НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

Пославський Сергій Юрійович

УДК 531.36

КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Спеціальність 01.02.01 — теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті транспортних систем і технологій НАН України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, доцент **Зевін Олександр Аронович**, провідний науковий співробітник відділу динаміки та міцності нових видів транспорту Інституту транспортних систем і технологій НАН України (м. Дніпропетровськ).

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Хусаінов Денис Ях'євич**, професор кафедри моделювання складних систем Київського національного університету ім. Т. Шевченка (м. Київ);

кандидат фізико-математичних наук, **Іванов Ігор Львович**, молодший науковий співробітник відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (м. Київ).

Захист відбудеться «_25_» _жовтня_ 2016 р. о _10_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «___» ___________ 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Велика кількість систем що зустрічаються в задачах механіки, теорії автоматичного регулювання і других галузях науки та техніки описуються нелінійними диференційними рівняннями з запізненням. Аналіз стійкості являється необхідною частиною дослідження таких систем.

У прикладних задачах стійкості різних систем часто нелінійна характеристика об'єкта точно не відома або змінюється з часом в певних межах. Потрібно знайти умови, що гарантують стійкість системи для будь-яких нелінійних характеристик, що лежать в допустимих межах. Така задача була вперше поставлена в роботі А.І. Лур'є і В.Н. Постникова «К теории устойчивости регулируемых систем» (1944 р.), де була розглянута стійкість системи автоматичного регулювання при будь-яких початкових збуреннях і будь-який нелінійності сервомотора, що лежить в заданому секторі. Ця стаття привернула увагу багатьох дослідників і започаткувала новий напрям – теорію абсолютної стійкості, де розглядається стійкість не однієї конкретної системи, а деякої множини систем, що належить певному класу. Були розглянуті нові види динамічних систем, зокрема, системи з запізненням. У роботах Б.С. Разуміхіна достатні умови стійкості таких систем були отримані методом функції Ляпунова. М.М. Красовський запропонував замість функцій Ляпунова розглядати функціонали, що мають аналогічні властивості. Роботи В.М. Попова і А. Халаная започаткували розвиток частотних методів дослідження стійкості систем з запізненням.

Більшість сучасних досліджень стійкості таких систем присвячені виводу критеріїв стійкості за допомогою функцій і функціоналів Ляпунова. Оцінкам максимального показника Ляпунова, що характеризує швидкість спадання рішень, присвячено значно меншу кількість досліджень. Так в роботах Д.Я. Хусаїнова такі оцінки знайдені методом функцій Ляпунова.

Інший підхід, заснований на оцінках еволюційного оператора системи, дозволяє отримувати критерії стійкості та верхню оцінку максимального показника Ляпунова виражені безпосередньо через параметри системи, без використання функцій чи функціоналів Ляпунова. Для систем без запізнювання такі результати наведені в монографії Далецького і Крейна «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь в банаховому просторі». В роботах О.А. Зевіна такий підхід був застосований для систем що містять запізнення.

У більшості робіт розглядаються системи з постійним запізненням, проте, часто інформація про функцію запізнювання відсутня, відома лише її верхня границя, крім того система може містити розподілене запізнення. Стійкість систем із змінним та розподіленим запізненням вивчена в значно меншій мірі.

Відомі методи, в більшості випадків дозволяють отримувати лише достатні умови стійкості або верхні оцінки максимального показника Ляпунова. Недоліком таких результатів є те, що ступінь їх консервативності залишається невідомою. У зв'язку з цим є актуальною задача локалізації максимального показника Ляунова, тобто крім верхньої оцінки, необхідно знайти його нижню оцінку. Близькість цих оцінок гарантуватиме точність отриманої верхньої оцінки і отже достатніх умов стійкості.

Перелічені задачі складають предмет дисертації. Актуальність тематики роботи обумовлюється важливістю та необхідністю розв’язання таких задач при дослідженні математичних моделей реальних механічних систем.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились за планом науково-дослідних робіт Інституту транспортних систем і технологій НАН України тема – 1.3.6.14: «Розвиток методів дослідження механіки транспортних засобів та енергетичних систем» (№ держ. реєстрації 0107U001166) та тема – 1.3.6.16: «Розвиток методів і дослідження механіки, аеродинаміки та систем керування транспортних засобів і енергетичних об'єктів» (№ держ. реєстрації 0112U000097).

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є розробка нових критеріїв стійкості та їх застосування до аналізу деяких нелінійних механічних систем з запізненням.

Об'єктом дослідження є математичні моделі механічних систем, що описуються нелінійними диференційними рівняннями з запізненням.

Предметом дослідження є умови стійкості вказаних систем.

Методами досліджень є методи якісної теорії диференціальних рівнянь, матричного аналізу та теорії еволюційних операторів.

Сформулюємо *задачі* досліджень.

1. Розробити новий підхід до отримання критеріїв стійкості нелінійних механічних систем з постійними, змінними та розподіленими запізненнями.
2. Отримати верхню оцінку максимального показника Ляпунова і достатні умови стійкості.
3. Отримати нижню оцінку максимального показника Ляпунова і достатні умови нестійкості.
4. Розробити метод розрахунку стійкості систем високого порядку.
5. Отримати умови стійкості систем з переключеннями та запізненням.
6. Встановити достатні умови стійкості та нестійкості для системи стабілізації перевернутого маятника з урахуванням запізнювання в зворотньому зв'язку.
7. Дослідити стійкість процесів різання металу при вертикально-фрезерній обробці.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у такому:

1. Запропоновано новий підхід для дослідження стійкості різних типів нелінійних систем з запізненням заснований на оцінках еволюційних операторів лінійної частини системи, що дозволяє отримувати критерії стійкості виражені безпосередньо через параметри системи.
2. Отримана верхня оцінка максимального показника Ляпунова і достатні умови стійкості вказаних системи.
3. Отримана нижня оцінка максимального показника Ляпунова і достатні умови нестійкості системи. Ці результати дозволяють локалізувати границю області експоненціальної стійкості в просторі параметрів системи.
4. Для деяких класів систем отримані точне значення максимального показника Ляпунова та необхідні і достатні умови стійкості. Такі результати можуть бути, зокрема, використані для оцінки консервативності відомих достатніх критеріїв стійкості.
5. Запропоновано простий метод розрахунку стійкості, обчислювальна складність якого практично не залежить від порядку системи.

6. Запропоновано новий підхід для аналізу стійкості систем з переключеннями, знайдена верхня оцінка максимального показника Ляпунова для довільного закону переключення. Встановлено достатні умови експоненціальної стійкості таких систем.
7. Встановлено достатні умови стійкості та нестійкості для системи стабілізації перевернутого маятника з урахуванням запізнювання в зворотньому зв'язку. Для змінного і постійного запізнювання отримано оцінку величини критичного запізнювання, при якому відбувається дестабілізація системи. Отримана оцінка добре узгоджується з відомим експериментальним результатом.
8. Досліджено стійкість процесів різання металів при вертикально-фрезерній обробці. Знайдено режими стійкого різання, які добре узгоджуються з відомими експериментальними результатами.

