) = 2\lambda(1 - \ln 2\lambda), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} K(t, x) &= \int \frac{\omega(t)}{t - x} dt = \operatorname{Li}_2\left(\frac{x - t}{x - \lambda}\right) - \ln|x - \lambda| \ln\left|\frac{x - t}{x - \lambda}\right| + \\ &\quad + \operatorname{Li}_2\left(\frac{x - t}{x + \lambda}\right) - \ln|x + \lambda| \ln\left|\frac{x - t}{x + \lambda}\right|, \end{aligned} \quad (4.43)$$

де $\operatorname{Li}_2(x)$ – ділогарифм, визначений у (4.36),

$$S(t) = \int t\omega(t)dt = \frac{1}{2}(t^2 - \lambda^2)[1 + \omega(t)], \quad S(\lambda) = S(-\lambda) = 0. \quad (4.44)$$

Для реалізації наведеної вище ітеративної процедури запишемо переміщення берегів у точках колокації:

$$v(\eta_m) = \frac{L}{2} \sum_{k=0}^n W_{mk} g_k, \quad m = 1, \dots, n,$$

$$W_{11} = \frac{1}{\Delta b}(G_{1/2} - G_0) + \frac{1}{2}R_{1/2}, \quad W_{10} = R_{1/2} - R_0 - W_{11},$$

$$W_{mk} = \begin{cases} N_k, & k \leq m-2 \\ -\frac{1}{\Delta b}(G_{m-1/2} - 2G_{m-1} + G_{m-2}) + \frac{1}{2}R_{m-1/2}, & k = m-1, \\ \frac{1}{\Delta b}(G_{m-1/2} - G_{m-1}) + \frac{1}{2}R_{m-1/2}, & k = m \end{cases} \quad (4.45)$$

$m > 1$; $W_{mk} = 0$ при $k > m$; $G_{k-1/2} = G(\eta_k)$, $R_{k-1/2} = R(\eta_k)$.

Тепер основні геометричні параметри задачі – коефіцієнти J , N , W – можна визначити один раз для заданого n .

На рис. 4.12 а зображено вертикальне переміщення берегів тріщини v_a , що відповідає аналітичному розв'язку (4.31), отриманому при $\sigma = 35$ МПа, $\sigma_\infty = 20$ МПа, $L = 4.116$ ГПа⁻¹. На рис. 4.12 в наведено похибку у визначенні вертикального переміщення при використанні функції щільності з ваговою функцією (4.39). Для порівняння на рис. 4.12 б наведено похибку для випадку $\omega(t) = 1$. Вирази (4.42), (4.43) та (4.44) за одиничної вагової функції набувають вигляду:

$$R(t) = t, \quad K(t, x) = \ln |t - x|, \quad S(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Для представлених числових результатів $\Delta b = 2\lambda/r$, $\delta = \lambda + s \cdot \Delta b$,

$r = 60$, $s = 20$, загальна кількість інтервалів сітки $n = 100$.

Порівняння результатів рис. 4.11 і рис. 4.12 дозволяє відзначити, що у випадку кусково-лінійних апроксимацій (блоки б) результати практично не відрізняються. Тут очевидну перевагу має другий алгоритм через простішу числову реалізацію. Порівняння блоків в рисунків віддає перевагу підходу, що використовує вагову функцію, перед введенням сингулярності лише на інтервалах із границями в $x = \pm\lambda$; з введенням вагової функції спостерігається суттєве підвищення точності отриманого розв'язку.

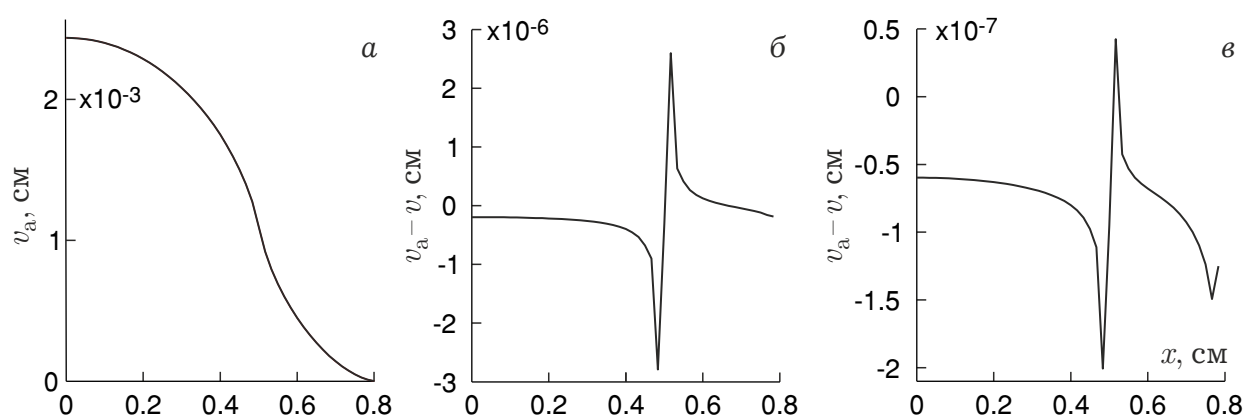


Рис. 4.12 – Аналітичний розв'язок (а), похибка розв'язків, отриманих за допомогою другого алгоритму, з лінійними (б) та сингулярними (в) елементами

Система колінеарних тріщин. Розглянемо систему m колінеарних тріщин, розташованих вздовж осі x на інтервалах $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$, $k = 1, \dots, m$. В нескінченно віддалених точках до тіла прикладені нормальні та зсувні напруження σ_∞ і τ_∞ відповідно.

Лінія розташування тріщин збігається з віссю ортотропії матеріалу пластини. Виберемо інтервал пошуку функції щільності переміщень (b_0, b_n) таким чином, щоб він напевне містив всі тріщини разом із зонами зчеплення та будемо розв'язувати задачу з контурними умовами

$$\sigma_y^\pm(x) - i\alpha_y \tau_{xy}^\pm(x) = -(\sigma_\infty - i\alpha_y \tau_\infty) +$$

$$+ \begin{cases} 0, & x \in L' \\ \sigma - \hat{\sigma}(x) - i\alpha_y [\tau - \hat{\tau}(x)], & x \in L'' \end{cases},$$

де σ і τ – міцності нормального і зсувного зчеплень відповідно, $\hat{\sigma}(x)$ і $\hat{\tau}(x)$ – напруження, що забезпечують умови $v^+(x) - v^-(x) \geq 0$ і $u^+(x) - u^-(x) \geq 0$ відповідно,

$$L' = \bigcup_{k=1}^m (\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}), \quad L'' = (b_0, b_n) \setminus L'.$$

Будемо шукати функцію щільності переміщення в кусково-лінійній формі (2.35) з вагою

$$\omega(x) = - \sum_{k=1}^{2m} \ln |x - \lambda_k|.$$

Системи для визначення значень дійсної й уявної частин функції щільності у вузлах сітки $g_k = g_{xk} + i g_{yk}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n J_{mk} g_{xk} = -\pi \sigma_y^\pm(\eta_m) \\ \sum_{k=0}^n N_k g_{xk} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sum_{k=0}^n J_{mk} g_{yk} = \pi \alpha_y \tau_{xy}^\pm(\eta_m) \\ \sum_{k=0}^n N_k g_{yk} = 0 \end{cases}, \quad (4.46)$$

$m = 1, \dots, n$. Геометричні параметри задачі – коефіцієнти J і N – визначені в (4.40), (4.41), причому функції, присутні у цих виразах, мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}
R(t) &= 2n(t - e) - \sum_{k=1}^{2m} (t - \lambda_k) \ln |t - \lambda_k|, \\
K(t, x) &= \sum_{k=1}^{2m} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{x - t}{x - \lambda_k} \right) - \ln |x - \lambda_k| \ln \left| \frac{x - t}{x - \lambda_k} \right| \right], \\
S(t) &= \frac{nt}{2}(t + 2e) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (t^2 - \lambda_k^2) \ln |t^2 - \lambda_k^2|, \\
e &= \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{2m} \lambda_k.
\end{aligned}$$

Розв'язок систем (4.46) можна знайти за допомогою ітеративної процедури, описаною в розділі 4.3.

Вертикальні та горизонтальні переміщення в точках сітки запишемо у векторній формі

$$\mathbf{v} = \frac{L}{2\alpha_y} W \mathbf{g}_x, \quad \mathbf{u} = \frac{L}{2} W \mathbf{g}_y,$$

де компоненти векторів \mathbf{v} і \mathbf{u} , $v_m = v(\eta_m)$ і $u_m = u(\eta_m)$ відповідно, матриця W визначена в (4.45).

На рис. 4.13 представлено розв'язок задачі для трьох колінеарних тріщин; розв'язок отриманий при $\sigma_\infty = \tau_\infty = 20$ МПа, $\sigma = 35$ МПа, $\tau = 40$ МПа, $L = 3.377$ МПа⁻¹, $\alpha_y = 0.8104$; параметри сітки $-b_0 = b_n = 1.5$ см, $n = 300$.

Рис. 4.14 і 4.15 ілюструють як змінюється тип граничних умов залежно від положення вершин тріщин системи. Тип граничних умов для заданої конфігурації до розв'язання невідомий. При використанні запропонованого підходу не треба обирати один із типів для побудови розв'язку – коректний тип отримується автоматично. На рис. 4.14 в штрихові криві відповідають переміщенням берегів одиначної тріщини. На рис. 4.15, шляхом зміни положення внутрішньої вершини більшої тріщини в напрямку двох менших,

отримано розв'язки для трьох типів граничних умов: без об'єднаних зон (а), з однією (б) та двома (в) об'єднаними зонами зчеплення.

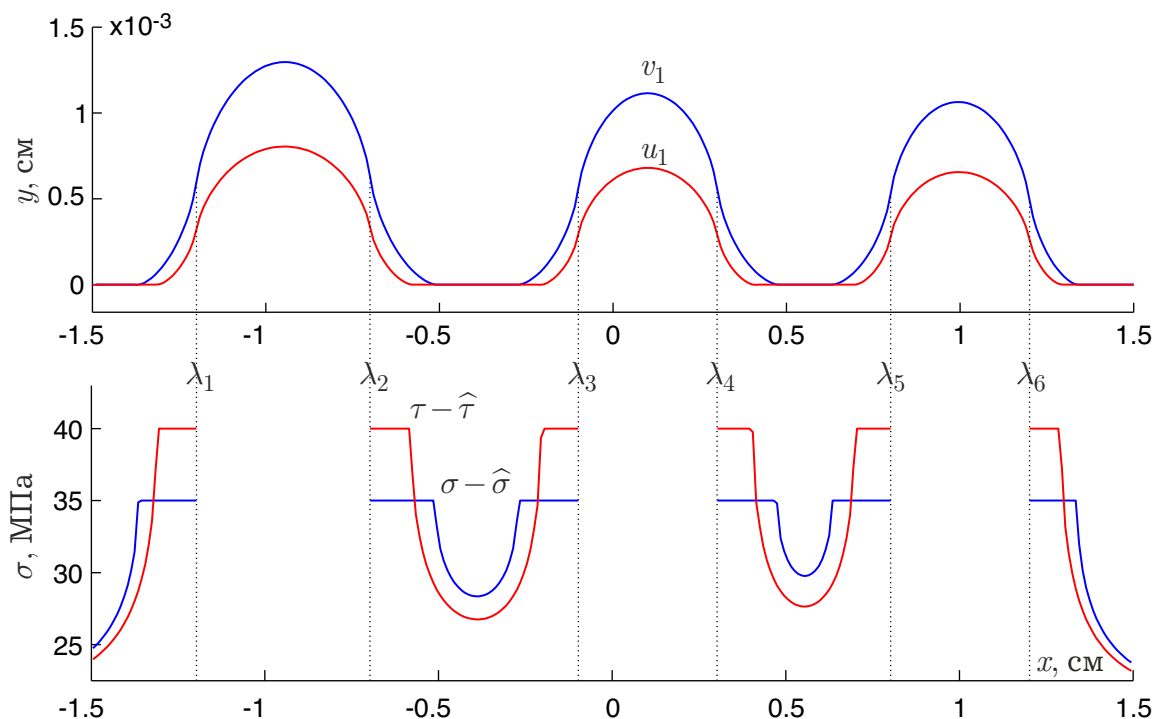


Рис. 4.13 – Вертикальні й горизонтальні переміщення берегів колінеарних тріщин та напруження поза розрізів, що відповідають фізичним тріщинам

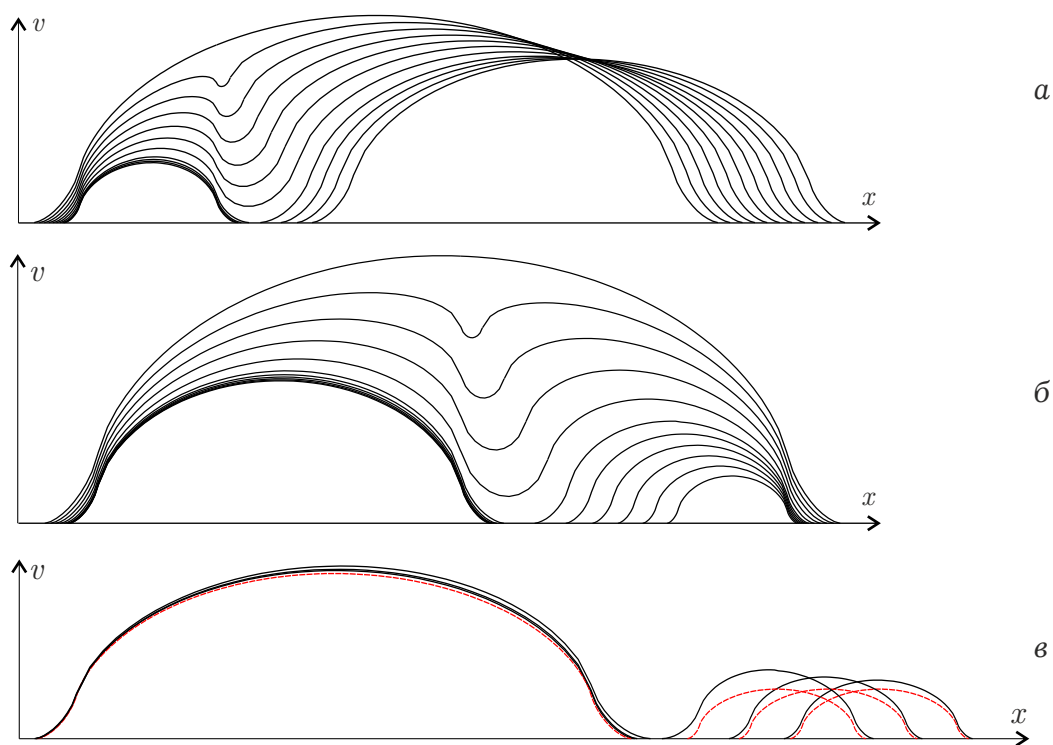


Рис. 4.14 – Вертикальні переміщення берегів двох колінеарних тріщин

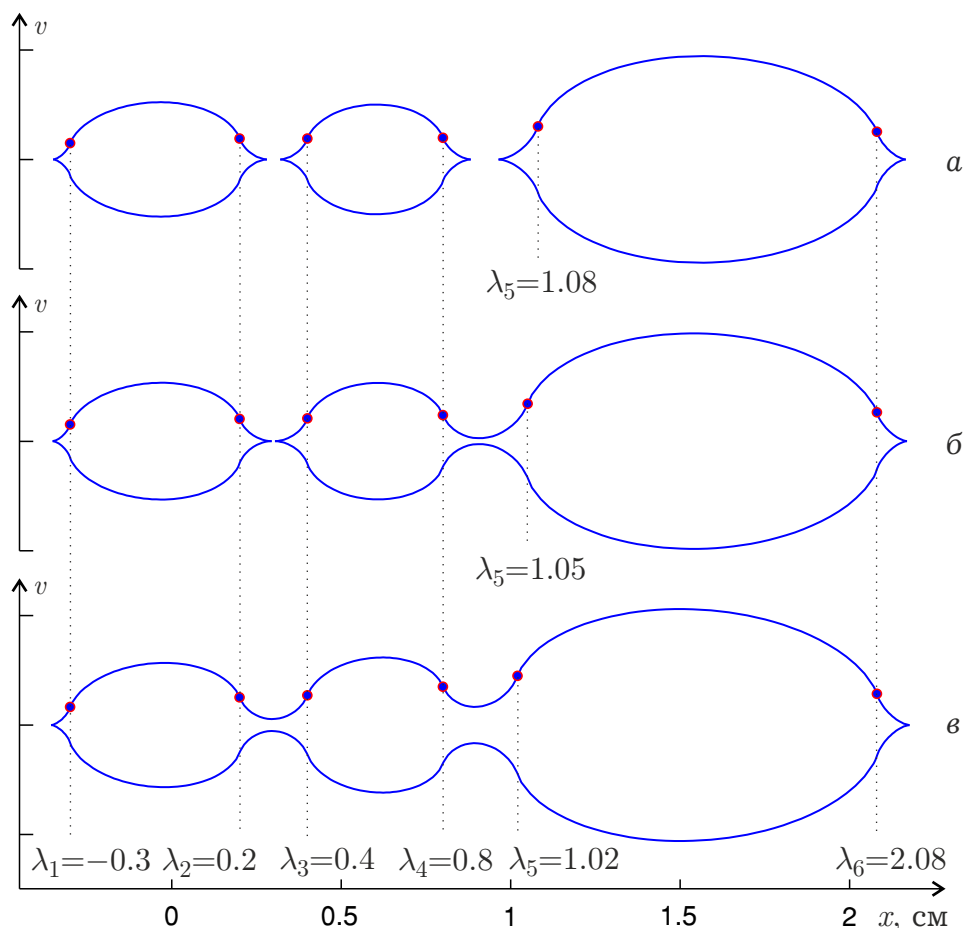


Рис. 4.15 – Вертикальні переміщення берегів трьох колінеарних тріщин

4.4 Повільне зростання системи двох колінеарних тріщин

Нехай у пластині вздовж прямої, що збігається з однією з осей ортотропії, розташована система двох тріщин різної довжини (рис. 4.16). На нескінченності до тіла прикладене рівномірно розподілене розтягувальне навантаження інтенсивності σ_∞ , напрям якого збігається з напрямом нормалі до лінії розташування тріщин.

Області нелінійної поведінки матеріалу в околі вершин тріщин будемо моделювати додатковими розрізами, береги яких стягують напруження (сили зчеплення) інтенсивності σ . Отже, приходимо до задачі теорії пружності про розтяг пружної пластини з розрізами вздовж осі Ox за наступних контурних умов:

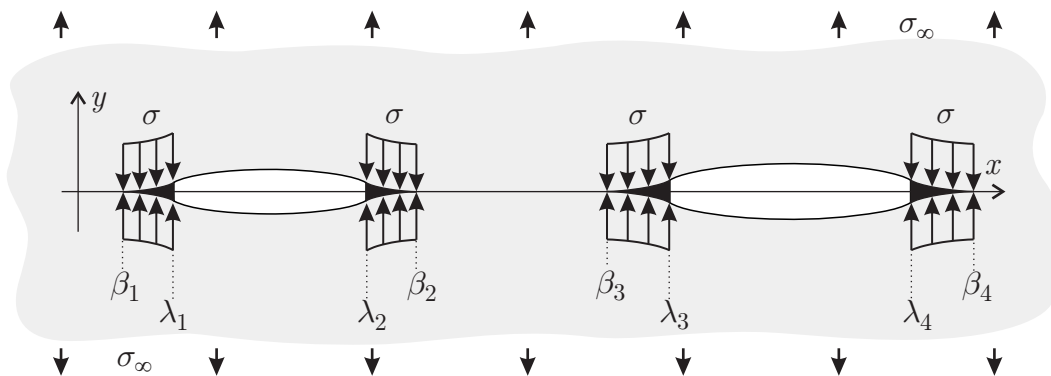


Рис. 4.16 – Схема навантаження та параметри моделі

$$\tau_{xy}^{\pm}(x) = 0, \quad x \in L, \quad \sigma_y^{\pm}(x) = -\sigma_{\infty} + \begin{cases} \sigma, & x \in L'' \\ 0, & x \in L' \end{cases},$$

$$L = L' \cup L'', \quad L' = \bigcup_{n=1}^2 (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), \quad L'' = \bigcup_{k=1}^4 L''_k,$$

$$L''_k = \begin{cases} (\beta_k, \lambda_k), & k = 2n - 1, \\ (\lambda_k, \beta_k), & k = 2n \end{cases}, \quad n = 1, 2.$$

Положення кінців розрізів β_k треба визначати так, щоб у відповідних точках виконувалася умова скінченності напружень. Вираз для нормального розкриття берегів розрізу в зоні зчеплення отримуємо в межах концепції тонкої структури:

$$\Delta(x) = \frac{LK_I^2}{4\sigma} F\left[\frac{|x - \lambda_k|}{\ell}\right], \quad x \in L''_k, \quad (4.47)$$

коефіцієнти інтенсивності напружень для чотирьох вершин тріщини:

$$K_I(\lambda_k) = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{\infty}\tilde{P}(\lambda_k)}{\sqrt{R(\lambda_k)}},$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= x^2 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, \quad R(\lambda_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^4 |\lambda_k - \lambda_i|, \\ \tilde{C}_1 &= -\alpha_{-3}, \quad \tilde{C}_2 = \int_0^\infty \frac{t(\tau)[\alpha_{-3} - t(\tau)]d\tau}{X_2(\tau)} \left[\int_0^\infty \frac{d\tau}{X_2(\tau)} \right]^{-1}, \\ \alpha_{-3} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i, \quad t(\tau) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \tau^2}{1 + \tau^2}, \\ X_2(\tau) &= \sqrt{(\tau^2 + \xi_3)(\tau^2 + \xi_4)}, \quad \xi_k = \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_k - \lambda_2}, \quad k = 3, 4. \end{aligned}$$

В'язкопружне переміщення берегів розрізу вздовж зон зчеплення визначимо на основі відповідного розв'язку пружної задачі за допомогою принципу пружно-в'язкопружної аналогії. Згідно цього принципу, у виразі для розкриття змінимо пружні модулі відповідними перетвореними величинами і скористаємося оберненим перетворенням.

Якщо релаксаційні властивості матеріалів компонент композита можна описати за допомогою лінійної теорії в'язкопружності, ефективні модулі подамо рядом функцій Міттаг-Леффлера (2.39):

$$e_{n,ij}(t) = e_{n,ij}^\infty + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n,ij,k} E_{\alpha_{n,ij};1}(-\beta_{n,ij,k} t^{\alpha_{n,ij}}), \quad (4.48)$$

($n = 1$ – відповідає матеріалу армування, $n = 2$ – наповнювача, e^∞ – довготривале значення модуля). При проведенні обчислень ми залишимо лише один доданок суми в (4.48) і будемо використовувати один параметр α функції Міттаг-Леффлера для описання довготривалих властивостей матеріалів компонент композита з метою якісного дослідження. Вважатимемо також, що матеріали компонент композита є ізотропними (механічні властивості описуємо модулем Юнга E і коефіцієнтом Пуассона ν , який не залежить від часу). Відзначимо, що жодне з цих спрощень не обумовлене використанням методом розв'язання поставленої задачі.

За вказаних спрощень (4.48) в області перетворення набуде вигляду

$$\tilde{e}_{n,ij}(s) = e_{n,ij}^{\infty} + (e_{n,ij}^0 - e_{n,ij}^{\infty}) \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta_{n,ij}},$$

де $\tilde{e}(s) = s\bar{e}(s)$, $\bar{e}(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$ – перетворення Лапласа функції $e(t)$; e^0 – миттєве значення модуля.

Зважаючи на вирази для перетворень в'язкопружних модулів Юнга матеріалів компонент композита та використовуючи результати механіки композитних матеріалів [3], знайдемо модулі податливості пластини в області перетворення \tilde{a}_{ij} та їх функцію $\tilde{L} = 2\sqrt{\tilde{a}_{22}(2(\tilde{a}_{12} + \sqrt{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}}) + \tilde{a}_{66})}$. Відповідну величину як функцію часу знайдемо оберненим перетворенням Лапласа:

$$l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{l}/s\}, \quad \dot{l}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{l} - \tilde{l}_{\infty}\}, \quad l(t) = L(t)/L_0.$$

Покладаючи, що $\sigma_{\infty}(t) = \sigma_{\infty} \cdot H(t)$ ($H(t)$ – функція Гевісайда), запишемо в'язкопружний аналог виразу (4.47):

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}[x, \boldsymbol{\lambda}(t)] + \int_0^t \dot{l}(t - \tau)\tilde{\Delta}[x, \boldsymbol{\lambda}(\tau)]d\tau,$$

$$\tilde{\Delta}(x, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\pi L_0 \sigma_{\infty}^2 \tilde{P}^2(\lambda_k)}{2\sigma R(\lambda_k)} F\left[\frac{|x - \lambda_k|}{\ell_k}\right], \quad x \in L_k'',$$

$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ – координати кінців тріщини.

Тривалість інкубаційного періоду розвитку колінеарних тріщин t_0 визначимо з рівняння

$$\max_{k=1, \dots, 4} \{\Delta[t_0, \lambda_k(0)]\} = \Delta_{\max}.$$

Визначальне співвідношення для положень кінців тріщин при зростанні на основі критерію критичного розкриття тріщини можна записати у вигляді системи інтегральних рівнянь та нерівностей

$$\Delta[t, \lambda_i(t)] = \Delta_{\max} \quad (4.49)$$

$$\Delta[t, \lambda_j(t)] < \Delta_{\max},$$

індекси i відповідають вершинам, де нормальним відривом досягнуто критичне значення Δ_{\max} , а індекси j – вершинам, де воно не досягнуто.

Будемо шукати розв'язок системи (4.49) $\boldsymbol{\lambda}(t)$ у моменти часу $t_0 + k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, \dots$. Рівняння в системі (4.49), що відповідає i_1 -й вершині в момент часу $t = t_1$, набуде вигляду

$$\Delta[\lambda_{i_1}(t_1), \boldsymbol{\lambda}(t_1)] + \int_0^{t_1} i(t_1 - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_{i_1}(t_1), \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau = \Delta_{\max}.$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння $\lambda_{i_1}(t_1)$ за умови, що $\lambda_{i_1}(t)$ змінюється лінійно на (t_0, t_1) , а всі інші вершини знаходяться в початковому положенні. Продовжимо знаходити $\lambda_{i_1}(t_k)$, доки критичного переміщення не буде досягнуто в іншій вершині, порядковий номер якої $i_2 \neq i_1$: для $k = k_1$ отримаємо $\Delta(\lambda_{i_2}(t_{k_1}), t_{k_1}) > \Delta_{\max}$. Рівняння в системі (4.49), що відповідає i_1 -й і i_2 -й вершинам у момент часу t_{k_1} :

$$\begin{aligned} \Delta[\lambda_{i_1}(t_{k_1}), \boldsymbol{\lambda}(t_{k_1})] + \int_0^{t_{k_1}} i(t_{k_1} - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_{i_1}(t_{k_1}), \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau &= \Delta_{\max} \\ \Delta[\lambda_{i_2}(t_{k_1}), \boldsymbol{\lambda}(t_{k_1})] + \int_0^{t_{k_1}} i(t_{k_1} - \tau) \tilde{\Delta}[\lambda_{i_2}(t_{k_1}), \boldsymbol{\lambda}(\tau)] d\tau &= \Delta_{\max} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Знайдемо розв'язок цієї системи $\{\lambda_{i_1}(t_{k_1}), \lambda_{i_2}(t_{k_1})\}$ за умови, що $\lambda_{i_1}(t)$ і $\lambda_{i_2}(t)$ змінюються лінійно на (t_{k_1-1}, t_{k_1}) , а всі інші вершини знаходяться в початковому положенні. Продовжимо знаходити $\{\lambda_{i_1}(t_k), \lambda_{i_2}(t_k)\}$ з (4.50) поки критичного переміщення не буде досягнуто в іншій вершині, порядковий номер якої i_3 ($i_3 \neq i_1, i_3 \neq i_2$): для $k = k_2$ отримаємо $\Delta(\lambda_{i_3}(t_k), t_k) > \Delta_{\max}$. Так само продовжимо визначати $\boldsymbol{\lambda}(t)$. При значному

початковому віддаленні тріщин рухатись почнуть всі їх кінці. У випадку, коли на якомусь кроці система (4.49) не має розв'язку, покладаємо, що відповідний момент часу є початком етапу динамічного розповсюдження тріщин. Внеском цього етапу в загальну довговічність тіла с тріщинами будемо нехтувати.

Числові приклади. Розв'язки системи (4.49) отримаємо за наступних параметрів задачі. Реологічні параметри композита: 1) наповнювача – $E_2^0 = 4000$ МПа, $E_2^\infty = 400$ МПа, $\alpha = 0.5$, $\beta_2 = 0.1$ сек $^{-\alpha}$; 2) волокон – $E_1^0 = 79810$ МПа, $E_1^\infty = 7981$ МПа, $\beta_1 = 0.01$ сек $^{-\alpha}$; об'ємна концентрація волокон $c_1 = 0.2$. Параметри тріщиностійкості та зовнішнього навантаження: $\sigma = 35$ МПа, $\Delta_{\max} = 3 \cdot 10^{-5}$ м, $\sigma/\sigma_\infty = 4$.

На рис. 4.17 зображені кінетичні криві зростання двох колінеарних тріщин довжини 2 і 2.5 см. Рис. 4.17 а відповідає випадку, коли початкова відстань між тріщинами $\lambda_3(0) - \lambda_2(0) = 1$ см, рис. 4.17 б – випадку, коли $\lambda_3(0) - \lambda_2(0) = 0.7$ см. Очевидно, що в обох випадках першим починає рухатись кінець більшої тріщини, який є ближчим до меншої тріщини ($i_1 = 3$). В прикладі а другим починає рухатись зовнішній кінець більшої тріщини ($i_2 = 4$), у прикладі б – внутрішній кінець меншої тріщини ($i_2 = 2$).

Блок а: тривалість інкубаційного періоду визначається досягненням розкриттям граничного значення у внутрішній вершині більшої тріщини. Дослідження зростання починається розв'язанням одного інтегрального рівняння, що описує рух третьої вершини, у кожному вузлі часової дискретизації перевіряється умова досягнення граничного стану в інших вершинах. Критичний стан далі буде досягнуто в зовнішній вершині більшої тріщини. Дослідження зростання продовжується розв'язанням системи двох інтегральних рівняння, що описують рух третьої та четвертої вершин тощо, до завершення повільного поширення. Можна записати номери вершин у послідовності досягнення в них критичного стану: 3, 4, 2, 1. Блок б:

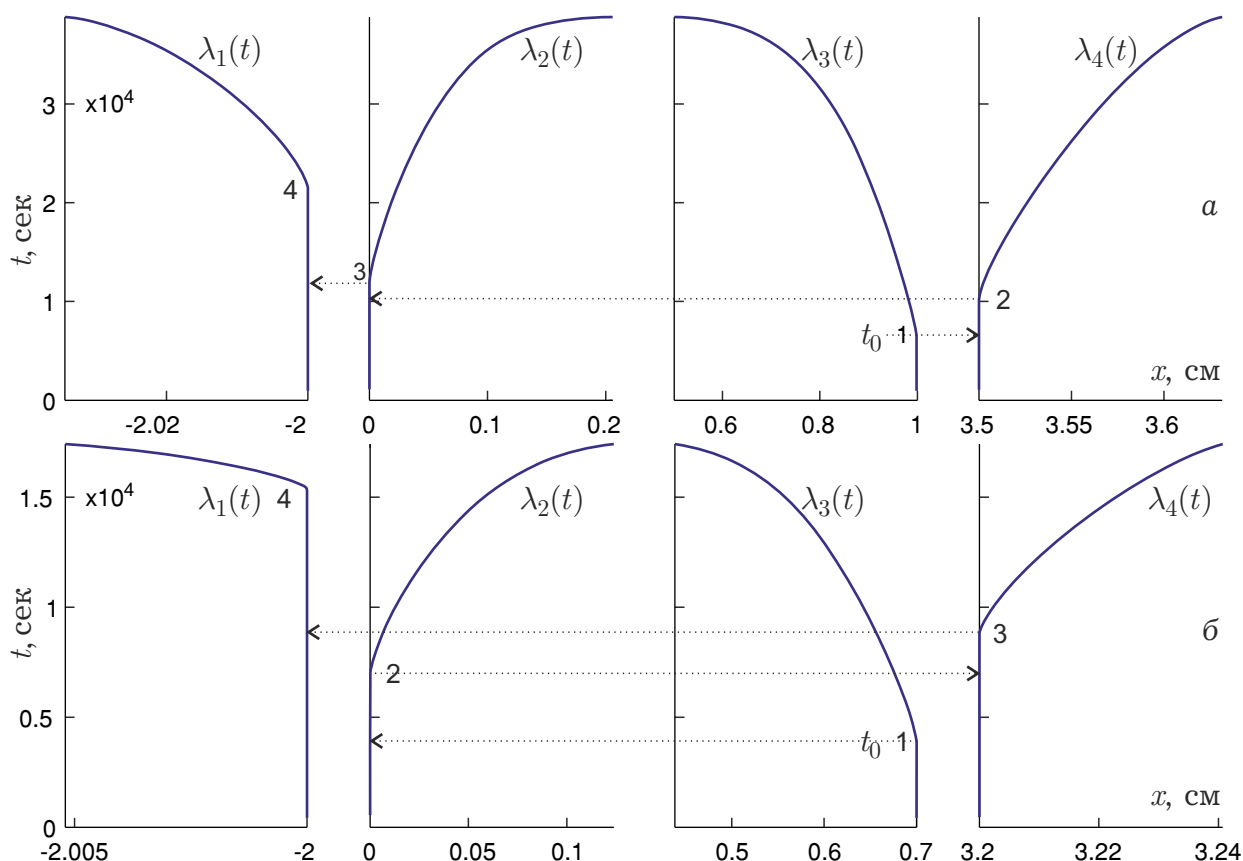


Рис. 4.17 – Зростання колінеарних тріщин для двох початкових відстаней між ними ($a = 1$ см і $b = 0.7$ см)

отримано іншу послідовність номерів вершин, у порядку досягнення в них граничного стану: 3, 2, 4, 1.

