

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Робота присвячена аналізу стійкості нелінійних механічних систем з коченням, реальним прототипом яких є колісні екіпажі.

Необхідність в проведенні досліджень з цієї тематики викликана, в першу чергу, широким використанням в практиці проектування колісних екіпажів методів аналізу стійкості і управління. Поява шимі, на жаль, залишається в більшості випадків «несподіваним» явищем для розробників авіаційної і колісно-транспортної техніки. «...As a concluding remark it can be stated that despite a long history, landing gear shimmy remains a relevant problem today.»* («...У завершальному зауваженні можна констатувати, що, незважаючи на довгу історію, шимі шасі залишається актуальним завданням і сьогодні»).

Це, на наш погляд, з одного боку пов'язано з об'єктивними труднощами дослідження багатопараметричних задач, а з іншого - в результаті використання недосконалих (з точки зору універсальності) моделей взаємодії пружного колеса з опорною поверхнею в різних режимах кочення, відповідних реальним експлуатаційним умовам.

Однією з необхідних передумов виникнення автоколивань є підведення енергії в систему ззовні. Таким «пусковим механізмом», як правило, є позиційні неконсервативні сили в системі, роль яких в моделях колісних екіпажів з пружним пневматиком виконують сили відведення (аналог стежачих сил).

Явище відведення пружного колеса було уперше розглянуте в роботі Брульє в 1925 р і надалі використовувалося при дослідженні задач шимі (коливання коліс, що котяться і самозбуджуються, шасі літака, що виникають в стійці, або підвісці автомобіля) багатьма авторами як представниками теоретичного напрямку М.В. Келдиш, Г.В. Аронович, І.І. Метеліцин, Ю.І. Неймарк, Н.А. Фуфаєв, Л.Г. Лобас, Н.В. Расеїка, R.S. Sharp, I.J.M. Besselink, S. Evangelou, D.J.N. Limebeer, так і інженерами-дослідниками авіаційного і автомобільного транспорту Б. фон Шліппе, Р.Ф. Дитріх, К.С. Колесніков, В.С. Гоздек, В.І. Гончаренко, Б.М. Шифрін.

У роботах Ю.І. Неймарка, Н.А. Фуфаєва** отримали розвиток моделі колісних екіпажів, що враховують як голономну, так і неголономну постановки задачі про рух колісного екіпажу, які активно використовувались надалі багатьма авторами: І.В. Новожилов, А.М. Формалінський, А.А. Мартиненко, Л.Г. Лобас, Н.В. Нікітіна, С.А. Зегжда, J.M. Papadopoulos, A. Ruina, A.L. Schwab.

Застосування методів теорії біфуркацій в задачах стійкості нелінійних моделей колісних екіпажів бере початок з 90х років в роботах Hans Troger, Alois Steindl***.

* Besselink J.M. Shimmy of aircraft main landing gears / J.M.Besselink. – PhD thesis, Delft University of Technology, 2000. –201 p.

** Неймарк Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.

***Hans Troger, Alois Steindl Nonlinear Stability And Bifurcation Theory: An Introduction For Engineers And Applied Scientists. Springer Verlag. 1991. 407 p.

Аналіз дійсних біфуркацій для моделей екіпажів з монотонними залежностями сил відведення досить повно був розглянутий в роботах Л.Г. Лобаса, В.Г. Вербицького. Останнім часом значне число робіт пов'язане з аналізом впливу немонотонних залежностей сил відведення і уточнень полікомпонентної моделі сухого тертя В.Ф. Журавльов, Д.М. Клімов, А.А. Кірієнков.

У зв'язку з цим, актуальним є розвиток методів наближеного аналізу автоколивань механічних систем (що беруть свій початок в роботах Н.Н. Боголюбова, Л.І. Мандельштама, А.Ю. Митропольського, А.Ю. Ішлінського, Я.Г. Пановко), що дозволяють врахувати специфіку різних нелінійностей як фізичних (сил відведення і стабілізуючого моменту), так і нелінійностей, породжуваних нелінійною природою самих рівнянь руху колісного екіпажа.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, результати яких наведено в дисертаційній роботі, проводилися у відповідності з науковою темою Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України «Сучасні проблеми коливальності, стійкості і керованості елементів механічних систем при динамічних навантаженнях» (№ ДР 0112U000251) та відповідно до планів науково-дослідної роботи ДААТ «Дослідження стійкості та аналіз автоколивань елементів шасі колісних машин» (№ ДР 0113U003591).

Мета і задачі дослідження. Основною метою роботи є розвиток однотипного підходу до аналізу як дивергентної, так і флатерної втрати стійкості нелінійних систем з коченням на основі класифікацій каспідних особливостей: «згортка», «зборка», «метелик».

Так в роботі розглянуто ряд задач, пов'язаних з розвитком наближеного методу аналізу автоколивань автономних нелінійних механічних систем (для яких реалізується сценарій втрати стійкості, що відповідає теоремі Андронова-Хопфа), а також задача якісного аналізу множини стаціонарних режимів і умов реалізації небезпечної-безпечної границі стійкості нелінійних моделей колісного екіпажу на основі побудови відповідних біфуркаційних множин. А саме:

- реалізація наближеного методу аналізу автоколивань у разі руху колісної зчипки в кругових ділянках колії, а також для двоступеневої моделі стійки шасі з урахуванням несталого відведення в прямолінійному режимі (з аналізом впливу структури сил на характер автоколивань);

- задача порівняльного аналізу найбільш поширених моделей опису взаємодії колеса з опорною поверхнею (моделі І. Рокара і модифікації моделі М.В. Келдиша) при автоколиваннях шимі;

- задача аналізу автоколивань для колісного екіпажу з урахуванням інерційності і «пружного зв'язку» передньої стійки з його корпусом;

- задача якісного аналізу множини стаціонарних режимів моделі екіпажу і їх стійкості з немонотонними характеристиками сил відведення;

- задача аналізу зміни властивостей повороткості моделі колісного екіпажу, що враховує нелінійність сил бічного відведення.