Обґрунтованість і достовірність отриманих в дисертаційній роботі результатів забезпечується: коректністю поставлених задач; використанням відомих результатів теорії диференціальних рівнянь; повним і строгим доведенням всіх основних тверджень і розрахунків та сумісністю отриманих результатів із відомими теоретичними та експериментальними результатами.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в роботі результати в багатьох випадках дозволяють розглядати більш широкий клас задач, або отримувати достовірніші результати в порівнянні з відомими методами. Практичне значення полягає у можливості їх використання при дослідженні стійкості механічних систем, які моделюються нелінійними диференційними рівняннями з запізненням. Результати дослідження стійкості процесів різання металів можуть бути застосовані при виборі раціональних параметрів обробки для фрезерних верстатів з числовим програмним управлінням.

Особистий внесок здобувача. Всі результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належить вибір методики розв’язку поставлених перед ним задач, аналітичні і чисельні розрахунки, аналіз отриманих результатів, науковому керівнику Зевіну О.А. належать постановка задачі та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах Інституту транспортних систем і технологій НАН України, семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару академік НАН України А.А. Мартинюк), семінарі секції за напрямком «Динаміка і стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник семінару академік НАН України В.Д. Кубенко), на засіданнях IX Кримської міжнародної математичної школи «MFL-2008 Метод функцій Ляпунова та його застосування» (вересень 2008, Алушта), на Українському математичному конгресі-2009 (серпень 2009 р., Київ), на міжнародній науково-технічній конференції «Моделювання, ідентифікація, синтез систем керування» (вересень 2009 р., Донецьк), на засіданнях X Кримської міжнародної математичної школи «MFL-2010 Метод функцій Ляпунова та його застосування» (вересень 2010 р., Алушта), на міжнародній конференції по математичному моделюванню «МКММ-2011» (вересень 2011 р., Херсон), на міжнародній конференції «Моделювання, керування та стійкість (MCS-2012)» (вересень 2012 р., Севастополь).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 друкованих працях. Серед них 6 статей [1–6] у наукових фахових виданнях та 6 тез доповідей [7–12] наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 117 найменувань (12 сторінок) та 19 ілюстрацій. Повний обсяг роботи становить 117 сторінок.

Автор висловлює вдячність науковому керівникові доктору фізико-математичних наук О.А. Зевіну за визначення актуального напрямку дослідження, постановку задач і постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтовано актуальність досліджуваної проблеми, сформульовано мету роботи, наукову новизну, вказано практичне значення та апробацію результатів роботи.

У першому розділі наведено огляд результатів, присвячених дослідженням стійкості систем диференціальних рівнянь з запізненням. Наведено коротке обґрунтування проведення подальших досліджень у даному напрямку.

У **другому розділі** розроблено нові критерії стійкості систем із заданою лінійною частиною та обмеженою за нормою нелінійною частиною, що містить змінне запізнення.

У підрозділі 2.1 формулюється загальна постановка задачі про стійкість системи з запізненням. Розглядається система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t-\tau(t),t) \tag{1}$$

$$\|f(x,t)\| \le k\|x\|, \quad \tau(t) \le h, \quad x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h, 0] \tag{2}$$

Функції $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau(t)$ назвемо допустимими, якщо вони задовольняють умовам (2). Нехай λ'- показник Ляпунова рішення $x(t)$ рівняння (1) при деяких допустимих $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau(t)$

$$\lambda'(x_0, f, \tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln\|x(t)\|}{t} . \tag{3}$$

Максимальний показник Ляпунова системи (1)

$$\overline{\lambda} = \sup \lambda'(x_0, f, \tau), \tag{4}$$

де супремум обчислюється за всіма допустимим функціями $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau(t)$

Означення 1. *Система (1) експоненціально стійка, якщо* $\overline{\lambda} < 0$. *Тоді при будь-яких* $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau(t)$, *що задовольняють умовам (2), для відповідних рішень* $x(t)$ *справедлива нерівність*

$$\|x(t)\| \le N\|x_0(t)\|\exp(\overline{\lambda}t), \; t \in (0,+\infty), \tag{5}$$

де $N > 0$ *– деяка константа.*

У підрозділі 2.2 сформульовано нові критерії стійкості системи (1) та наведено порівняння з відомими результатами Крейна.

Ідея методу полягає в наступному. Рішення диференціального рівняння (1) представляється в інтегральної формі

$$x(t) = W(t,0)x_0 + \int_0^t W(t,s)f(x(s),s)ds,$$

де $W(t,s)$- матрицант рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Використовуючи (2), запишемо інтегральну нерівність для цього рішення

$$\|x(t)\| \le \|W(t,0)x_0\| + \int_0^t \|W(t,s)\|k\|x(t)\|ds.$$

Доведено теореми, що дозволяють знайти верхню оцінку максимального показника Ляпунова та достатні умови стійкості системи (1), (2). Проведемо в (1) заміну $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, нехай

$$v(\lambda) = \lim_{t\to\infty}\exp(-\lambda h)\int_0^t \exp(\lambda(t-s))\|W(t,s)\|ds.$$

Теорема 1. *В системі (1), (2)*

$$\bar{\lambda} \le \lambda_+,$$

де λ_+ *корінь рівняння*

$$kv(\lambda) = 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *В система (1), (2) експоненціально стійка, якщо виконується умова*

$$k < 1/v(0). \tag{7}$$

Зауважимо, що на відміну від верхньої оцінки максимального показника Ляпунова, умови стійкості (7), не залежать від величини запізнення.

Відомі методи зазвичай дозволяють отримувати лише достатні умови стійкості. Недоліком таких результатів є те, що ступінь їх консервативності залишається невідомою. У зв'язку з цим було поставлено задачу локалізувати максимальний показник Ляпунова, тобто**,** крім верхньої оцінки знайти його нижню оцінку. Близькість цих оцінок гарантує близькість отриманої верхньої оцінки до точного значення максимального показника Ляпунова**.**

Підрозділ 2.3 присвячено розробці методу отримання нижньої оцінки максимального показника Ляпунова для випадку коли лінійна частина системи (1) стаціонарна. Ідея методу полягає в наступному. У допустимій області простору параметрів відшукується точне рішення системи (1). Зокрема, для цієї мети, нелінійна функція $f(x)$ замінюється лінійною, що лежить у дозволених межах,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + kD(\varphi)x(t-\tau), \tag{8}$$

де $\tau \in [0,h]$, $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_k)$ – деякі параметри, $\|D(\varphi)\| = 1$.