4.5 Результати та висновки

1. Запропоновано методики розв'язання граничних задач теорії пружності для тріщин в ортотропному тілі за умови наявності контакту берегів тріщини. Використано два відомих методи розв'язання, які зводяться до задачі Гільберта – Прівалова, де фігурує невідомий розподіл контактних напружень у першому випадку й щільність розкриття – у другому. Невідомі розподіли знаходяться з умови відсутності перекриття берегів. Для випадку, коли при деформуванні середня лінія тріщини не залишається на прямій її початкового розташування, застосовано умову перекриття берегів, що враховує малі викривлення або повороти

середньої лінії. Проілюстровано вплив напрямку армування композита (вздовж тріщини або по нормалі до неї) та коефіцієнта тертя між берегами тріщини на розподіл контактних напружень. Вказано, як неврахування контактного напруження може вплинути на величину КІН. У числових розв'язках розглянуто композит, механічні властивості якого моделюються за допомогою результатів механіки композитних матеріалів на основі механічних характеристик матеріалів компонент.

2. Ітеративна процедура пошуку розв'язку для досліджень контакту берегів тріщини застосована при знаходженні переміщень берегів тріщини в рамках МЗЗ. Використання такого підходу усунуло необхідність розв'язування нелінійних рівнянь для знаходження границь зон зчеплення. Порівняння числових розв'язків задачі з відомим аналітичним розв'язком показали, що точність визначення розкриття запропонованим методом не відрізняється від точності класичного підходу. Методику проілюстровано знаходженням нормальних і зсувних відривів системи колінеарних тріщин.
3. Запропонована методика дослідження поширення двох колінеарних тріщин. Методика проілюстрована числовими прикладами, які ілюструють підвищення швидкості поширення внутрішніх вершин системи тріщин при їх зближенні. Спостерігається незначна швидкість поширення тріщини системи в зовнішню сторону, яка збігається зі швидкістю внутрішньої вершини при значному віддаленні тріщин. Початок зростання в зовнішні сторони після об'єднання тріщин можливий тільки у випадку достатньо близького їхнього початкового розташування за умови того, що пружне розкриття у вершині об'єднаної тріщини менше за своє граничне значення. У наведених числових прикладах остання умова не виконується. Для таких задач момент граничного зближення внутрішніх вершин можна вважати початком динамічного розповсю-

дження тріщин. В отриманих числових розв'язках етап динамічного зростання починається до об'єднання внутрішніх зон зчеплення; отже, не виникає необхідності в розв'язанні задачі для тріщин з об'єднаними зонами.

Розділ 5

АНАЛІЗ ЗАКОНІВ ЗЧЕПЛЕННЯ-ВІДРИВУ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДОКРИТИЧНОГО І КРИТИЧНОГО СТАНІВ ТІЛА З ТРІЩИНОЮ

Метою розділу є визначення параметрів докритичного і граничного станів тіла з тріщиною, в околі вершини якої формується зона передруйнування. Дослідження проводяться за допомогою МЗЗ. Слід:

1. за заданих докритичної довжини тріщини й розміру зовнішнього навантаження встановити розподіл зчеплення та довжину зчеплення;
2. за заданою інтенсивності зовнішнього навантаження встановити граничне значення довжини тріщини й відповідну довжину зчеплення;
3. за заданою довжини тріщини встановити граничне значення зовнішнього навантаження й відповідну довжину зчеплення.

Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ. В [26, 69–71] побудовано визначальну систему для розподілу нормального і зсувного зчеплень тріщини змішаного режиму руйнування, наведено приклади визначення параметрів граничної рівноваги тріщини в рамках МЗЗ. Асимптотичний розв'язок задачі знайдено в [65]. В [31, 168] побудовано числово-аналітичний алгоритм дослідження повільного поширення тріщини у в'язкопружному середовищі з використанням концепції незмінності ЗЗВ з часом. Метод визначення розкриття тріщини, запропонований у [74] для рівномірного ЗЗВ, застосовано для побудови розв'язку у випадку нерівномір-

ного закону.

Для визначення напружено-деформованого стану нескінченної пластики з прямолінійною тріщиною в розділі 5.1 використано метод Мусхелішвілі. У рамках моделі складної зони зчеплення, з урахуванням умови скінченності напружень отримано горизонтальні й вертикальні переміщення берегів тріщини за заданого кусково-лінійного розподілу зчеплення, наведено приклад визначення переміщень та параметрів граничного стану для степеневого закону розподілу координата-зчеплення, побудовано вираз для роботи зчеплення. Проаналізовано деякі найпростіші частинні випадки (для лінійного й білінійного законів розподілу зчеплення) виразів для розкриття тріщини й роботи зчеплення. Отримані асимптотичні вирази для умови скінченності напружень, роботи зчеплення та розкриття. Ці результати використано в дослідженні докритичного й граничного станів як початкове наближення.

Підстановкою аналітичних виразів для розкриття у вузлах кусково-лінійного розподілу зчеплення у вираз для ЗЗВ й доповненням отриманих рівнянь умовою скінченності напружень, у розділі 5.2 отримано систему рівнянь відносно параметрів докритичного та граничного станів для точних і асимптотичних розв'язків. Для числових прикладів використано степеневий ЗЗВ у формі розміщення, проаналізовано вплив параметра форми на параметри граничного стану та збіжність досліджуваних величин при збільшенні кількості вузлів кусково-лінійного розподілу зчеплення. Досліджено вплив ділянки зміцнення для двох поліноміальних ЗЗВ на параметри докритичного і граничного станів, а також границі можливості використання асимптотичних розв'язків.

У розділі 5.3 проілюстровано використання концепції тонкої структури при дослідженнях у рамках МЗЗ. Проаналізовано вплив параметрів форми степеневого, двох поліноміальних і експоненційного ЗЗВ на параметри

граничного стану.

У розділі 5.4 досліджено повільне зростання тріщини. В основу дослідження покладено концепції тонкої структури та незалежності ЗЗВ від швидкості повільного поширення тріщини. Числовий алгоритм полягає в послідовному знаходженні точок кінетичної кривої, у кожний дискретний момент часу задовольняється заданий зв'язок між в'язкопружним зчепленням і відповідним відривом.

Для дослідження докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною в рамках МЗЗ у розділі 5.5 використовується апарат сингулярних інтегральних рівнянь. Щільність розкриття шукається у вигляді кусково-лінійної функції, значення якої у вузлах сітки знаходиться шляхом задоволення граничних умов, що містять заданий зв'язок між зчепленням і відривом. У постановку задачі включено умову плавності змикання берегів, яка задовольняється наближено шляхом формулювання модифікованої постановки. Дослідження проведено для тріщини як нормального відриву, так і змішаного режиму руйнування. В останньому випадку використана модель складної зони зчеплення із суміщеними хвостами.

5.1 Переміщень берегів тріщини та робота зчеплення за кусково-лінійного розподілу зчеплення

Будемо вважати, що задані параметри задачі співвідносяться таким чином, що довжина нормального зчеплення більша за довжину зсувного зчеплення. В іншому випадку задачу можна легко переформулювати.

Будемо моделювати тріщину розрізом довжиною 2λ вздовж осі Ox . На продовженнях цього розрізу вводимо додаткові розрізи з прикладеними до берегів самоврівноваженими нормальними силами зчеплення $\sigma(x)$. Аналогічно на відрізках $(-\beta, -\gamma)$ і (γ, β) прикладемо самоврівноважені зсувні сили зчеплення $\tau(x)$. Закони розподілу $\sigma(x)$ і $\tau(x)$ задаємо в кусково-лінійній

формі із суміщеними вузлами спільної ділянки прикладання (рис. 5.1 б). Вимагатимемо плавного змикання берегів тріщини, що еквівалентно умові скінченності напружень σ_y і τ_{xy} у вершині зони зчеплення ($x = \pm\beta$).

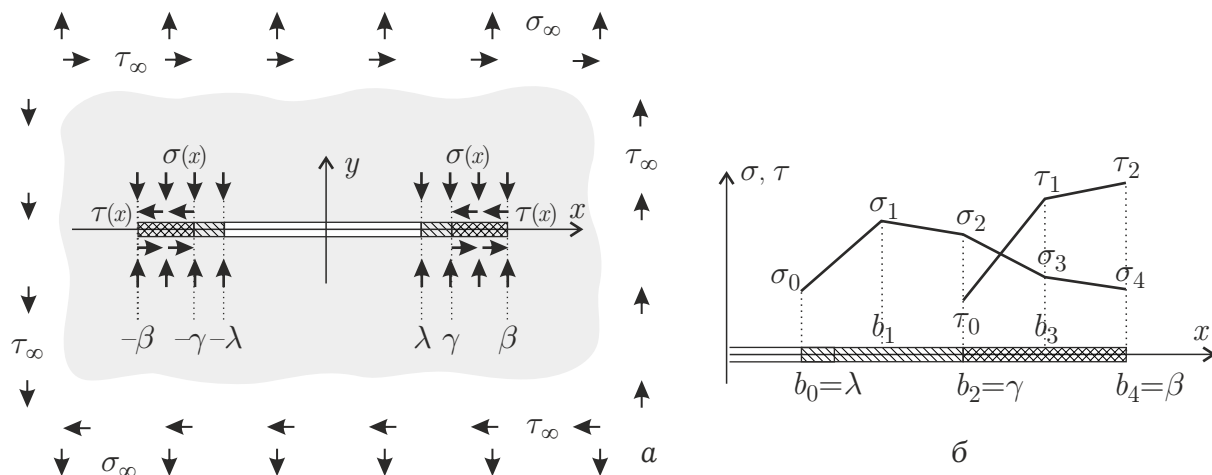


Рис. 5.1 – Схема навантаження та параметри моделі

Розподіл зчеплення (на рис. 5.1 б взято $n = 4$, $r = 2$, $m = n - r$):

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, & b_{k-1} \leq x \leq b_k \\ 0, & 0 \leq x < b_0 \end{cases},$$

$$\Delta b_k = b_k - b_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{(b_{k+m} - x)\tau_{k-1} + (x - b_{k+m-1})\tau_k}{\Delta b_{k+m}}, & b_{k+m-1} \leq x \leq b_{k+m} \\ 0, & 0 \leq x < b_m \end{cases},$$

$$k = 1, \dots, r,$$

$$\sigma(-x) = \sigma(x), \quad \tau(-x) = \tau(x).$$

Напруження та переміщення для плоскої задачі лінійної теорії пружності визначаються комплексними потенціалами $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$,

$$\Phi(z) \pm \Omega(z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi i X(z)} \left[\int_{L_\sigma} \frac{\sigma(x)X(x)}{x-z} dx - \right. \\ \left. - i \int_{L_\tau} \frac{\tau(x)X(x)}{x-z} dx \right] + 2 \frac{C_0 + C_1 z}{X(z)} \\ -\Gamma_2 \end{array} \right\}, \quad (5.1)$$

де $L_\sigma = (-\beta, -\lambda) \cup (\lambda, \beta)$, $L_\tau = (-\beta, -\gamma) \cup (\gamma, \beta)$, $\Gamma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_\infty - \sigma_x^\infty) - i\tau_\infty$, $X(x)$ – значення на верхньому березі розрізу функції $X(z) = \sqrt{z^2 - \beta^2}$, стала C_0 визначається умовами на нескінченності, а стала C_1 – умовою однозначності переміщень:

$$C_0 = \frac{\sigma_\infty - i\tau_\infty}{2}, \quad C_1 = 0. \quad (5.2)$$

З урахуванням (5.2) система (5.1) за відсутності навантаження вздовж тріщини ($\sigma_x^\infty = 0$) дасть комплексні потенціали задачі

$$2\pi \left\{ \begin{array}{l} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{array} \right\} = H_\sigma(z) - iH_\tau(z) + \frac{\pi(\sigma_\infty - i\tau_\infty)z}{X(z)} \mp \pi\Gamma_2, \quad (5.3)$$

де $\Gamma_2 = \frac{1}{2}\sigma_\infty - i\tau_\infty$. Введені функції $H_\sigma(z)$ і $H_\tau(z)$ після обчислення інтеграла можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} H_\sigma(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{L_\sigma} \frac{\sigma(x)X(x)}{x-z} dx = \sum_{k=0}^n \sigma_k \left[ih_k(z) - \frac{2N_k z}{X(z)} \right], \\ H_\tau(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_{L_\tau} \frac{\tau(x)X(x)}{x-z} dx = \sum_{k=0}^r \tau_k \left[ig_k(z) - \frac{2M_k z}{X(z)} \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$h_0(z) = Q'_1(z) + G_0(z), \quad h_k(z) = Q'_{k+1}(z) - Q'_k(z) \quad (0 < k < n),$$

$$h_n(z) = -Q'_n(z),$$

$$g_0(z) = Q'_{m+1}(z) + G_m(z), \quad g_k(z) = h_{m+k}(z), \quad (0 < k \leq r),$$

$$\Delta b_k \cdot Q'_k(z) = Q_k(z) - Q_{k-1}(z),$$

$$G_k(z) = C(z, b_k) - C(z, -b_k),$$

$$Q_k(z) = (z + b_k)C(z, -b_k) + (z - b_k)C(z, b_k),$$

$$C(z, \xi) = \ln \frac{\check{X}(z) - \check{X}(\xi)}{\check{X}(z) + \check{X}(\xi)}, \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z + \beta}{\beta - z}},$$

$$N_0 = R'_1, \quad N_k = R'_{k+1} - R'_k \quad (0 < k < n), \quad N_n = -R'_n + I_n - I_{n-1}, \quad (5.5)$$

$$M_0 = R'_{m+1}, \quad M_k = N_{m+k}, \quad (0 < k \leq r), \quad (5.6)$$

$$I'_k = \frac{I_k - I_{k-1}}{\Delta b_k}, \quad \hat{X}'_k = \frac{\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1}}{\Delta b_k}, \quad R'_k = b_k I'_k + \hat{X}'_k,$$

$$I_k = I(b_k), \quad \hat{X}_k = \hat{X}(b_k),$$

$$I(z) = 2 \operatorname{arctg} \check{X}(z), \quad \hat{X}(z) = \sqrt{\beta^2 - z^2}.$$

Підставимо (5.4) в (5.3) і порівняємо вираз при $z/X(z)$ у точках $z = \pm\beta$ до нуля. Отримаємо комплексні потенціали задачі

$$2\pi \begin{Bmatrix} \Phi(z) \\ \Omega(z) \end{Bmatrix} = i \sum_{k=0}^n \sigma_k h_k(z) + \sum_{k=0}^r \tau_k g_k(z) \mp \pi \Gamma_2 \quad (5.7)$$

та умови скінченності напружень

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k N_k = \frac{\pi \sigma_\infty}{2}, \quad \sum_{k=0}^r \tau_k M_k = \frac{\pi \tau_\infty}{2}. \quad (5.8)$$

Проінтегруємо в (5.7). Отримаємо

$$2\pi \begin{Bmatrix} \varphi(z) \\ \omega(z) \end{Bmatrix} = i \sum_{k=0}^n \sigma_k J_k(z) + \sum_{k=0}^r \tau_k V_k(z) \mp \pi \Gamma_2 z, \quad (5.9)$$

$$J_k(z) = \tilde{J}_k(z) - i \operatorname{Im} \tilde{J}_k(0), \quad \tilde{J}_k(z) = \int h_k(z) dz,$$

$$V_k(z) = \tilde{V}_k(z) - i \operatorname{Im} \tilde{V}_k(0), \quad \tilde{V}_k(z) = \int g_k(z) dz,$$

$$\tilde{J}_0(z) = T'_1(z) + K_0(z), \quad \tilde{J}_k(z) = T'_{k+1}(z) - T'_k(z) \quad (0 < k < n),$$

$$\tilde{J}_n(z) = -T'_n(z), \quad \tilde{V}_0(z) = T'_{m+1}(z) + K_0(z),$$

$$\tilde{V}_k(z) = \tilde{J}_{m+k}(z), \quad (0 < k \leq r, \quad m = n - r),$$

$$\Delta b_k \cdot T'_k(z) = T_k(z) - T_{k-1}(z),$$

$$K_k(z) = (z - b_k)C(z, b_k) - (z + b_k)C(z, -b_k),$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2}[(z - b_k)^2 C(z, b_k) + (z + b_k)^2 C(z, -b_k)] + \hat{X}_k \hat{X}(z).$$

За допомогою (3.13) знайдемо

$$J_k^\pm(x) = \pm J_{kx}(x) + iJ_{ky}(x), \quad V_k^\pm(x) = \pm V_{kx}(x) + iV_{ky}(x),$$

$$\begin{aligned} J_{0x}(x) &= T'_{1x}(x) + K_{0x}(x), & J_{0y}(x) &= T'_{1y}(x) + K_{0y}(x), \\ J_{kx}(x) &= T'_{(k+1)x} - T'_{kx}(x), & J_{ky}(x) &= T'_{(k+1)y}(x) - T'_{ky}(x), \\ J_{nx}(x) &= -T'_{nx}(x), & J_{ny}(x) &= -T'_{ny}(x) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$(0 < k < n),$$

$$\begin{aligned} V_{0x}(x) &= T'_{(m+1)x}(x) + K_{mx}(x), & V_{kx}(x) &= J_{(m+k)x}(x), \\ V_{0y}(x) &= T'_{(m+1)y}(x) + K_{my}(x), & V_{ky}(x) &= J_{(m+k)y}(x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$(0 < k \leq r, m = n - r),$$

$$\Delta b_k \cdot T'_{kx}(x) = T_{kx}(x) - T_{(k-1)x}(x),$$

$$\Delta b_k \cdot T'_{yk}(x) = T_{ky}(x) - T_{(k-1)y}(x),$$

$$K_{kx}(x) = (x - b_k)C_x(x, b_k) - (x + b_k)C_x(x, -b_k), \quad (5.12)$$

$$T_{kx}(x) = \frac{1}{2}[(x + b_k)^2 C_x(x, -b_k) + (x - b_k)^2 C_x(x, b_k)] + \hat{X}_k \hat{X}(x),$$

$$K_{ky}(x) = -\pi[(x - b_k)H(x - b_k) - (x + b_k)H(x + b_k)],$$

$$T_{ky}(x) = -\frac{\pi}{2}[(x - b_k)^2 H(x + b_k) + (x + b_k)^2 H(x - b_k)].$$

Переміщення берегів

$$\begin{aligned}
2\pi [u(x) + iv(x)]^\pm &= i \sum_{k=0}^n \sigma_k [\pm L_1 J_{kx}(x) + iL_2 J_{ky}(x)] + \\
&+ \sum_{k=0}^r \tau_k [\pm L_1 V_{kx}(x) + iL_2 V_{ky}(x)] - \pi L_1 \Gamma_2 x,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

параметри механічних властивостей матеріалу

$$L = \frac{\varkappa + 1}{2\mu}, \quad L_2 = \frac{\varkappa - 1}{2\mu}.$$

Перепишемо (5.13) у формі

$$u^\pm(x) = u_0(x) \pm u_1(x),$$

$$v^\pm(x) = v_0(x) \pm v_1(x),$$

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{L}{2\pi} \sum_{k=0}^r \tau_k V_{kx}(x), \quad u_0(x) = -\frac{L_2}{2\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{ky}(x) - L \frac{\sigma_\infty}{4} x, \\
v_1(x) &= \frac{L}{2\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{kx}(x), \quad v_0(x) = \frac{L_2}{2\pi} \sum_{k=0}^r \tau_k V_{ky}(x) + L \frac{\tau_\infty}{2} x.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Функції J і V залежать від геометричних параметрів складних зон зчеплення λ , β і γ .

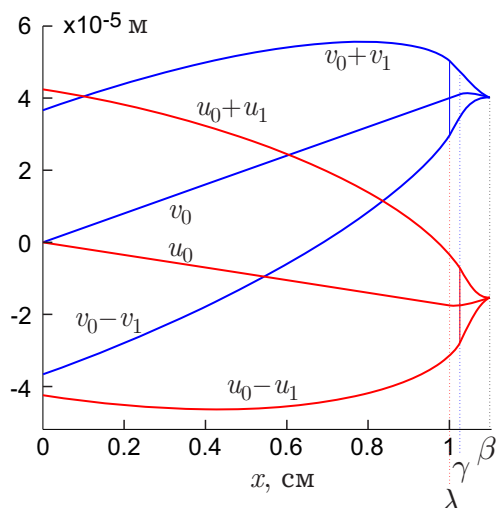
Розкриття тріщини для двох режимів руйнування, згідно з (5.14), набуває вигляду

$$\Delta_I(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{kx}(x), \quad \Delta_{II}(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=0}^r \tau_k V_{kx}(x). \tag{5.15}$$

Отриманий результат дає змогу легко знайти переміщення берегів тріщини за заданих законів розподілу зчеплень. Співвідношення (5.14) є зручними, коли задані закони $\sigma(x)$ і $\tau(x)$ ускладнюють аналітичне інтегрува-

ння в (5.1).

Числовий приклад 1. Проілюструємо розв'язок задачі (5.14) для показникових законів координата-зчеплення



$$\sigma(x) = \sigma_{\max} \left(1 - \left[\frac{\beta - x}{\beta - \lambda} \right]^\alpha \right),$$

$$x \in (\lambda, \beta)$$

$$\tau(x) = \tau_{\max} \left(1 - \left[\frac{\beta - x}{\beta - \gamma} \right]^\delta \right),$$

$$x \in (\gamma, \beta)$$

за наступних значень параметрів задачі: $L = 4$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\sigma_\infty = 7$ МПа, $\tau_\infty = 8$ МПа, $\sigma_{\max} = 30$ МПа, $\tau_{\max} = 40$ МПа та $\alpha = \delta = 3$ (рис. 5.2).

Рис. 5.2 – Вертикальні та горизонтальні переміщення берегів

Числовий приклад 2. На рис. 5.3 а проілюстровано горизонтальні й вертикальні переміщення берегів тріщини нормального відриву, побудовані на основі (5.14) для степеневого закону розподілу координата-зчеплення

$$\sigma(x) = \sigma_{\max} \left[\frac{x - \lambda}{\beta - \lambda} \right]^\alpha \quad (5.16)$$

за наступних значень параметрів задачі: $L = 4$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\sigma_\infty = 7$ МПа, $\sigma_{\max} = 30$ МПа та $\alpha = 0.5$.

На рис. 5.3 б наведені горизонтальні й вертикальні переміщення вздовж зони зчеплення для вказаних значень параметра форми α закону (5.16). При $\alpha = 0$ отримуємо рівномірний закон розподілу. Спостерігаємо суттєве зменшення довжини зчеплення зі зменшенням α .

Найпростіші моделі складної зони зчеплення. В [91] отримано розв'язки для найпростішої моделі складної зони зчеплення за суміщених границь нормальних і зсувних зон ($\gamma = \beta$, рис. 5.4 а).

Для цього випадку, введені в роботі параметри мають наступні значен-

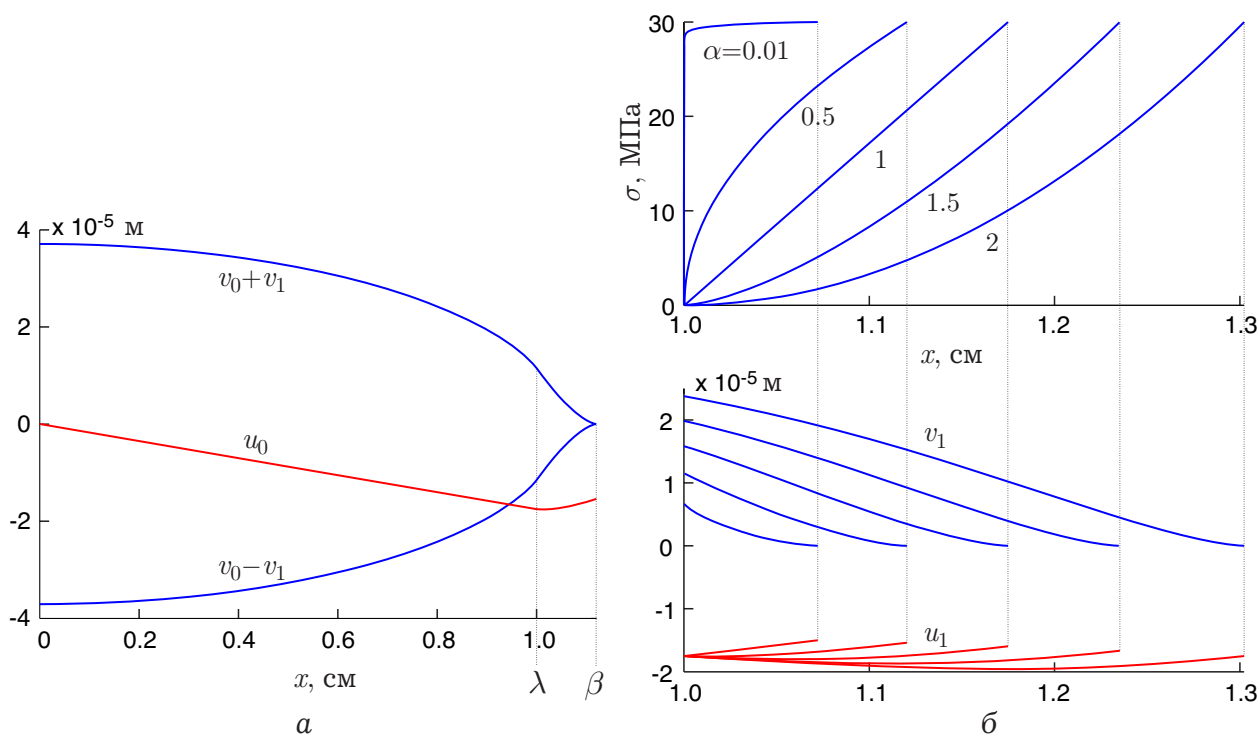


Рис. 5.3 – Переміщення берегів тріщини нормального відриву (а), зчеплення та відповідні переміщення для декількох параметрів форми закону координата-зчеплення (б)

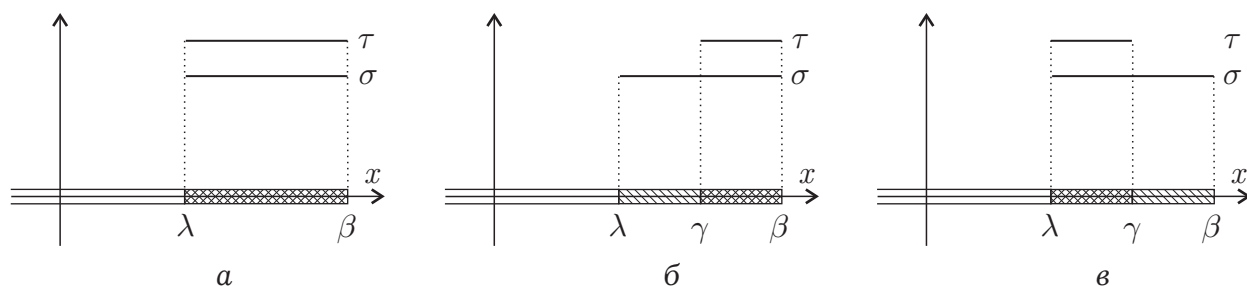


Рис. 5.4 – Найпростіші моделі складної зони зчеплення: б – модель 1 (β – спільна вершина), в – модель 2 (λ – спільний хвіст)

ня: $n = r = 1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, $\tau_0 = \tau_1 = \sigma_0 \cdot \tau_\infty / \sigma_\infty$. Геометричні параметри (5.5), (5.6), (5.10) і (5.11):

$$N_0 + N_1 = M_0 + M_1 = \arccos(\lambda/\beta),$$

$$J_{0x}(x) + J_{1x}(x) = V_{0x}(x) + V_{1x}(x) = K_{0x}(x),$$

$$J_{0y}(x) + J_{1y}(x) = V_{0y}(x) + V_{1y}(x) = K_{0y}(x, \lambda) - \pi(x + \lambda).$$

Використовуючи (5.14), запишемо переміщення берегів тріщини в ма-

тричній формі

$$\begin{pmatrix} u^\pm \\ v^\pm \end{pmatrix} = \frac{\Lambda^T \cdot F^\pm(x)}{2\pi} + \frac{L}{4} \begin{pmatrix} -\sigma_\infty \\ 2\tau_\infty \end{pmatrix} x,$$

де Λ – матриця, що містить механічні характеристики матеріалу й інтенсивності зчеплення, T – операція транспонування, F^\pm – вектор функцій геометричних характеристик:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L\tau & L\sigma \\ -L_2\sigma & L_2\tau \end{pmatrix}, \quad F^\pm(x) = \begin{pmatrix} \pm K_x(x, \lambda) \\ K_y(x, \lambda) - \pi(x + \lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Умовою обмеженості напружень у цьому разі є система двох рівнянь

$$\beta = \lambda \sec B_I, \quad \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma_\infty}{\tau_\infty} \quad \left(B_I = \frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma} \right),$$

перше з яких дозволяє визначити координату вершини зони зчеплення, а друге накладає умову на параметр моделі τ .

Введення моделі складних зон зчеплення дає можливість задавати міцність зсувного зчеплення. Згідно з моделлю 1, хвости відрізків прикладання нормальних і зсувних зчеплень не збігаються ($\gamma \neq \lambda$, рис. 5.4 б). Параметри моделі $n = r = 1$, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$, $\tau_0 = \tau_1 = \tau$. Геометричні параметри

$$N_0 + N_1 = \arccos(\lambda/\beta),$$

$$M_0 + M_1 = \arccos(\gamma/\beta),$$

$$J_{0x}(x) + J_{1x}(x) = K_{0x}(x),$$

$$V_{0x}(x) + V_{1x}(x) = K_{1x}(x),$$

$$J_{0y}(x) + J_{1y}(x) = K_{0y}(x) - \pi(x + \lambda), \quad V_{0y}(x) + V_{1y}(x) = K_{1y}(x) - \pi(x + \gamma).$$

Переміщення берегів тріщини, згідно з (5.14), набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} u^\pm \\ v^\pm \end{pmatrix} = \frac{\text{diag} \{ \Lambda^T \cdot G^\pm(x) \}}{2\pi} + \frac{L}{4} \begin{pmatrix} -\sigma_\infty \\ 2\tau_\infty \end{pmatrix} x,$$

де матриця Λ визначена в (5.17), G^\pm – матриця функцій геометричних характеристик:

$$G^\pm(x) = \begin{pmatrix} \pm K_{1x}(x) & \pm K_{0x}(x) \\ K_{0y}(x) - \pi(x + \lambda) & K_{1y}(x) - \pi(x + \gamma) \end{pmatrix},$$

diag – вектор діагональних елементів матриці.

Умова обмеженості напружень дає два рівняння для визначення параметрів складної зони зчеплення за заданої напівдовжини тріщини λ :

$$\arccos \frac{\lambda}{\beta} = B_I, \quad \arccos \frac{\gamma}{\beta} = B_{II} \quad \left(B_{II} = \frac{\pi\tau_\infty}{2\tau} \right).$$

Порівняння двох моделей складної зони зчеплення. Рис. 5.4 в відповідає моделі складної зони зчеплення зі спільними хвостами відрізків прикладання сил (хвіст зони відповідає вершині фізичної тріщини). Контурні умови вісесиметричної задачі мають вигляд

$$\sigma^\pm(x) = -\sigma_\infty + \begin{cases} \sigma, & x \in (-\beta, -\lambda) \cup (\lambda, \beta) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases},$$

$$\tau^\pm(x) = -\tau_\infty + \begin{cases} \tau, & x \in (-\gamma, -\lambda) \cup (\lambda, \gamma) \\ 0, & x \in (-\lambda, \lambda) \end{cases},$$

$$\Delta'_I(\pm\beta) = 0, \quad \Delta'_{II}(\pm\gamma) = 0, \quad \Delta_{II}(x) = 0, \quad x \in (-\beta, -\gamma) \cup (\gamma, \beta).$$

Отримано змішану основну задачу теорії пружності: на ділянці границі $x \in (-\gamma, \gamma)$ маємо першу основну задачу з розривними напруженнями, на ділянці $x \in (-\beta, -\gamma) \cup (\gamma, \beta)$ – третю (тут задано нормальне напруження та зсувний відрив).

Переміщення берегів тріщини, згідно з (5.14) ($r = n$),

$$2\pi u^\pm(x) = L_2\sigma[\pi(x + \lambda) - K_{0y}(x)] + L\left[\pm \sum_{k=0}^n \tau_k J_{kx}(x) - \pi \frac{\sigma_\infty}{2} x\right],$$

$$2\pi v^\pm(x) = L_2 \sum_{k=0}^n \tau_k J_{ky}(x) + L[\pm K_{0x}(x) - \pi\tau_\infty x],$$

геометричні параметри J і K обчислені для $b_0 = \lambda$, $b_1 = \gamma$, $b_n = \beta$, $\tau_0 = \tau_1 = \tau_{\max}$, $\sigma_0 = \dots = \sigma_n = \sigma_{\max}$.

Отже, зсувний відрив

$$\Delta_{\text{II}}(x) = u^+(x) - u^-(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=0}^n \tau_k J_{kx}(x)$$

і система рівнянь для знаходження τ_k , згідно з (5.8), набуде вигляду

$$\sum_{k=2}^n \tau_k J_{mk} = -J_{m0} - J_{m1}, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad (5.18)$$

де введено позначення $J_{mk} = J_{kx}(b_m)$.