Об'єктом досліджень у роботі являються автоколивання механічних систем з коченням, описаних системами нелінійних диференціальних рівнянь.

Предметом досліджень являється задача аналізу автоколивань нелінійних механічних систем, з використанням теорії біфуркації.

Методи досліджень. Методи динаміки систем пов'язаних тіл, якісної теорії диференціальних рівнянь; теорії біфуркації динамічних систем; теорії нелінійних коливань.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що вперше побудовані уточнені математичні моделі колісних екіпажів (за рахунок узагальнення характеристик силової взаємодії пружного колеса з опорною поверхнею) і розвинений ефективний чисельно-аналітичний метод дослідження дивергентних та флатерних біфуркацій стаціонарних станів механічних систем з коченням: проведено якісний аналіз структури розбиття фазової площини траєкторіями, при зміні двох керованих параметрів моделі колісного екіпажу, з урахуванням найбільш загальних геометричних характеристик сил відведення та стабілізуючих моментів; показано можливість використання двох моделей взаємодії колеса з опорною поверхнею (аксіоматики І. Рокара або моделі М.В. Келдиша) при аналізі автоколивань шимі в нелінійній постановці; одержано умови виникнення автоколивань в аналітичному вигляді при русі колісної зчипки в прямих і кругових ділянках колії; розглянуто вплив різних типів апроксимації нелінійних залежностей сил відведення і стабілізуючого моменту на інтенсивність автоколивань колісного модуля.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю постановок вихідних задач; використанням якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії біфуркації динамічних систем, теорії нелінійних коливань; застосуванням апробованого методу наближеного аналізу автоколивань механічних систем та узгодженістю із відомими результатами.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертації результати мають перш за все теоретичне значення. Теоретичне значення отриманих у роботі результатів полягає у можливості їх використання при дослідженні механічних систем з коченням, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь. Запропоновані методи дослідження, з використанням теорії біфуркації, можуть бути використанні в багатьох задачах аналізу автоколивань нелінійних механічних систем.

Практичне значення отриманих у роботі результатів полягає в тому, що вони можуть також бути використані на стадії конструювання колісних екіпажів з метою забезпечення їх безпечної експлуатації та при проектуванні автоматизованих систем керування.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях: 3-й Міжнародній конференції «Нелинейная динамика – 2010», Харків, 2010р.; Міжнародній конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харків, 2012 р.; XIУ Міжнародній науковій конференції ім. ак. М. Кравчука, Київ,

2012 р.; Міжнародній науковій практичній конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», Кіровоград, 2012 р.; Міжнародній конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харків, 2013 р.; 2-й міжнародній заочній науково – практичній конференції «Наука вчера, сегодня, завтра», Новосибірськ, 2013р.

Окремі положення дисертації доповідались на наукових семінарах відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Донецьк, 2010 – 2014), відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015). Дисертація у завершеному вигляді доповідалася і обговорювалася на науковому семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015) та засіданні секції «Динаміка і стійкість руху механічних систем» при вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (Київ, 2016).

Публікації. По матеріалах дисертації опубліковано 13 наукових робіт, серед яких 7 статей опубліковано у фахових виданнях, 6 робіт у збірниках матеріалів і праць міжнародних наукових конференцій.

Особистий внесок здобувача. Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації. Серед опублікованих наукових робіт 3 є самостійними. В роботах [1, 3, 8, 10], які написані у співавторстві з науковим керівником доктором фіз.-мат. наук, професором В.Г. Вербицьким, співавтору належать теоретичні положення, що покладені в постановку задач, перевірка та обговорення результатів. В роботі [8] В.Г. Вербицькому належить загальний задум проведення досліджень, рівняння руху, вираз умов стійкості в просторі параметрів, дисертанту належить чисельно-аналітичне дослідження біфуркацій граничного циклу. В роботах [6, 9] співавторам В.Г. Вербицькому та В.Г. Хребту належать експериментальна перевірка та обговорення результатів; дисертанту належить аналіз поворотності моделі колісного екіпажу, геометрична інтерпретація умов небезпечної-безпечної за М.М. Баутінім границі стійкості в просторі параметрів.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 120 найменувань (12 сторінок) та 45 ілюстрацій. Загальний обсяг дисертації становить 135 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертації. В ньому обґрунтована актуальність вибраної теми, сформульовані мета та задачі дослідження, наукова новизна та практичне значення одержаних результатів дисертації. Наведено відомості про апробацію та публікації результатів досліджень.

Перший розділ. Представлений опис літературних джерел, що мають відношення до теми дисертації.

Другий розділ. Описані основні методи досліджень і коротко наведені відомі теоретичні положення, вживані в дисертаційному дослідженні. У підрозділі 2.1 розглянуті моделі взаємодії колеса з опорною поверхнею: феноменологічна теорія кочення пружно деформованих коліс по І. Рокару і більш повна концепція кочення пружного колеса, запропонована М.В. Келдишем. Також розглянуто різні аналітичні представлення апроксимації бічної реакції і стабілізуючого моменту як функції кута відведення і зв'язок між ними.