Представивши рішення системи (8) у вигляді $x(t) = \exp(\lambda t)y$, отримаємо рівняння відносно λ:

$$\det\left[A + k\exp(-\lambda\tau)D(\varphi) - \lambda I\right] = 0, \tag{9}$$

де I – одинична матриця.

Для такого рішення показник Ляпунова визначається в явному вигляді: $\beta(\tau,\varphi) = \max_p\left(\mathrm{Re}(\lambda_p)\right),\ p = 1,..,n$, де λ_p корені рівняння (9), тоді

$$\lambda_- = \sup_{\tau,\varphi}\left[\beta(\tau,\varphi)\right].$$

Ясно, що показник Ляпунова зазначеного рішення може служити нижньою оцінкою максимального показника Ляпунова вихідної системи (1).

У підрозділі 2.4 продемонстровано ефективність запропонованого підходу на відомому модельному прикладі.

Розглядається система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t-\tau(t)),t), \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\|f(x,t)\| \le k\|x\|, \ \tau(t) \in [0,h].$$

Так як матриця A постійна, то $W(t,s) = W(t-s)$. Легко перевірити, що

$$W(t) = \begin{bmatrix} 2b(t) - a(t) & 2b(t) - 2a(t) \\ -b(t) + a(t) & -b(t) + 2a(t) \end{bmatrix},$$

де $a(t) = \exp(-t)$, $b(t) = \exp(-2t)$.

Використовуючи наведені вище результати, було отримано верхню λ_+ і нижню λ_- оцінки максимального показника Ляпунова. При розрахунку λ_- матриця D приймалася у вигляді

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

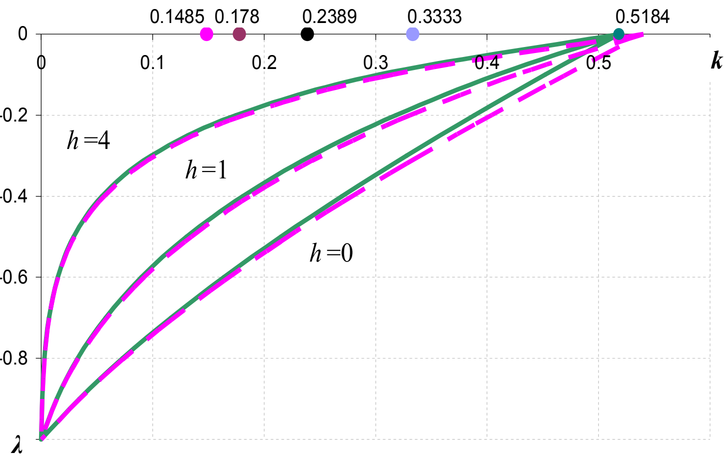

Рис. 1. Оцінки максимального показника Ляпунова

На рисунку 1 показані двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова цієї системи в залежності від норми нелінійності k для різних значень максимальної величини запізнювання h. Суцільною лінією показана верхня оцінка λ_+, пунктирною – нижня λ_-.

Верхня і нижня оцінки виявилися вельми близькими, що свідчить про високу точність запропонованого методу стосовно до даної задачі.

У точці $k = 0.5184$ верхня оцінка дорівнює $\lambda_+ = 0$ і не залежить від значень максимальної величини запізнювання h, отже, при $k < 0.5184$ система стійка.

Зауважимо, що для цієї системи в ряді робіт було отримано наступні достатні умови стійкості: $k \le 0.1458$, $k \le 0.178$[1]; $k \le 0.2389$ [2]; $k \le 0.3333$[3]. Найкраще з

[1] Cheres E. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations / E. Cheres, Z. J. Palmor,

отриманих критичних значень $k = 0.3333$.

Таким чином, знайдене в даній роботі значення $k = 0.5184$ значно покращує відомі оцінки стійкості і воно не може бути істотно поліпшено.

Як було зазначено раніше, в більшості випадків відомі методи дозволяють отримувати верхні оцінки максимального показника Ляпунова, або достатні умови стійкості. Представляє інтерес отримати точні значення зазначених величин для деяких класів нелінійних систем.

У підрозділі 2.5 наведено системи для яких результати підрозділу 2.2 дають точне значення максимального показника Ляпунова, отже й необхідні та достатні умови стійкості.

Розглядається система

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t - \tau(t)), t),$$

$$\tau(t) \in [0, h], \quad \|f(x,t)\| \le k\|x\|, \tag{10}$$

де A – постійна симетрична матриця. Як відомо, власні значення такої матриці дійсні; позначимо їх $\lambda_i, i = 1,...,n-1$ $(\lambda_i \ge \lambda_{i+1})$.

Теорема 3. *В системі (10) максимальний показник Ляпунова* $\overline{\lambda} = \lambda_+$, *де* λ_+ *визначається із рівняння (6) при*

$$v(\lambda) = \frac{\exp(-\lambda\tau^*)}{\lambda_1 + \lambda}, \tag{11}$$

де $\tau^* = h$ *при* $kv(0) < 1$, $\tau^* = 0$ *при* $kv(0) \ge 1$.

Розглянемо систему (10) з матрицею

$$A = K + mI, \tag{12}$$

де K – кососиметрична матриця ($K^T = -K$),

Теорема 4. *В системі (10), (12) максимальний показник Ляпунова* $\overline{\lambda} = \lambda_+$, *де при* $k - m \ge 0$

$$\lambda_+ = k - m,$$

а при $k - m < 0$, λ_+ *– корінь рівняння*

$$\lambda + m - k\exp(-\lambda h) = 0. \tag{13}$$

Як встановлено вище, для розглянутих рівнянь $\overline{\lambda} = \lambda_+$. Отже, для них нерівність (7) є не тільки достатньою, а й необхідною умовою експоненціальної стійкості.

Отримані результати мають самостійне значення, крім того, вони можуть бути, використані для оцінки ефективності відомих методів.

В усіх відомих методах обчислювальна складність дослідження стійкості істотно зростає зі збільшенням порядку системи.

S. Gutman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. –V. 34. – № 11. – P. 1203-1205.

[2] Wu H. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations / H. Wu, K. Mizukami // IEEE Trans. Autom. Control. – 1995. – V. 40. – №3. – P. 487-490.

[3] Hou C. Stability criterion for linear systems with nonlinear delayed perturbations / C. Hou, F. Gao, J. Qian // J. Math. Anal. Appl., – 1999. – V. 237. – P. 573-582.

У підрозділі 2.6, для системи (1) зі стаціонарною лінійною частиною

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t-\tau(t)),t)$$
$$\tau(t) \in [0,h],\ \|f(x,t)\| \le k\|x\|, f(0,t) = 0 \qquad (14)$$

запропоновано простий метод розрахунку стійкості, трудомісткість якого практично не залежить від порядку системи.