У загальному випадку навантаження положення вершин зон зчеплення знаходяться із системи рівнянь, що забезпечують скінченність напружень. Коли навантаження представлене лише розтягувальним і зсувним розподіленими напруженнями на нескінченності, положення вершин зон нормального ($\beta = \lambda \csc B_{\text{I}}$) та зсувного (γ) зчеплень знаходяться з рівняння

$$\sum_{k=0}^n \bar{\tau}_k N_k = B_{\text{II}} \quad (\bar{\tau}_k = \tau_k/\tau), \quad (5.19)$$

яке розв'язується сумісно з (5.18). На кожній ітерації визначення γ числовим методом величини τ_k ($k = 2, \dots, n$) знаходяться із системи (5.18). При збільшенні n корінь рівняння (5.19) для простої схеми навантаження, що розглядається, буде наближатися до $\gamma = \lambda \csc B_{\text{II}}$.

На рис. 5.5 представлені числові розв'язки для моделі 2: блок *a* – половини нормальних і зсувних відривів, *б* – половина зсувного відриву на ділянці, де задовольняється його рівність нулю, *в* – напруження вздовж зони зчеплення, *г* – порівняння з розв'язками для моделі 1 та моделі без зон зчеплення. Останній блок свідчить про асимптотичну збіжність розв'язку для моделі 2 до розв'язку для моделі без зон зчеплення: при зменшенні рівня зсувного навантаження на нескінченності горизонтальні переміщення наближаються до відповідного розв'язку для моделі без зон зчеплення. Також можна зробити висновок про завищене значення зсувного розкриття у вершині тріщини, обчисленого згідно з моделлю 1.

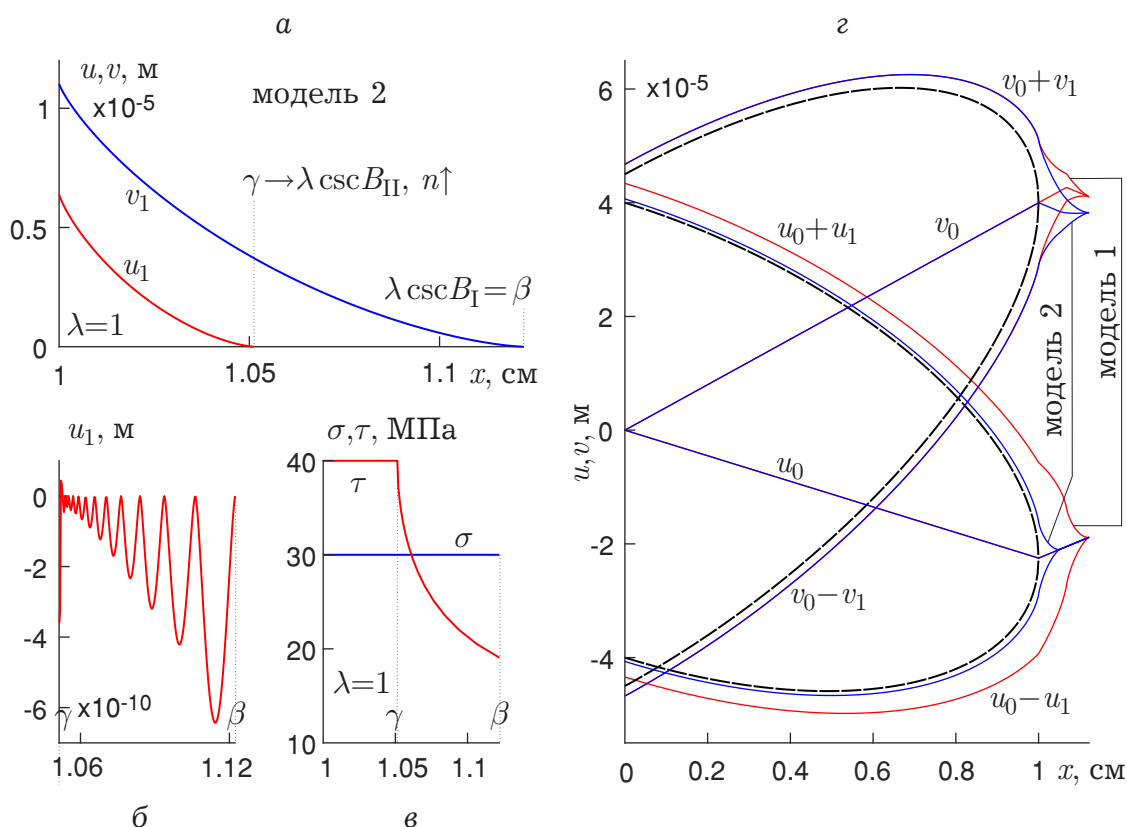


Рис. 5.5 – Порівняння двох моделей складної зони зчеплення: модель 1 – спільні вершини, модель 2 – спільні хвости (штрихові криві відповідають моделі без зон зчеплення)

Робота сил зчеплення. Знайдемо роботу нормального зчеплення, розподіл якого задано кусково-лінійною функцією. За докритичних рівнів зовнішнього навантаження розкриття у вершині тріщини, $\Delta(\lambda)$ є меншим за

максимально можливе значення Δ_{\max} (рис. 5.6 а).

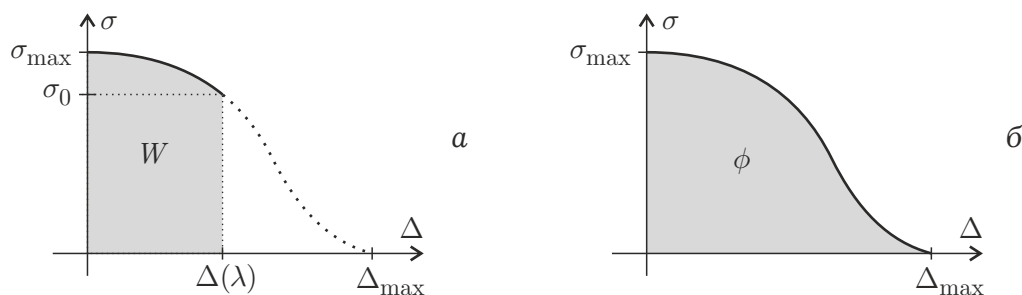


Рис. 5.6 – Робота зчеплення W та енергія руйнування ϕ

Граничний стан за заданої довжині тріщини характеризується таким рівнем інтенсивності зовнішнього навантаження, при якому відрив $\Delta(\lambda)$ і робота W досягають своїх критичних значень Δ_{\max} і ϕ відповідно (рис. 5.6 б). Обчислимо W як площу під графіком залежності $\sigma = T(\Delta)$:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\lambda}^{\beta} \Delta(x) \frac{d}{dx} [H(x - \lambda)\sigma(x)] dx = \\ &= \Delta(\lambda)\sigma_0 + \frac{L}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{\Delta\sigma_m}{\Delta b_m} \sum_{k=0}^n \sigma_k \int_{b_{m-1}}^{b_m} J_k(x) dx. \end{aligned}$$

Оскільки надалі досліджуватимемо лише вертикальне переміщення берегів тріщини, у пов'язаних із ним функціях будемо опускати індекс x (замість J_{kx} пишемо J_k , замість $C_x - C$, замість $K_x - K$).

Визначимо функції $U_k(x) = \int J_k(x) dx$. Обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= S'_1(x) + G(x), & U_k(x) &= S'_{k+1}(x) - S'_k(x) \quad (0 < k < n), \\ U_n(x) &= -S'_n(x), & \Delta b_k \cdot S'_k(x) &= S_k(x) - S_{k-1}(x), \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int K(x)dx = \\
&= \frac{1}{2} [(x - \lambda)^2 C(\lambda, x) - (x + \lambda)^2 C(-\lambda, x)] + \lambda \hat{X}(\lambda) I(x), \quad (5.21)
\end{aligned}$$

$$G(\lambda) = \lambda[K(\lambda) + \hat{X}(\lambda)I(\lambda)], \quad G(\beta) = \pi\lambda\hat{X}(\lambda),$$

$$\begin{aligned}
S_k(x) &= \frac{1}{6} [(x + b_k)^3 C(-b_k, x) + (x - b_k)^3 C(b_k, x)] + \\
&\quad \frac{1}{3} \hat{X}(b_k) [\hat{X}^2(b_k) I(x) + 2x \hat{X}(x)] \quad (0 \leq k < n), \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$S_n(x) = 0, \quad S_k(\beta) = \frac{\pi}{3} \hat{X}^3(b_k),$$

$$S_k(b_k) = \frac{4}{3} b_k^3 \ln \frac{b_k}{\beta} + \frac{1}{3} \hat{X}^2(b_k) [\hat{X}(b_k) I(b_k) + 2b_k].$$

Робота зчеплення

$$W = \frac{L}{\pi} \left\{ \sigma_0 \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{0k} + \sum_{m=1}^n \frac{\Delta \sigma_m}{\Delta b_m} \sum_{k=0}^n \sigma_k \Delta U_{mk} \right\}, \quad (5.23)$$

де введені позначення $J_{mk} = J_k(b_m)$, $\Delta U_{mk} = U_{mk} - U_{(m-1)k}$ та $U_{mk} = U_k(b_m)$.

Для великих значень n можна скористатись наближеною формулою, що не вимагає обчислення величин U_{mk} :

$$W = \frac{L}{\pi} \left\{ \sigma_0 \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{0k} + \sum_{m=1}^n \Delta \sigma_m \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{2} [J_{mk} + J_{(m-1)k}] \right\}. \quad (5.24)$$

Частинні випадки виразів для розкриття та роботи зчеплення.

Розглянемо найпростіші частинні випадки отриманих розв'язків.

При $n = 1$

$$\Delta(x) = \frac{L}{\pi} [\sigma_0 J_0(x) + \sigma_1 J_1(x)].$$

В вершині тріщини

$$J_{00} = J_0(\lambda) = 2\lambda \ln \frac{\beta}{\lambda} - J_{01}, \quad J_{01} = J_1(\lambda) = \beta + \lambda - \frac{2\lambda^2}{\beta - \lambda} \ln \frac{\beta}{\lambda}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \frac{L}{\pi} \left[- \left(\lambda + \beta - \frac{2\lambda\beta}{\beta - \lambda} \ln \frac{\beta}{\lambda} \right) \sigma_0 + \right. \\ \left. + \left(\lambda + \beta - \frac{2\lambda^2}{\beta - \lambda} \ln \frac{\beta}{\lambda} \right) \sigma_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Якщо $\varepsilon = (\beta - \lambda)/\lambda$ – мала величина, з точністю до $O(\varepsilon^3)$

$$\Delta(\lambda) = \frac{L}{\pi} \left[- \frac{\varepsilon}{3} \sigma_0 + 2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \right) \sigma_1 \right] \lambda \varepsilon.$$

Від'ємність множника при σ_0 в (5.26) призводить до некоректності отриманого розв'язку при $\sigma_1 = 0$ через те що вираз $\Delta(\lambda)$ стає від'ємним. Вимога додатності цього виразу дає

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_1} < \frac{\beta^2 - \lambda^2 - 2\lambda^2 \ln(\beta/\lambda)}{\beta^2 - \lambda^2 - 2\lambda\beta \ln(\beta/\lambda)} = \frac{6}{\varepsilon} + O(1).$$

Умова коректності розв'язку при $\sigma_0, \sigma_1 \neq 0$ набуде вигляду

$$\sigma_0 < \frac{6\sigma_1}{\varepsilon}.$$

Далі запишемо умову скінченності напружень. Коефіцієнти (5.5) при $n = 1$ приймають наступні значення

$$N_0 = \frac{\beta}{\beta - \lambda} \arccos \frac{\lambda}{\beta} - \sqrt{\frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}} - \frac{\lambda}{\beta - \lambda} \arccos \frac{\lambda}{\beta},$$

умова (5.8) запишеться наступним чином

$$\frac{\beta\sigma_0 - \lambda\sigma_1}{\beta - \lambda} \arccos \frac{\lambda}{\beta} + (\sigma_1 - \sigma_0) \sqrt{\frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}} = \frac{\pi\sigma_\infty}{2}.$$

Робота зчеплення, згідно з (5.23),

$$W = \frac{L}{\pi} \left[(J_{00}\sigma_0 + J_{01}\sigma_1)\sigma_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\beta - \lambda} (\Delta U_{10}\sigma_0 + \Delta U_{11}\sigma_1) \right], \quad (5.27)$$

де коефіцієнти J_{00} і J_{01} вже визначені в (5.25), а U_{mk} визначаються через $S_{mk} = S_k(b_m)$ і $G_m = G(b_m)$ ($G_0 = G(\lambda)$, $G_1 = G(\beta)$) з виразів (5.20):

$$\Delta U_{11} = \frac{S_{10} - S_{00}}{\beta - \lambda}, \quad \Delta U_{10} = -\Delta U_{11} + G_1 - G_0,$$

$$S_{10} - S_{00} = \frac{2}{3}\lambda [2\lambda^2 \ln(\beta/\lambda) - \hat{X}^2(\lambda)] + \frac{1}{3}\hat{X}^3(\lambda) [\pi - I(\lambda)],$$

$$G_1 - G_0 = \lambda [\hat{X}(\lambda) [\pi - I(\lambda)] + 2\lambda \ln(\beta/\lambda)].$$

Остаточно перепишемо (5.27):

$$W = \frac{L}{\pi} \left\{ J_{00}\sigma_0^2 + J_{01}\sigma_0\sigma_1 + \frac{S_{10} - S_{00}}{(\beta - \lambda)^2} (\sigma_1 - \sigma_0)^2 + \frac{G_1 - G_0}{\beta - \lambda} \sigma_0 (\sigma_1 - \sigma_0) \right\}.$$

Якщо $\varepsilon = (\beta - \lambda)/\lambda$ – мала величина,

$$J_{00} = O(\varepsilon^2), \quad J_{01} = 2\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$N_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad N_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\frac{S_{10} - S_{00}}{(\beta - \lambda)^2} = \frac{8}{9}\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \frac{G_1 - G_0}{\beta - \lambda} = \frac{2}{3}\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Нехтуючи величинами порядку $\varepsilon^{3/2}$, перепишемо вирази для роботи зчеплення та умови скінченності напружень

$$W = \frac{L}{\pi} 2\lambda \varepsilon \left[\frac{\sigma_0 + 2\sigma_1}{3} \right]^2, \quad 2\varepsilon = \left[\frac{3\pi\sigma_\infty}{2(\sigma_0 + 2\sigma_1)} \right]^2.$$

Підставимо другий вираз до першого та врахуємо, що КІН задачі $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi\lambda}$. Отримаємо відоме співвідношення

$$W = \frac{K_I^2}{E}.$$

При $n = 1$, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$ маємо рівномірний розподіл зчеплення (рис. 5.7 а). Розкриття вздовж зони й у вершині тріщини:

$$\Delta(x) = \frac{L}{\pi} \sigma K(x), \quad \Delta(\lambda) = \frac{L}{\pi} \sigma \cdot 2\lambda \ln \frac{\beta}{\lambda}, \quad (5.28)$$

$$K(x) = (x - \lambda)C(x, \lambda) - (x + \lambda)C(x, -\lambda),$$

$$C(\mp\lambda) = \ln \frac{\sqrt{(\beta + x)(\beta \pm \lambda)} - \sqrt{(\beta - x)(\beta \mp \lambda)}}{\sqrt{(\beta + x)(\beta \pm \lambda)} + \sqrt{(\beta - x)(\beta \mp \lambda)}};$$

робота зчеплення

$$W = \frac{L}{\pi} \sigma^2 \cdot 2\lambda \ln \frac{\beta}{\lambda}.$$

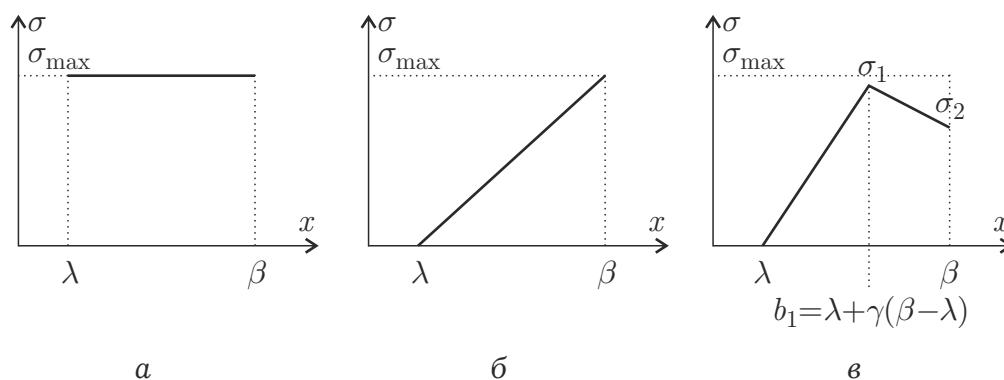


Рис. 5.7 – Лінійні й білінійні розподіли координата-зчеплення

При $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ (рис. 5.7 б)

$$\Delta(x) = \frac{L}{\pi} \sigma \frac{T_0(x)}{\beta - \lambda}, \quad \Delta(\lambda) = \frac{L}{\pi} \sigma \left[\lambda + \beta - \frac{2\lambda^2}{\beta - \lambda} \ln \frac{\beta}{\lambda} \right], \quad (5.29)$$

$$T_0(x) = \frac{1}{2} [(x + \lambda)^2 C(x, -\lambda) + (x - \lambda)^2 C(x, \lambda)] + \sqrt{(\beta^2 - \lambda^2)(\beta^2 - x^2)}.$$

При $n = 2$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$ (рис. 5.7 в)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{L} \Delta(x) &= \sigma_1 J_1(x) + \sigma_2 J_2(x) = \\ &= \left(-\sigma_1 \left[\frac{1}{\Delta b_1} + \frac{1}{\Delta b_2} \right] + \frac{\sigma_2}{\Delta b_2} \right) T_1(x) + \frac{\sigma_1}{\Delta b_1} T_0(x), \end{aligned}$$

розкриття у внутрішньому вузлі визначається виразом

$$\frac{\pi}{L} \Delta(b_1) = \left(-\sigma_1 \left[\frac{1}{\Delta b_1} + \frac{1}{\Delta b_2} \right] + \frac{\sigma_2}{\Delta b_2} \right) T_1(b_1) + \frac{\sigma_1}{\Delta b_1} T_0(b_1),$$

$$T_1(b_1) = 2b_1^2 \ln \frac{b_1}{\beta} + \beta^2 - b_1^2.$$

Введемо параметр γ відповідно до рис. 5.7 в. Якщо $\varepsilon = (\beta - \lambda)/\lambda$ – мала величина

$$T_0(b_1) = f(\gamma) \lambda^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad T_1(b_1) = 2(1 - \gamma)^2 \lambda^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^2}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma}}{1 + \sqrt{1 - \gamma}} + (2 - \gamma) \sqrt{1 - \gamma}.$$

Тоді, з точністю до $O(\varepsilon^2)$

$$\Delta(b_1) = \frac{L}{\pi} \left[-\frac{2(1 - \gamma) - f(\gamma)}{\gamma} \sigma_1 + 2(1 - \gamma) \sigma_2 \right] \lambda \varepsilon.$$

Величина $2(1 - \gamma) - f(\gamma)$ є невід'ємною, тому при $\sigma_2 = 0$ отримаємо $\Delta(b_1) \leq 0$. Отже, розв'язок задачі за білінійного закону розподілу зчеплення з нульовими значеннями напружень на обох границях зони є некоректним. При $\sigma_2 > 0$ розв'язок буде коректним за виконання умови

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < g(\gamma), \quad g(\gamma) = \frac{2\gamma(1 - \gamma)}{2(1 - \gamma) - f(\gamma)}.$$

Функція $g(\gamma)$ наведена на рис. 5.8.

Зазначимо також, що коректність розв'язку не забезпечує лише умова додатності відриву у вузлі сітки. За додатного відриву в усіх вузлах стаття від'ємним може відрив, обчислений між вузлами. Єдиним виходом для уникнення такої ситуації є збільшення кількості вузлів сітки.

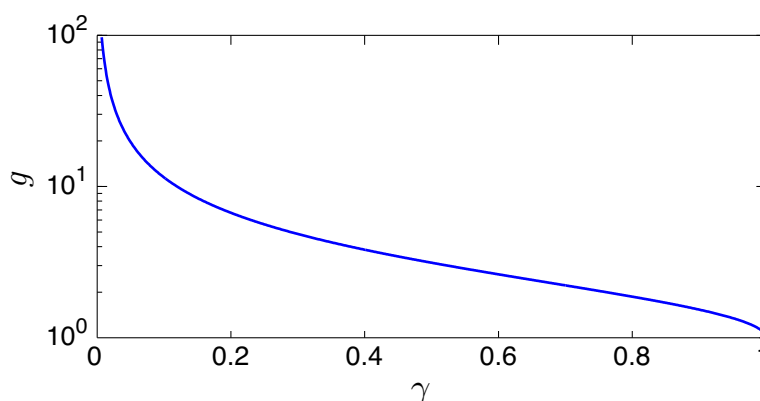


Рис. 5.8 – Функція, що визначає коректність розв'язку

Асимптотичні представлення для відривів, умови скінченності напружень та роботи зчеплення. Розглянемо кусково-лінійний розподіл зчеплення з рівновіддаленими вузлами. Введемо малий параметр

$$\varepsilon = \frac{\Delta b}{\lambda}, \quad \Delta b = \frac{\lambda - \beta}{n}.$$

Тоді, координати вузлів сітки можна записати у вигляді

$$b_k = \lambda(1 + k\varepsilon) \quad (0 \leq k \leq n), \quad \beta = b_n = \lambda(1 + n\varepsilon).$$

Знайдемо перші члени розкладу виразів (5.5) та (5.12) за малим параметром ε . Введемо позначення

$$y_k = \sqrt{n-k}, \quad w_{mk} = \ln \left| \frac{y_k - y_m}{y_k + y_m} \right|$$

та підставимо

$$b_k = \lambda(1 + k\varepsilon), \quad \check{X}(b_k) = y_k^{-1} \sqrt{n+k+2\varepsilon^{-1}}, \quad \check{X}(-b_k) = \check{X}^{-1}(b_k) \quad (5.30)$$

в (5.12). Отримаємо

$$K(b_m) = q_m b \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \frac{T_k(b_m)}{\Delta b} = t_{mk} \lambda \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (5.31)$$

$$q_0 = 2n, \quad q_m = m w_{m0} + 2y_m y_0 \quad (0 < m < n), \quad q_n = 0,$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2}(m-k)^2 w_{mk} + (2n-k-m)y_m y_k, \quad (m < k < n),$$

$$t_{mn} = 0, \quad t_{mm} = 2(n-m)^2, \quad t_{km} = t_{mk}.$$

Підставимо (5.31) в (5.10). Отримаємо

$$J_k(b_m) = a_{mk} \cdot \Delta b + O(\varepsilon^2), \quad (5.32)$$

$$a_{m0} = t_{m1} - t_{m0} + q_m, \quad (5.33)$$

$$a_{mk} = t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} \quad (0 < k < n), \quad a_{mn} = t_{m(n-1)}.$$

Далі, підставимо (5.30) в (5.5). Отримаємо

$$N_k = \frac{2}{3}\sqrt{2\varepsilon} c_k + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (5.34)$$

$$c_0 = y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2}y_0, \quad c_k = y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3 \quad (0 < k < n), \quad c_n = 1. \quad (5.35)$$

Наведемо коефіцієнти a_{mk} , c_k для $n = 1$:

$$a = (0 \quad 2), \quad c = \left(\frac{1}{2} \quad 1\right) \quad (5.36)$$

і $n = 2$:

$$a = \begin{pmatrix} -4 + 3\sqrt{2} + \gamma & 8 - 6\sqrt{2} - 2\gamma & 3\sqrt{2} + \gamma \\ 2 - \sqrt{2} + \gamma & -4 + 3\sqrt{2} + \gamma & 2 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

$$c = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} - 2 \quad 1\right),$$

де $\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

Отже, за допомогою (5.32), з точністю до малих величин порядку ε^2 , можна визначити розкриття тріщини (5.15) у вузлових точках:

$$\Delta(b_m) = \frac{L}{\pi} \cdot \Delta b \cdot \sum_{k=0}^n a_{mk} \sigma_k. \quad (5.38)$$

Умову скінченності напружень (5.8) запишемо за допомогою (5.34), нехтуючи малими величинами порядку $\varepsilon^{3/2}$,

$$\frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta b}{\lambda}} \sum_{k=0}^n c_k \sigma_k = \frac{\pi \sigma_\infty}{2}. \quad (5.39)$$

Отримаємо розклад за малим параметром ε виразу для роботи зчеплення (5.23). Для цього за допомогою (5.20) запишемо геометричні характеристики, що входять у вираз (5.23), у формі

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta U_{m0}}{\Delta b} &= \frac{\Delta S_{m1} - \Delta S_{m0}}{(\Delta b)^2} + \frac{\Delta G_m}{\Delta b}, \\
\frac{\Delta U_{mk}}{\Delta b} &= \frac{\Delta S_{m(k+1)} - 2\Delta S_{mk} + \Delta S_{m(k-1)}}{(\Delta b)^2}, \\
\frac{\Delta U_{mn}}{\Delta b} &= \frac{\Delta S_{m(n-1)}}{(\Delta b)^2},
\end{aligned} \tag{5.40}$$

де введено позначення $\Delta S_{mk} = S_{mk} - S_{(m-1)k}$, $\Delta G_m = G_m - G_{m-1}$, $G_m = G(b_m)$, функція $G(x)$ визначена в (5.21).

Знайдемо перші члени розкладу виразів (5.22) при $x = b_k$, $S_{mk} = S_k(b_m)$ за малим параметром ε :

$$\begin{aligned}
\frac{S_{mk}}{(\Delta b)^2} &= \pi b y_k^3 \left[\frac{4}{3\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{n+k}{2}\sqrt{2\varepsilon} \right] + s_{mk}\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \\
\frac{\Delta S_{mk}}{(\Delta b)^2} &= [s_{mk} - s_{(m-1)k}]\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}),
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$s_{mk} = \frac{1}{6}(m-k)^3 w_{mk} - \frac{1}{9}(8n^2 + 3m^2 - 3k^2 - 14nm - 2nk + 8km)y_m y_k,$$

$$s_{mn} = s_{nk} = 0, \quad s_{mm} = -\frac{8}{9}(n-m)^3.$$

Зауважимо, що матриця з елементів s_{mk} , на відміну від матриця з елементів t_{mk} , не є симетричною. Отримаємо перші члени розкладу виразів (5.21). Спочатку знайдемо

$$\begin{aligned}
\frac{G_m}{\Delta b} &= \pi \lambda y_0 \left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{n}{4}\sqrt{2\varepsilon} \right) + r_m b \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \\
r_m &= \frac{1}{2}m^2 w_{m0} - \frac{1}{3}(2n - 5m)y_0 y_m.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{\Delta G_m}{\Delta b} = (r_m - r_{m-1})\lambda\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (5.42)$$

Підставимо (5.41) і (5.42) в (5.40) та знехтуємо доданками порядку $\varepsilon^{3/2}$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_{mk}}{\Delta b} &= (u_{mk} - u_{(m-1)k})\Delta b, \\ u_{00} &= s_{01} - s_{00} - \frac{2}{3}n^2, \quad u_{m0} = s_{m1} - s_{m0} + r_m, \\ u_{mk} &= s_{m(k-1)} - 2s_{mk} + s_{m(k+1)}, \quad u_{mn} = s_{m(n-1)}. \end{aligned}$$

Вираз (5.23) тепер можна переписати в наступний спосіб

$$W = \frac{L}{\pi}\Delta b \left\{ \sigma_0 \sum_{k=0}^n \sigma_k a_{0k} + \sum_{m=1}^n \Delta\sigma_m \sum_{k=0}^n \sigma_k [u_{mk} - u_{(m-1)k}] \right\}. \quad (5.43)$$

Також запишемо вираз для роботи зчеплення на основі наближеної формули (5.24):

$$W = \frac{L}{\pi}\Delta b \left\{ \sigma_0 \sum_{k=0}^n \sigma_k a_{0k} + \sum_{m=1}^n \Delta\sigma_m \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{2} [a_{mk} + a_{(m-1)k}] \right\}. \quad (5.44)$$

Коефіцієнти a , c і u в (5.38), (5.39), (5.43) та (5.44) не залежать від координат границь зони зчеплення λ і β .

Визначення параметрів граничного стану для заданого закону координата-зчеплення. Розглянемо спочатку два найпростіші частинні випадки, що відповідають розмірності задачі $n = 1$. Маємо задати лише значення зчеплення на границях зони прикладання.

При $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$ маємо рівномірний розподіл зчеплення (для стислості будемо писати σ замість σ_{\max}). Використаємо критерій критичного роз-

криття (1.18). Прирівняємо другий вираз з (5.28) до Δ_{\max} та доповнимо отримане рівняння умовою скінченності напружень (перший вираз в (5.8)). За заданого рівня зовнішнього навантаження отримаємо визначальні рівняння для границь зони зчеплення (критичної напівдовжини тріщини λ і відповідного положення вершини зони β) у стані граничної рівноваги:

$$\begin{cases} 2\lambda \ln(\beta/\lambda) = A \\ \arccos(\lambda/\beta) = B \end{cases}, \quad A = \frac{\pi \Delta_{\max}}{L\sigma}, \quad B = \frac{\pi \sigma_{\infty}}{2\sigma}.$$

Звідки

$$\lambda = \frac{A}{2 \ln(\csc B)}, \quad \beta = \lambda \csc B.$$

Якщо $\varepsilon = (\beta - \lambda)/\lambda$ – мала величина, з точністю до $O(\varepsilon^{3/2})$ знайдемо

$$\lambda = \frac{A}{B^2}, \quad \beta - \lambda = \frac{A}{2} = \frac{\pi E \phi}{8 \sigma^2}, \quad (5.45)$$

де використано співвідношення $\phi = \sigma \Delta_{\max}$.

При $n = 1$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ з урахуванням (5.10) і другого виразу в (5.29) отримаємо наступну розв'язувальну систему

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda^2}{\beta - \lambda} \ln \frac{\lambda}{\beta} + \lambda + \beta &= A \\ \sqrt{\frac{\beta + \lambda}{\beta - \lambda}} - \frac{\lambda}{\beta - \lambda} \arccos \frac{\lambda}{\beta} &= B. \end{aligned}$$

Якщо $\varepsilon = (\beta - \lambda)/\lambda$ – мала величина, з точністю до $O(\varepsilon^{3/2})$ знайдемо

$$\lambda = \frac{D}{2}, \quad \beta - \lambda = \frac{A}{2}, \quad (5.46)$$

причому параметр

$$D = \frac{8A}{9B^2} = \frac{32\Delta_{\max}\sigma}{9\pi L\sigma_{\infty}^2} \quad (5.47)$$

пов'язує параметри тріщиностійкості Δ_{\max} і σ , пружну сталу L та інтенсивність зовнішнього навантаження σ_{∞} . Згідно з (5.46), D приблизно дорівнює (чим менше довжина зчеплення, тим точніше) критичній довжині тріщини, якщо інтенсивність зчеплення лінійно залежить від координати та змінюється від нуля у хвості зони до σ у її вершині.

Порівняння (5.45) і (5.46) вказує на суттєвий вплив закону розподілу координата-зчеплення на параметри граничного стану: за однакової довжини зчеплення критична довжина тріщини відрізняється для двох зазначених випадків більше ніж у два рази.

Далі з'ясуємо, чи збережеться тенденція впливу закону координата-зчеплення лише на критичну довжину тріщини для проміжних форм закону.

Використовуючи умови досягнення відривом у вершині тріщини максимального значення та скінченності напружень у вершині зони зчеплення (5.8), запишемо систему для визначення параметрів стану граничної рівноваги

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_k(\lambda) = \Delta_{\max}, \quad \sum_{k=0}^n \sigma_k N_k = \frac{\pi\sigma_{\infty}}{2}. \quad (5.48)$$

Система (5.48) містить два рівняння для визначення λ і β в граничному стані.

Числові розв'язки. Для закону (5.16) наведемо розв'язки системи (5.48) залежно від параметра форми α . Криві 2 на рис. 5.9 відповідають параметрам граничного стану, обчисленим на основі асимптотичного розв'язку. Параметри задачі, які використано при побудові числових розв'язків: $L = 4$ ГПа, $\sigma = 30$ МПа, $\sigma_{\infty} = 7$ МПа, $\Delta_{\max} = 3 \cdot 10^{-5}$ м; розмірність систе-

ми (5.48) $n = 1000$. Спостерігаємо суттєву залежність критичної довжини та відповідної відносної довжини зчеплення від параметра форми. Також відзначимо суттєве зниження енергії руйнування зі збільшенням параметра форми.