У підрозділі 2.2 запропонований підхід наближеного аналізу автоколивань на прикладі простої коливальної системи за наявності зовнішнього гармонічного збудження. Далі даний підхід апробовано на прикладі задачі про рух моделі шасі літака, яка враховує лише один ступінь свободи по куту повороту відносно вертикальної стійки, та використано в главах 3, 4 і 5.

Амплітудні криві, отримані в результаті застосування методу наближеного аналізу автоколивань, визначають інтервали коливальної нестійкості, що еквівалентні результатам, отриманим при використанні критерію Рауса-Гурвіца. Цей підхід дозволяє врахувати характерні особливості нелінійної залежності, при цьому розглянута можливість наближеного представлення сил відведення. На основі амплітудного рівняння може бути отримана біфуркаційна множина, що розбиває площину конструктивних параметрів на області з різним числом автоколивань.

Результати, отримані на основі наближеного методу, перевіряються шляхом чисельного інтегрування системи рівнянь збуреного руху.

Третій розділ присвячений аналізу умов збудження автоколивань в моделях стійки шасі.

У підрозділі 3.1 проведений аналіз автоколивань колісного модуля при двох моделях взаємодії колеса з опорною поверхнею.

Модель взаємодії колеса з опорною поверхнею по І. Рокару :

$$\sigma\dot{\delta} + V\delta - V\psi - l\dot{\psi} = 0; \quad (1)$$

$$F\ddot{\psi} + k \cdot \dot{\psi} + c \cdot \psi + l \cdot Y(\delta) + M(\delta) = 0.$$

δ – кут відведення колеса,

σ – параметр релаксації,

$Y(\delta)$ – сила відведення має характер функції насичення,

$M(\delta) = -b\delta$ – стабілізуючий момент.

Конструктивні параметри системи: F, k, l, c .

Рівняння збуреного руху колісної зчипки, відповідно до моделі М.В. Келдиша, мають вигляд (2)

$$\begin{aligned}
 V \cdot \dot{\varphi} + \dot{y} + V \cdot \dot{\psi} + l \cdot \ddot{\psi} &= 0, \\
 -\alpha \cdot V \cdot y + \beta \cdot V \cdot \dot{\varphi} + \dot{\varphi} + \dot{\psi} &= 0, \\
 F \ddot{\psi} + k \cdot \dot{\psi} - l \cdot F_y(y) - M_z(\varphi) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

де y – бічна деформація пневматика,

φ – кутова деформація пневматика,

$F_y = a_y y$ – поперечна сила в лінійному наближенні,

$M_z = b\varphi$ – стабілізуючий момент.

Параметри системи: a_y, b, α, β .

Кут відведення по Рокару і кут скручування фізично одна й та ж сама величина, окрім цього кут відведення пов'язаний з бічною деформацією пневматика і параметром релаксації, тоді співвідношення (3) можемо вважати виконаними:

$$\delta = -y/\sigma, \quad \delta = -\varphi, \quad Y(\delta) = -F_y(y) \tag{3}$$

З другого рівняння системи (2) при припущенні сталого відведення витікає (4), що дає можливість встановити узгодженість між параметрами двох моделей:

$$\sigma = \beta/\alpha \tag{4}$$

Використовуючи наближений метод аналізу автоколивань, отримані амплітудні криві для обох моделей (рис. 1).

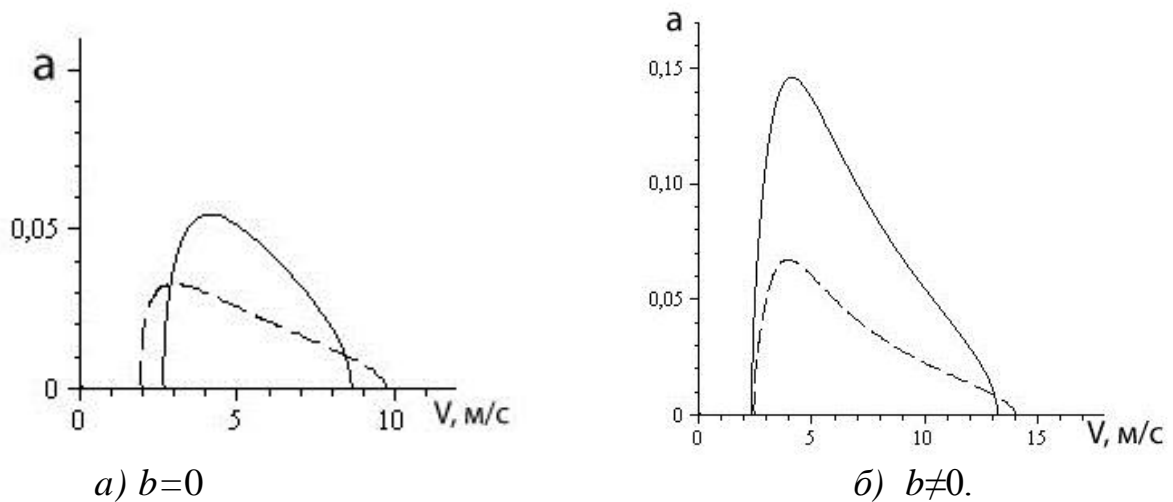


Рис. 1. Амплітудні криві
(система (1) - пунктирна крива, система (2) - суцільна).