В даному методі використовується перетворення координат при якому матриця A стає діагональною.

$$T^{-1}AT = J = diag(\beta_1,...,\beta_n).$$

При заміні $x = Ty$, отримаємо систему

$$\dot{y}(t) = Jy(t) + T^{-1}f(Ty(t-\tau(t)),t).$$

Рішення нової системи виражається в явному вигляді.

Доводиться наступна теорема.

Теорема 5. *За умови*

$$\frac{1}{\beta}\|T^{-1}\|k\|T\| < 1,$$

де $\beta = \min|Re\beta_i|$, *система (14) експоненціально стійка, верхня оцінка* λ_+ *максимального показника Ляпунова є коренем рівняння*

$$V(\lambda) = \frac{1}{\beta+\lambda}\exp[-\lambda h]\|T^{-1}\|k\|T\| = 1.$$

У випадку симетричної матриці A, знайдене рішення є точним рішенням вихідної задачі. Тому даний метод тим точніше, чим ближче матриця A до симетричної.

У **третьому розділі** отримані результати були узагальнені на більш складні системи. Зокрема, у підрозділі 3.1 розглянута система, що містить змінну запізнювання в лінійної частини і елемент з розподіленим запізненням:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau_B(t)) + f(x(t-\tau(t),t) + C(t)\int_{t-\mu}^{t} x(s)ds,$$
$$\tau(t) \in [0,h],\ \tau_B(t) \in [0,h_B],\ \ \|f(x,t)\| \le k\|x\|,\ \ \ f(0,t) = 0. \qquad (15)$$

Представимо рішення (15) у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s)\left[f(x(s-\tau(s)),s) + B(s)x(s-\tau_B(s)) + C(s)\int_{s-\mu}^{s} x(u)du\right]ds,$$

де $W(t,s)$ – матрицант рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Нехай

$$v(t,\lambda,\tau) =)\int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s)]\|W(t,s)\|ds,$$

$$v_1(t,\lambda,\tau_B)=\int_0^t\|W(t,s)B(s)\|\exp[-\lambda(t-s+\tau_B(s))]ds+$$

$$+\frac{1-\exp(-\lambda\mu)}{\lambda}\int_0^t\|W(t,s)C(s)\|\exp(-\lambda(t-s))ds.$$

$$v(\lambda,\tau)=\lim v(t,\lambda,\tau),\ v_1(\lambda,\tau_B)=\lim v_1(t,\lambda,\tau_B)\quad \text{при } t\to\infty.$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 6. *Для системи (15) верхня оцінка максимального показника Ляпунова визначається як* $\lambda_+=\lambda_+(k)$ *– найбільший по* $\tau(t)$ *і* $\tau_B(t)$ *корінь рівняння*

$$kv(\lambda,\tau)+v_1(\lambda,\tau_B)=1.$$

Для обчислення нижньої оцінки максимального показника Ляпунова розглянуто рівняння

$$\dot{x}(t)+Ax(t)=Bx(t-\tau_B^0)+kD(\varphi)x(t-\tau^0)+C\int_{t-\mu}^{t}x(s)ds, \tag{16}$$

де $\tau_B^0\in[0,h_B]$ і $\tau^0\in[0,h]$ – постійні, $\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_k)$, $\|D(\varphi)\|=1$. В силу останньої рівності функція $f(x)=kD(\varphi)x$ задовольняє умові (15), тому рівняння (16) належить до розглянутого вище класу. Отже, показник Ляпунова зазначеного рівняння може служити нижньою оцінкою максимального показника Ляпунова вихідної системи (15).

Представивши рішення (16) у вигляді $x(t)=\exp(\lambda t)y$, отримаємо рівняння відносно λ:

$$\det\left[\exp(-\lambda\tau_B^0)B+k\exp(-\lambda\tau^0)D(\varphi)+\frac{1-\exp(\lambda\mu)}{\lambda}C-A-\lambda I\right]=0. \tag{17}$$

Нехай $\lambda_p=a_p\pm b_p i,\ p=1,..,n, a_p\ge a_{p+1}-$ рішення рівняння (17), тоді нижня оцінка максимального показника Ляпунова визначається за формулою

$$\lambda_-=\sup_{\tau^0,\tau_B^0,\varphi}\left[a_1(\tau^0,\tau_B^0,\varphi)\right]$$

Зауважимо, що в разі евклідової норми в якості $D(\varphi)$ можна прийняти будь-яку ортогональну матрицю (як відомо, для такої матриці $\|D(\varphi)\|=1$).

У підрозділі 3.2 розглянуто систему з «чистим» запізненням, яка містить декілька елементів з різним запізненням, причому відсутня стійка лінійна підсистема без запізнення.

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i(t)x(t-\tau_i(t))+\sum_{i=1}^{p}f_i(x(t-\beta_i(t),t)+\sum_{i=1}^{r}C_i(t)\int_{t-\mu_i}^{t}x(v)dv,$$

$$\|f_i(x,t)\|\le k_i\|x\|,\ \tau_i(t)<h_i\le\infty, \tag{18}$$

де h_i – задані числа, $\beta_i(t)<\infty$.

Припустимо, що при деякому $i=j$ рівняння

$$\dot{x}(t)=A_j(t)x(t) \tag{19}$$

експоненціально стійке. Для цього необхідно і достатньо, щоб

$$W_j = \sup\int_0^t \left\| W_j(t,s) \right\| ds < \infty ,$$

де $W_j(t,s)$ – матрицант рівняння (19).

Нехай

$$W_{jj} = \sup\int_0^t \left\| W_j(t,s) A_j(s) \right\| ds , \quad W_A = \sup\int_0^t \left\| W(t,s) \sum_{i \neq j}^{m} A_i(s) \right\| ds .$$

Вважаючи, що рівняння (19) експоненціально стійке, запишемо рішення системи (18) у вигляді

$$x(t) = x_{j0}(t) + \int_0^t W_j(t,u) \left[\sum_{i \neq j}^{m} A_i(u) x(u - \tau_i(u)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{p} f_i(x(u - \beta_i(u), u) + \sum_{i=1}^{r} C_i(u) \int_{u-\mu_i}^{u} x(v) dv \right] du -$$

$$- \int_0^t W_j(t,u) \left(A_j(u) \int_{u-\tau_j(u)}^{u} \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(s) x(s - \tau_i(s)) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{i=1}^{p} f_i(x(s - \beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^{r} C_i(s) \int_{s-\mu_i}^{s} x(v) dv \right] ds \right) du .$$

Доведено наступну теорему:

Теорема 7. *За умови*

$$N = h_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_i^+ + \sum_{i=1}^{m} k_i + \sum_{i=1}^{r} C_i^+ \mu_i \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^{p} k_i W_j + W_C < 1$$

система (18) експоненціально стійка, причому верхня оцінка максимального показника Ляпунова визначається як корінь рівняння

$$h_j \left(\sum_{i=1}^{m} A_i^+ + \sum_{i=1}^{p} k_i + \sum_{i=1}^{r} C_i^+ \frac{\exp(\lambda \mu_i) - 1}{\lambda} - \lambda \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^{p} k_i W_j + W_{C\lambda} - \lambda W_j = 1 ,$$

де $W_{C\lambda} = \int_0^t \left\| W_j(t,u) \sum_{i=1}^{r} C_i \dfrac{1 - \exp(\lambda \mu_i)}{\lambda} \right\|$, $A_i^+ = \sup \left\| A_i(t) \right\|$, $C_i^+ = \sup \left\| C_i(t) \right\|$ *на* $[h_j, \infty)$, $W_C = \int_0^t \left\| W_j(t,u) \sum_{i=1}^{r} C_i(u) \mu_i \right\| du$.