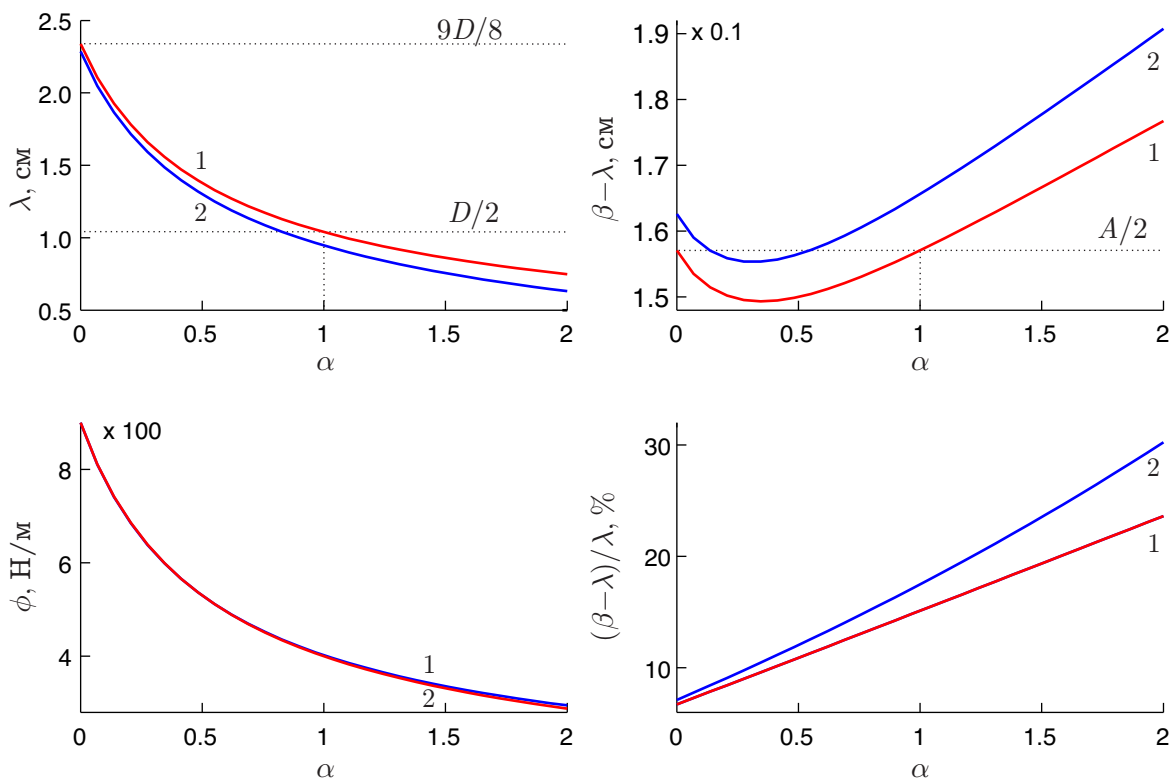


Рис. 5.9 – Залежність параметрів стану граничної рівноваги від параметрів форми за заданого закону координата-зчеплення

5.2 Визначення закону розподілу зчеплення для докритичного та граничного станів

Використавши заданий закон $T(\Delta)$ та умову скінченності напружень (5.8), запишемо систему для визначення параметрів докритичного стану:

$$\bar{T} [\bar{\Delta}_m(\bar{\sigma})] = \bar{\sigma}_m \quad (m = 0, \dots, n-1), \quad \sum_{k=0}^n \bar{\sigma}_k N_k = B, \quad (5.49)$$

$$\bar{\Delta}_m(\bar{\sigma}) = A^{-1} \sum_{k=0}^n \bar{\sigma}_k J_k(b_m), \quad A = \frac{\pi \Delta_{\max}}{L\sigma}, \quad B = \frac{\pi \sigma_{\infty}}{2\sigma}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\sigma},$$

$\bar{\sigma}$ – вектор величин відносних зчеплень у вузлах сітки:

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_0 \quad \bar{\sigma}_1 \quad \dots \quad \bar{\sigma}_n), \quad \bar{\sigma}_k = \frac{\sigma_k}{\sigma} \quad (0 \leq k \leq n),$$

σ – міцність зчеплення.

Система (5.49) містить $n + 1$ рівняння для визначення $n + 1$ невідомих: значень $\bar{\sigma}_k$ ($k = 0, \dots, n - 1$), які набуває зчеплення у вузлових точках, та положення вершини зони $b_n = \beta$.

Визначальну систему рівнянь для знаходження параметрів розподілу зчеплення для граничного значення $\lambda = \lambda_*$ отримаємо з (5.49) внесенням додаткової змінної $\lambda = b_0$, яка й буде критичною довжиною тріщини за заданого рівня зовнішнього навантаження (при $\lambda < \lambda_*$ маємо докритичні рівні навантаження). В граничному стані, коли розкриття тріщини в її вершині сягає максимального значення Δ_{\max} , згідно з більшістю ЗЗВ, відповідне значення зчеплення σ_0 дорівнює нулю. Реалізуємо це положення підсумовуванням в (5.49) від одиниці. Ще одним важливим зауваженням до побудови визначальної системи для параметрів граничного стану є наступне. Для деяких ЗЗВ похідна в точці $\Delta = \Delta_{\max}$ дорівнює нулю або не існує. При використанні числових методів розв'язання цей факт суттєво впливає на оптимізацію розрахунків. Тому доцільно замінити перше рівняння системи на рівняння $\bar{\Delta}(\lambda) = 1$. Отже, визначальна система набуде вигляду

$$A^{-1} \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k J_k(\lambda) = 1, \quad \bar{T} [\bar{\Delta}_m] = \bar{\sigma}_m, \quad \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k N_k = B, \quad (5.50)$$

$$m = 1, \dots, n-1, \quad \bar{\Delta}_m = A^{-1} \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k J_k(b_m).$$

Система (5.50) містить $n+1$ рівняння для визначення $n+1$ невідомих: критичної напівдовжини тріщини $b_0 = \lambda_*$, відповідної точки вершини зони $b_n = \beta_*$ та значень $\bar{\sigma}_k$ ($k = 1, \dots, n-1$). Величини b_k ($k = 0, \dots, n$) є параметрами величин J_k та N_k . При заданому рівні зовнішнього навантаження σ_∞ дві з величин $b_k - b_0$ і b_n є невідомими, інші можна розподілити (наприклад, рівномірно) між b_0 і b_n . За заданої напівдовжини тріщини λ , замість невідомої λ в системі (5.50) невідомою стане σ_∞ , яку можна легко виключити з останнього рівняння, зменшивши порядок системи на одиницю.

Побудуємо рівняння для визначення параметрів докритичного стану на основі асимптотичних виразів для розкриття тріщини у вузлових точках кусково-лінійного розподілу зчеплення (5.38), використовуючи умову скінченності напружень (5.39).

У введених позначеннях відносно розкриття у вузлових точках набудуть вигляду

$$\bar{\Delta}_m = \bar{\Delta}(b_m) = A^{-1} \cdot \Delta b \cdot P_m(\bar{\sigma}) \quad (0 \leq m < n), \quad \bar{\Delta}_n = 0, \quad (5.51)$$

де

$$P_m(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n a_{mk} \bar{\sigma}_k, \quad (5.52)$$

a_{mk} визначені в (5.33). Умова скінченності напружень:

$$\frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta b}{\lambda}} Q(\bar{\sigma}) = B, \quad (5.53)$$

де

$$Q(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n c_k \bar{\sigma}_k, \quad (5.54)$$

c_k визначені в (5.35).

Згідно з (5.49), визначальна система для параметрів докритичного стану набуде вигляду

$$\bar{T}[A^{-1} \cdot \Delta b \cdot P_m(\bar{\sigma})] = \bar{\sigma}_m, \quad \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta b}{\lambda}} Q(\bar{\sigma}) = B, \quad (5.55)$$

$m = 0, \dots, n-1$. Визначимо з останнього рівняння цієї системи крок сітки

$$\Delta b = \frac{9\lambda B^2}{8Q^2(\bar{\sigma})} \quad (5.56)$$

і підставимо в перші n рівнянь. Отримаємо визначальну систему для значень відносних зчеплень у точках сітки:

$$\bar{T}\left[\frac{\lambda P_m(\bar{\sigma})}{D Q^2(\bar{\sigma})}\right] = \bar{\sigma}_m, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (5.57)$$

де, як і раніше (див. (5.47)), $D = 8A/(9B^2)$. Підставимо отриманий розв'язок системи (5.57) в (5.56) та знайдемо довжину зчеплення.

Отже, розв'язання задачі звелось до знаходження коренів нелінійної системи (5.57), яке суттєво спрощується через те, що легко можна знайти матрицю Якобі системи функцій

$$F_m(\bar{\sigma}) = \bar{T}\left[\frac{\lambda P_m(\bar{\sigma})}{D Q^2(\bar{\sigma})}\right] - \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Дійсно, елементи матриці Якобі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_m}{\partial \bar{\sigma}_s} &= \frac{\partial \bar{T}[\bar{\Delta}_m(\bar{\sigma})]}{\partial \bar{\Delta}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{\sigma}_s} - \delta_{ms}, \\ \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{\sigma}_s} &= \frac{\lambda [a_{ms} Q(\bar{\sigma}) - 2c_s P_m(\bar{\sigma})]}{D Q^3(\bar{\sigma})}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

δ – символ Кронекера.

Стан граничної рівноваги. Визначимо критичну довжину тріщини, відповідну довжину зчеплення та розподіл зчеплення для заданих інтенсивності зовнішнього навантаження та ЗЗВ на основі асимптотичних виразів для розкриття тріщини у вузлових точках кусково-лінійного розподілу зчеплення (5.38) та для умови скінченності напружень (5.39).

Згідно з (5.50), (5.51) і (5.53), визначальна система для параметрів стану граничної рівноваги запишеться в такий спосіб

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot \Delta b \cdot P_0(\bar{\sigma}) &= 1, \quad \bar{T}[A^{-1} \cdot \Delta b \cdot P_m(\bar{\sigma})] = \bar{\sigma}_m, \\ \frac{2}{3} \sqrt{2 \frac{\Delta b}{\lambda}} Q(\bar{\sigma}) &= B, \quad m = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Для критичного стану $\bar{\sigma}_0 = 0$ і підсумовування у виразах для $P_m(\bar{\sigma})$ і $Q(\bar{\sigma})$, (5.52) і (5.54) відповідно, проводимо від $k = 1$.

Визначимо з першого рівняння системи (5.59) $A^{-1} \cdot \Delta b$ і підставимо в наступні $n - 1$ рівняння. Отримаємо визначальну систему для значень відносних напружень у точках сітки:

$$\bar{T} \left[\frac{P_m(\bar{\sigma})}{P_0(\bar{\sigma})} \right] = \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, 2, \dots, n-1; \quad (5.60)$$

при знайденому $\bar{\sigma}$ критичну довжину тріщини та відповідну довжину зчеплення визначимо з першого й останнього рівнянь системи (5.59):

$$\lambda = D \frac{Q^2(\bar{\sigma})}{P_0(\bar{\sigma})}, \quad \beta - \lambda = \frac{nA}{P_0(\bar{\sigma})}. \quad (5.61)$$

За заданою напівдовжиною тріщини λ критичний рівень зовнішнього навантаження можна знайти за допомогою виразу

$$\sigma_\infty = \frac{4\sigma Q(\bar{\sigma})}{3\pi} \sqrt{\frac{2A}{\lambda P_0(\bar{\sigma})}}.$$

Отже, розв'язання задачі звелось до знаходження коренів нелінійної системи (5.60). Елементи матриці Якобі системи функцій

$$F_m(\bar{\sigma}) = \bar{T} \left[\frac{P_m(\bar{\sigma})}{P_0(\bar{\sigma})} \right] - \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, n-1$$

знайдемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_m}{\partial \bar{\sigma}_s} &= \frac{\partial \bar{T} [\bar{\Delta}_m(\bar{\sigma})]}{\partial \bar{\Delta}} \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{\sigma}_s} - \delta_{ms}, \\ \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial \bar{\sigma}_s} &= \frac{a_{ms} P_0(\bar{\sigma}) - a_{0s} P_m(\bar{\sigma})}{P_0^2(\bar{\sigma})}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

δ – символ Кронекера.

Приклади визначення параметрів докритичного та критичного станів для степеневого та поліноміальних ЗЗВ. Проілюструємо отримані розв'язки для ЗЗВ у степеневій формі розміщення

$$T(\bar{\Delta}) = \sigma(1 - \bar{\Delta})^\alpha, \quad \bar{\Delta}(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_{\max}}. \quad (5.63)$$

З огляду на те, що енергія руйнування для цього ЗЗВ

$$\phi = \Delta_{\max} \int_0^1 T(\bar{\Delta}) d\bar{\Delta} = \frac{\sigma \Delta_{\max}}{\alpha + 1},$$

параметр моделі Δ_{\max} при заданій міцності зчеплення σ та енергії руйнування ϕ визначиться наступним чином

$$\Delta_{\max} = \frac{(\alpha + 1)\phi}{\sigma}.$$

Такий підхід використовує Δ_{\max} не як параметр тріщиностійкості, а як характеристичну довжину, яка асоціюється з двома параметрами тріщиностійкості (міцністю зчеплення та енергією руйнування) та параметрами форми ЗЗВ.

Далі отримаємо визначальні рівняння для параметрів докритичного та

граничного станів, на основі асимптотичного представлення для відривів та умови скінченності напружень.

Визначальна система для параметрів докритичного стану (5.57):

$$\left[1 - \frac{\lambda P_m(\bar{\sigma})}{D Q^2(\bar{\sigma})}\right]^\alpha = \bar{\sigma}_m, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (5.64)$$

Перепишемо цю систему у формі $\mathbf{F}(\bar{\sigma}) = 0$ і знайдемо її якобіан $(\partial F_m / \partial \bar{\sigma}_s)$, $m, s = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} F_m(\bar{\sigma}) &= n\lambda P_m(\bar{\sigma}) - D \cdot (1 - \bar{\sigma}_m^\varrho) Q^2(\bar{\sigma}), \quad \varrho = 1/\alpha, \\ \frac{\partial F_m(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}_s} &= \lambda a_{ms} - D Q(\bar{\sigma}) (2[1 - \bar{\sigma}_m^\varrho] c_s - \varrho \bar{\sigma}_s^{\varrho-1} Q(\bar{\sigma}) \delta_{ms}), \end{aligned}$$

що дозволяє ефективно використати числовий метод розв'язання систем нелінійних рівнянь. При $n = 1$ система є рівнянням (коефіцієнти a і c виписані в (5.36)):

$$2\lambda = D(1 - \bar{\sigma}_0^\varrho) \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{2} + 1 \right]^2,$$

визначивши з якого $\bar{\sigma}_0$, згідно з (5.56), отримаємо довжину зчеплення

$$\beta - \lambda = \frac{9\lambda B^2}{2(\bar{\sigma}_0 + 2)^2}.$$

При $n = 2$ система (5.64) має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda(a_{00}\bar{\sigma}_0 + a_{01}\bar{\sigma}_1 + a_{02}) &= D(1 - \bar{\sigma}_0^\varrho)(c_0\bar{\sigma}_0 + c_1\bar{\sigma}_1 + c_2)^2 \\ \lambda(a_{11}\bar{\sigma}_1 + a_{11}\bar{\sigma}_1 + a_{12}) &= D(1 - \bar{\sigma}_1^\varrho)(c_0\bar{\sigma}_0 + c_1\bar{\sigma}_1 + c_2)^2, \end{aligned} \quad (5.65)$$

визначивши звідки $\bar{\sigma}_0$ і $\bar{\sigma}_1$, отримаємо

$$\beta - \lambda = \frac{9\lambda B^2}{4(c_0\bar{\sigma}_0 + c_1\bar{\sigma}_1 + c_2)^2}. \quad (5.66)$$

У визначальних рівняннях задачі (5.65) і (5.66) значення коефіцієнтів a та c наведені в (5.37).

Будемо використовувати асимптотичний розв'язок (5.64) як початкове наближення при числовому розв'язанні системи для параметрів *докритичного стану* (5.49). Порівняння точного й асимптотичного розв'язків, а також критерій для встановлення розмірності системи (5.49) будуть наведені нижче.

На рис. 5.10 проілюстровано зміну розподілу зчеплення $\sigma(x)$ і відповідних відносних відривів $\bar{\Delta}(x)$ при збільшенні інтенсивності зовнішнього навантаження. Параметри числового розв'язку: $L = 4$ ГПа, $\sigma = 30$ МПа, $\phi = 600$ Н/м, $\alpha = 0.7$. Також на рисунку наведено значення роботи зчеплення, обчислені за допомогою (5.43), для кожного значення σ_∞ .

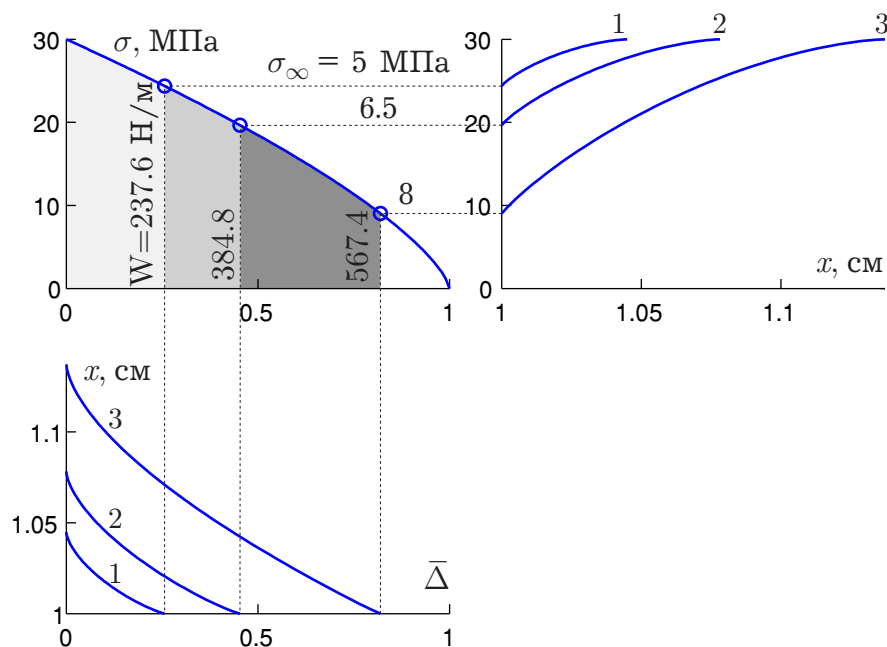


Рис. 5.10 – ЗЗВ, розподіл зчеплення та відносного відриву

У випадку степеневого ЗЗВ система (5.60) для визначення параметрів *граничного стану* набуде наступного вигляду

$$\left[1 - \frac{P_m(\bar{\sigma})}{P_0(\bar{\sigma})}\right]^\alpha = \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, n-1. \quad (5.67)$$

При знайденому $\bar{\sigma}$ границі зони зчеплення визначимо з (5.61).

Запишемо систему (5.67) у формі $\mathbf{F}(\bar{\sigma}) = 0$ і знайдемо її якобіан

$$\begin{aligned} F_m(\bar{\sigma}) &= P_m(\bar{\sigma}) - (1 - \bar{\sigma}_m^\rho)P_0(\bar{\sigma}), \\ \frac{\partial F_m(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}_s} &= a_{ms} - (1 - \bar{\sigma}_m^\rho)a_{0s} + \rho \bar{\sigma}_m^{\rho-1} P_0(\bar{\sigma}) \delta_{ms}, \end{aligned}$$

що дозволяє ефективно використання числового методу розв'язання систем нелінійних рівнянь. Зауважимо, що при $n = 2$ система (5.60) є рівнянням

$$\frac{a_{11}\bar{\sigma}_1 + a_{12}}{a_{01}\bar{\sigma}_1 + a_{02}} = 1 - \bar{\sigma}_1^\rho, \quad (5.68)$$

визначивши з якого $\bar{\sigma}_1$, отримаємо критичну довжину тріщини та відповідну довжину зчеплення

$$\lambda = D \frac{(c_1\bar{\sigma}_1 + c_2)^2}{a_{01}\bar{\sigma}_1 + a_{02}}, \quad \beta - \lambda = \frac{2A}{a_{01}\bar{\sigma}_1 + a_{02}}. \quad (5.69)$$

У розв'язувальних рівняннях задачі (5.68) і (5.69) значення коефіцієнтів a_{mk} та c_k наведені в (5.37).

Дослідимо, як змінюються параметри критичного стану (критична довжина тріщини й відповідна їй довжина зчеплення) залежно від кількості вузлів кусково-лінійного розподілу зчеплення. В табл. 5.1 наведені характеристики стану граничної рівноваги, обчислені за наступних значень параметрів задачі: $L = 4$ ГПа, $\sigma_\infty = 7$ МПа, $\sigma = 30$ МПа, $\phi = 600$ Н/м, $\alpha = 0.7$. Подвійною вертикальною лінією відділені розв'язки, отримані на основі (5.50) і (5.59) (чим менша довжина зчеплення, тим друга система дає точніший розв'язок). Відповідь на питання, чи достатньо близькою до заданої величини є енергія руйнування, що відповідає числовому розв'язку

Табл. 5.1 – Значення параметрів граничного стану для розмірності задачі n .

n	λ , см	$\beta - \lambda$, см	$\frac{\beta - \lambda}{2\lambda}$, %	λ , см	$\beta - \lambda$, см	$\frac{\beta - \lambda}{2\lambda}$, %
1	1.178	0.1780	7.56	1.073	0.1877	8.74
2	1.418	0.1656	5.84	1.327	0.1729	6.51
3	1.483	0.1637	5.52	1.395	0.1705	6.11
4	1.511	0.1632	5.40	1.423	0.1699	5.97
5	1.525	0.1630	5.34	1.438	0.1697	5.90
6	1.534	0.1629	5.31	1.447	0.1696	5.86
7	1.539	0.1629	5.29	1.453	0.1695	5.83
8	1.543	0.1629	5.28	1.457	0.1695	5.82
9	1.546	0.1629	5.27	1.460	0.1695	5.81
10	1.548	0.1630	5.26	1.462	0.1696	5.80

для розподілу зчеплення, мають дати наведені нижче результати.

В табл. 5.2 для кожного n -го наближення до розв'язку задачі наведені значення енергії руйнування моделі ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 та ϕ_4 , обчислені згідно з (5.23), (5.24), (5.43) та (5.44) відповідно.

Табл. 5.2 – Енергія руйнування для отриманих розв'язків.

n	ϕ_1 , Н/м	ϕ_2 , Н/м	ϕ_3 , Н/м	ϕ_4 , Н/м
1	455.925	510.000	453.333	510.000
2	546.351	556.374	545.749	556.345
3	570.991	575.129	570.711	575.099
4	581.492	583.754	581.326	583.726
5	587.018	588.444	586.905	588.419
6	590.315	591.297	590.231	591.275
7	592.454	593.172	592.389	593.152
8	593.929	594.476	593.877	594.458
9	594.992	595.424	594.949	595.408
10	595.787	596.136	595.751	596.122

В табл. 5.3 наведені значення параметрів граничного стану для п'ятьох параметрів форми степеневого закону (5.63). Подвійною вертикальною лінією відділені розв'язки, отримані на основі систем рівнянь (5.50) і (5.59). Спостерігаємо меншу точність за однакової розмірності задачі для ЗЗВ, які є ближчими до рівномірного закону. Зниження точності обумовлене сингулярністю похідної функції $T(\bar{\Delta})$ у точці $\bar{\Delta} = 1$.

Табл. 5.3 – Значення параметрів граничного стану та енергії руйнування моделі для трьох розмірностей задачі n і п'ятьох параметрів форми

n	λ , см	$\frac{\beta-\lambda}{2\lambda}$, %	ϕ_1 , Н/м	λ , см	$\frac{\beta-\lambda}{2\lambda}$, %	ϕ_3 , Н/м
$\alpha = 0.1$						
10	1.425	3.73	547.62	1.381	3.97	548.28
30	1.510	3.62	580.63	1.468	3.86	580.96
50	1.529	3.61	588.08	1.487	3.84	588.30
$\alpha = 0.4$						
10	1.516	4.41	583.12	1.454	4.76	583.26
30	1.549	4.36	595.96	1.488	4.70	596.01
50	1.554	4.35	597.96	1.493	4.70	597.99
$\alpha = 0.7$						
10	1.548	5.26	595.79	1.462	5.80	595.75
30	1.557	5.24	599.32	1.472	5.77	599.31
50	1.558	5.6	599.71	1.473	5.76	599.71
$\alpha = 1.0$						
10	1.558	6.27	599.47	1.442	7.09	599.44
30	1.559	6.26	599.94	1.443	7.07	599.94
50	1.559	6.25	599.98	1.443	7.07	599.98
$\alpha = 1.3$						
10	1.560	7.43	600.54	1.408	8.68	600.55
30	1.559	7.41	600.07	1.407	8.66	600.07
50	1.559	7.41	600.03	1.407	8.66	600.03

За числовими результатами наведеними в табл. 5.3 можна зробити ви-

сновок про критерій вибору розмірності задачі n при моделюванні розподілу зчеплення кусково-лінійним розподілом із рівновіддаленими вузлами. Розмірність задачі має бути вибрана такою, щоб енергія руйнування моделі відрізнялася від відповідного параметра тріщиностійкості ϕ не більше, ніж на задану величину $\Delta\phi$. Так, якщо в наведеному прикладі покласти $\Delta\phi = 1$ Н/м, то для $\alpha = 1$ і $\alpha = 1.3$ вистачить розмірності 10, для $\alpha = 0.7 - 30$, а для $\alpha = 0.1$ і $\alpha = 0.4$ не вистачить і 50. Але немає сенсу використовувати велику розмірність для отримання асимптотичного розв'язку. Цінність цього розв'язку полягає в тому, що його можна отримати стандартними числовими методами розв'язання нелінійних систем, не приділяючи особливої уваги вибору початкового наближення, а потім використати як першу ітерацію для розв'язання визначальних систем (5.49) або (5.50).

Якщо енергія руйнування, що відповідає розв'язку системи (5.50), значно відрізняється від заданого значення ϕ необхідно в кусково-лінійний розподіл зчеплення додавати вузли в точках найбільшого відхилення від заданого ЗЗВ. Саме так було отримано числові розв'язки, наведені на рис. 5.11 (додавати вузли довелось лише для малих значень α). Ці числові результати дозволяють простежити як змінюються параметри критичного стану при зміні параметра форми: зі зменшенням α (при наближенні ЗЗВ до рівномірного) зменшується критична довжина зчеплення, водночас критична довжина тріщини збільшується.

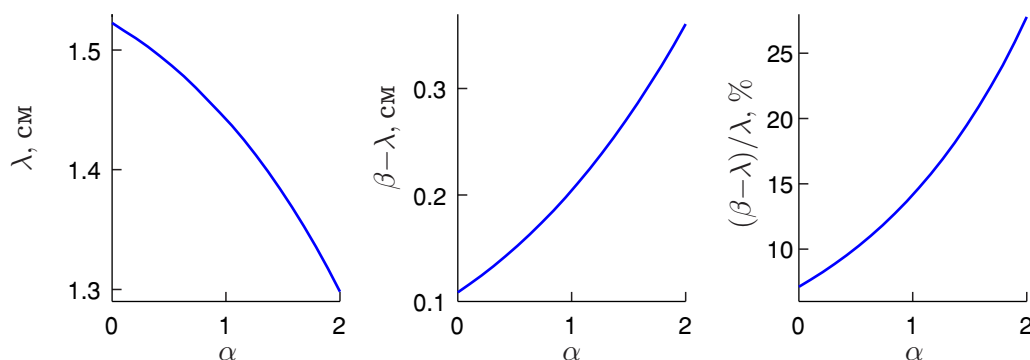


Рис. 5.11 – Критична довжина тріщини, відповідні абсолютна та відносна довжини зчеплення

Дослідимо як залежать параметри докритичного та граничного станів від наявності ділянки зміцнення в ЗЗВ. Розглянемо закон у формі найпростіших поліноміальних залежностей, які містять один параметр форми, що відповідає за розмір ділянки зміцнення.

Спочатку розглянемо ЗЗВ у формі параболи

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n) (1 - \bar{\Delta}), \quad (5.70)$$

де параметр моделі $\bar{\sigma}_l$ визначається з умови рівності зчеплення в точці екстремуму міцності зчеплення (або рівності відносного зчеплення одиниці):

$$\bar{\sigma}_l = 2 - \bar{\sigma}_n + 2\sqrt{1 - \bar{\sigma}_n}.$$

Отже, (5.70) містить один параметр форми $\bar{\sigma}_n$, який дорівнює відносному зчепленню у вершині зони. Енергія руйнування

$$\phi = \sigma \Delta_{\max} \int_0^1 \bar{T}(\bar{\Delta}) d\bar{\Delta} = \frac{\sigma \Delta_{\max}}{3} (1 + \bar{\sigma}_n + \sqrt{1 - \bar{\sigma}_n}).$$

Для побудови числових розв'язків будемо використовувати асимптотичний розв'язок як початкове наближення при розв'язанні систем (5.49) і (5.50). Матрицю Якобі для числового розв'язання систем (5.57) і (5.60) отримаємо підставивши

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Delta}} = \bar{\sigma}_l - \bar{\sigma}_n - 2\bar{\sigma}_l \bar{\Delta}$$

відповідно в (5.58) і (5.62).

За допомогою залежностей, наведених на рис. 5.12, можна оцінити, наскільки точне наближення дає асимптотичний розв'язок задачі для знаходження параметрів граничного стану за допомогою системи (5.50).

Криві 1 на цьому рисунку відповідають розв'язку системи (5.60), криві

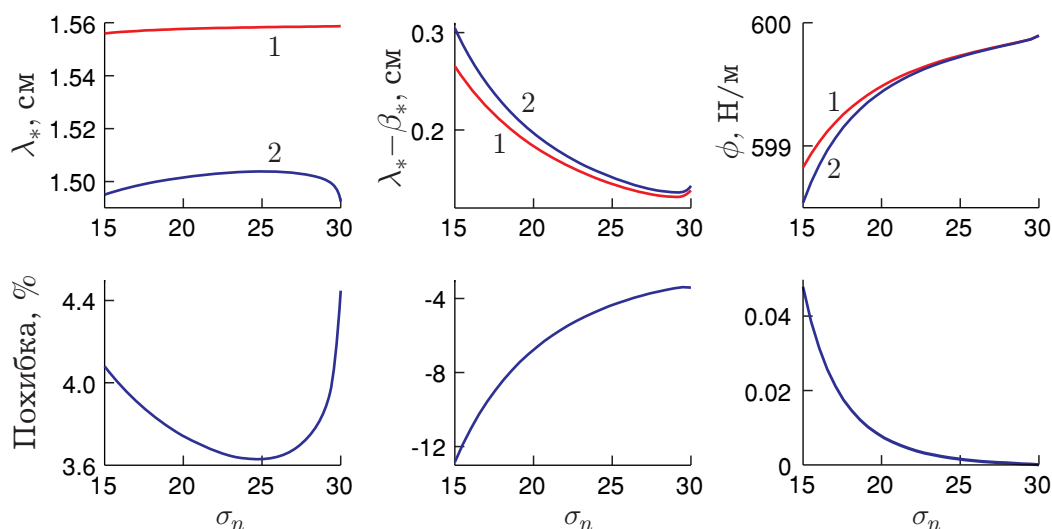


Рис. 5.12 – Порівняння асимптотичного (1) та точного (2) розв’язків ($\sigma_\infty = 7$ МПа)

2 – системи (5.50). Для знаходження критичної довжини тріщини та відповідної довжини зчеплення для всіх значень параметра форми $\sigma_n = \sigma \bar{\sigma}_n$ зафіксована розмірність розв’язувальної системи $n = 50$. Ця розмірність забезпечує розбіжність між розрахунковою енергією руйнування та відповідним параметром моделі $\phi = 600$ Н/м у межах чверті відсотка, причому ця розбіжність зменшується зі збільшенням σ_n , тобто зі зменшенням ділянки зміцнення. Якщо похибка у визначенні критичної довжини тріщини практично не залежить від параметра форми та становить для вибраних параметрів задачі ($\sigma_\infty = 7$ МПа, $E = 4$ ГПа, $\sigma = 30$ МПа) приблизно 4 %, то зі зменшенням у два рази σ_n похибка у визначенні довжини зчеплення збільшується від 4 до 12 %.

Зі зменшенням рівня зовнішнього навантаження розбіжності між розв’язками систем (5.60) і (5.50) зменшуються. Розв’язки цих систем для проміжку зміни параметра форми σ_n від 15 до 30 МПа представлені на рис. 5.13. Збережено значення всіх параметрів задачі, що використані для побудови розв’язків рис. 5.12, окрім σ_∞ , який тепер становить 5 МПа. Спостерігаємо зменшення розбіжностей між двома наборами параметрів граничного стану в два рази.

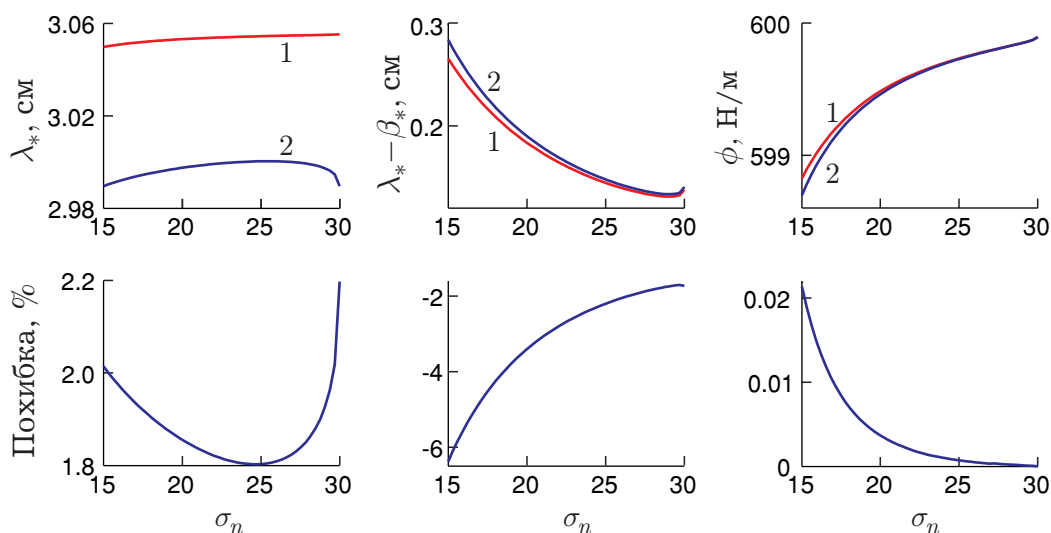


Рис. 5.13 – Порівняння асимптотичного (1) та точного (2) розв’язків ($\sigma_\infty = 5$ МПа)

Далі розглянемо ЗЗВ у формі кубічного полінома

$$T(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n) (1 - \bar{\Delta})^2, \quad (5.71)$$

де параметр моделі $\bar{\sigma}_l$ визначається з умови рівності відносного зчеплення в точці екстремуму одиниці:

$$\frac{4}{27} \bar{\sigma}_l \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l}\right)^3 = 1.$$

Отже, ЗЗВ містить один параметр форми $\bar{\sigma}_n$, який дорівнює значенню відносного зчеплення у вершині зони. Енергія руйнування для цього ЗЗВ

$$\phi = \frac{\sigma \Delta_{\max}}{12} (\bar{\sigma}_l + 4\bar{\sigma}_n),$$

звідки можна визначити характеристичну довжину Δ_{\max} через енергію руйнування ϕ , міцність зчеплення σ і параметр форми σ_n .