Наявність стабілізуючого моменту (рис. 1, б) - призводить до розширення області автоколивань.

Інтервали коливальної нестійкості для обох систем співпадають. Видиме розузгодження амплітудних кривих по їх інтенсивності можна пояснити тим, що - система (1) характеризується автоколиваннями по куту відведення, а амплітуди автоколивань системи (2) поперечною деформацією пневматика

(враховуючи співвідношення (4), амплітуди будуть приблизно рівні - коефіцієнт пропорційності $1/\sigma = 3$).

Таким чином, процеси автоколивань ідентичні як по областям їх виникнення, так і по інтенсивності, що вказує на «тісний взаємозв'язок» даних моделей. Отже, аксіоматика І. Рокара може бути використана для дослідження задач стійкості динаміки колісних екіпажів.

Далі в роботі буде використана феноменологічна аксіоматика І. Рокара - характеристики взаємодії колеса з опорною поверхнею - сила відведення і стабілізуючий момент вважаються відомими нелінійними залежностями.

У підрозділі 3.2 на прикладі системи (1) розглянуто вплив різних типів апроксимації нелінійної залежності сили відведення і стабілізуючого моменту на характер автоколивань. Також побудована біфуркаційна множина, що розділяє площину параметрів на області з різним числом граничних циклів.

В результаті застосування наближеного методу аналізу автоколивань отримано аналітичне співвідношення (5), що дозволяє оцінити вплив нелінійних характеристик сил відведення і стабілізуючого моменту на характер автоколивань.

$$-FakV^2 + FV\tilde{Y}(\alpha)l^2 - FV\tilde{Y}(\alpha)\sigma l - k^2a\sigma V + \tilde{Y}(\alpha)k\sigma l^2 - a\sigma^2ck = 0, \quad (5)$$

де $\tilde{Y}(a) = Y(a) + M(a)/l$

1. На рис. 2, а представлені амплітудні криві, отримані за відсутності стабілізуючого моменту і різної апроксимації сил відведення: 1 - сила відведення апроксимована лінійним і кубічним членами, 2 - враховуються члени розкладання до п'ятої міри включно, 3 - розкладання сили відведення до членів сьомої міри включно.

Криві (1) і (3) зберігають якісний характер амплітудної кривої, отриманої при завданні нелінійної залежності сили відведення в початковому виді. Результат, представлений на кривій 2, вносить відхилення якісного характеру. В області стійкості при $V > 10.3$ м/с з'являється нестійкий граничний цикл, що обмежує область притягання необуреного руху.

2. Амплітудні криві представлені на рис. 2, б, отримані при повному завданні нелінійної залежності сили відведення, а саме $Y(\delta) = C_1\delta / \sqrt{1 + (C_1\delta/\varphi N)^2}$, і різному представленні стабілізуючого моменту: 1 - динамічна система (1) враховує наявність стабілізуючого моменту $M_1 = A\delta$, 2 - динамічна система (1) враховує наявність стабілізуючого моменту $M_2 = A\delta/(B\delta^4 + C\delta^2 + 1)$, 3 - стабілізуючий момент відсутній.

Таким чином, наявність стабілізуючого моменту призводить до значного розширення області нестійкості, що підтверджується при аналізі умов стійкості по лінійному наближенню. При цьому амплітудна крива при різних представленнях стабілізуючого моменту практично не змінюється, тобто при аналізі автоколивань досить враховувати лише лінійну частину стабілізуючого моменту. В той же час слід вказати на можливе спотворення картини

спостережуваних автоколивань (рис. 2, а) при наближеному представленні сил бічного відведення.

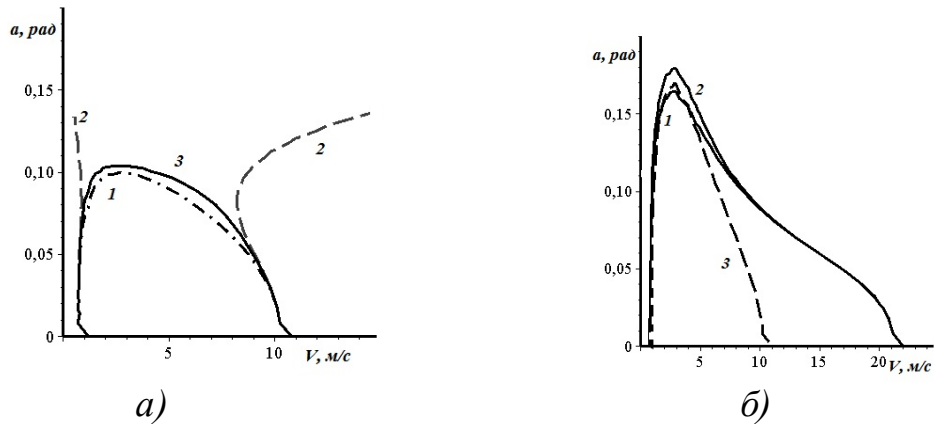


Рис. 2. Амплітудні криві

Підрозділ 3.3 присвячений задачі аналізу автоколивань колісної зчіпки в околі кругового стаціонарного режиму. Колісна зчіпка може бути прототипом як керованого колісного модуля, так і самоорієнтируємих колісних опор різних транспортних засобів.