Розглянемо тепер інший спосіб представлення системи (18). Припустимо, що рівняння

$$\dot{x}(t) = A_s(t) x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) x(t) \tag{20}$$

експоненціально стійке.

Нехай

$$W_s = \sup\int_0^t \left\| W(t,s) \sum_{i=1}^{m} A_i(s) h_i \right\| ds .$$

Запишемо рішення системи (18) у вигляді

$$x(t)=x_{s0}(t)-\int_0^t W(t,u)\left(\sum_{i=1}^m A_i(u)\int_{u-\tau_j(u)}^{u}\left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s-\tau_i(s))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i=1}^p f_i(x(s-\beta_i(s)),s)+\sum_{i=1}^r C_i(s)\int_{s-\mu_i}^{s} x(v)dv\right]ds\right)du+$$

$$+\int_0^t W(t,u)\left[\sum_{i=1}^p f_i(x(u-\beta_i(u)),u)\right]du$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 8. *За умови*

$$N=(\sum_{i=1}^m A_i^+ +\sum_{i=1}^m k_i +\sum_{i=1}^r C_i^+\mu_i)W_s+\sum_{i=1}^p k_i W+W_C<1$$

система (18) експоненціально стійка, причому верхня оцінка максимального показника Ляпунова визначається як корінь рівняння

$$(\sum_{i=1}^m A_i^+ +\sum_{i=1}^p k_i +\sum_{i=1}^r C_i^+\frac{1-\exp(\lambda\mu_i)}{\lambda}+\lambda)W_s+\sum_{i=1}^p k_i W+W_{C\lambda}-\lambda W=1,$$

де $W_{C\lambda}=\int_0^t\left\|W(t,u)\sum_{i=1}^r C_i\,\frac{1-\exp(\lambda\mu_i)}{\lambda}\right\|$.

У підрозділі 3.3 розроблені підходи було узагальнено на систему з постійним запізненням

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+f_1(x(t),t)+f_2(x(t-\tau),t),$$

$$f_1(x(t),t)\le k_1\|x(t)\|,\quad f_2(x(t-\tau),t)\le k_2\|x(t-\tau)\|,\quad k=k_1+k_2.$$

Отримано верхню оцінку максимального показника Ляпунова та достатні умови стійкості. При розрахунках використовувався матрицант $W(t,s)$ системи $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)$.

У підрозділі 3.4 розглядалася система (1) з нелінійністю спеціального виду

$$f(x,t)=\left[f_1(x_1,t),...,f_n(x_n,t)\right]^T,$$

$$f_i(x_i,t)\le k_i\|x\|,\ i=1,...,n.$$

Для такої системи отримано верхню оцінку максимального показника Ляпунова та достатні умови стійкості; вказано системи для яких дані оцінки являються точними.

Велика кількість реальних систем в різних областях науки і техніки моделюється системами з переключеннями. Такі системи є комбінацією диференціальних рівнянь що описують окрему підсистему або режим роботи і дискретний переключаючий сигнал. Для таких систем стійкість кожної підсистеми не гарантує стійкість системи в цілому. Існує велика кількість робіт присвячених системам з переключеннями без запізнення.

У **підрозділі 3.5** розвинений підхід до аналізу стійкості узагальнюється на системи з переключеннями, що містять запізнення.

Розглядається система

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f_i(x(t-\tau(t)),t),$$
$$x \in R^n,\ \tau(t) \in [0,h],\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h,0], \|f_i(x,t)\| \le k\|x\|, \tag{21}$$
$$A_i \in \Omega = \{A_1,...,A_m\},\ i(t):[0,\infty) \to \{1,...m\},$$

де $i(t):[0,\infty) \to \{1,...m\}$ – кусочно-постійна функція, що визначає послідовність переключень між підсистемами.

Запишемо (21) у вигляді

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + (A_i - A_0)x(t) + f_i(x(t-\tau(t)),t), \tag{22}$$

де

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i}{m}.$$

Представимо рішення (22) у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s)\big[(A_i - A_0)x(s) + f_i(x(s-\tau(s)),s)\big]ds,$$

де $W(t,s)$ – матрицант рівняння $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$.

Нехай

$$v_0(t,\lambda) = \int_0^t \max_i \big[\|W(s)(A_i - A_0)\|\big]\exp(-\lambda(s))ds,$$

$$v(t,\lambda,\tau) = \int_0^t \exp[-\lambda(s+\tau(s)]\|W(s)\|ds.$$

$$v_0(\lambda) = \lim v(t,\lambda),\ v(\lambda,\tau) = \lim v(t,\lambda,\tau) \text{ при } t \to \infty.$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 9. *Для системи з довільними переключеннями верхня оцінка максимального показника Ляпунова* λ_+ *визначається як найбільший по* $\tau(t)$ *корінь рівняння*

$$v_0(\lambda) + kv(\lambda,\tau) = 1.$$

Отримано достатні умови, що гарантують стійкість системи при будь-якому законі переключення.

Для всіх зазначених систем, що розглядались у третьому розділі, ефективність запропонованих підходів була перевірена на модельних прикладах, розглянутих іншими авторами. Отримані результати суттєво розширюють відомі області стійкості.

В **четвертому розділі**, запропоновані підходи були використані для вирішення ряду механічних задач. Зокрема в підрозділі 4.1 розглядається задача стійкості системи стабілізації перевернутого маятника з урахуванням запізнювання в зворотному зв’язку. Схема системи зображена на рисунку 2. Вісь маятника розташована на візку, який, під впливом керуючої сили, може переміщатися в горизонтальному напрямку, що дозволяє утримувати маятник в верхньому положенні.