При $\sigma_n = 0$ (5.71) перетворюється на запропонований у [152] закон

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = \frac{27}{4} \bar{\Delta} (1 - \bar{\Delta})^2, \quad \phi = \frac{9}{16} \sigma \Delta_{\max}.$$

Матрицю Якобі для числового розв'язання систем (5.57) і (5.60) отримаємо підстановкою

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Delta}} = (1 - \bar{\Delta}) (\bar{\sigma}_l - 2\bar{\sigma}_n - 3\bar{\sigma}_l \bar{\Delta})$$

в (5.58) і (5.62).

На рис. 5.14 проілюстровано принцип побудови законів розподілу зчеплення за докритичних довжин тріщини. Наведено 8 розподілів $\sigma(x)$ і відповідних відносних відривів $\bar{\Delta}(x)$ (крива 1 відповідає $\sigma_\infty = 8.4$ МПа, 2 – $\sigma_\infty = 8$ МПа, ..., 8 – $\sigma_\infty = 2$ МПа), побудованих для ЗЗВ з $\phi = 600$ Н/м, $\sigma = 30$ МПа, $\sigma_n = \sigma \bar{\sigma}_n = 20$ МПа (закон зображено на першому блоці рисунка).

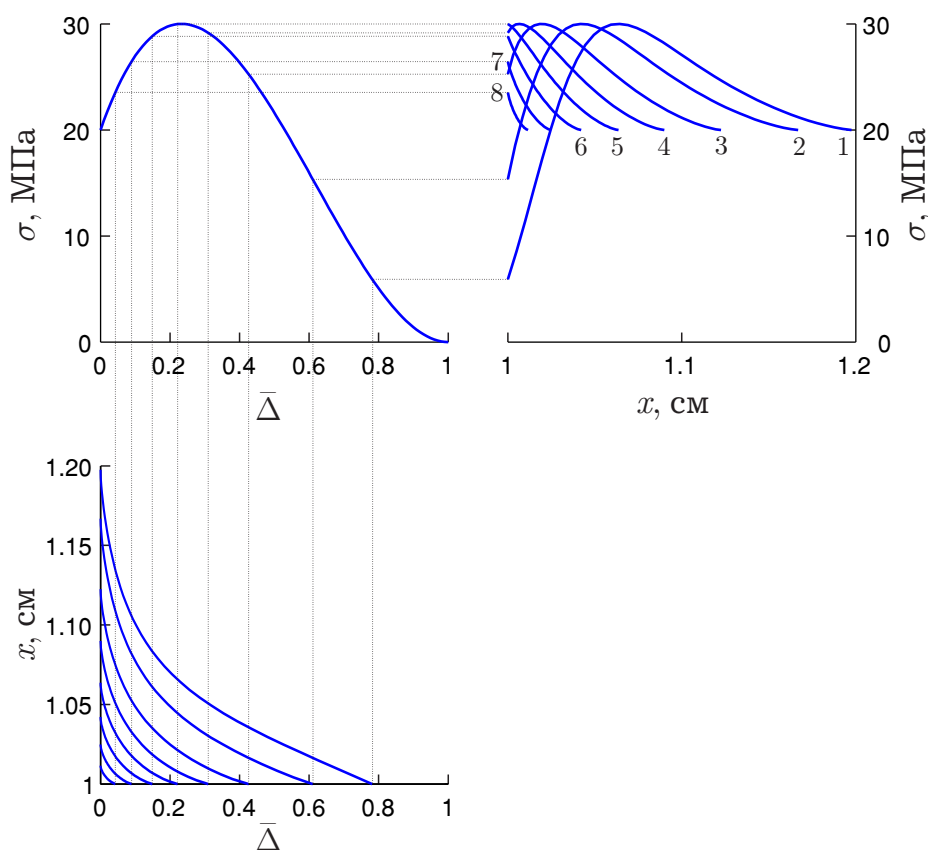


Рис. 5.14 – Поліноміальний ЗЗВ та відповідні розподіли зчеплення та відносного відриву

На рис. 5.15 для трьох значень параметра σ_n (25 МПа – криві 1, 20 МПа – криві 2 та 15 МПа – криві 3) побудовано ЗЗВ (перший блок), а також розпо-

діл зчеплення (другий блок) та залежність відриву від координати (третій блок), знайдені в умовах стану граничної рівноваги. Розв'язки отримано при $\sigma_\infty = 7$ МПа, $E = 4$ ГПа, $\sigma = 30$ МПа, $\phi = 600$ Н/м.

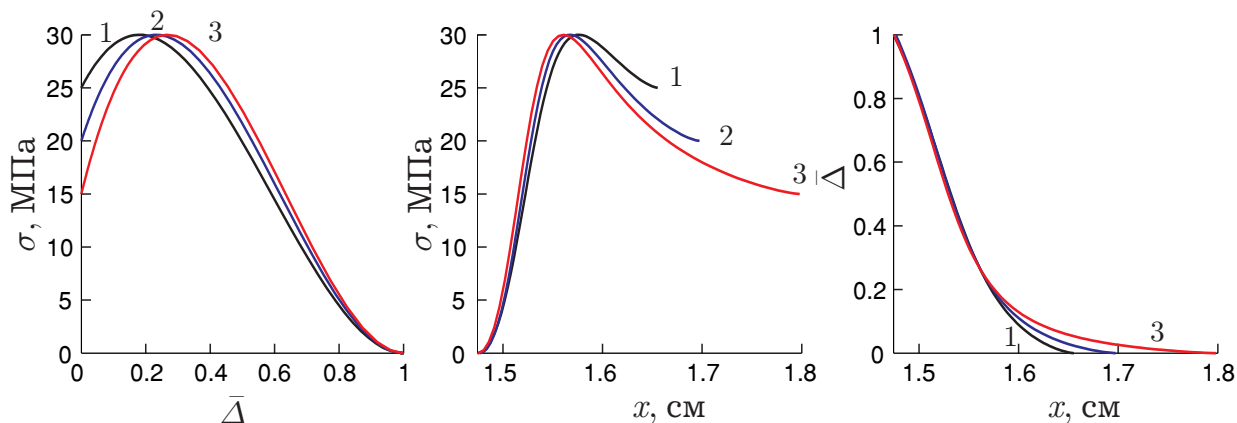


Рис. 5.15 – Поліноміальний ЗЗВ та відповідні розподіли зчеплення та відриву для трьох параметрів форми

На рис. 5.16 проілюстровано залежність параметрів граничного стану від параметра форми σ_n . Розв'язки побудовано для тих самих параметрів моделі, що й у попередньому числовому прикладі.

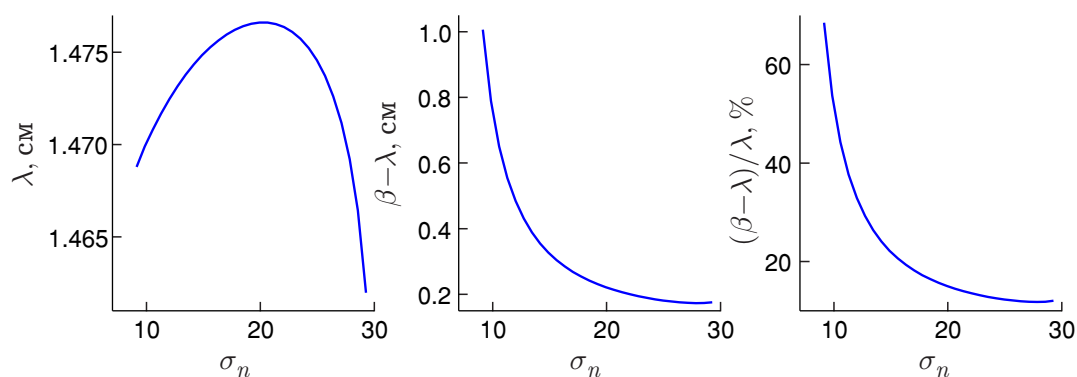


Рис. 5.16 – Критична довжина тріщини, відповідні абсолютна та відносна довжини зчеплення

Наведені на рис. 5.15 та 5.16 залежності свідчать про те, що зменшення σ_n при сталих значеннях σ та ϕ призводить до істотного збільшення довжини зчеплення. Також зазначимо, що системи (5.60) і (5.50) не мають розв'язків для величин σ_n менших за σ_∞ .

5.3 Використання моделі зони зчеплення спільно з гіпотезою тонкої структури

Згідно з концепцією тонкої структури, зона зчеплення розглядається частиною модельної напівнескінченної тріщини. Прикладене до тіла з тріщиною навантаження обумовлює КІН у вершині модельної тріщини. Умову скінченності напружень можна задовольнити тільки якщо K_I , обумовлений зовнішнім навантаженням нівелюється $K_I^{(2)}$, обумовленим силами зчеплення: $K_I + K_I^{(2)} = 0$.

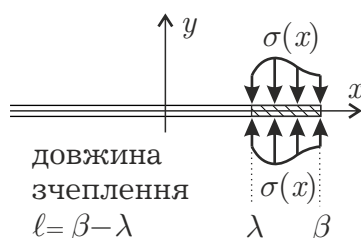


Рис. 5.17 – Напівнескінченна тріщина з зоною зчеплення

Комплексні потенціали задачі при наявності тільки сил зчеплення (рис. 5.17) мають вигляд

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi \hat{X}(z)} \int_{\lambda}^{\beta} \frac{\sigma(x) \hat{X}(x)}{x - z} dx,$$

$$\varphi(z) = \omega(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda}^{\beta} \sigma(x) C(x, z) dx,$$

де

$$C(x, z) = \ln \frac{\hat{X}(z) - \hat{X}(x)}{\hat{X}(z) + \hat{X}(x)}, \quad \hat{X}(z) = \sqrt{\beta - z}.$$

Для цієї задачі КІН та відрив визначаються зі співвідношень

$$K_I^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\beta} \frac{\sigma(t)}{\hat{X}(t)} dt, \quad \Delta^{(2)}(x) = \frac{L}{\pi} \int_{\lambda}^{\beta} \sigma(t) C(t, x) dt \quad (5.72)$$

відповідно.

Вираз для відриву внаслідок дії зовнішнього навантаження

$$\Delta^{(1)}(x) = L\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_I\hat{X}(x), \quad \lambda < x < \beta. \quad (5.73)$$

Умова скінченності напружень

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\beta} \frac{\sigma(t)}{\hat{X}(t)} dt = K_I. \quad (5.74)$$

Інтеграл в (5.72) для кусково-лінійного представлення $\sigma(t)$ можна подати у формі

$$\int_{\lambda}^{\beta} \frac{\sigma(t)}{\hat{X}(t)} dt = \sum_{k=0}^n \sigma_k N_k, \quad \int_{\lambda}^{\beta} \sigma(t) C(t, x) dt = \sum_{k=0}^n \sigma_k J_k(x),$$

де

$$N_0 = R'_1 - I_0, \quad N_k = R'_{k+1} - R'_k \quad (0 < k < n), \quad N_n = I_n - R'_n,$$

$$\Delta b_k \cdot R'_k = R_k - R_{k-1}, \quad R_k = R(b_k),$$

$$I(t) = \int \hat{X}^{-1}(t) dt = -2\hat{X}(t), \quad R(t) \int I(t) dt = \frac{4}{3}\hat{X}^3(t),$$

$$J_0(x) = T'_1(x) - K_0(x), \quad J_n(x) = K_n(x) - T'_n(x),$$

$$J_k(x) = T'_{k+1}(x) - T'_k(x) \quad (0 < k < n),$$

$$\Delta b_k \cdot T'_k(x) = T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad T_k(x) = T(b_k, x), \quad K_k(x) = K(b_k, x),$$

$$K(t, x) = \int C(t, x) dt = (t - x)C(t, x) + 2\hat{X}(t)\hat{X}(x),$$

$$T(t, x) = \int K(t, x) dt = \frac{1}{2}(t - x)^2 C(t, x) - \frac{1}{3}(2\beta + 3x - 5t)\hat{X}(t)\hat{X}(x).$$

Підставимо (5.74) в (5.73) та складемо $\Delta^{(1)}$ з $\Delta^{(2)}$. Отримаємо вираз для розкриття задачі в цілому

$$\Delta(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k [\pi N_k \hat{X}(x) + J_k(x)].$$

Робота зчеплення $W = W^{(1)} + W^{(2)}$,

$$W^{(1)} = 2 \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \sigma_k N_k \left[\sigma_0 \hat{X}_0 - \frac{2}{3} \sum_{m=1}^n \frac{\Delta \sigma_m}{\Delta b_m} \Delta \hat{X}_m^3 \right],$$

$$W^{(2)} = \frac{L}{\pi} \left[\sigma_0 \sum_{k=0}^n \sigma_k J_{0k} + \sum_{m=1}^n \frac{\Delta \sigma_m}{\Delta b_m} \sum_{k=0}^n \sigma_k \Delta U_{mk} \right],$$

де

$$\hat{X}_m = \hat{X}(b_m), \quad \hat{X}_m^3 = \hat{X}^3(b_m), \quad \Delta \hat{X}_m^3 = \hat{X}_m^3 - \hat{X}_{m-1}^3,$$

$$J_{mk} = J_k(b_m) = J(b_k, b_m),$$

$$U_{mk} = U_k(b_m) = U(b_k, b_m), \quad \Delta U_{mk} = \int_{b_{m-1}}^{b_m} J_k(x) dx = U_{mk} - U_{(m-1)k},$$

$$U_0(x) = S'_1(x) - G_0(x), \quad U_n(x) = G_n(x) - S'_n(x),$$

$$U_k(x) = S'_{k+1}(x) - S'_k(x) \quad (0 < k < n), \quad \Delta b_k \cdot S'_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x),$$

$$G_k(x) = G(b_k, x), \quad G_0(\lambda) = -2(\beta - \lambda)^2, \quad G_0(\beta) = 0, \quad G_n(x) = 0,$$

$$S_k(x) = S(b_k, x), \quad S_k(b_k) = \frac{8}{9}(\beta - b_k)^3, \quad S_k(\beta) = 0, \quad S_n(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \int K(t, x) dx = \\ &= -\frac{1}{2}(t - x)^2 C(t, x) - (2\beta - t - x) \hat{X}(t) \hat{X}(x), \\ S(t, x) &= \int T(t, x) dx = -\frac{1}{6}(t - x)^3 C(t, x) + \\ &+ \frac{1}{9}(8\beta^2 - 3x^2 + 3t^2 - 2\beta x - 14\beta t + 8xt) \hat{X}(t) \hat{X}(x). \end{aligned}$$

Для кусково-лінійного розподілу з рівновіддаленими вузлами $b_m = \lambda + m \cdot \Delta b$ ($m = 0, \dots, n$, $\Delta b = \frac{1}{n}(\beta - \lambda)$):

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\beta} \frac{\sigma(t)}{\hat{X}(t)} dt &= \frac{4}{3} \sqrt{\Delta b} \cdot Q(\boldsymbol{\sigma}), \quad \int_{\lambda}^{\beta} \sigma(t) C(t, b_m) dt = \Delta b \cdot P_m(\boldsymbol{\sigma}), \\ Q(\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{k=0}^n c_k \sigma_k, \quad P_m(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=0}^n a_{mk} \sigma_k, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \end{aligned}$$

$$c_0 = y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2} y_0, \quad c_k = y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3 \quad (0 < k < n), \quad c_n = 1,$$

$$a_{m0} = t_{m1} - t_{m0} - q_m,$$

$$a_{mk} = t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} \quad (0 < k < n), \quad a_{mn} = t_{m(n-1)},$$

$$q_m = -m\omega_{m0} + 2y_m y_0 \quad (0 < m < n), \quad q_0 = 2n,$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2}(m-k)^2 w_{mk} - \frac{1}{3}(2n+3m-5k)y_m y_k, \quad (m \neq k, \quad m, k < n),$$

$$t_{mn} = 0, \quad t_{mm} = -\frac{2}{3}(n-m)^2,$$

$$w_{mk} = \ln \left| \frac{y_m - y_k}{y_m + y_k} \right|, \quad y_m = \sqrt{n-m}.$$

Для задачі в цілому відриви у вузлових точках визначимо у наступний спосіб

$$\Delta_m(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{L}{\pi} [\sqrt{2\pi \cdot \Delta b} y_m K_I + \Delta b \cdot P_m(\boldsymbol{\sigma})], \quad (5.75)$$

причому, параметри моделі мають задовольняти умові скінченності напружень

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi} \Delta b} Q(\boldsymbol{\sigma}) = K_I. \quad (5.76)$$

Послідовно виключимо з (5.75) і (5.76) величини

$$\Delta b = \frac{\pi}{2} \left[\frac{3K_I}{4Q(\boldsymbol{\sigma})} \right]^2$$

та K_I . Отримаємо два вирази для відриву в точках сітки

$$\Delta_m(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{9LK_I^2}{32} \cdot \frac{V_m(\boldsymbol{\sigma})}{Q^2(\boldsymbol{\sigma})}, \quad \Delta_m(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{L}{\pi} \Delta b \cdot V_m(\boldsymbol{\sigma}), \quad (5.77)$$

$$V_m(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{8}{3} y_m Q(\boldsymbol{\sigma}) + P_m(\boldsymbol{\sigma}). \quad (5.78)$$

Знайдемо вираз для V_m у вигляді лінійної комбінації σ_k :

$$V_m(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=0}^n v_{mk} \sigma_k,$$

$$\begin{aligned}
v_{m0} &= \frac{8}{3}y_m c_0 + a_{m0} = \\
&= \frac{8}{3}y_m(y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2}y_0) + t_{m1} - t_{m0} - q_m = t'_{m1} - t'_{m0} + q'_m, \\
v_{mk} &= \frac{8}{3}y_m c_k + a_{mk} = \\
&= \frac{8}{3}y_m(y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3) + t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} = \\
&= t'_{m(k-1)} - 2t'_{mk} + t'_{m(k+1)}, \quad 0 < k < n, \\
v_{mn} &= \frac{8}{3}y_m c_n + a_{mn} = \frac{8}{3}y_m y_{n-1}^3 + t'_{m(n-1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t'_{mk} &= \frac{8}{3}y_m y_k^3 + t_{mk} = \frac{1}{2}(m-k)^2 w_{mk} + (2n-m-k)y_m y_k, \\
q'_m &= 4y_m y_0 - q_m = m w_{m0} + 2y_m y_0.
\end{aligned}$$

Работа зчеплення, $W = W^{(1)} + W^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \frac{8L}{3\pi} Q(\bar{\sigma}) \cdot \Delta b \cdot \left[\sigma_0 y_0 - \frac{2}{3} \sum_{m=1}^n \Delta \sigma_m \Delta y_m^3 \right], \\
W^{(2)} &= \frac{L}{\pi} \cdot \Delta b \cdot \left[\sigma_0 P_0(\bar{\sigma}) + \sum_{m=1}^n \Delta \sigma_m \sum_{k=1}^n \sigma_k \Delta u_{mk} \right],
\end{aligned}$$

де $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_{\max}$, $\Delta u_{mk} = u_{mk} - u_{(m-1)k}$,

$$u_{00} = s_{01} - s_{00} - r_0, \quad u_{m0} = s_{m1} - s_{m0} - r_m,$$

$$u_{mk} = s_{m(k-1)} - 2s_{mk} + s_{m(k+1)} \quad (0 < k < n), \quad u_{mn} = s_{m(n-1)},$$

$$s_{mk} = -\frac{1}{6}(k-m)^3 w_{mk} + \frac{1}{9}(8n^2 - 3m^2 + 3k^2 - 2nm - 14nk + 8mk)y_m y_k,$$

$$s_{mn} = s_{nk} = 0, \quad s_{mm} = \frac{8}{9}(n-m)^3,$$

$$r_m = -\frac{1}{2}m^2 w_{m0} - (2n-m)y_m y_0 \quad (0 < m < n), \quad r_0 = -2n^2, \quad r_n = 0.$$

Система для визначення параметрів *докритичного* стану ($\Delta(\lambda) < \Delta_{\max}$) матиме вигляд

$$T \left[\frac{9LK_1^2}{32} \cdot \frac{V_m(\boldsymbol{\sigma})}{Q^2(\boldsymbol{\sigma})} \right] = \sigma_m, \quad m = 0, \dots, n-1,$$

де V_m введено в (5.78).

Систему для визначення параметрів *граничного* стану ($\Delta(\lambda) = \Delta_{\max}$) отримаємо з другого виразу в (5.77):

$$\frac{L}{\pi} \Delta b \cdot V_0(\boldsymbol{\sigma}) = \Delta_{\max}, \quad T \left[\frac{L}{\pi} \Delta b \cdot V_m(\boldsymbol{\sigma}) \right] = \sigma_m, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Виключимо крок сітки з першого рівняння. Отримаємо

$$\bar{T} \left[\frac{V_m(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{V_0(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \right] = \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, n-1. \quad (5.79)$$

На основі співвідношення (5.79) можна зробити висновок про залежність відносного зчеплення тільки від параметрів форми.

Визначивши $\boldsymbol{\sigma}$ з (5.79), можна визначити критичне значення КІН

$$K_1^* = \frac{4}{3} Q(\boldsymbol{\sigma}) \sqrt{\frac{2\Delta_{\max}}{LV_0(\boldsymbol{\sigma})}}.$$

Відмітимо збіг отриманих результатів із результатами (5.38) і (5.39) для асимптотичного розв'язку. Дійсно, якщо покласти

$$V_m(\bar{\sigma}) = P'_m(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n a'_{mk} \bar{\sigma}_k,$$

$$\begin{aligned} a'_{m0} &= \frac{8}{3} y_m c_0 + a_{m0} = \\ &= \frac{8}{3} y_m (y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2} y_0) + t_{m1} - t_{m0} - q_m = t'_{m1} - t'_{m0} + q'_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{mk} &= \frac{8}{3} y_m c_k + a_{mk} = \\ &= \frac{8}{3} y_m (y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3) + t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} = \\ &= t'_{m(k-1)} - 2t'_{mk} + t'_{m(k+1)}, \end{aligned}$$

$$a'_{mn} = \frac{8}{3} y_m c_n + a_{mn} = \frac{8}{3} y_m y_{n-1}^3 + t'_{m(n-1)},$$

то

$$\begin{aligned} t'_{mk} &= \frac{8}{3} y_m y_k^3 + t_{mk} = \frac{1}{2} (m-k)^2 w_{mk} + (2n-m-k) y_m y_k, \\ q'_m &= 4y_m y_0 - q_m = m w_{m0} + 2y_m y_0, \end{aligned}$$

що збігається з параметрами аналогічних виразів (5.38).

Проаналізуємо три раніше введенні ЗЗВ (показниковий (5.63), два поліноміальні (5.70) і (5.71)), а також експоненційний закон у формі

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{\Delta}) &= (\bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_l \bar{\Delta}) \exp(-a \bar{\Delta}), \\ \Delta_{\max} &= \frac{\phi}{\sigma_{\max} \frac{\bar{\sigma}_l}{a} \left[\frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} + \frac{1}{a} - \left(\frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} + \frac{1}{a} + 1 \right) \exp(-a) \right]}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

де параметр $\bar{\sigma}_l$ визначається рівнянням

$$\exp\left(a \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} - 1\right) = \frac{a}{\bar{\sigma}_l}.$$

Всі ЗЗВ проілюстровано в першому рядку блоків на рис. 5.18.

Безрозмірна величина

$$\sqrt{\frac{L}{\phi_0}} K_I^* = \frac{4\sqrt{2} Q(\bar{\sigma})}{3\sqrt{V_0(\bar{\sigma})}} \quad (\phi_0 = \sigma_{\max} \Delta_{\max})$$

проілюстрована в другому рядку блоків на рис. 5.18. У третьому рядку рисунка проілюстровано безрозмірну характеристику

$$\frac{\beta_* - \lambda_*}{A} = \frac{n}{V_0(\bar{\sigma})}, \quad (5.81)$$

яка визначає граничне значення довжини зчеплення. Вираз у правій частині (5.81) залежить тільки від розмірності задачі n . Стала A залежить від головних параметрів ЗЗВ та пружного модуля:

$$A = \frac{\pi \Delta_{\max}}{L \sigma_{\max}}.$$

Для рівномірного ЗЗВ (ЗЗВ 1: $\alpha = 0$, $\Delta_{\max} = \phi / \sigma_{\max}$, $V_0(\bar{\sigma}) = 2$, $n = 1$) та $L = 10^{-9}$ Па $^{-1}$, $\phi = 600$ Н/м, стала A становить 2.1 мм і $\beta - \lambda = 1.05$ мм. Щоб зона зчеплення знаходилась у межах області К-домінації необхідно, щоб $\lambda < \beta < 1.07 \cdot \lambda$. Отже, для вказаних параметрів напівдовжина тріщини

$$\lambda > \frac{\beta - \lambda}{0.07} = 15 \text{ мм.}$$

Числові розв'язки на рис. 5.18 отримано шляхом лінеаризації системи (5.79). Якобіан системи $\mathbf{F}(\bar{\sigma}) = 0$,

$$\frac{\partial F_m}{\partial \bar{\sigma}_s} = \frac{d\bar{T}(\bar{\Delta}_m)}{d\bar{\Delta}} \cdot \frac{v_{ms} - v_{0s} \bar{\Delta}_m}{V_0(\bar{\sigma})} - \delta_{ms},$$

де δ_{ms} – символи Кронекера,

$$F_m(\bar{\sigma}) = \bar{T} \left[\frac{V_m(\bar{\sigma})}{V_0(\bar{\sigma})} \right] - \bar{\sigma}_m, \quad m = 1, \dots, n - 1.$$

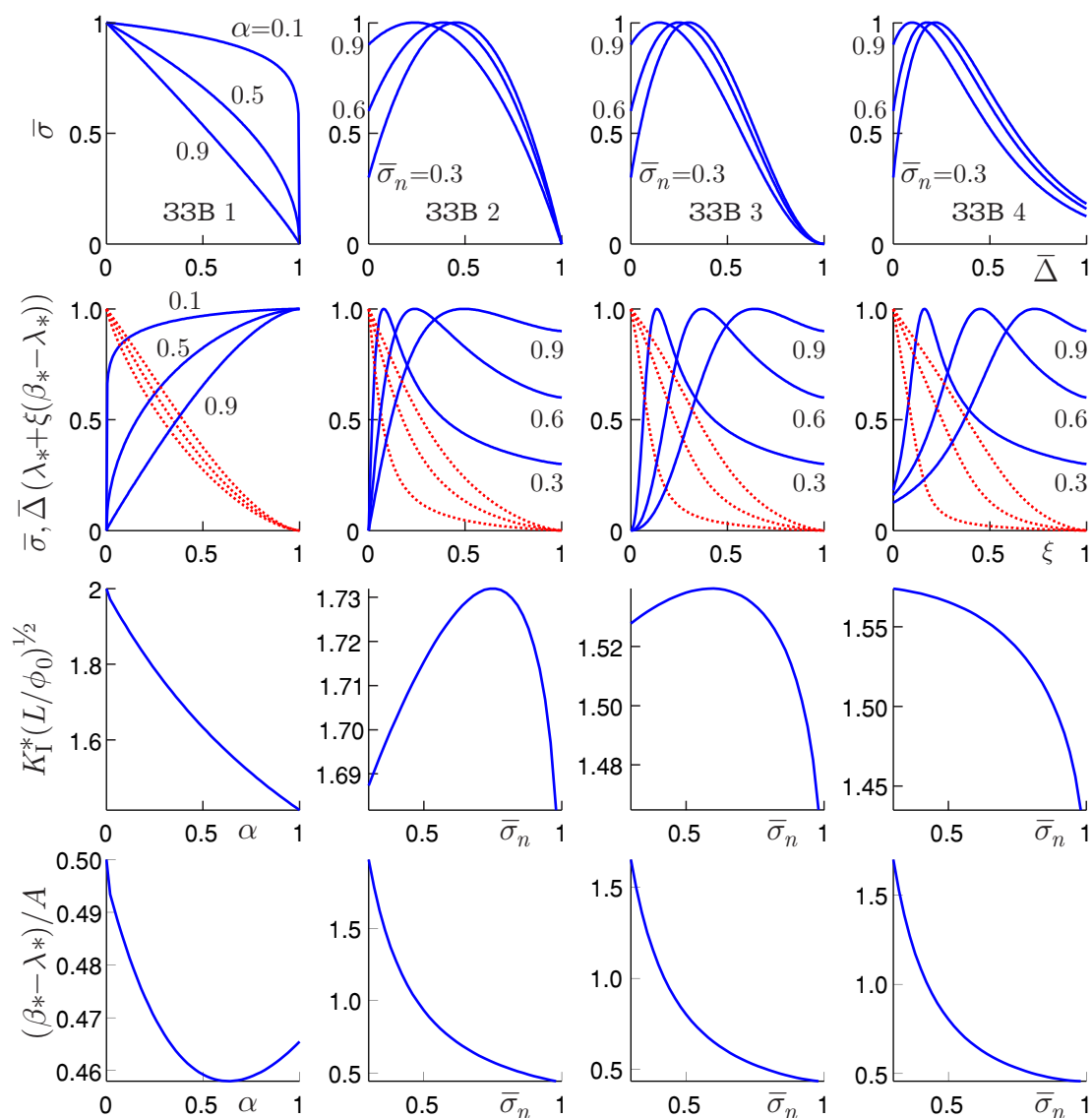


Рис. 5.18 – Чотири ЗЗВ та відповідні параметри руйнування ($\phi_0 = \Delta_{\max}\sigma_{\max}$)

5.4 Описання повільного зростання тріщини у в'язкопружному тілі на основі моделі зони зчеплення

Будемо досліджувати квазістатичне стійке зростання наявної в нескінченній пластині з в'язкопружного нестаріючого матеріалу до моменту прикладання навантаження тріщини нормального відриву в ізотермічних умовах. Поширення відбувається за сталих докритичних рівнів зовнішнього навантаження на нескінченності, σ_∞ внаслідок в'язкопружних властивостей матеріалу пластини. Розглядається зростання тріщини вздовж наперед ві-

домого шляху. Це обмеження дозволяє використовувати ЗЗВ з ділянкою зміцнення [89]. В розділі використовується гіпотеза незалежності ЗЗВ від швидкості повільного зростання тріщини.

У момент прикладання навантаження тріщина перебуває в докритичному стані – розкриття у вершині не перевищує граничного рівня: $\Delta(t = 0, \lambda) < \Delta_{\max}$. За рахунок повзучості величина $\Delta(t, \lambda)$ з часом сягає свого критичного значення Δ_{\max} , завершуючи інкубаційний період та ініціюючи початок зростання розміру тріщини. Як під час інкубаційного періоду, так і протягом квазістатичного зростання є справедливим ЗЗВ:

$$\sigma(t, x) = T[\Delta(t, x)], \quad \lambda(t) < x < \beta(t),$$

де $\Delta(t, x)$ – величина відриву тріщини довжиною $\lambda(t)$ з зоною зчеплення довжиною $\beta(t) - \lambda(t)$ у точці x (рис. 5.19); ця величина залежить від інтенсивності сил зчеплення $\sigma(t, x)$ та визначається розв'язком задачі лінійної в'язкопружності в інтегральній формі

$$\Delta(t, x) = \int_{-\infty}^t l(t - \tau) \tilde{\Delta}'_{\tau}[x, \lambda(\tau)] d\tau. \quad (5.82)$$

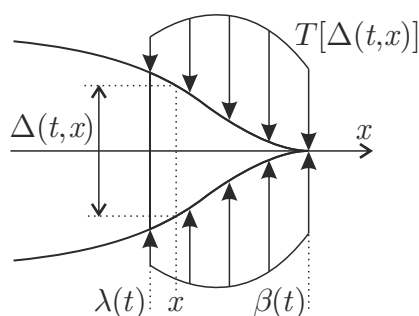


Рис. 5.19 – Параметри моделі

Якщо зовнішнє навантаження прикладене в момент часу $t = 0$

$$\Delta(t, x) = l(t) \tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] + \int_0^t l(t - \tau) \tilde{\Delta}'_{\tau}[x, \lambda(\tau)] d\tau, \quad (5.83)$$

$\tilde{\Delta}(t, x)$ – пружний розв’язок задачі, який містить миттєві в’язкопружні характеристики. Розв’язок (5.82) має бути знайденим за умови скінченності напружень у тілі; ця умова еквівалентна умові плавності змикання берегів тріщини

$$\tilde{\Delta}'_{\beta}[\beta(t), \lambda(t)] = 0.$$

Співвідношення (5.82) отримується за допомогою розв’язку відповідної задачі теорії пружності шляхом застосування принципу пружно-в’язкопружної відповідності.