Рівняння збуреного руху колісної зчіпки в околиці кругового стаціонарного режиму руху мають вигляд (6)

$$\sigma \cdot \dot{\delta} + v \cdot \delta - v \cdot \psi - l \cdot (\dot{\psi} + \Omega) = 0; \quad (6)$$

$$F_{zz} \cdot \ddot{\psi} + c \cdot \psi + k \cdot \dot{\psi} + l \cdot Y(\delta) - l \cdot m \cdot v \cdot \Omega = 0,$$

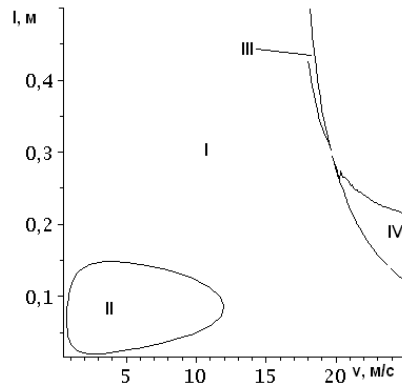
де Ω – кутова швидкість радіус-вектора MO ,

Y – момент сили відведення визначений з точністю до кубічного наближення,

F – момент інерції відносно точки зчеплення,

c, k – жорсткість і демпфування при коливаннях колісної зчіпки.

На рис. 3 представлені границі в площині параметрів (l, v) , де порушуються необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості. В порівнянні з випадком прямолінійного режиму руху з'являються додаткові границі області стійкості: III відповідає області флатерної нестійкості (коливальної), IV відповідає області дивергентної нестійкості.



*Рис. 3. Характерні границі області стійкості
де I - відповідає області стійкості
II, III - відповідає області флатерної нестійкості
IV - відповідає області дивергентної нестійкості.*

Для аналізу автоколивань розглянемо винесення стійки $l=0,05$ м. Тоді інтервал коливальної нестійкості від 0.78 м/с до 11.9 м/с.

Аналіз автоколивань на основі наближеного методу призводить до амплітудної кривої на рис. 4 (сила відведення апроксимується лінійним і кубічним членами розкладання в ряд Тейлора).

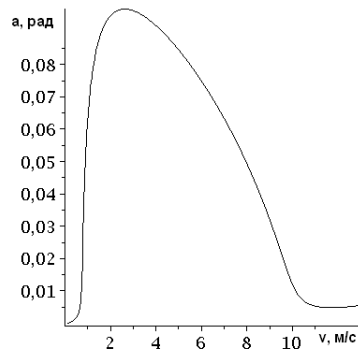


Рис.4. Амплітудна крива

Права межа амплітудної кривої має незначні відхилення від межі інтервалу нестійкості, ця невідповідність може бути пов'язана з погрішністю визначення стаціонарного кругового режиму (був отриманий для лінеаризованої системи). Перевірка результатів наближеного аналізу автоколивань проведена на основі чисельного інтегрування.

Радіус кругової траєкторії розглянутий в цьому випадку був досить великий (~ 40 м), що дає можливість зіставити цей результат з попереднім, отриманим для прямолінійного руху. Похибка, що виникає у разі чисельного інтегрування близько 10%.

У підрозділі 3.4 проведено аналіз впливу структури сил у разі більш повної моделі стійки шасі (враховувалося відхилення стійки в поперечному напрямку відносно точки закріплення).

Ця задача є одним з важливих напрямів аналізу стійкості механічних систем, що беруть свій початок від теорем Тетта-Топсона-Четаєва. У лінійній

постановці і у разі лінійно-кубічної апроксимації сил відведення ця задача була розглянута Л.Г. Лобасом, Н.В. Нікітіною і В.І. Гончаренко. У даному випадку аналіз автоколиваний стійки шасі проведено залежно від реальних нелінійних пружних характеристик колеса. Відповідна математична модель коливаний стійки шасі по двом ступеням свободи: по куту рискання і куту крену, описана системою (7)

$$\begin{aligned} B \cdot \ddot{\theta} + \chi_1 \cdot \dot{\theta} + h \cdot \dot{\theta} - \frac{I \cdot v}{r} \dot{\psi} + M(\alpha) &= 0; \\ C \cdot \ddot{\psi} + \chi \cdot \dot{\psi} + h_1 \cdot \dot{\psi} + \frac{I \cdot v}{r} \dot{\theta} + l \cdot Y(\alpha) &= 0; \\ \alpha &= \theta + \frac{\dot{\psi} \cdot l}{v}. \end{aligned} \quad (7)$$

де $Y(\alpha) = k\alpha / \sqrt{1 + (k\alpha/\varphi N)^2}$ и $M(\alpha) = \mu\alpha / (\mu_4 \alpha^4 + \mu_2 \alpha^2 + 1)$, (8)

Система (9) представляє лінійне наближення системи (7), враховуючи математичну структуру всіх діючих сил.

$$A\ddot{x} + (D + vG)\dot{x} + (K + lP)x = 0, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} h_1 + \frac{k \cdot l^2}{v} & \frac{\mu \cdot l}{2v} \\ \frac{\mu \cdot l}{2v} & h \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I}{r} - \frac{\mu \cdot l}{2v^2} \\ -\left(\frac{I}{r} - \frac{\mu \cdot l}{2v^2}\right) & 0 \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} \chi & \frac{k \cdot l}{2} \\ \frac{k \cdot l}{2} & \chi_1 + \mu \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A, D, K - симетричні матриці інерційних, дисипативних і потенційних сил, а G, P - косиметричні матриці гіроскопічних і неконсервативних позиційних сил.