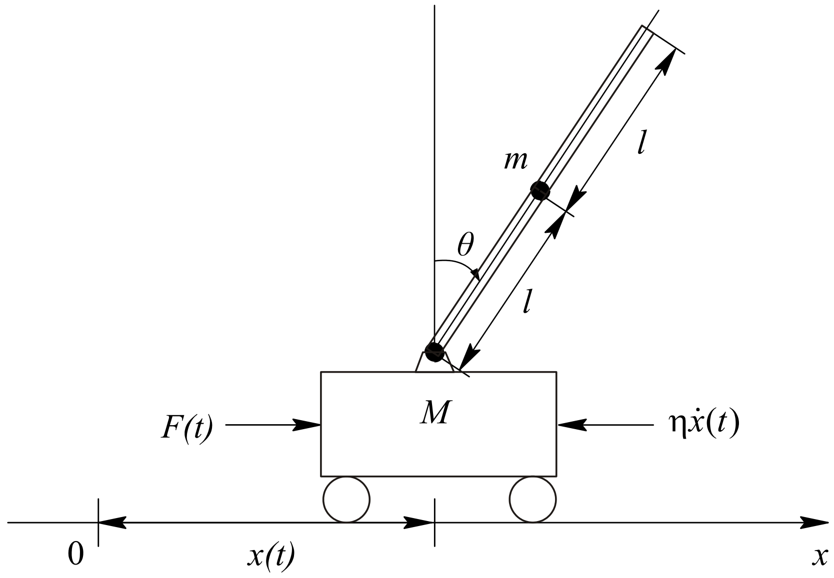

Рис. 2. Схема системи

Рух системи описується рівняннями

$$(M+m)\ddot{x}+\eta\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F(t),$$

$$ml\ddot{x}\cos\theta+\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0,$$

$$F(t)=\alpha V(t)-\beta\dot{x}(t),$$

де $V(t)$ – напруга, що подається на двигун візка, α і β – коефіцієнти пропорційні опору обмоток двигуна.

Після заміни

$$y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)^T=\left(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}\right)^T$$

отримали еквівалентну систему рівнянь першого порядку.

Закон управління, що стабілізує систему в точці рівноваги $y=0$, без врахування запізнення отримано у вигляді

$$V(t)=Ky.$$

Далі досліджено вплив запізнення, що може виникати в зворотному звязку

$$V(t)=Ky(t-\tau).$$

Після перетворень задача зводиться до аналізу стійкості системи рівнянь

$$\dot{y}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+f_1(y(t))+f_2(y(t-\tau)),$$

де матриці A і B – лінійні складові вихідної системи

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-3mg}{m+4M} & \dfrac{-4(\beta+\eta)}{m+4M} & 0 \\ 0 & \dfrac{3(M+m)g}{l(m+4M)} & \dfrac{3(\beta+\eta)}{l(m+4M)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{4d_1}{m+4M} & \dfrac{4d_2}{m+4M} & \dfrac{4d_3}{m+4M} & \dfrac{4d_4}{m+4M} \\ \dfrac{-3d_1}{l(m+4M)} & \dfrac{-3d_2}{l(m+4M)} & \dfrac{-3d_3}{l(m+4M)} & \dfrac{-3d_4}{l(m+4M)} \end{pmatrix},$$

функції f_1 і f_2 визначаються так

$$f_1(y(t)) = \phi_1(y(t)) - Ay(t),$$
$$f_2(y(t-\tau)) = \phi_2(y(t)) - By(t-\tau).$$

Для даної системи існують експериментальні результати, в яких досліджувався вплив запізнювання в зворотного зв'язку на стабілізацію маятника.

Для відповідних значень параметрів системи були проведені розрахунки і знайдені верхня оцінка максимального показника Ляпунова λ_+ в залежності від величини запізнення, та знайдено критичне значення величини запізнення, при якому відбувається дестабілізація системи.

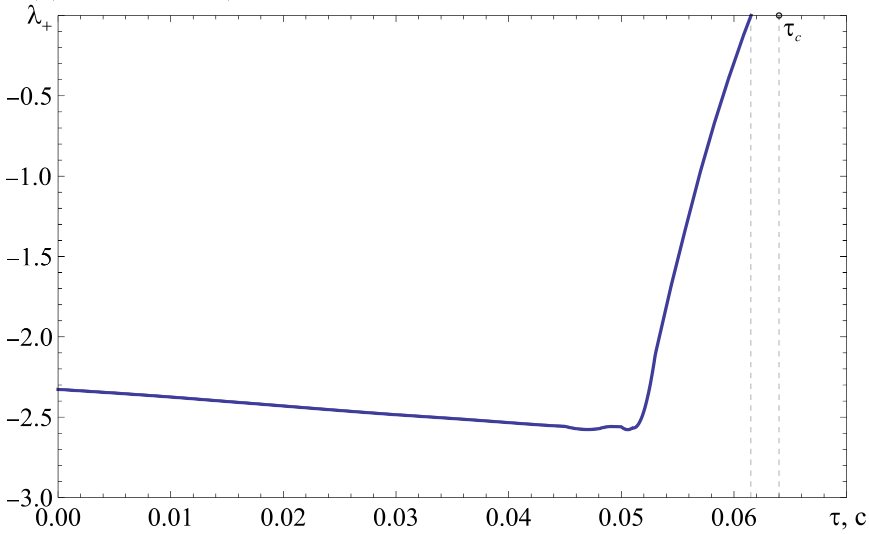

Рис. 3. Залежність оцінки λ_+ в від величини запізнення τ

Розраховане критичне значення $\tau = 0.0615$ виявилося дуже близьким до експериментального $\tau_c = 0.064$ с.

У наступних підрозділах розглядалися різні математичні моделі процесів різання металу, а саме процесу фрезерування, що описується диференціальними рівняннями з постійним запізненням.

У підрозділах 4.2 та 4.3 розглядалися одновимірні моделі з різними припущеннями щодо ріжучих сил. Були побудовані достатні області стійкого різання у просторі керуючих параметрів процесу для випадків зустрічного та попутного режимів фрезерування. Проведено порівняння з відомим експериментальним результатом.

У підрозділі 4.4. було розглянуто більш реалістичну двовимірну модель вертикального фрезерування. Схема моделі зображена на малюнку.

Система описується рівнянням

$$M\ddot{X}(t)+C\ddot{X}(t)+K\ddot{X}(t)=F(t),$$

де

$$X(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},\ F(t)=\begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix},$$

M, C, K – діагональні матриці модальних мас, коефіцієнтів опору, коефіцієнтів пружності, відповідно.