Розглянемо пружну задачу з контурними умовами

$$\sigma^{\pm}(x) = -\sigma_{\infty} + \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k},$$

$$x \in (b_{k-1}, b_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\sigma^{\pm}(x) = -\sigma_{\infty}, \quad x \in (0, \lambda),$$

$$\sigma^{\pm}(-x) = \sigma^{\pm}(x), \quad \tau_{xy}^{\pm}(x) = 0, \quad x \in (-\beta, \beta),$$

де σ_k – величини зчеплення у вузлах його кусково-лінійного розподілу, $\Delta b_k = b_k - b_{k-1}$, $b_0 = \lambda$, $b_n = \beta$. Розв’язок задачі теорії пружності з такими контурними умовами записано в (5.15):

$$\bar{\Delta}(x) = A^{-1} \sum_{k=0}^n \bar{\sigma}_k J_k(x), \quad L = \frac{4}{E}, \quad A = \frac{\pi \Delta_{\max}}{L \sigma_{\max}}, \quad (5.84)$$

E – модуль Юнга матеріалу пластини; $\bar{\sigma}_k = \sigma_k / \sigma_{\max}$ – відносні зчеплення, які мають задовольняти умові скінченності напружень

$$\sum_{k=0}^n \bar{\sigma}_k N_k = B, \quad B = \frac{\pi \sigma_{\infty}}{2 \sigma_{\max}}. \quad (5.85)$$

Розв'язок (5.84) з урахуванням умови (5.85) для рівновіддалених вузлів сітки з точністю до величин порядку малості $[\beta - \lambda]^2$ можна записати наступним чином

$$\bar{\Delta}(b_m) = \frac{L}{D} \lambda \frac{P_m(\bar{\sigma})}{Q^2(\bar{\sigma})}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (5.86)$$

$$b_m = \lambda + m \cdot \Delta b, \quad \Delta b = \frac{9\lambda B^2}{8Q^2(\bar{\sigma})}, \quad D = \frac{32\sigma_{\max}\Delta_{\max}}{9\pi\sigma_{\infty}^2},$$

$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_0 \quad \bar{\sigma}_1 \quad \dots \quad \bar{\sigma}_n)$ – вектор відносних зчеплень у вузлах сітки;

$$P_m(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n a_{mk} \bar{\sigma}_k, \quad Q(\bar{\sigma}) = \sum_{k=0}^n c_k \bar{\sigma}_k,$$

$$a_{m0} = t_{m1} - t_{m0} + q_m,$$

$$a_{mk} = t_{m(k-1)} - 2t_{mk} + t_{m(k+1)} \quad (0 < k < n), \quad a_{mn} = t_{m(n-1)},$$

$$q_0 = 2n, \quad q_m = mw_{m0} + 2y_m y_0 \quad (0 < m < n), \quad q_n = 0,$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2}(m-k)^2 w_{mk} + (2n-k-m)y_m y_k, \quad (m < k < n),$$

$$t_{mn} = 0, \quad t_{mm} = 2(n-m)^2, \quad t_{km} = t_{mk},$$

$$c_0 = y_1^3 - y_0^3 + \frac{3}{2}y_0, \quad c_k = y_{k-1}^3 - 2y_k^3 + y_{k+1}^3 \quad (0 < k < n), \quad c_n = 1,$$

$$y_k = \sqrt{n-k}, \quad w_{mk} = \ln \left| \frac{y_k - y_m}{y_k + y_m} \right|.$$

Для пружного розв'язку (5.86) запишемо його в'язкопружний аналог у формі (5.83). Скориставшись принципом пружно-в'язкопружної відповідності, знайдемо

$$L(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s^2 \mathcal{L}\{E(t)\}} \right\},$$

де \mathcal{L} та \mathcal{L}^{-1} – пряме та обернене перетворення Лапласа, $E(t)$ – характеристика релаксації матеріалу (в'язкопружний аналог модуля Юнга). Отже, в'язкопружний аналог виразу (5.86) матиме вигляд

$$\Delta[t, b_m(t)] = l(t) \tilde{\Delta}[b_m(t), \lambda(0)] + \int_0^t l(t - \tau) \tilde{\Delta}'[b_m(t), \lambda(\tau)] d\tau. \quad (5.87)$$

В кожний момент часу напружено-деформований стан в околі тріщини визначається системою рівнянь

$$\bar{T}(\bar{\Delta}[t, b_m(t)]) = \bar{\sigma}[t, b_m(t)], \quad m = 1, \dots, n, \quad (5.88)$$

де $\bar{T}(\bar{\Delta}) = T(\bar{\Delta})/\sigma_{\max}$, $\bar{\Delta} = \Delta/\Delta_{\max}$.

Протягом інкубаційного періоду довжина тріщини не змінюється ($b_0(t)$ дорівнює початковому розміру тріщини) – система (5.88) має невідомими величини $\bar{\sigma}[t, b_m(t)]$, $m = 0, \dots, n$. При зростанні тріщини невідомими системи (5.88) буде $b_0(t)$ та $\bar{\sigma}[t, b_m(t)]$, $m = 1, \dots, n$.

Будемо розв'язувати систему (5.88) у моменти часу $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, \dots$. Введемо позначення $b_{i,j} = b_j(t_i)$ – координата j -го вузла сітки в момент часу t_i . Тоді (див. рис. 5.20)

$$\tilde{\Delta}'[b_{k,m}, \lambda(\tau)] = \frac{\tilde{\Delta}[b_{k,m}, \lambda(t_i)] - \tilde{\Delta}[b_{k,m}, \lambda(t_{i-1})]}{\Delta t}, \quad t_{i-1} \leq \tau \leq t_i,$$

$$\begin{aligned}\Delta t \cdot \Lambda_{kI} &= \int_{\omega}^{t_I} l(t_k - \tau) d\tau, \\ \Delta t \cdot \Lambda_{ki} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) d\tau, \quad i = I + 1, \dots, k.\end{aligned}$$

Якщо, наприклад, характеристика повзучості $l(t)$ знайдена у формі (3.55), то

$$\begin{aligned}\Lambda_{kI} &= l_{\infty} - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\eta_r(k - I)\Delta t) - \exp(-\eta_r[t_k - \omega])}{\eta_r(t_k - \omega)}, \\ \Lambda_{ki} &= l_{\infty} - \sum_r \frac{\xi_r \exp(-\eta_r(k - i)\Delta t) [1 - \exp(-\eta_r\Delta t)]}{\eta_r\Delta t}.\end{aligned}$$

Отже, у кожний момент часу t_k визначальна система (5.88) для параметрів напружено-деформованого стану набуде вигляду

$$\begin{aligned}\bar{T} \left\{ l(t_k) \tilde{\Delta}(0, b_{k,m}) + \Lambda_{kI} \tilde{\Delta}(t_I, b_{k,m}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=I+1}^k \Lambda_{ki} [\tilde{\Delta}(t_i, b_{k,m}) - \tilde{\Delta}(t_{i-1}, b_{k,m})] \right\} = \bar{\sigma}_{k,m}, \quad (5.90) \\ m = 0, \dots, n - 1,\end{aligned}$$

де $\sigma_{k,m} = \sigma_m(t_k)$, а індекс I залежить від положення точки $(t_k, b_{k,m})$ на площині час-координата та визначається з (5.89). Невідомими системи (5.90) є величини $\bar{\sigma}_{k,0}, \bar{\sigma}_{k,1}, \dots, \bar{\sigma}_{k,n-1}$, якщо $\bar{\Delta}_{k,0} < 1$ і величини $\bar{\sigma}_{k,1}, \bar{\sigma}_{k,2}, \dots, \bar{\sigma}_{k,n-1}, b_{k,0}$ у випадку, коли $\bar{\Delta}_{k,0} = 1$.

Для числової ілюстрації отриманих розв'язків використаємо експоненційній ЗЗВ (5.80). Закон містить два параметри форми: параметр $\bar{\sigma}_n = \bar{T}(0)$ і параметр a , що характеризує величину зчеплення при $\bar{\Delta} = 1$. На рис. 5.21 наведені вузли сітки $(t_i, b_{i,j})$ у площині час-координата, отримані для задачі з наступними параметрами: а) параметри в'язкопружності – $E = 4$ ГПа,

$l_\infty = 2$, $\eta_1 = 0.01 \text{ сек}^{-1}$; б) параметри тріщиностійкості – $\sigma_{\max} = 30 \text{ МПа}$, $\phi = 600 \text{ Н/м}$; в) параметри форми ЗЗВ – $\bar{\sigma}_n = 0.9$, $a = 6$; г) геометричні та силові параметри – початкова напівдовжина тріщини $b_0(0) = 3.5 \text{ мм}$, $\sigma_\infty = 6 \text{ МПа}$; д) параметри дискретизації – $n = 20$, $\Delta t = 7 \text{ сек}$.

На рис. 5.22 зображені: а) використаний для побудови розв'язку ЗЗВ та точки, що відповідають відриву і зчепленню у вершині тріщини в моменти часу t_k , б) розподіл відносного зчеплення в моменти часу t_k ; в) відносний відрив у моменти часу t_k ; г) функція повзучості $l(t)$ та її значення в моменти часу t_k .

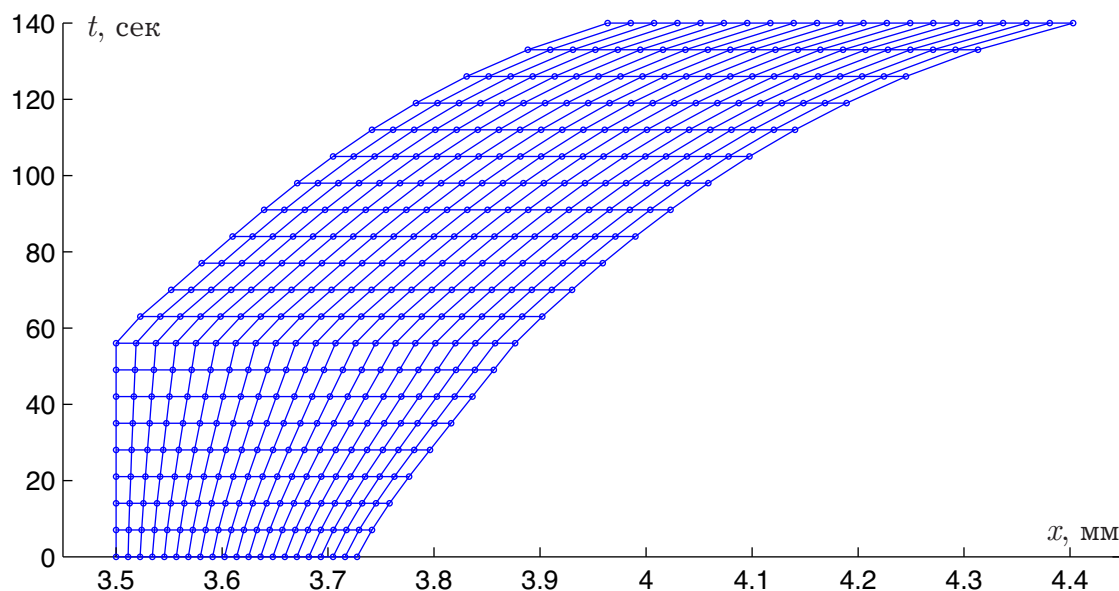


Рис. 5.21 – Положення вузлів кусково-лінійного розподілу зчеплення в дискретні моменти часу

5.5 Використання сингулярних інтегральних рівнянь при дослідженні докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною в рамках моделі зони зчеплення

Модель тріщини з зоною зчеплення, вперше запропонована Баренблатом, Леоновим і Панасюком, успішно використовується в аналітичних та числових дослідженнях стану граничної рівноваги тріщини в крихких, нелінійно-пружних та в'язкопружних матеріалах. Зона зчеплення моделює частково

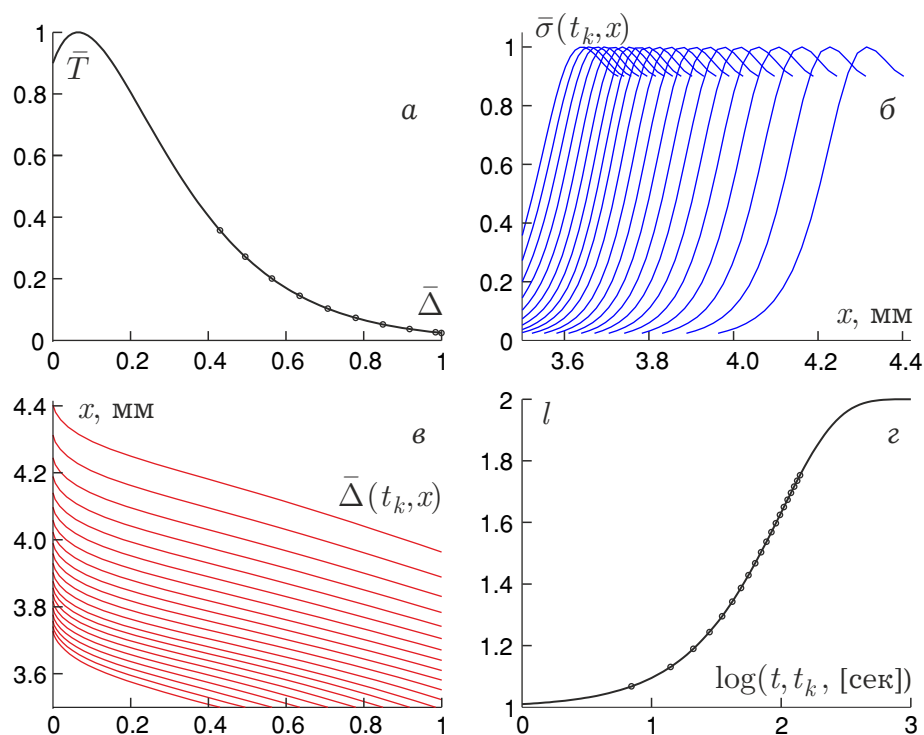


Рис. 5.22 – ЗЗВ (а), зчеплення (б) та відрив (в) на часовій сітці, ядро інтегрального рівняння повільного зростання тріщини (г)

зруйновану ділянку біля фронту тріщини. Залежність зчеплення від відриву на продовженні тріщини представляється нелінійним співвідношенням, у той час як матеріал поза зоною зчеплення вважається лінійно-пружним.

Нормальний відрив. Розглянемо задачу з прямолінійною тріщиною напівдовжини λ з зонами зчеплення на продовженнях її лінії (рис. 5.23). Довжини зон зчеплення наперед невідомі й мають бути визначені з умови скінченності напружень.

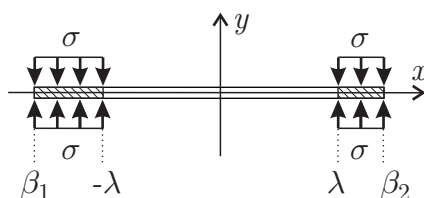


Рис. 5.23 – Параметри моделі: $\pm\lambda$ – вершини тріщини, $\beta_{1,2}$ – вершини зон зчеплення

Контурні умови задачі

$$\sigma^\pm(x) = -\tilde{\sigma}(x) + T[\Delta(x)], \quad \beta_1 < x < \beta_2,$$

де $\tilde{\sigma}$ – напруження, що діє на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини, T – зчеплення, Δ – відрив. Дві останні величини пов'язані заданим ЗЗВ. Функція $T(\Delta)$ визначає ЗЗВ, $T(\Delta) = 0$ при $\Delta < 0$ $\Delta > \Delta_{\max}$ (Δ_{\max} – граничне значення відриву, що визначається параметрами ЗЗВ). Розглядатимемо такі $T(\Delta)$, що забезпечують ненульове зчеплення при нульовому відриві – $T(0) = \sigma_n > 0$, причому напруження σ_n є достатньо великим для того, щоб забезпечити умову відсутності перекриття берегів.

Також у постановку задачі включаємо умову обмеженості напружень у тілі, яка еквівалентна умові плавності змикання берегів:

$$\Delta'(\beta_{1,2}) = 0.$$

Якщо досліджується критичний стан, у постановку додається рівняння

$$\max\{\Delta(\pm\lambda)\} = \Delta_{\max}.$$

Далі розглянемо модифіковану постановку, яка дозволить лінеаризувати визначальну систему (рис. 5.24):

$$\sigma^\pm(x) = -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \quad |x| < 2\lambda, \quad (5.91)$$

$$\hat{T}(\Delta) = \begin{cases} T(\Delta), & \Delta \geq 0 \\ P(\Delta), & \Delta < 0 \end{cases}, \quad (5.92)$$

додаткове напруження $\hat{\sigma}(x)$ знаходиться з умови $\Delta(x) \geq 0$.

Розв'язок задачі з контурними умовами (5.91) шукатимемо для $|x| < 2\lambda$; цей проміжок має напевне містити вершини зон зчеплення. Розв'язок

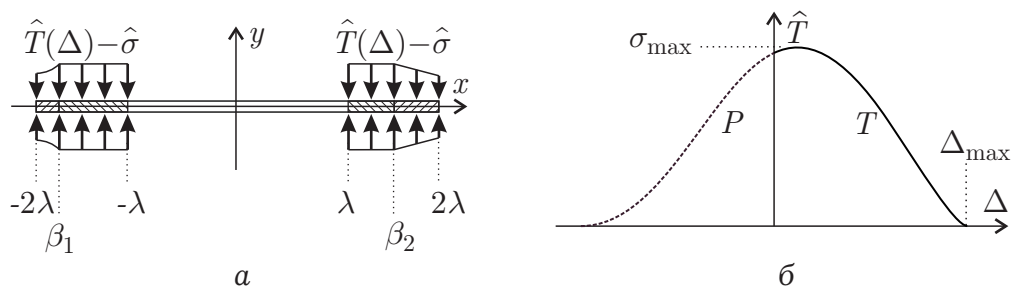


Рис. 5.24 – Модифікована постановка (а) і продовжений на від'ємний відрив ЗЗВ (б)

поставленої задачі дається інтегральним рівнянням

$$\frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{g(t)dt}{t-x} = -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x),$$

яке треба розв'язати в системі з рівнянням

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} g(t)dt = 0,$$

що випливає з умови однозначності переміщень. Функції g і Δ пов'язані співвідношенням

$$\Delta(x) = L \int_{-2\lambda}^x g(t)dt.$$

Отже, для докритичного стану розв'язок задачі – функція $g(x)$ ($|x| < 2\lambda$) – визначається системою

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{g(t)dt}{t-x} &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}\left[L \int_{-2\lambda}^x g(t)dt\right] - \hat{\sigma}(x) \\ \int_{-2\lambda}^{2\lambda} g(t)dt &= 0, \quad \int_{-2\lambda}^x g(t)dt \geq 0. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Якщо досліджується критичний стан, система (5.93) доповнюється рівнянням

$$L \cdot \max \int_{-2\lambda}^{\pm\lambda} g(t)dt = \Delta_{\max}.$$

Перепишемо систему (5.93) після заміни змінних $t = 2\lambda\tau$, $x = 2\lambda\xi$ ($|\tau|, |\xi| < 1$) та перепозначення $g(2\lambda\tau)$ через $g(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - \xi} &= -\tilde{\sigma}(2\lambda\xi) + \hat{T} \left[2\lambda L \int_{-1}^{\xi} g(\tau) d\tau \right] - \hat{\sigma}(2\lambda\xi) \\ \int_{-1}^1 g(\tau) d\tau &= 0, \quad \int_{-1}^x g(\tau) d\tau \geq 0. \end{aligned} \quad (5.94)$$

При дослідженні граничного стану систему (5.94) доповнюємо рівнянням

$$2\lambda L \cdot \max \left\{ \int_{-1}^{\pm 1/2} g(\tau) d\tau \right\} = \Delta_{\max}.$$

Функцію щільності розкриття $g(\xi)$ знайдемо в кусково-лінійній формі

$$\Delta b \cdot g_k(\xi) = (\xi - b_k)g_{k+1} + (b_{k+1} - \xi)g_k, \quad b_k < \xi < b_{k+1},$$

де квадратурні точки

$$b_k = -1 + (k - 1) \cdot \Delta b \quad (k = 1, \dots, n + 1), \quad \Delta b = 2/n.$$

Після інтегрування система для визначення дискретної щільності розкриття, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{n+1})^T$, що відповідає граничному стану, набуде вигляду

$$\begin{aligned} J\mathbf{g} &= -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{T}(2\lambda L W \mathbf{g}) - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ N\mathbf{g} &= 0, \quad W\mathbf{g} \geq 0, \quad 2\lambda L V_p \mathbf{g} = \Delta_{\max}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Першому виразу в (5.95) відповідає n рівнянь, що будують розв'язок інтегрального рівняння в точках колокації $\eta_m = b_m + \frac{1}{2}\Delta b$ ($m = 1, \dots, n$), другому – умова однозначності переміщень, третьому – умова невід'ємності

відриву, четвертому – умова досягнення граничного стану (індекс p відповідає квадратурній точці, що збігається з положенням вершини фізичної тріщини). В (5.95) елементами вектора $\tilde{\sigma}$ є величини $\tilde{\sigma}(\eta_m)$ ($m = 1, \dots, n$), W і V – матриці, за допомогою яких визначаються розкриття в точках колокації та квадратурних точках відповідно. Вектор \mathbf{N} та матриця W наведені в (3.70),

$$V_{(n+1) \times (n+1)} = \frac{2}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

елементи матриці $J_{n \times (n+1)}$, $j_{mk} = J_k(\eta_m)$, а функції J наведені в (3.71). Зазначимо, що матриці J , W , V і вектор \mathbf{N} залежать тільки від кількості інтервалів сітки n .

Система (5.95) не містить невідомих положень вершини зон зчеплення. Включення параметрів $\beta_{1,2}$ у систему практично унеможливорює легку її лінеаризацію. Цю умову можна задовольнити наближено за допомоги ітеративної процедури, яка буде наведена та проілюстрована нижче.

У разі парності функції $\tilde{\sigma}(x)$, функція $g(x)$ є непарною – умова однозначності переміщень виконується автоматично. Квадратурні точки $b_k = -1 + (k-1) \cdot \Delta b$ ($k = 1, \dots, n$, $\Delta b = 1/n$), матриці W і V набувають вигляду

$$V_{n \times n} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$W_{n \times n} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 7/8 & 1/8 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 7/8 & 1/8 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 7/8 \end{pmatrix},$$

елементи матриці $J_{n \times n}$, $j_{mk} = J_k(\eta_m) + J_k(-\eta_m)$.

Опишемо ітеративну процедуру розв'язання системи (5.95) з урахуванням вимоги плавності змикання берегів. Згідно з (5.92), довізначимо функцію T для від'ємних значень аргументу:

$$\hat{T}(\Delta) = \begin{cases} T(\Delta), & 0 \leq \Delta \leq 1 \\ P_3(\Delta), & -1 \leq \Delta < 0 \\ 0, & \Delta < -1 \end{cases},$$

коефіцієнти полінома P_3 можна визначити з умов

$$P_3(0) = T(0), \quad P_3'(0) = T'(0), \quad P_3(-1) = P_3'(-1) = 0.$$

На першому кроці ітеративної процедури позначимо

$$M = \{m : 1 \leq m < p - p_x\}, \quad P = \{m : p - p_x \leq m \leq n\},$$

де індекс p відповідає квадратурній точці, що збігається з $-\lambda$ (див. рис. 3.37). Індекс $p_x \geq 1$ визначає кількість точок колокації в зоні зчеплення; цей параметр обумовлює точність початкового наближення.

Розв'яжемо систему

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_m \mathbf{g} &= 0, \quad m \in M \\
\mathbf{J}_m \mathbf{g} &= -\tilde{\sigma} + \hat{T}(2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{g}), \quad m \in P \\
2\lambda L \mathbf{V}_p \mathbf{g} &= \Delta_{\max},
\end{aligned} \tag{5.96}$$

елементи векторів-рядків \mathbf{J}_m , \mathbf{W}_m , \mathbf{V}_m є елементами m -го рядка матриць J , W і V відповідно.

Обчислимо \mathbf{g} і параметр граничного навантаження з (5.96) та оцінимо елементи вектора допоміжного напруження, яке унеможливилює від'ємний відрив,

$$\hat{\sigma} = -J\mathbf{g} - \tilde{\sigma} + \hat{T}(2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{g}).$$

Перепозначимо $M = \{m : \hat{\sigma}_m \geq 0\}$, $P = \{m : \hat{\sigma}_m < 0\}$ і продовжимо ітеративну процедуру, доки всі елементи $\hat{\sigma}$ не стануть невід'ємними.

Розглянемо чотири ЗЗВ: степеневий, два поліноміальних та експоненційний. Запишемо закони у формі для відносних величин зчеплення $\bar{T} = T/\sigma_{\max}$ та відриву $\bar{\Delta} = \Delta/\Delta_{\max}$. Перший закон відповідає зовнішній моделі, три останніх ЗЗВ отримано введенням лінійного множника $\bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_l \bar{\Delta}$ у закони для внутрішніх моделей, що використовуються при дослідженні міжшарових тріщин [154]. Цей множник забезпечує ненульове зчеплення за нульового відриву. При дослідженні руйнування суцільного матеріалу введення множника унеможливилює перекриття берегів тріщини за наявності у постановці задачі умови плавності змикання берегів.

ЗЗВ 1:

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (1 - \bar{\Delta})^\alpha, \quad \Delta_{\max} = \frac{(\alpha + 1)\phi}{\sigma_{\max}}.$$

ЗЗВ 2:

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n)(1 - \bar{\Delta}), \quad \Delta_{\max} = \frac{3\phi}{\sigma_{\max}(1 + \bar{\sigma}_n + \sqrt{1 - \bar{\sigma}_n})}, \quad (5.97)$$

$\bar{\sigma}_l$ визначається рівнянням

$$\max\{\bar{T}(\bar{\Delta})\} = 1, \quad (5.98)$$

звідки

$$\bar{\sigma}_l = 2 - \bar{\sigma}_n + 2\sqrt{1 - \bar{\sigma}_n}.$$

Для цього ЗЗВ $P_3(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l - 3\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^3 + (2\bar{\sigma}_l - 5\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^2 + (\bar{\sigma}_l - \bar{\sigma}_n)\bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n$.

ЗЗВ 3:

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n)(1 - \bar{\Delta})^2, \quad \Delta_{\max} = \frac{12\phi}{\sigma_{\max}(\bar{\sigma}_l + 4\bar{\sigma}_n)}, \quad (5.99)$$

$\bar{\sigma}_l$ визначається умовою (5.98), яка для даного ЗЗВ приймає вигляд

$$\frac{4}{27}\bar{\sigma}_l \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l}\right)^3 = 1.$$

Також для цього ЗЗВ $P_3(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l - 4\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^3 + (2\bar{\sigma}_l - 7\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^2 + (\bar{\sigma}_l - 2\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n$.

ЗЗВ 4:

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_l \bar{\Delta}) \exp(-a\bar{\Delta}),$$

$$\Delta_{\max} = \frac{\phi}{\sigma_{\max} \frac{\bar{\sigma}_l}{a} \left[\frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} + \frac{1}{a} - \left(\frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} + \frac{1}{a} + 1 \right) \exp(-a) \right]},$$

параметр $\bar{\sigma}_l$ визначається рівнянням

$$\exp\left(a\frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} - 1\right) = \frac{a}{\bar{\sigma}_l}.$$

Для цього ЗЗВ $P_3(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l - (a+2)\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^3 + (2\bar{\sigma}_l - (2a+3)\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta}^2 + (\bar{\sigma}_l - a\bar{\sigma}_n)\bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n$.

Всі чотири ЗЗВ проілюстровано в першому рядку на рис. 5.25, де також подані параметри граничного стану як функції параметра форми α для першого закону та $\bar{\sigma}_n$ – для трьох наступних.

Результати свідчать про те, що параметри форми несуттєво впливають на параметри граничного стану (останній рядок блоків). Найбільше відхилення від середнього рівня (2.5%) має місце для показникового ЗЗВ. Для цього закону спостерігається збільшення довжини зчеплення зі зростанням параметра форми α . Для трьох ЗЗВ з ділянкою зміцнення спостерігається зменшення довжини зчеплення зі збільшенням початкового рівня зчеплення, що описується параметром форми $\bar{\sigma}_n$.

На рис. 5.26 проілюстровано кроки ітеративної процедури, що застосовується для розв'язання системи (5.95).

Покажемо як впливає на параметр стану граничної рівноваги відсутність умови скінченності напружень у постановці задачі. Для ілюстрації використаємо трапецоїдальний ЗЗВ (рис. 5.27 з)

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = \begin{cases} \frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_1}, & \bar{\Delta} \in [0, \bar{\Delta}_1] \\ 1, & \bar{\Delta} \in (\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2] \\ \frac{1 - \bar{\Delta}}{1 - \bar{\Delta}_2}, & \bar{\Delta} \in (\bar{\Delta}_2, 1] \end{cases}, \quad \Delta_{\max} = \frac{2}{2 - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2} \cdot \frac{\phi}{\sigma_{\max}}.$$

Довжину зчеплення визначимо параметром k :

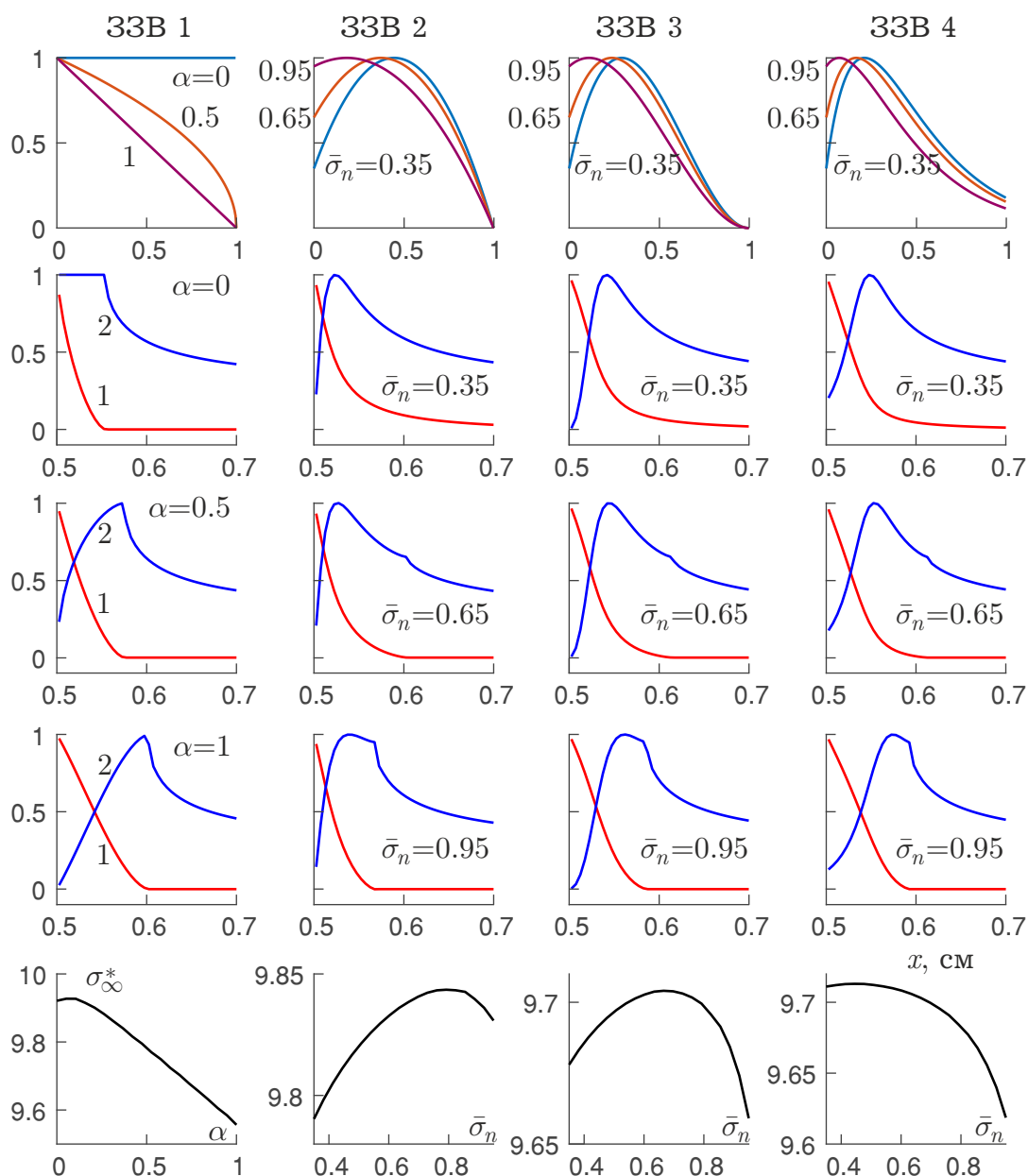


Рис. 5.25 – Параметри критичного стану, отримані при $\sigma = 35$ МПа, $\phi = 400$ Н/м, $E = 4 \cdot 10^3$ МПа, $n = 200$. 1 – відносний відрив, 2 – відносно зчеплення без допоміжного напруження

$$\ell = k \frac{K_I^2}{\sigma_{\max}^2}, \quad K_I = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi \lambda},$$

$k = \pi/8$ для моделі з рівномірним ЗЗВ. Для декількох значень цього коефіцієнта на рис. 5.27 а,б наведені відповідно розкриття вздовж всього відрізка розташування тріщини та лише зони зчеплення. Розв'язки побудовано класичним методом механіки тріщин [108]. Функція щільності розкриття

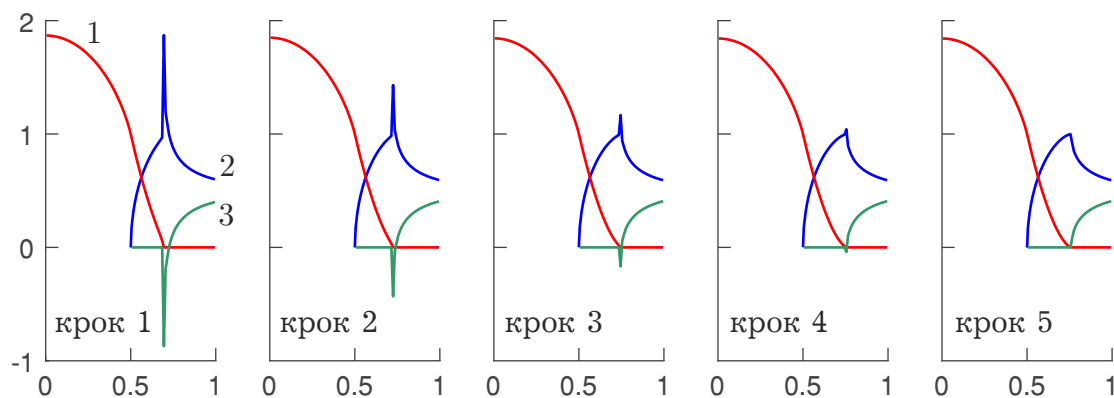


Рис. 5.26 – Кроки числово-аналітичного методу ($\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\phi = 500$ Н/м, $\alpha = 0.5$, $E = 10^4$ МПа, $n = 200$, 1 – відносний відрив, 2 – відносно зчеплення без допоміжного напруження, 3 – відносно допоміжне напруження)

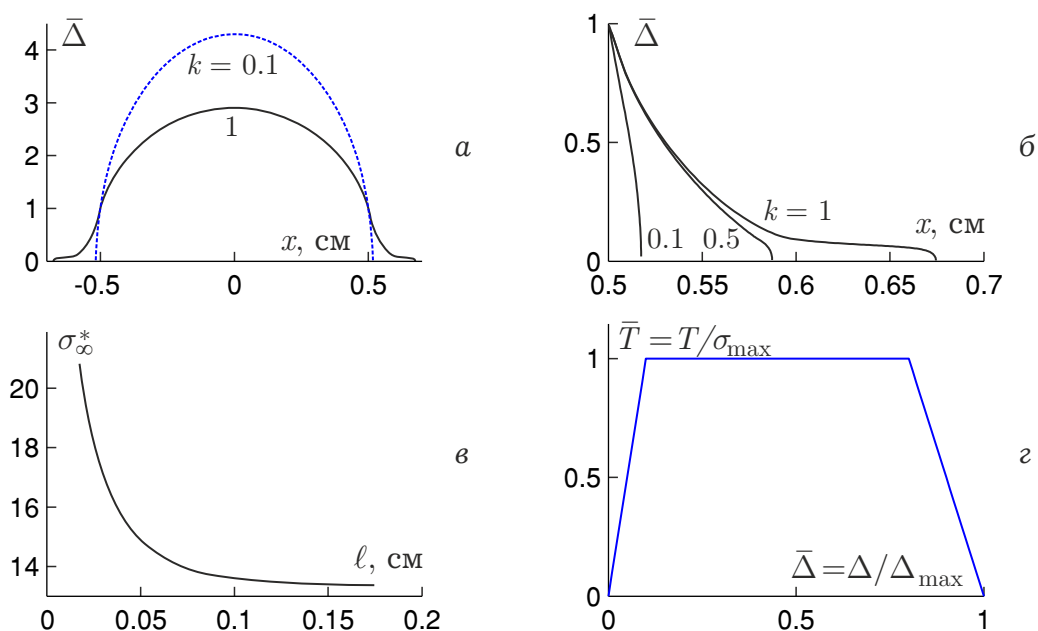


Рис. 5.27 – Розкриття (а), розкриття в зоні зчеплення (б), граничний рівень навантаження (в), трапеціодальний ЗЗВ (г) ($\bar{\Delta}_1 = 0.1$, $\bar{\Delta}_2 = 0.8$, $\phi = 200$ Н/м)

знайдена у формі полінома Чебишева I роду з ваговою функцією, що забезпечує необхідну сингулярність в кінцях відрізка розташування модельної тріщини.