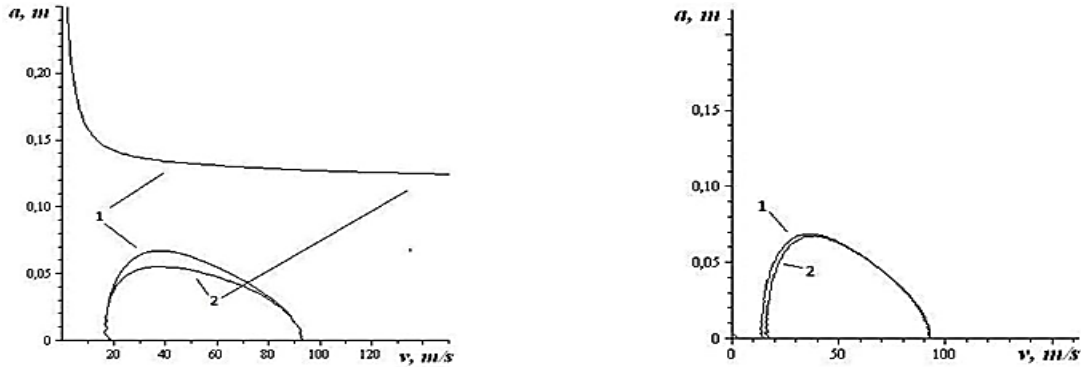
Лінеаризовані рівняння збуреного руху колісного модуля мають весь спектр по математичній класифікації діючих сил - інерційні, дисипативні, гіроскопічні, потенційні і неконсервативні позиційні.

Для реалізації наближеного методу аналізу автоколиваний система (7) доповнюється рівнянням несталого відведення (результати аналізу при $\sigma = 0$ і лінійно-кубічній апроксимації добре узгоджуються з результатами, отриманими раніше Л.Г. Лобасом*).

$$\sigma \cdot \dot{\alpha} + v \cdot \alpha - v \cdot \theta - l_0 \cdot \dot{\psi} = 0. \quad (10)$$

* Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий // К.: Наукова думка, 1990. – С. 170-180.

На рис. 5, представлені амплітудні криві, відповідні до різних апроксимацій сил відведення, причому наближена апроксимація сили відведення призводить до наявності гілки нестійких автоколивань (рис. 5, а крива 3).



$$a) Y(\alpha) = k\alpha - \frac{k^3\alpha^3}{2N^2\varphi^2}$$

$$б) Y(\alpha) = k\alpha(1 + k^2\alpha^2 / N^2\varphi^2)^{-1/2}$$

Рис.5. Амплітудні криві

Облік стабілізуючого моменту призводить до незначного розширення області нестійкості. Ці результати були підтверджені аналізом умов стійкості прямолінійного режиму руху по лінійному наближенню з використанням критерію Рауса-Гурвиця.

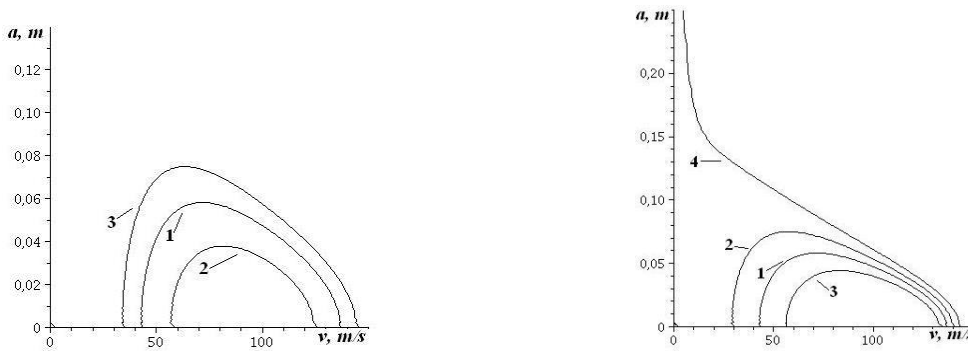
Основні тенденції процесу автоколивань за умов неповної дисипації в системі (або $h=0$, або $h_1=0$):

- дисипативні сили підтверджують свою стабілізуючу ефективність, а саме призводять до зменшення області нестійкості і зменшення амплітуд автоколивань;

- гіроскопічні сили мають також стабілізуючий ефект (збільшення моменту інерції колеса призводить до зменшення області і інтенсивності автоколивань);

- збільшення позиційних сил (розглядається характерний параметр позиційної сили - висота стійки) призводить до збільшення області нестійкості і зростання амплітуд автоколивань.

Для випадку $h=0$ в системі (10) спостерігається «суперечливий» вплив на стійкість незбуреного руху потенційних сил (представлені коефіцієнтами крутильної жорсткості χ і χ_1 відносно поздовжньої і вертикальної осі відповідно): збільшення крутильної жорсткості (відносно вертикальної осі) призводить до збільшення області коливальної нестійкості і амплітуд автоколивань, збільшення ж крутильної жорсткості (відносно поздовжньої осі) призводить до стабілізації (рис. 6 а і б).



- а) крива 1 відповідає $\chi = 421100 \text{ Н} \cdot \text{м}$,
 крива 2 - $\chi = 501100 \text{ Н} \cdot \text{м}$,
 крива 3 - $\chi = 361100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.
- б) крива 1 відповідає $\chi_1 = 12160 \text{ Н} \cdot \text{м}$,
 крива 2 - $\chi_1 = 20160 \text{ Н} \cdot \text{м}$,
 крива 3 - $\chi_1 = 4160 \text{ Н} \cdot \text{м}$,
 крива 4 - $\chi_1 = 32160 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Рис. 6. Амплітудні криві.