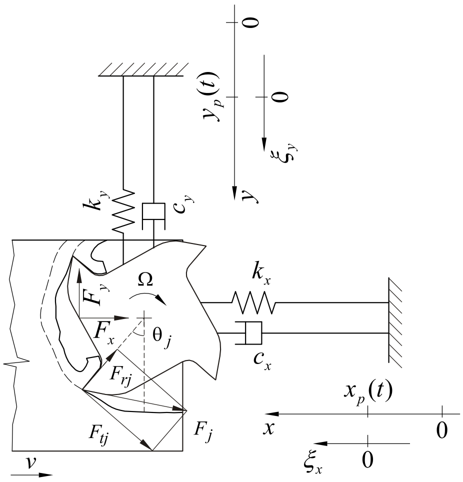

Рис. 4. Схема системи

Рівняння системи переписується через збурення ідеального руху фрези

$$M\ddot{E}(t)+C\dot{E}(t)+KE(t)=bA(t)\left[E(t)-E(t-\tau)\right],$$
$$\tau=60/Z\Omega.$$

Після лінеаризації та перетворень, задача зводиться до аналізу стійкості системи

$$\dot{z}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{ba_{xx}(t)-k_{xx}}{m_{xx}} & \dfrac{ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & \dfrac{-c_{xx}}{m_{xx}} & 0 \\ \dfrac{ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & \dfrac{ba_{yy}(t)-k_{yy}}{m_{yy}} & 0 & \dfrac{-c_{yy}}{m_{yy}} \end{pmatrix} z(t)+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-ba_{xx}(t)}{m_{xx}} & \dfrac{-ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & 0 & 0 \\ \dfrac{-ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & \dfrac{ba_{yy}(t)}{m_{yy}} & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t-\tau)$$

.

Основними керуючими параметрами процесу фрезерування є швидкість обертання фрези Ω і глибина фрезерування b. У просторі цих параметрів побудовані достатні області стійкості і області із заданим показником Ляпунова. Отримані результати порівнювалися з відомими експериментальними результатами показаними на графіку умовними знаками.

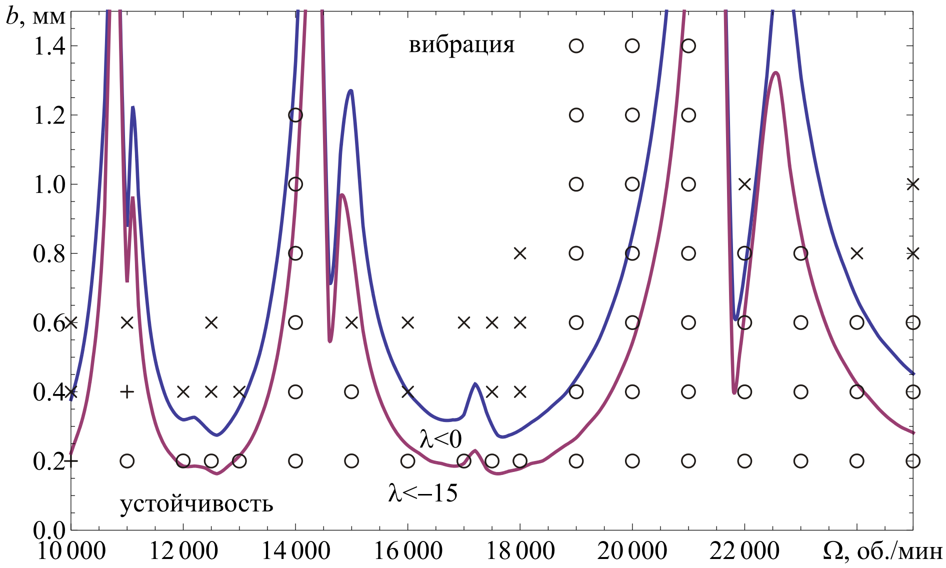

Рис. 5. Області стійкої обробки в просторі параметрів b і Ω

На рисунку 5 показані області стійкої обробки в просторі параметрів b і Ω для попутного фрезерування. Суцільними лініями обмежені області стійкості з різними верхніми оцінками максимального показника Ляпунова. Результати відомих експериментальних досліджень відзначені відповідними символами («∘» – стійкий режим, «+» – границя, «×» – вібрація). Як видно, отримані теоретичні результати досить добре відповідають експериментальним.

Крім того, ці результати порівнювалися з результатами отриманими іншими методами. Результати порівняння наведені на рисунку 6, пунктиром показані області стійкості, що були отримані методом «напівдискретизації»[4].

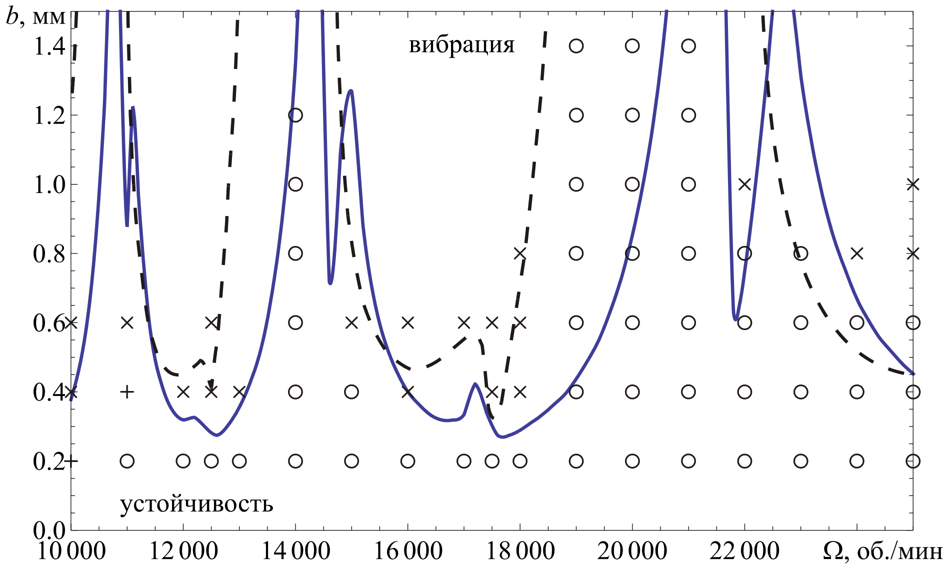

Рис.6. Результати порівняння методів

При цьому виявилося, що наш метод дозволяє виявити області нестійкості, що не були встановлені іншими методами.

У **висновках** коротко сформульовано основні результати дисертації.

[4] Insperger T. Machine tool chatter and surface location error in milling processes / T. Insperger, J. Gradisek, M. Kalveram, G. Stepan, K. Winert, E. Govekar // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2006, – V. 128. – P. 913–920.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці нових критеріїв стійкості нелінійних диференціальних рівнянь, що містять змінне і розподілене запізнення.

Основні результати проведених досліджень, представлених в дисертації, полягають у такому.

1. Запропоновано новий підхід для дослідження стійкості нелінійних систем з запізненням, заснований на оцінках еволюційних операторів системи, що дозволяє отримувати критерії стійкості, виражені безпосередньо через параметри системи.