Рис. 5.27 в дозволяє простежити суттєву залежність параметра критичного стану від довжини зчеплення ℓ . Визначення ℓ з умови обмеженості напружень в тілі дозволяє уникнути такої невизначеності.

Змішаний режим руйнування. Розглянемо задачу з прямолінійною тріщиною напівдовжини λ з зонами передруйнування (рис. 5.28). Параметри складної зони зчеплення, яка моделює зону передруйнування, наперед невідомі й мають бути визначені з умови скінченності напружень.

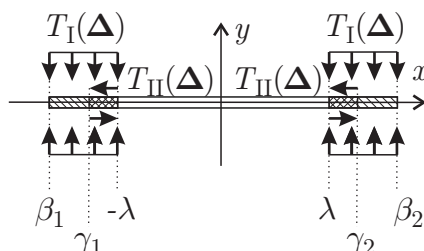


Рис. 5.28 – Параметри моделі: $T[\Delta(x)]$ – зчеплення, $\pm\lambda$ – вершини тріщини (хвости зон зчеплення), $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ – вершини зон нормального та зсувних зчеплень

Контурні умови задачі

$$\sigma^{\pm}(x) = -\tilde{\sigma}(x) + T_I[\Delta(x)], \quad \beta_1 < x < \beta_2,$$

$$\tau^{\pm}(x) = -\tilde{\tau}(x) + T_{II}[\Delta(x)], \quad \gamma_1 < x < \gamma_2,$$

$\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ – напруження, що діють на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини, $\Delta = (\Delta_I, \Delta_{II})$, T_I , T_{II} – нормальне і зсувне зчеплення, Δ_I , Δ_{II} – відповідні відриви. Величини зчеплення й відривів пов'язані за допомогою ЗЗВ,

$$T_I(\Delta) = T_{II}(\Delta) = 0, \quad \Delta \notin \Xi, \tag{5.100}$$

$$\Xi = \{\Delta = (\Delta_I, \Delta_{II}) : 0 \leq \Delta_I \leq \Delta_I^*, \quad 0 \leq \Delta_{II} \leq \Delta_{II}^*\},$$

Δ_I^* , Δ_{II}^* – граничні значення відривів, які визначаються параметрами ЗЗВ.

Функції T_I і T_{II} визначають ЗЗВ. Розглядатимемо зовнішні ЗЗВ, тобто такі, що забезпечують максимальне зчеплення при нульовому відриві ($T_I(0) = \sigma_{\max}$, $T_{II}(0) = \tau_{\max}$).

Також до постановки задачі включаємо умову плавності змикання берегів, яка еквівалентна умові обмеженості напружень у тілі,

$$\Delta'_I(\beta_{1,2}) = 0, \quad \Delta'_II(\gamma_{1,2}) = 0, \quad \Delta_{II}(x) = 0, \quad x \in (\beta_1, \gamma_1) \cup (\gamma_2, \beta_2).$$

Розглянемо модифіковану постановку (рис. 5.29), яка дозволить лінеаризацію визначальної системи після дискретизації

$$\begin{aligned} \sigma^\pm(x) &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}_I[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x), \\ \tau^\pm(x) &= -\tilde{\tau}(x) + \hat{T}_{II}[\Delta(x)] - \hat{\tau}(x) \end{aligned}, \quad |x| < 2\lambda, \quad (5.101)$$

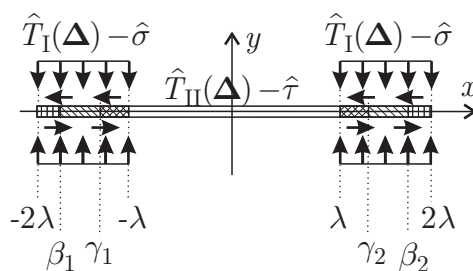


Рис. 5.29 – Параметри модифікованої постановки

$$\hat{T}_I(\Delta) = \begin{cases} T_I(\Delta), & \Delta \in \Xi \\ P_I(\Delta), & \Delta_I < 0 \vee \Delta_{II} < 0 \end{cases},$$

$$\hat{T}_{II}(\Delta) = \begin{cases} T_{II}(\Delta), & \Delta \in \Xi \\ P_{II}(\Delta), & \Delta_I < 0 \vee \Delta_{II} < 0 \end{cases},$$

$$\Xi = \{\Delta = (\Delta_I, \Delta_{II}) : 0 \leq \Delta_I \leq \Delta_I^*, \quad 0 \leq \Delta_{II} \leq \Delta_{II}^*\}.$$

Розв'язок задачі з контурними умовами (5.101) шукатимемо для $|x| < 2\lambda$; цей проміжок напевне міститиме вершини зон зчеплення. Розв'язок поставленої задачі дається системою інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{g(t)dt}{t-x} &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}_I[\Delta(x)] - \hat{\sigma}(x) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{h(t)dt}{t-x} &= -\tilde{\tau}(x) + \hat{T}_{II}[\Delta(x)] - \hat{\tau}(x),\end{aligned}$$

яку треба доповнити рівняннями

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} g(t)dt = 0, \quad \int_{-2\lambda}^{2\lambda} h(t)dt = 0,$$

що є умовами однозначності переміщень. Розкриття та їх щільності пов'язані співвідношеннями

$$\Delta_I(x) = L \int_{-2\lambda}^x g(t)dt, \quad \Delta_{II}(x) = L \int_{-2\lambda}^x h(t)dt.$$

Отже, для докритичного стану розв'язок задачі – функції $g(x)$ і $h(x)$ ($|x| < 2\lambda$) – визначається системою

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{g(t)dt}{t-x} &= -\tilde{\sigma}(x) + \hat{T}_I \left[L \int_{-2\lambda}^x g(t)dt, L \int_{-2\lambda}^x h(t)dt \right] - \hat{\sigma}(x) \\ \int_{-2\lambda}^{2\lambda} g(t)dt &= 0, \quad \int_{-2\lambda}^x g(t)dt \geq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{h(t)dt}{t-x} &= -\tilde{\tau}(x) + \hat{T}_{II} \left[L \int_{-2\lambda}^x g(t)dt, L \int_{-2\lambda}^x h(t)dt \right] - \hat{\tau}(x) \\ \int_{-2\lambda}^{2\lambda} h(t)dt &= 0, \quad \int_{-2\lambda}^x h(t)dt \geq 0.\end{aligned} \tag{5.102}$$

Якщо досліджується критичний стан, система (5.102) доповнюється рівнянням

$$L \cdot \max \left\{ \frac{1}{\Delta_I^*} \int_{-2\lambda}^{\pm\lambda} g(t)dt, \frac{1}{\Delta_{II}^*} \int_{-2\lambda}^{\pm\lambda} h(t)dt \right\} = 1.$$

Перепишемо отримані рівняння після заміни змінних $t = 2\lambda\tau$, $x = 2\lambda\xi$

($|\tau|, |\xi| < 1$) та перепозначення $g(2\lambda\tau)$ через $g(\tau)$ і $h(2\lambda\tau)$ через $h(\tau)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - x} &= -\tilde{\sigma}(2\lambda\xi) + \\
 &+ \hat{T}_I \left[2\lambda L \int_{-1}^{\xi} g(\tau) d\tau, 2\lambda L \int_{-1}^{\xi} h(\tau) d\tau \right] - \hat{\sigma}(2\lambda\xi) \\
 \int_{-1}^1 g(\tau) d\tau &= 0, \quad \int_{-1}^{\xi} g(\tau) d\tau \geq 0 \\
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - \xi} &= -\tilde{\tau}(2\lambda\xi) + \\
 &+ \hat{T}_{II} \left[2\lambda L \int_{-1}^{\xi} g(\tau) d\tau, 2\lambda L \int_{-1}^{\xi} h(\tau) d\tau \right] - \hat{\tau}(2\lambda\xi) \\
 \int_{-1}^1 h(\tau) d\tau &= 0, \quad \int_{-1}^{\xi} h(\tau) d\tau \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.103}$$

При дослідженні критичного стану система (5.103) доповнюється рівняннями

$$2\lambda L \cdot \max \left\{ \frac{1}{\Delta_I^*} \int_{-1}^{\pm 1/2} g(\tau) d\tau, \frac{1}{\Delta_{II}^*} \int_{-1}^{\pm 1/2} h(\tau) d\tau \right\} = 1.$$

Функції щільностей розкриття g і h шукаються у формі кусково-лінійних функцій

$$\begin{Bmatrix} g_k(\xi) \\ h_k(\xi) \end{Bmatrix} = \frac{\xi - b_k}{\Delta b} \begin{Bmatrix} g_{k+1} \\ h_{k+1} \end{Bmatrix} + \frac{b_{k+1} - \xi}{\Delta b} \begin{Bmatrix} g_k \\ h_k \end{Bmatrix},$$

де квадратурні точки

$$b_k = -1 + (k - 1) \cdot \Delta b, \quad k = 1, \dots, n + 1, \quad \Delta b = 2/n.$$

Після інтегрування система для визначення $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{n+1})^T$ і $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_{n+1})^T$ у граничному стані набуде вигляду

$$\begin{aligned}
J\mathbf{g} &= -\tilde{\sigma} + \hat{T}_I(2\lambda LW\mathbf{g}, 2\lambda LW\mathbf{h}) - \hat{\sigma}, & \mathbf{N}\mathbf{g} &= 0, & W\mathbf{g} &\geq 0 \\
J\mathbf{h} &= -\tilde{\tau} + \hat{T}_{II}(2\lambda LW\mathbf{g}, 2\lambda LW\mathbf{h}) - \hat{\tau}, & \mathbf{N}\mathbf{h} &= 0, & W\mathbf{h} &\geq 0 \\
2\lambda L \max\{\mathbf{V}_p\mathbf{g}/\Delta_I^*, \mathbf{V}_p\mathbf{h}/\Delta_{II}^*\} &= 1.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Перші вирази в перших двох рядках (5.104) містять по n рівнянь, що будують розв'язок відповідних інтегральних рівнянь (5.103) у точках колокації $\eta_m = b_m + \frac{1}{2}\Delta b$ ($m = 1, \dots, n$), другі вирази в перших двох рядках – умови однозначності переміщень, треті – умови невід'ємності відривів, останній вираз – умова досягнення граничного стану (індекс p відповідає квадратурній точці, що розташована у вершині з найбільшим розкриттям). В (5.104) елементами векторів $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ є величини $\tilde{\sigma}(\eta_m)$, $\tilde{\tau}(\eta_m)$ ($m = 1, \dots, n$), W і V – матриці, за допомогою яких визначається розкриття в точках колокації та квадратурних точках відповідно. Зазначимо, що для визначення матриць J , W , V і вектора \mathbf{N} достатньо знати лише кількість інтервалів сітки n . Отже, система (5.104) не містить невідомих положень вершини зон зчеплення. Включення параметрів $\beta_{1,2}$ та $\gamma_{1,2}$ у невідомі величини задачі практично унеможлиблює лінеаризацію визначальної системи. Плавність змикання берегів досягнемо використанням ітеративної процедури, яка буде наведена та проілюстрована нижче.

У випадку парності функцій $\tilde{\sigma}(x)$ і $\tilde{\tau}(x)$ функції g і h є непарними, умови однозначності переміщень виконуються автоматично, квадратурні точки $b_k = -1 + (k - 1) \cdot \Delta b$ ($k = 1, \dots, n$, $\Delta b = 1/n$).

Опишемо ітеративну процедуру розв'язання системи (5.104) з урахуванням вимоги плавності змикання берегів. Для цього довизначимо функції T_I , T_{II} для від'ємних відривів:

$$\hat{T}_I(\Delta) = \begin{cases} T_I(\Delta), & \Delta \in \Xi \\ \sigma_{\max}, & \Delta \in \Xi_1 \\ T_I(\Delta_I, 0), & \Delta \in \Xi_2 \\ T_I(0, \Delta_{II}), & \Delta \in \Xi_3 \end{cases}, \quad \hat{T}_{II}(\Delta) = \begin{cases} T_{II}(\Delta), & \Delta \in \Xi \\ \tau_{\max}, & \Delta \in \Xi_1 \\ T_{II}(\Delta_I, 0), & \Delta \in \Xi_2 \\ T_{II}(0, \Delta_{II}), & \Delta \in \Xi_3 \end{cases},$$

$$\Xi_1 = \{\Delta : \Delta_I < 0 \wedge \Delta_{II} < 0\},$$

$$\Xi_2 = \{\Delta : \Delta_I > 0 \wedge \Delta_{II} < 0\},$$

$$\Xi_3 = \{\Delta : \Delta_I < 0 \wedge \Delta_{II} > 0\}.$$

На основі (5.104) утворимо систему

$$\mathbf{W}_m \mathbf{g} = 0, \quad m \in M_x$$

$$\mathbf{J}_m \mathbf{g} = -\tilde{\sigma} + \hat{T}_I(2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{g}, 2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{h}), \quad m \in P_x$$

$$\mathbf{W}_m \mathbf{h} = 0, \quad m \in M_y \tag{5.105}$$

$$\mathbf{J}_m \mathbf{h} = -\tilde{\tau} + \hat{T}_{II}(2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{g}, 2\lambda L \mathbf{W}_m \mathbf{h}), \quad m \in P_y$$

$$2\lambda L \max \{\mathbf{V}_p \mathbf{g} / \Delta_I^*, \mathbf{V}_p \mathbf{h} / \Delta_{II}^*\} = 1,$$

елементи векторів-рядків \mathbf{J}_m , \mathbf{W}_m і \mathbf{V}_m є елементами m -го рядка матриць J , W і V відповідно.

На першому кроці ітеративної процедури виберемо

$$M_x = \{m : 1 \leq m < p - p_x\}, \quad P_x = \{m : p - p_y \leq m \leq n\}.$$

Індекси $p_x, p_y \geq 1$ визначають кількість точок колокації в зоні зчеплення; ці параметри обумовлюють точність початкового наближення.

Обчислимо \mathbf{g} , \mathbf{h} і критичний параметр навантаження з (5.105) та оціни-мо елементи векторів допоміжних напружень, які унеможливають від'ємні відриви,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}} &= -J\mathbf{g} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{T}_I(2\lambda LW\mathbf{g}, 2\lambda LW\mathbf{h}), \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} &= -J\mathbf{h} - \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \hat{T}_{II}(2\lambda LW\mathbf{g}, 2\lambda LW\mathbf{h}).\end{aligned}$$

Перепозначимо

$$\begin{aligned}M_x &= \{m : \hat{\sigma}_m \geq 0\}, & P_x &= \{m : \hat{\sigma}_m < 0\}, \\ M_y &= \{m : \hat{\tau}_m \geq 0\}, & P_y &= \{m : \hat{\tau}_m < 0\}\end{aligned}$$

і продовжимо ітеративну процедуру, доки всі елементи $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ і $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ не стануть невід'ємними.

Розглянемо ЗЗВ з потенціалом

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{\boldsymbol{\Delta}}) &= \phi_2 - [\phi_2 - (1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha)\phi_1] (1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta, \\ \bar{\boldsymbol{\Delta}} &= (\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}), \quad \bar{\Delta}_I = \Delta_I/\Delta_I^*, \quad \bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II}/\Delta_{II}^*\end{aligned}$$

і силами зчеплення:

$$\begin{aligned}T_I(\bar{\boldsymbol{\Delta}}) &= \sigma_{\max}(1 - \bar{\Delta}_I)^{\alpha-1}(1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta, \\ T_{II}(\bar{\boldsymbol{\Delta}}) &= \tau_{\max}[1 - (1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha)\phi_1/\phi_2](1 - \bar{\Delta}_{II})^{\beta-1}, \\ \Delta_I^* &= \alpha\phi_1/\sigma_{\max}, \quad \Delta_{II}^* = \beta\phi_2/\tau_{\max}.\end{aligned}$$

Для наведених параметрів цей ЗЗВ проілюстровано на рис. 5.30.

На рис. 5.31 наведено частину локусу руйнування для інтенсивностей зовнішнього навантаження. Пунктирна крива відповідає ЗЗВ зі сталою інтенсивністю сил зчеплення (у цьому випадку не спостерігається залежно-

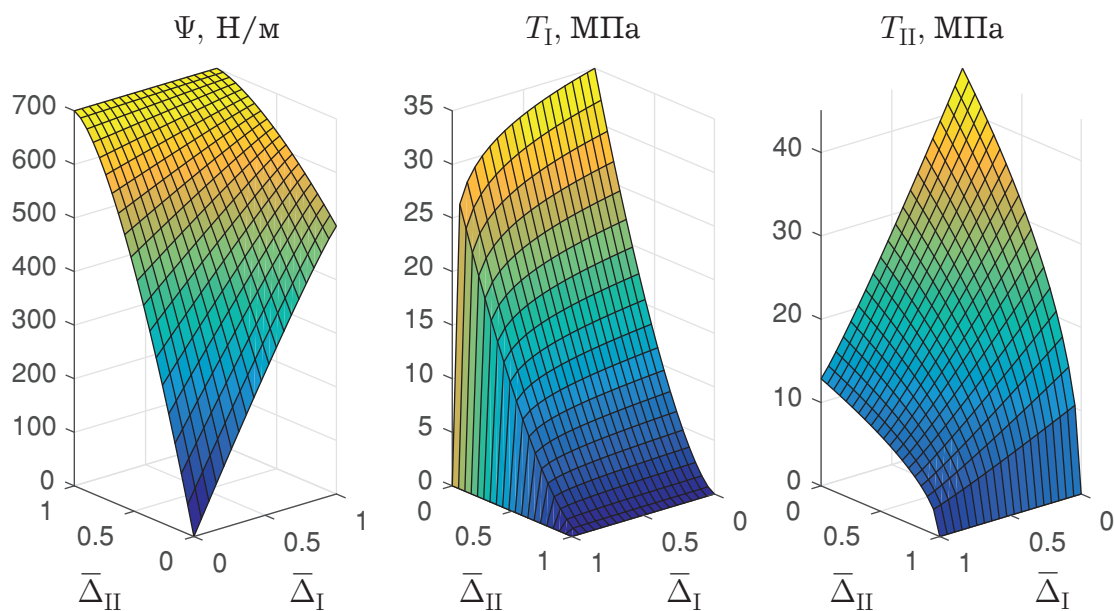


Рис. 5.30 – Потенціальне поле зчеплення ($\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 500$ Н/м, $\phi_2 = 700$ Н/м, $\alpha = 1.1$, $\beta = 1.5$)

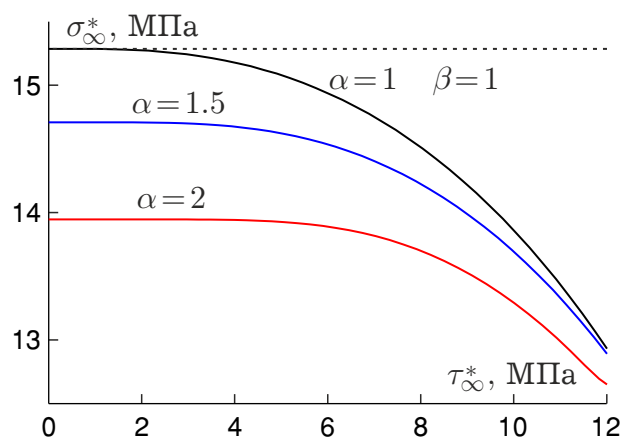


Рис. 5.31 – Локус руйнування

сті граничного рівня розтягувального навантаження від докритичної інтенсивності зсувного зусилля). Криві побудовано для параметрів моделі $\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 400$ Н/м, $\phi_2 = 600$ Н/м, $\lambda = 0.5$ см, $\beta = 1$, модуля Юнга $E = 10^4$ МПа, параметра дискретизації $n = 100$ та вказаних значень параметрів форми.

На рис. 5.32 проілюстровано кроки ітеративної процедури, що застосовується при розв'язанні системи (5.105) з умовою плавного змикання берегів.

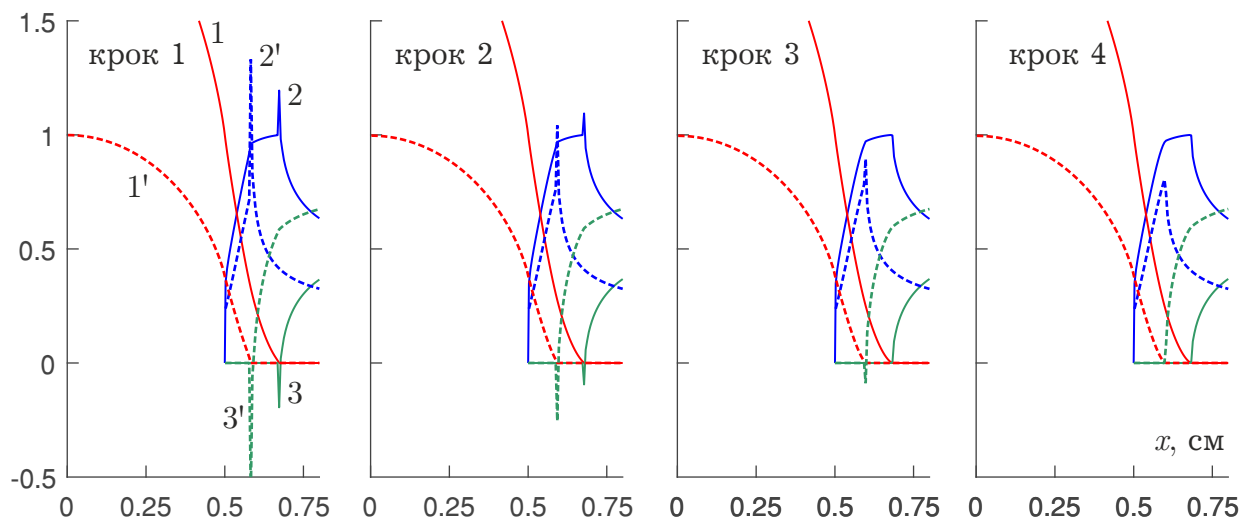


Рис. 5.32 – Кроки числово-аналітичного методу

Параметри моделі: $\sigma_{\max} = 35$ МПа, $\tau_{\max} = 45$ МПа, $\phi_1 = 500$ Н/м, $\phi_2 = 700$ Н/м, $\alpha = 1.1$, $\beta = 1.5$; модуль Юнга $E = 10^4$ МПа, параметр дискретизації $n = 200$. Криві 1 – відносне розкриття, 2 – відносне зчеплення без допоміжного напруження, 3 – відносне допоміжне напруження, пунктирні криві відповідають зсувним величинам.

5.6 Результати та висновки

1. В рамках моделі складної зони зчеплення отримано розв'язок задачі про напружено-деформований стан нескінченної пластини з тріщиною. Використана модель складної зони зі спільними вершинами для зон нормального та зсувного зчеплень, які є функціями координати. В усі постановки задач включено умову скінченності напружень, виконання якої забезпечується прирівнюванням до нуля виразу при сингулярному доданку потенціалів задачі, обчисленому у точці, що відповідає вершині зони зчеплення. Суміщення вершин двох зон дозволяє розв'язувати задачу як першу основну задачу теорії пружності на кожній ітерації числового методу пошуку положення вершин зон зчеплення. Розв'язки для переміщень берегів тріщини та роботи зчеплення отримано у вигляді

ді лінійних комбінацій величин зчеплення у вузлах кусково-лінійного розподілу, яким зчеплення задається. Показано, що у випадку нульового зчеплення у вершині зони отримується некоректний розв'язок із перекриттям берегів тріщини. Цей висновок не дозволяє використовувати в дослідженнях внутрішні ЗЗВ (закони, у яких нульовому відриву відповідає нульове зчеплення). У комбінації з моделлю тріщини використано критерій критичного розкриття для дослідження стану граничної рівноваги тіла з тріщиною.

2. Для простого режиму руйнування за заданого ЗЗВ побудовано системи рівнянь для визначення параметрів зони зчеплення в докритичному та граничному станах (системи (5.49) і (5.50) відповідно). Окрім параметрів розподілу зчеплення в ці розв'язки входить довжина зчеплення, що не дозволило лінеаризувати визначальну систему. Отримано аналогічні системи для асимптотичного розв'язку (див. (5.55) і (5.59)). Визначальна система для асимптотичного розв'язку може бути легко лінеаризована, а сам асимптотичний розв'язок може бути використаним як початкове наближення для отримання точного розв'язку.
3. Числові розв'язки отриманих визначальних систем побудовано з метою встановити: а) швидкість збіжності розв'язку при збільшенні розмірності систем; б) вплив параметрів форми ЗЗВ; в) рамки можливого використання асимптотичних розв'язків. З'ясовано, як параметри форми степеневого та поліноміальних законів впливають на безпечну довжину тріщини за заданого рівня зовнішнього навантаження. При зменшенні параметра форми степеневого закону (наближенні його до рівномірного) безпечна довжина збільшується, а відповідна довжина зчеплення суттєво зменшується (рис. 5.11). При збільшенні ділянки зміцнення в поліноміальному законі критична довжина змінюється не суттєво, а відповідна довжина зчеплення сягає розмірів половини напівдовжини

тріщини.

4. У рамках МЗЗ з експоненційним ЗЗВ розв'язана задача про повільне підростання тріщини. Використання моделі дозволило описати зростання зони передруйнування під час інкубаційного періоду.
5. На прикладі трапецоїдального ЗЗВ (цей закон є внутрішнім, що не дозволяє задовольнити умову скінченності напружень) показано вплив довжини зчеплення на інтенсивність критичного навантаження.
6. Поставлено й розв'язано задачу визначення параметрів докритичного стану та граничної рівноваги тіла з тріщиною при використанні моделі складної зони зчеплення (ділянки прикладання нормального та зсувного зчеплень мають спільні хвости). Запропоновано модифіковану постановку задачі, при розв'язанні якої умова плавності змикання берегів тріщини не представлена додатковим рівнянням у визначальній системі. Алгоритм розв'язання включає ітеративний процес, на кожному кроці якого розв'язується нелінійна система рівнянь, що легко лінеаризується.

ВИСНОВКИ

Отримані результати є інструментом аналізу практичних проблем, що виникають у будівництві, літакобудуванні, та пов'язані з повільним поширенням тріщин в елементах конструкцій. Результати дозволяють визначати параметри критичного стану ізотропних та ортотропних тіл, що містять тріщини з зонами передруйнування. Розроблені нові ефективні методики: 1) дослідження повільного поширення тріщини нормального відриву в ортотропних в'язкопружних тілах; 2) визначення параметрів стану граничної рівноваги тіл з тріщинами в рамках моделі зчеплення, яка враховує наявну біля фронту тріщини зону передруйнування. Основні результати:

1. Отримали розвиток методи розв'язання задач про деформування в'язкопружних ортотропних матеріалів на основі перетворення Лапласа і методу операторних ланцюгових дробів. Отримана методика дозволяє на основі результатів механіки композитних матеріалів і характеристик релаксації матеріалів компонент композита ефективно отримувати вирази для в'язкопружного розкриття тріщини у формі інтеграла Больцмана з ядром у вигляді суми експонент дробового порядку.
2. Для моделювання багатоосередкового руйнування композитів зроблена нова постановка і отримано розв'язки задачі про повільний розвиток двох колінеарних тріщин в ортотропному в'язкопружному тілі. Методика побудови визначальних співвідношень для залежних від часу положень вершин тріщин системи базується на представленні в'язкопружного розкриття у формі інтеграла Больцмана та критерії критичного розкриття. Залежності від часу положень вершин визначаються з систем інтегральних рівнянь і нерівностей, які розв'язуються шляхом координатно-часової дискретизації. Проілюстровано залежність послідовності досягнення граничного стану у вершинах тріщин системи від початкової відстані між суміжними вершинами.