У четвертому розділі розглянута задача аналізу стійкості нелінійної моделі колісного екіпажу з керованим колісним модулем на основі чисельно-аналітичного методу продовження по двом параметрам; проведена оцінка амплітуд автоколиваний колісного модуля в області флатерної нестійкості прямолінійного руху.

До характерних параметрів, що впливають на умови безпечної втрати стійкості прямолінійного режиму руху моделі з жорстким рульовим управлінням, додається параметр крутильної жорсткості колісного модуля.

Математична модель (11), що визначає рух екіпажа з керованим колісним модулем, розглядалась в роботі Л.Г. Лобаса, В.Г. Вербицького*:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -m(U + \omega v) + m_1 \cos \theta \lambda (\Omega + TT) - m_1(a\Omega + \omega v + U) - m_1 \sin \theta \lambda (\omega^2 + \Theta^2 + 2\omega\Theta) + \\
 &\quad + Y_1 \cos \theta + X_1 \sin \theta + Y_2 \cos \theta_1 - X_2 \sin \theta_1; \\
 E_2 &= -J \Omega + a m_1 \cos \theta \lambda (\Omega + TT) - a m_1 \sin \theta \lambda (2\omega\Theta + \omega^2 + \Theta^2) - a m_1(a\Omega + \omega v + U) + \\
 &\quad + h\Theta + kk(\theta - \theta_0) + Y_1 a \cos \theta + X_1 a \sin \theta - Y_2 b \cos \theta_1 - X_2 b \sin \theta_1; \\
 E_3 &= (J_1 + m_1 \lambda^2) TT + (J_1 + m_1 \lambda (\lambda - a \cos \theta)) \Omega - m_1 \lambda \cos \theta (U + v\omega - m_1 \omega \sin \theta \lambda (u + a\omega\omega) + \\
 &\quad + h\Theta + kk(\theta - \theta_0) + Y_1 \lambda.
 \end{aligned} \tag{11}$$

де $Y_i(\delta_i) = k_i \delta_i (1 + k_i^2 \delta_i^2 / N_i^2 \varphi_i^2)^{-1/2}$ - сили відведення апроксимуються монотонною залежністю,

Вважаємо, що $X_1=0$ - приведена поздовжня сила на передній осі.

На рис. 7 представлена характерна границя дивергентної і флатерної нестійкості в площині параметрів (kk, v) , отримана при аналізі стійкості прямолінійного режиму руху Л.Г. Лобасом і В.Г. Вербицьким.

*Вербицкий В.Г. Об устойчивости движения транспортных машин с учетом колебаний упругого колесного модуля / В.Г. Вербицкий, Л.Г. Лобас. // К.: Прикладная механика, 1995. - Т. 31. №4 - С. 86-93.

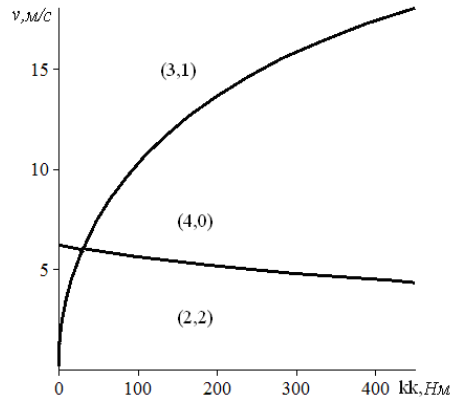
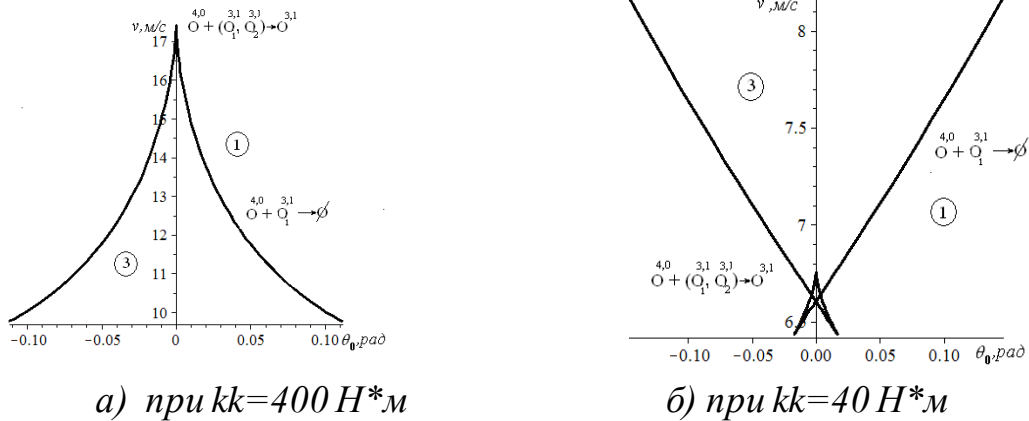


Рис. 7. Характерна границя дивергентної і флатерної нестійкості

У разі нелінійної апроксимації сил відведення отримано границі дивергентної нестійкості стаціонарних станів системи (11) на основі чисельного методу продовження по двох параметрах (рис. 8, а), точка загострення («cusp») відповідає критичній швидкості прямолінійного режиму руху, усі інші точки границі відповідають критичним значенням керуючих параметрів (v, θ_0) , при яких втрачається стійкість кругових стаціонарних станів через біфуркацію «згортки» («fold»). Зміна характерного параметру (крутильної жорсткості) колісного модуля призводить до біфуркації «метелик» («butterfly») (рис. 8, б), що пояснює зміни характеру границі стійкості прямолінійного режиму руху від небезпечного до безпечного.