2. Отримана верхня оцінка максимального показника Ляпунова і достатні умови стійкості системи. Даний результат дозволяє встановити не тільки факт стійкості, а й оцінити швидкість росту або зменшення рішень системи.

3. Отримана нижня оцінка максимального показника Ляпунова і достатні умови нестійкості системи. Ці результати дозволяють локалізувати границю області експоненціальної стійкості в просторі параметрів системи.

4. Для деяких класів систем отримані точне значення максимального показника Ляпунова та необхідні і достатні умови стійкості. Ці результати можуть бути, зокрема, використані для оцінки консервативності відомих достатніх критеріїв стійкості.

5. Запропоновано простий метод розрахунку стійкості, обчислювальна складність якого практично не залежить від порядку системи.

6. Запропоновано новий підхід для аналізу стійкості систем з переключеннями, знайдена верхня оцінка максимального показника Ляпунова для довільного закону переключення. Встановлено достатні умови експоненціальної стійкості таких систем.

7. Встановлено достатні умови стійкості та нестійкості для системи стабілізації перевернутого маятника з урахуванням запізнювання в зворотньому зв'язку. Для змінного і постійного запізнювання, отримано оцінка величини критичного запізнювання, при якому відбувається дестабілізація системи. Отримана оцінка добре узгоджується з відомим експериментальним результатом.

8. Досліджено стійкість процесів різання металів. Знайдено режими стійкого різання для зустрічного і попутного фрезерування для вертикально-фрезерної обробки. Ефективність запропонованого підходу проілюстрована порівнянням з відомими експериментальними і теоретичними результатами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Показатели экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сб. науч. стат. пам. акд. В.В. Румянцева. –М.: Изд. физ.-мат. лит., 2009. – С. 227–237.

2. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова и критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Автоматика и телемеханика. – 2012.– №1. – С.82–91.

3. Пославский С.Ю. Условия устойчивости систем с переключениями / С.Ю. Пославский // Технічна механіка. – 2014. – №3. – С.87-93.

4. Пославский С.Ю. Условия экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем с переменными и распределенными запаздываниями / С.Ю. Пославский // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2014. – Вип. 15. – Т. 2. – С. 157–171.

5. Пославский С.Ю. Метод расчета устойчивости нелинейных систем с запаздываниями / С.Ю. Пославский // Вестник Харьковского национального университета. – 2014 г. – №1133. – С. 48-55.

6. Пославский С.Ю. Критерии устойчивости механических систем с запаздыванием / С.Ю. Пославский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. − Вип. 24. – С. 232–247.

7. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.;.Таврический нац. ун-т. – Симферополь, 2008. – С. 65.

8. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с переменным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Моделирование, идентификация, синтез систем управления // Сборник тезисов двенадцатой Международной научно-технической конференции. – Донецк: Изд. Института прикладной математики и механики НАН Украины, 2009. – С. 23.

9. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Тези доповідей Українського математичного конгресу (м. Київ, Інститут математики НАН України, 27−29 серпня 2009) − 2009. − Режим доступу: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Poslavsky.pdf

10. Пославский С.Ю. Двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова и критерии устойчивости нелинейных систем с запаздывавием / С.Ю. Пославский // X Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.;.Таврический нац. ун-т. – Сімферополь: ДИАЙПИ, 2010. – С. 119.

11.Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Вестник ХНТУ. Вып. 3(42) – Херсон: ХНТУ, 2011. – С. 215–221.

12. Пославский С.Ю. Метод расчета устойчивости систем с переключениями / С.Ю. Пославский // Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)»: Тез. докл.;.Таврический нац. ун-т. –Симферополь, 2012. – С. 15-16.

АНОТАЦІЯ

Пославський С.Ю. Критерії стійкості нелінійних механічних систем з запізненням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена розробці нових критеріїв стійкості нелінійних

диференціальних рівнянь містять постійне, змінне та розподілене запізнення.

Запропоновано нові критерії стійкості нелінійних систем з запізненням засновані на оцінках еволюційних операторів лінійної частини системи, що дозволяють отримувати умови стійкості виражені безпосередньо через параметри системи; отримано двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова та достатні умови стійкості на нестійкості; вказано класи систем для яких отримані результати дають точне значення максимального показника Ляпунова та необхідні і достатні умови стійкості; запропоновано простий метод розрахунку стійкості, обчислювальна складність якого практично не залежить від порядку системи; запропоновано новий підхід для аналізу стійкості систем з переключеннями; за допомогою розроблених критеріїв досліджено стійкість системи стабілізації перевернутого маятника з урахуванням запізнювання в зворотньому зв'язку та процесу різання металів при вертикально-фрезерній обробці, проведено порівняння з відомими експериментальними і теоретичними результатами.

Ключові слова: експоненціальна стійкість, критерій стійкості, показники Ляпунова, система з запізненням, система з переключеннями.

АННОТАЦИЯ

Пославський С.Ю. Критерии устойчивости нелинейных механических систем с запаздыванием. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена разработке новых критериев устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений которые содержат постоянное, переменное и распределенное запаздывания.

Предложены новые критерии устойчивости нелинейных систем с запаздыванием основаны на оценках эволюционных операторов линейной части системы, позволяющие получать условия устойчивости выражены непосредственно через параметры системы; получено двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости на неустойчивости; указаны классы систем для которых полученные результаты дают точное значение максимального показателя Ляпунова и необходимые и достаточные условия устойчивости; предложен простой метод расчета устойчивости, вычислительная сложность которого практически не зависит от порядка системы; предложен новый подход для анализа устойчивости систем с переключениями; с помощью разработанных критериев исследована устойчивость системы стабилизации перевернутого маятника с учетом запаздывания в обратной связи и процесса резания металлов при вертикально-фрезерной обработке, проведено сравнение с известными экспериментальными и теоретическими результатами.

Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, критерий устойчивости, показатели Ляпунова, система с запаздыванием, система с переключениями.

SUMMARY

Poslavskii S. Yu. Stability criteria for nonlinear mechanical systems with delay. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree in speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the development of new stability criteria for nonlinear differential equations containing constant, varying and distributed delays.

New stability criteria for nonlinear systems with delay, based on estimates of evolutionary operators of the linear subsystems which give stability conditions expressed directly through the system parameters are proposed; bilateral estimates for the maximal Lyapunov exponent and sufficient stability and instability conditions are obtained; the classes of systems for which the results give the exact value of the maximal Lyapunov exponent and necessary and sufficient stability conditions are specified; a simple method for stability calculation, which computational complexity is almost independent of the system order, is proposed; a new approach for stability analysis of switching systems, is provided; by using the developed criteria, stabilization system for inverted pendulum with delay in the feedback and metal cutting at vertical milling, are investigated, the results are compared with known experimental and theoretical results .

Keywords: exponential stability, stability criteria, Lyapunov exponent, time-delay system, switching system.