3. Розв'язані нові задачі механіки руйнування для пружних і в'язкопружних пластин з тріщинами за умови прикладання системи зосереджених сил. Розвинено метод розв'язання задач теорії пружності і в'язкопружності для пластин, послаблених тріщинами з зонами передруйнування у разі контакту берегів. Для тріщини нормального відриву отримано нові закономірності повільного докритичного поширення внаслідок дії системи розтягувальних зосереджених сил та під впливом системи зосереджених сил, що притискають береги тріщини, в комбінації з розтягом на нескінченності. Проілюстровано зникнення ділянки контакту берегів тріщини при її повільному поширенні. Виявлено вплив зникнення ділянки на вихід тріщини на динамічний етап поширення.
4. Для змішаного режиму руйнування зроблена загальна постановка задач механіки тріщин за наявності зон передруйнування. Зона передруйнування моделюється складною зоною зчеплення з відмінними положеннями границь інтервалів прикладання нормального й зсувного зчеплень (ця відмінність продиктована вимогою скінченності напружень в тілі).
5. Запропоновано нові числово-аналітичні методи розв'язання задач механіки тріщин з зонами передруйнування у випадку їх моделювання складними зонами зчеплення з нерівномірним законом зчеплення-відриву. У випадку незначних довжин зчеплення для тріщини нормального відриву знайдено та проілюстровано зв'язок параметрів тріщиностійкості закону зчеплення-відриву та критичного значення коефіцієнту інтенсивності напружень. Встановлено, що параметри форми несуттєво впливають на рівень критичного навантаження. Отримано нові розв'язки для граничних рівнів нормального й зсувного навантажень в залежності від параметрів форми потенціального закону зчеплення-відриву для змішаного режиму руйнування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баренблат, Г.И.: Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. Ж. прикл. мех. техн. физ. (4), 3-56 (1961)
2. Ван Фо Фы, Г.А.: Композиционные материалы волокнистого строения. Наукова думка, Киев (1970)
3. Ванин, Г.А.: Микромеханика композиционных материалов. Наукова думка, Киев (1985)
4. Гаврилов, Г.В., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Длительное разрушение стареющего слоисто-волокнистого композита тетрагональной симметрии. В: Матер. XIV Межд. Науч. школы, Таврич. нац. ун-т., Симферополь, 29-32 (2004)
5. Громов, В.Г.: О математическом содержании принципа Вольтерра в граничной задаче вязкоупругости. Прикл. математика и механика. **35** (5), 869-878 (1971)
6. Гузь, А.Н.: Устойчивость ортотропных тел. Прикл. механика. **3** (5), 29-38 (1967)
7. Гузь, А.Н. (ред.): Механика композитных материалов и элементов конструкций. Наукова думка, Киев (1983)
8. Гузь, А.Н., Каминский, А.А., Назаренко, В.М.: Механика разрушения. Механика композитов: в 12 т.; т. 5. ПТОО "АСК", Киев (1996)
9. Каминский, А.А.: Исследование деформирования анизотропных вяз-

- коупругих тел. Прикл. механика. **36** (11), 39-63 (2000)
10. Каминский, А.А.: Механика длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами: теория, эксперимент (обзор). Прикл. механика. **50** (5), 3-79 (2014)
 11. Каминский, А.А.: Механика разрушения вязкоупругих тел. Наукова думка, Киев (1980)
 12. Каминский, А.А.: Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. Наукова думка, Киев (1990)
 13. Каминский, А.А., Гаврилов, Д.А.: Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. Наукова думка, Киев (1992)
 14. Каминский, А.А., Гаврилов, Д.А.: Механика разрушения полимеров. Наукова думка, Киев (1988)
 15. Каминский, А.А., Гаврилов, Д.А., Марков, В.А.: О докритическом росте трещины в полимерном композиционном материале. Прикл. механика. **22** (10), 3-7 (1986)
 16. Каминский, А.А., Гаврилов, Д.А., Патсаев, В.Н.: Экспериментальная проверка некоторых положений механики длительного разрушения вязкоупругих полимеров. Прикл. механика. **20** (9), 29-35 (1984)
 17. Каминский, А.А., Кекух, С.А.: К методу решения задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных материалов (с учетом наличия трещин). Прикл. механика. **30** (4), 82-90 (1994)
 18. Каминский, А.А., Рушицкий, Я.Я.: О применимости принципа Вольтерра при исследовании движения трещин в наследственно-упругих средах. Прикл. механика. **5** (4), 102-108 (1969)
 19. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Влияние циклического нагружения на кинетику роста трещины в вязкоупругой ортотропной пластине

- из композитного материала. Прикл. механика. **40** (9), 116-122 (2004)
20. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Иницирование трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (2), 53-58 (2005)
21. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О перераспределении напряжений со временем около прямолинейной трещины в пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (11), 51-55 (2004)
22. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О развитии дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале. Прикл. механика. **44** (8), 45-51 (2008)
23. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. Прикл. механика. **41** (5), 9-21 (2005)
24. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов. Прикл. механика. **41** (8), 41-50 (2005)
25. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Определение и анализ эффективных релаксационных свойств композита с вязкоупругими компонентами. Прикл. механика. **46** (1), 22-33 (2010)
26. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Определение параметров предельного состояния в рамках модели трещины с зоной сцепления для смешанного режима разрушения. Теоретич. и прикл. механика. **54** (8), 18-25 (2014)
27. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Перераспределение напряжений около эллиптического отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине вследствие ползучести материала. Доповіді НАН України. (6), 49-54

- (2004)
28. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Развитие трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Прикл. механика. **42** (9), 89-97 (2006)
 29. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Злиття двох колінеарних тріщин різної довжини у в'язкопружній анізотропній пластині. Доповіді НАН України. (6), 58-63 (2014)
 30. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Про вплив на концентрацію напружень біля еліптичного отвору в пластині з композитного матеріалу в'язкопружних властивостей компонентів композиту. Доповіді НАН України. (1), 52-58 (2010)
 31. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Моделювання повільного зростання тріщини зчеплення у в'язкопружному тілі. Доповіді НАН України. (8), 43-50 (2015)
 32. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту. Доповіді НАН України. (1), 38-43 (2017)
 33. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле. Теоретич. и прикл. механика. **48** (2), 40-50 (2011)
 34. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальное разрушение вязкоупругой изотропной пластины с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины. Прикл. механика. **50** (3), 94-106 (2014)
 35. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальный период роста трещины в вязкоупругом композите при смешанном нагружении. Теоретич. и прикл. механика. **53** (7), 18-29 (2013)
 36. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: О докритическом распространении трещины продольного сдвига в вязкоупругом

- композитном теле. Прикл. механика. **49** (3), 49-59 (2013)
37. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины. Теоретич. и прикл. механика. **50** (4), 78-84 (2011)
38. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композиту, релаксація компонент якого описується експонентами різних дробових порядків. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **51** (3), 7-18 (2008)
39. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву. Доповіді НАН України. (5), 36-42 (2016)
40. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення переміщень берегів двох колінеарних тріщин різних довжин в рамках моделі Леонова–Панасюка. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (4), 74-84 (2012)
41. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування анізотропної пластини. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (1), 53-58 (2016)
42. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті. Доповіді НАН України. (11), 37-44 (2010)
43. Камінський А.О., Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. Доповіді НАН України. (11), 51-60 (2011)
44. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі. Мат.

- методи і фіз.-мех. поля. **55** (1), 61-71 (2012)
45. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Початковий етап руйнування в'язкопружної пластини з двома колінеарними тріщинами однакової довжини. Доповіді НАН України. (6), 54-59 (2012)
 46. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.: Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **53** (1), 99-108 (2010)
 47. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Про межі застосовності наближених підходів до дослідження макроскопічних тріщин поперечного зсуву у в'язкопружних анізотропних композитах. Доповіді НАН України. (7), 57-63 (2013)
 48. Колтунов, М.А.: Ползучесть и релаксация. Высшая школа, Москва (1976)
 49. Костров, В.В., Никитин, Л.В., Флитман, Л.М.: Механика хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. (3), 112-125 (1969)
 50. Костров, В.В., Никитин, Л.В., Флитман, Л.М.: Распространение трещин в упруго-вязких телах. Изв. АН СССР. Физика Земли. (7), 20-35 (1970)
 51. Леонов, М.Я., Панасюк, В.В.: Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі. Прикл. механіка, **5** (4), 391-401 (1959)
 52. Лехницький, С.Г.: Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, Москва (1950)
 53. Лехницький, С.Г.: Теория упругости анизотропного тела. Наука, Москва (1977)
 54. Мусхелишвили, Н.И.: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, Москва (1966)
 55. Панасюк, В.В.: Механика квазіхрупкого разрушения материалов. На-

- укова думка, Киев (1991)
56. Панасюк, В.В.: Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Наукова думка, Киев (1968)
57. Пестриков, В.М., Морозов, Е.М.: Механика разрушения твердых тел: курс лекций. Профессия, Санкт-Петербург (2002)
58. Победря, Б.Е.: Механика композитных материалов. Издательство Московского университета, Москва (1984)
59. Работнов, Ю.Н.: Элементы наследственной механики твердых тел. Наука, Москва (1977)
60. Савин, Г.Н.: Распределение напряжений около отверстий. Наукова думка, Киев (1968)
61. Савин, Г.Н., Каминский, А.А.: Рост трещин при разрушении твердых полимеров. Прикл. механика. **3** (9), 33-39 (1967)
62. Саврук, М.П.: Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Наукова думка, Киев (1981)
63. Селиванов, М.Ф.: О влиянии вязкоупругих свойств композита на поле напряжений около эллиптического отверстия. Прикл. механика. **46** (7), 76-83 (2010)
64. Селиванов, М.Ф.: Об эффективных свойствах линейно вязкоупругого композита. Прикл. механика. **45** (10), 62-70 (2009)
65. Селиванов, М.Ф.: Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения. Теоретич. и прикл. механика. **55** (9), 33-41 (2014)
66. Селиванов, М.Ф.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования многокомпонентного композита. Материалы. Инструменты. Технологии. (2), 14-20 (2005)

67. Селиванов, М.Ф., Богданова, О.С.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования композитного материала при моделировании его однородной анизотропной средой. В: Dynamical systems modelling and stability investigation, Int. Conf., Kyiv (2005)
68. Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А., Рудис, А.В.: О развитии трещины сдвига в композите с линейно вязкоупругими фазами. Теоретич. и прикл. механика. **45**, 71-78 (2009)
69. Селіванов, М.Ф.: Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування. Доповіді НАН України. (11), 58-64 (2014)
70. Селіванов, М.Ф.: Дослідження докритичного і граничного станів тріщини зчеплення. В: Матеріали III Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми механіки”, Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка (2015)
71. Селіванов, М.Ф.: Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. Доповіді НАН України. (7), 62-69 (2015)
72. Селіванов, М.Ф.: Поширення тріщини у в'язкопружному тілі внаслідок прикладання навантаження до її берегів. Доповіді НАН України. (12), 67-73 (2013)
73. Селіванов, М.Ф., Черноиван, Ю.О.: Оптимізація представлення в'язкопружних характеристик полімерних матеріалів. В: Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки”, Дніпродзержинськ (2007)
74. Селіванов, М.Ф., Черноиван, Ю.О., Вовкодав, О.В.: Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. (3), 39-42 (2016)
75. Серенсен, С.В., Зайцев, Г.П.: Несущая способность тонкостенных кон-

- струкций из армированных пластиков с дефектами. Наукова думка, Киев (1982)
76. Скоробагатько, В.Я.: Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. Наука, Москва (1983)
77. Скудра, А.М., Булавс, Ф.Я.: Прочность армированных пластиков. Химия, Москва (1982)
78. Скудра, А.М., Булавс, Ф.Я., Роценс, К.А.: Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Зинатне, Рига (1971)
79. Хорошун, Л.П., Маслов, Б.П., Шикула, Е.Н., Назаренко, Л.В.: Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Наукова думка, Киев (1993)
80. Черепанов, Г.П.: О квазихрупком разрушении. ПММ. **32** (6), 1034-1042 (1968)
81. Черепанов, Г.П.: Механика разрушения композиционных материалов. Нака, Москва (1983)
82. Черепанов, Г.П.: Механика хрупкого разрушения. Наука, Москва (1974)
83. Шермергор, Т.Д.: Теория упругости микронеоднородных тел. Наука, Москва (1977)
84. Adolfsson, K., Enelund, M., Olsson, P.: On the fractional order model of viscoelasticity. *Mech. Time-Dep. Materials.* **9**, 15-34 (2005)
85. Anderson, T.L.: *Fracture mechanics fundamentals and applications.* Taylor & Francis Group, Boca Raton (2017)
86. Azhdari, A., Nemat-Nasser, S., Obata, M.: Alternative solution methods for crack problems in plane anisotropic elasticity, with examples. *Int. J. Solids Struct.* **37**, 6433-6478 (2000)

87. Bao, G., Suo, Z.: Remarks on crack-bridging concepts. *Appl. Mech. Rev.* **45** (8), 355-366 (1992)
88. Barenblatt, G.I.: The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* **7**, 55–129 (1962)
89. Bažant, Z.P. Concrete fracture models: testing and practice. *Eng. Fract. Mech.* **69**, 165-205 (2002)
90. Bažant, Z.P., Li, Y.-N.: Cohesive crack model with rate-depending opening and viscoelasticity: I. Mathematical model and scaling. *Int. J. Fract.* **86**, 247-265 (1997)
91. Becker, W. Gross, D.: About the Dugdale crack under mixed mode loading. *Int. J. Fract.* **37**, 163-170 (1988)
92. Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung *Sitzungsber. Bayer. Acad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl.* **70** (2), 315-325 (1874)
93. Brinson, L.C., Knauss, W.G.: Thermoreologically complex behavior of multi-phase viscoelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids.* **39**, 859-880 (1991)
94. Brinson, L.C., Lin, W.S.: Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Compos. Struct.* **41** (3-4), 353–367 (1998)
95. Broberg, K.B.: *Cracks and fracture*. Academic Press, London (1999)
96. Brockway, G.S., Schapery, R.A.: Some viscoelastic crack growth relations for orthotropic and prestrained media. *Eng. Fract. Mech.* **10**, 453-468 (1978)
97. Broek, D.: *The practical use of fracture mechanics*. Kluwer, Dordrecht (1988)
98. Chandra, N., Li, H, Shet, C., Ghonem, H.: Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces. *Int. J. Solids Struct.*

- 39**, 2827-2855 (2002)
99. Cherepanov, G.P. Mechanics of brittle fracture. McGraw-Hill, New York (1979)
 100. Cherepanov, G.P.: Methods of fracture mechanics: solid matter physics. Kluwer, Dordrecht (1997)
 101. Chew, H.B., Hong, S., Kim, K.-S.: Cohesive-zone laws for void growth – I. Experimental field projection of crack-tip crazing in glassy polymers. *J. Mech. Physics Solids*. **57**, 1357–1373 (2009)
 102. Chew, H.B., Hong, S., Kim, K.-S.: Cohesive-zone laws for void growth – II. Numerical field projection of elasto-plastic fracture processes with vapor pressure *J. Mech. Physics Solids*. **57**, 1374–1390 (2009)
 103. Christensen, R.M.: Mechanics of composite materials. Wiley-Interscience, New York (1979)
 104. Christensen, R.M., McCartney, L.N.: Viscoelastic crack growth. *Int. J. Fract.* **23**, R11-R13 (1983)
 105. Dharan, C.K.H., Kang, B.S., Finnie, I.: Finnie's notes on fracture mechanics. Fundamental and practical lessons. Springer Science+Business Media, New York (2016)
 106. Dugdale, D.S.: Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*. **8**, 100-108 (1960)
 107. Erdogan, F.: Fracture Mechanics. *Int. J. Solids and Struct.* **37**, 171-183 (2000)
 108. Erdogan, F., Gupta, G.D., Cook, T.S.: Solution of singular integral equations. In Sih, Methods of analysis and solutions of crack problems, *Mechanics of Fracture 1*, 368-425 (1973)
 109. Fager, L.O., Bassani, J.L., Hui, C.-Y., Xu, D.B.: Aspects of cohesive zone models and crack growth in rate-dependent materials. *Int. J. Fract.* **52**,

- 119-144 (1991)
110. Fisher, F.T., Brinson, L.C.: Viscoelastic interphases in polymer–matrix composites: theoretical models and finite-element analysis. *Compos. Sci. Technol.* **61**, 731–748 (2001)
111. Gain, A.L., Carroll, J., Paulino, G.H., Lambros, J.: A hybrid experimentalnumerical technique to extract cohesive fracture properties for mode-I fracture of quasi-brittle materials. *Int. J. Fract.* **169**, 113–131 (2011)
112. Gdoutos, E.E.: *Fracture mechanics criteria and applications*. Kluwer, Dordrecht (1990)
113. Gdoutos, E.E.: *Fracture mechanics: An introduction*. Kluwer, Dordrecht (1993)
114. Golden, J.M., Graham, G.A.C.: *Boundary value problems in linear viscoelasticity*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1988)
115. Graham, G.A.C.: The correspondence principle of linear viscoelasticity theory for mixed boundary value problems involving time-dependent boundary region. *Q. Appl. Math.* **26**, 167-174 (1968)
116. Graham, G.A.C., Sabin, G.C.W.: The correspondence principle of linear viscoelasticity for problems that involve time-dependent regions. *Int. J. Engng. Sci.* **11**, 123-140 (1973)
117. Griffith, A.A.: The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* **221**, 163-198 (1921)
118. Gross, D., Heimer, S.: Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load. *Eng. Fract. Mech.* **46**, 633-640 (1993)
119. Gross, D., Seelig, T.: *Fracture mechanics with an introduction to micromechanics*. Springer, Heidelberg (2011)
120. Hillerborg, A., Modeer, M., Petersson, P.E.: *Analysis of crack formation*

- and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.* **6**, 773–781 (1976)
121. Hong, S., Kim, K.-S.: Extraction of cohesive-zone laws from elastic far-fields of a cohesive crack tip: a field projection method. *J. Mech. Phys. Solids.* **51** (4), 1267–1286 (2003)
 122. Hui, C.Y., Ruina, A., Long, R., Jagota, A.: Cohesive zone models and fracture. *J. Adhesion.* **87**, 1–52 (2011)
 123. Irwin, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.* **24**, 361–364 (1957)
 124. Jin, Z.-H., Sun, C.T.: Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials. *Eng. Fract. Mech.* **72**, 1805–1817 (2005)
 125. Jones, W.B., Thron, W.J.: *Continued Fractions*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1980)
 126. Kaminsky, A.A.: Subcritical crack growth in polymer composite materials. In: Cherepanov, G.P. (ed.) *Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge*, pp. 758–765. Krieger Publishing Company, Malabar, USA (1998)
 127. Kaminsky, A.A.: Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep. In: *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from 8th Intern. Conf. Fracture*, Pergamon, pp. 513–520 (1994)
 128. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate. *Int. J. Fract.* **139** (1), 153–160 (2006)
 129. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: On the application of branched operator continued fractions for a boundary problem of linear viscoelasticity. *Прикл. механика.* **42** (1), 133–143 (2006)

130. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. *Int. J. Solids Struct.* **50** (19), 2929-2942 (2013)
131. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. *Mech. of Time-Dep. Materials.* **20** (2), 233-243 (2016)
132. Kanninen, M.F., Popelar, C.H.: *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, New York (1985)
133. Knauss, W.G.: A review of fracture in viscoelastic materials. *Int. J. Fract.* **196** (1-2), 99-146 (2015)
134. Knauss, W.G.: Delayed failure – the Griffith problem for linearly viscoelastic materials. *Int. J. Fract. Mech.* **6**, 7-20 (1970)
135. Knauss, W.G.: On steady propagation of a crack in a viscoelastic sheet: Experiment and analysis. *Deformation and fracture of high polymers*, pp. 501-541 . New York: Plenum press, (1974)
136. Knauss W.G. Time dependent fracture of polymers. In: *Advances in fracture research: proceedings of the 7th International Conference on Fracture*, pp. 2683-2711. Houston, USA (1989)
137. Knauss, W.G., Dietmann, H.: Crack propagation under variable load histories in linearly viscoelastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* **8**, 643-656 (1970)
138. Kostrov, B.V., Nikitin, L.V.: Some general problems of mechanics of brittle fracture. *Arch. mech. stosow.* **22**, 749-775 (1970)
139. Kuna, M.: *Finite elements in fracture mechanics: tyeory – numerics – applications*. Springer, Freiberg (2013)
140. Kundu, T.: *Fundamentals of fracture mechanics*. Taylor & Francis Group, Boca Raton (2008)
141. Lakes, R.: *Viscoelastic materials*. Cambridge University Press, New York

- (2009)
142. Lauterbach, B., Gross, D.: Crack growth in brittle solids under compression. *Mech. Mater.* **29**, 81-92 (1998)
 143. Li, Y.-N., Bažant, Z.P.: Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: II. Numerical algorithm, behavior and size effect. *Int. J. Fract.* **86**, 267-288 (1997)
 144. López-Fernández, M., Palencia, C., Schädle, A.: A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms. *SIAM J. Numer. Anal.* **44** (3), 1332-1350 (2006)
 145. Maugin, G.A.: *Material inhomogeneities in elasticity*. Chapman & Hall, Malta (1993)
 146. McCartney, L.N.: Crack growth laws for a variety of viscoelastic solids using energy and COD fracture criteria. *Int. J. Fract.* **15**, 31-40 (1979)
 147. McCartney, L.N.: Crack propagation resulting from a monotonic insreasing applied stress in a linear viscoelastic material. *Int. J. Fract.* **13**, 641-654 (1977)
 148. McCartney, L.N.: On the energy balance approach to fracture in creeping materials. *Int. J. Fract.* **19**, 99-113 (1982)
 149. McCartney, L.N.: Response to discussion concerning kinetic criteria for crack in viscoelastic materials. *Int. J. Fract.* **17**, R161-R168 (1981)
 150. Mueller, H.K., Knauss, W.G.: Crack propagation in a linearly viscoelastic strip. *J. Appl. Mech.* **38**, 483-488 (1971)
 151. Nazarenko, L.V., Khoroshun, L.P., Müller, W.H., Wille, R.: Effective thermoelastic properties of discrete-fiber reinforced materials with transversally-isotropic components. *Continuum Mech. Thermodyn.* **20**, 429-458 (2009)
 152. Needleman, A.: A continuum model for void nucleation by inclusion

- debonding. *ASME J. Appl. Mech.* **54** (3), 525–531 (1987)
153. Needleman, A.: An analysis of decohesion along an imperfect interface. *Int. J. Fract.* **42**, 21-40 (1990)
154. Park, K., Paulino, G.H.: Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Appl. Mech. Reviews.* **64**, 060802 (20 pages) (2011)
155. Park, S.W., Schapery, R.A.: Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I — a numerical method based on Prony series. *Int. J. Solids Struct.* **36**, 1653-1675 (1999)
156. Perez, N.: *Fracture mechanics*. Springer International Publishing Switzerland (2017)
157. Petersson, P.E.: Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Tech. report No. LUTVDG/TVBM-1006, Lund Institute of Technology, Sweden (1981)
158. Recho, N.: *Fracture mechanics and crack growth*. ISTE Ltd, London (2012)
159. Rice, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME J. Appl. Mech.* **35**, 379-386 (1968)
160. Saxena, A.: *Nonlinear fracture mechanics for engineers*. CRC Press LLC, Boca Raton (1998)
161. Schapery, R.A.: A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. I. Theoretical development. *Int. J. Fract.* **11**, 141-159 (1975)
162. Schapery, R.A.: A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. II. Approximate methods of analysis. *Int. J. Fract.* **11**, 368-388 (1975)
163. Schapery R.A.: A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media. III. Analysis of continuous growth. *Int. J. Fract.* **11**, 549-562 (1975)

164. Scheider, I., Brocks, W.: Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model. *Eng. Fract. Mech.* **70**, 1943–1961 (2003)
165. Schwalbe, K.-H., Scheider, I., Cornec A.: SIAM CM 09 – The SIAM method for applying cohesive models to the damage behaviour of engineering materials and structures. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, Geesthacht (2009)
166. Selivanov, M.F.: Long-term crack growth in 3-D reinforced polymer. In: *Proceedings of 8th Int. Fract. Conf.*, Kohaeli, Turkey (2007)
167. Selivanov, M.F.: On a time-dependent redistribution of stress near a linear crack in a plate made from the viscoelastic composite material. In: *Proceedings of 7th Int. Fract. Conf.*, Kohaeli, Turkey (2005)
168. Selivanov, M.F.: Study of the critical state and long-term fracture of viscoelastic anisotropic bodies using nonlinear fracture models. In: *Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology*, Harbin, China (2016)
169. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.A.: A combined approach of the Laplace transform and Pade approximation solving viscoelasticity problems. *Int. J. Solids and Struct.* **44**, 66-76 (2007)
170. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Computational optimization of characteristics of composites of viscoelastic components. *J. Eng. Math.* **74**, 91-100 (2012)
171. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: The initial period of mixed-mode crack growth in viscoelastic composite with Rabotnov's relaxation law. *Int. J. Mech.* **8**, 371-376 (2014)
172. Selivanov, M.F., Kaminsky, A.A., Chornoivan, Y.O.: Initial fracture of viscoelastic plate with two equal collinear cracks. In: *Proceedings of 9th Int. Fract. Conf.*, Istanbul, Turkey (2011)

173. Slepyan, L.I.: Models and phenomena in fracture mechanics. Springer, Heidelberg (2002)
174. Stähle, P.: On the small crack fracture mechanics. *Int. J. Fract.* **22**, 203-216 (1983)
175. Stang, H., Olesen, J.F., Poulsen, P.N., Dick-Nielsen, L.: On the application of cohesive crack modeling in cementitious materials. *Mater. Struct.* **40**, 365-374 (2007)
176. Stoer, J.: A direct method for chebyshev approximation by rational functions. *JACM.* **11** (1), 59-69 (1964)
177. Sun, C.T., Jin, Z.-H.: Fracture mechanics. Elsevier, Waltham (2012)
178. Theocaris, P.S., Ioakimidis, N.I.: Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. *Quart. Appl Math.* **35**, 173-183 (1977)
179. Thouless, M.D., Sills, R.B.: The effect of cohesive-law parameters on mixed-mode fracture. *Eng. Fract. Mech.* **109**, 353–368 (2013)
180. Tvergaard, V.: Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. Eng. A125*, 203-213 (1990)
181. Tvergaard, V., Hutchinson, J.W.: The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *J. Mech. Phys. Solids.* **41**, 1119-1135 (1993)
182. Unger, D.J.: Analytical fracture mechanics. Academic Press, San Diego (1995)
183. Valko, P.P., Abate, J. Numerical Laplace inversion in rheological characterization. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **116**, 395-406 (2004)
184. Wells, A.A.: Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *Br. Weld. J.* **11**, 563–570 (1963)
185. Williams, M.L.: Fatigue-fracture growth in linearly viscoelastic material.

- J. Appl. Phys. **38**, 4476-4480 (1967)
186. Williams, M.L.: The kinetic energy contribution to fracture propagation in a linearly viscoelastic material. *Int. J. Frac. Mech.* **4**, 69-78 (1968)
187. Wnuk, M.P.: Initiation of fracture in viscoelastic solids, experiment vs. theory. *Proc. Int. Symp*, pp. 673-684. Waterloo, (1972)
188. Wnuk, M.P.: Quasi-static extension of a tensile crack contained in a viscoelastic-plastic solid. *J. Appl. Mech.* **41**, 234-242 (1974)
189. Wnuk, M.P.: Subcritical growth of fracture (unelastic fatigue). *Int. J. Fract. Mech.* **6** (7), 383-407 (1971)
190. Wnuk, M.P., Knauss, W.G.: Delayed fracture in viscoelasticplastic solids. *Int. J. Solids Struct.* **6**, 995-1010 (1970)
191. Zehnder, A.T.: *Fracture Mechanics*. Springer, London (2012)
192. Zhang, Zh., Paulino, G.H., Celes, W.: Extrinsic cohesive modelling of dynamic fracture and microbranching instability in brittle materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **72**, 893–923 (2007)

ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Перераспределение напряжений около эллиптического отверстия в вязкоупругой ортотропной пластине вследствие ползучести материала. Доповіді НАН України. (6), 49-54 (2004)
2. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Влияние циклического нагружения на кинетику роста трещины в вязкоупругой ортотропной пластине из композитного материала. Прикл. механика. **40** (9), 116-122 (2004)
3. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О перераспределении напряжений со временем около прямолинейной трещины в пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (11), 51-55 (2004)
4. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Инициирование трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Доповіді НАН України. (2), 53-58 (2005)
5. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов. Прикл. механика. **41** (5), 9-21 (2005)
6. Селиванов, М.Ф.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования многокомпонентного композита. Материалы. Инструменты. Технологии. (2), 14-20 (2005)
7. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов. Прикл. механика. **41** (8), 41-50 (2005)
8. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: On the application of branched operator continued fractions for a boundary problem of linear viscoelasticity. Прикл. механика. **42** (1), 133-143 (2006)
9. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F.: Mode II macrocrack initiation in orthotropic composite viscoelastic plate. Int. J. Fract. **139** (1), 153-160

(2006)

10. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Развитие трещины поперечного сдвига в ортотропной пластине из вязкоупругого композитного материала. Прикл. механика. **42** (9), 89-97 (2006)
11. Selivanov, M.F., Chernoiivan, Y.A.: A combined approach of the Laplace transform and Padé approximation solving viscoelasticity problems. Int. J. Solids and Struct. **44**, 66-76 (2007)
12. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: О развитии дискообразной трещины с немалой зоной предразрушения в композитном материале. Прикл. механика. **44** (8), 45-51 (2008)
13. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композиту, релаксація компонент якого описується експонентами різних дробових порядків. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **51** (3), 7-18 (2008)
14. Селиванов, М.Ф.: Об эффективных свойствах линейно вязкоупругого композита. Прикл. механика. **45** (10), 62-70 (2009)
15. Селиванов, М.Ф., Черноіван, Ю.А., Рудис, А.В.: О развитии трещины сдвига в композите с линейно вязкоупругими фазами. Теоретич. и прикл. механика. **45**, 71-78 (2009)
16. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф.: Определение и анализ эффективных релаксационных свойств композита с вязкоупругими компонентами. Прикл. механика. **46** (1), 22-33 (2010)
17. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Про вплив на концентрацію напружень біля еліптичного отвору в пластині з композитного матеріалу в'язкопружних властивостей компонентів композиту. Доповіді НАН України. (1), 52-58 (2010)
18. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван Ю.О.: Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами.

- Мат. методи та фіз.-мех. поля. **53** (1), 99-108 (2010)
19. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті. Доповіді НАН України. (11), 37-44 (2010)
 20. Селиванов, М.Ф.: О влиянии вязкоупругих свойств композита на поле напряжений около эллиптического отверстия. Прикл. механика. **46** (7), 76-83 (2010)
 21. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле. Теоретич. и прикл. механика. **48** (2), 40-50 (2011)
 22. Камінський А.О., Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини. Доповіді НАН України. (11), 51-60 (2011)
 23. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины. Теоретич. и прикл. механика. **50** (4), 78-84 (2011)
 24. Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Computational optimization of characteristics of composites of viscoelastic components. J. Eng. Math. **74**, 91-100 (2012)
 25. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Початковий етап руйнування в'язкопружної пластини з двома колінеарними тріщинами однакової довжини. Доповіді НАН України. (6), 54-59 (2012)
 26. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (1), 61-71 (2012)
 27. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Визначення переміщень берегів двох колінеарних тріщин різних довжин в рамках моделі Леонова–Панасюка. Мат. методи і фіз.-мех. поля. **55** (4), 74-84

(2012)

28. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: О докритическом распространении трещины продольного сдвига в вязкоупругом композитном теле. Прикл. механика. **49** (3), 49-59 (2013)
29. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model. Int. J. Solids Struct. **50** (19), 2929-2942 (2013)
30. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Про межі застосовності наближених підходів до дослідження макроскопічних тріщин поперечного зсуву у в'язкопружних анізотропних композитах. Доповіді НАН України. (7), 57-63 (2013)
31. Селіванов, М.Ф.: Поширення тріщини у в'язкопружному тілі внаслідок прикладання навантаження до її берегів. Доповіді НАН України. (12), 67-73 (2013)
32. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальный период роста трещины в вязкоупругом композите при смешанном нагружении. Теоретич. и прикл. механика. **53** (7), 18-29 (2013)
33. Каминский, А.А., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Начальное разрушение вязкоупругой изотропной пластины с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины. Прикл. механика. **50** (3), 94-106 (2014)
34. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Злиття двох колінеарних тріщин різної довжини у в'язкопружній анізотропній пластині. Доповіді НАН України. (6), 58-63 (2014)
35. Селіванов, М.Ф.: Визначення безпечної довжини тріщини та розподілу сил зчеплення в рамках моделі тріщини з зоною передруйнування. Доповіді НАН України. (11), 58-64 (2014)
36. Селиванов, М.Ф.: Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения. Теоретич. и прикл. механика. **55** (9),

- 33-41 (2014)
37. Selivanov, M.F., Chornoivan, Yu.O.: The initial period of mixed-mode crack growth in viscoelastic composite with Rabotnov's relaxation law. *Int. J. Mech.* **8**, 371-376 (2014)
38. Селіванов, М.Ф.: Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. *Доповіді НАН України.* (7), 62-69 (2015)
39. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Моделювання повільного зростання тріщини зчеплення у в'язкопружному тілі. *Доповіді НАН України.* (8), 43-50 (2015)
40. Kaminsky, A.A., Selivanov, M.F., Chornoivan, Y.O.: On the long-term deformation process in viscoelastic composites around an elliptical hole. *Mech. of Time-Dependent Materials.* **20** (2), 233-243 (2016)
41. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву. *Доповіді НАН України.* (5), 36-42 (2016)
42. Камінський, А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван, Ю.О.: Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування анізотропної пластини. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки.* (1), 53-58 (2016)
43. Селіванов, М.Ф., Чорноіван, Ю.О., Вовкодав, О.В.: Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки.* (3), 39-42 (2016)
44. Камінський, А.О., Селіванов, М.Ф.: Повільне зростання тріщини з ділянкою контакту. *Доповіді НАН України.* (1), 38-43 (2017)
45. Гаврилов, Г.В., Селиванов, М.Ф., Черноиван, Ю.А.: Длительное разрушение стареющего слоисто-волокнистого композита тетрагональной симметрии. В: *Матер. XIV Межд. Науч. школы, Таврич. нац. ун-т., Симферополь*, 29-32 (2004) доповідь

46. Селиванов, М.Ф., Богданова, О.С.: Определение характеристик вязкоупругого деформирования композитного материала при моделировании его однородной анизотропной средой. В: Dynamical systems modelling and stability investigation, Int. Conf., Kyiv (2005) заочна
47. Selivanov, M.F.: On a time-dependent redistribution of stress near a linear crack in a plate made from the viscoelastic composite material. In: Proceedings of 7th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2005) заочна
48. Selivanov, M.F.: Long-term crack growth in 3-D reinforced polymer. In: Proceedings of 8th Int. Fract. Conf., Kohaeli, Turkey (2007) заочна
49. Селіванов, М.Ф., Черноіван, Ю.О.: Оптимізація представлення в'язкопружних характеристик полімерних матеріалів. В: Міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми технічної механіки", Дніпро-дзержинськ (2007) доповідь
50. Selivanov, M.F., Kaminsky, A.A., Chornoivan, Yu.O.: Initial fracture of viscoelastic plate with two equal collinear cracks. In: Proceedings of 9th Int. Fract. Conf., Istanbul, Turkey (2011) доповідь
51. Селіванов, М.Ф.: Дослідження докритичного і граничного станів тріщини зчеплення. В: Матеріали III Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки", Київ (2015) доповідь
52. Selivanov, M.F.: Study of the critical state and long-term fracture of viscoelastic anisotropic bodies using nonlinear fracture models. In: Proceedings of China-Ukraine forum on science and technology, Harbin, China (2016) доповідь