а) при $kk=400 \text{ Н*м}$

б) при $kk=40 \text{ Н*м}$

Рис. 8. Біфуркаційна множина

Для забезпечення реалізації наближеного методу аналізу автоколивань система (11) доповнюється рівнянням несталого відведення.

На рис. 9 представлені амплітудні криві отримані при застосуванні наближеного методу автоколивань в зоні флатерної нестійкості.

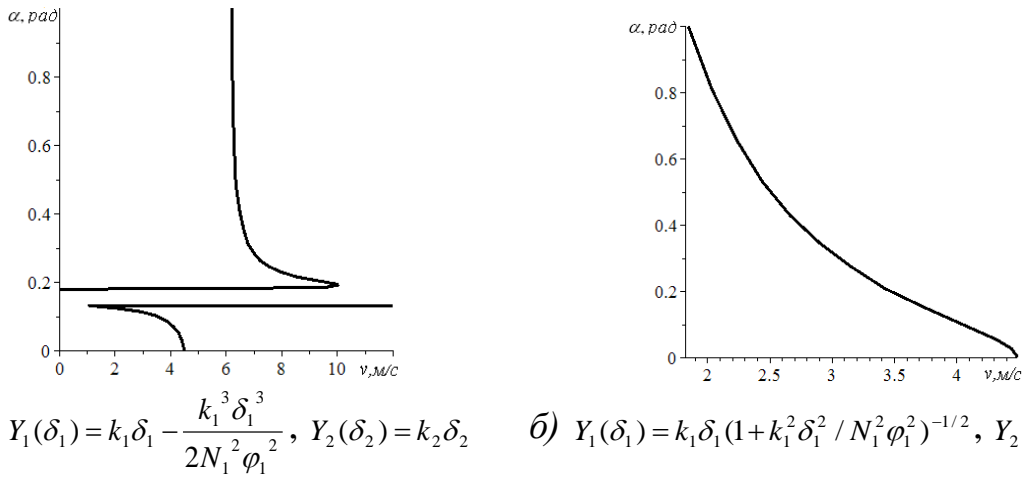


Рис.9. Амплітудні криві

Результати, отримані для двох випадків апроксимації сили відведення, мають істотні якісні відмінності. Наближена апроксимація сили відведення у вигляді лінійного і кубічного наближення спотворює реальну картину амплітудної кривої. Повна нелінійна апроксимація сили відведення узгоджується з результатами чисельного інтегрування рівнянь збуреного руху.

У **п'ятому розділі** розвиваються графо-аналітичний спосіб побудови біфуркаційної множини і якісні методи аналізу стійкості стаціонарних режимів руху моделі колісного екіпажу з жорстко закріпленим рульовим управлінням; також розглянута зміна властивостей повороткості на основі аналізу моделі колісного екіпажу, яка враховує нелінійність сил бічного відведення; отримана узагальнена залежність, що визначає «криву повороткості».

Система (12) представляє рівняння руху плоскої моделі двовісного екіпажу

$$\begin{cases} m(\dot{u} + \omega v) = Y_1 \cos \theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} = aY_1 \cos \theta - Y_2 b; \\ \delta_1 = \theta - \operatorname{arctg} \frac{u + a\omega}{v}, \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-u + b\omega}{v}. \end{cases} \quad (12)$$

де u - поперечна складова швидкості центру мас екіпажу;

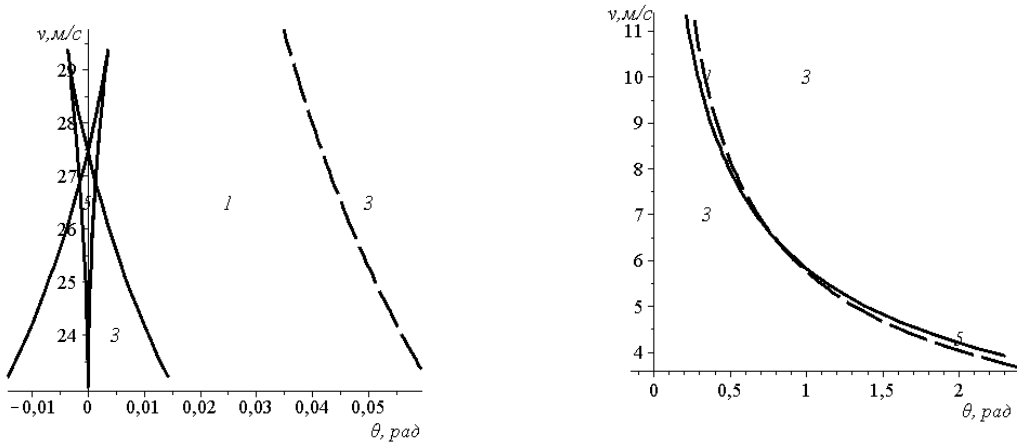
ω - кутова швидкість екіпажу, відносно вертикальної осі;

δ_1, δ_2 – приведені кути відведення, на передній і задній осях відповідно;

Y_1 і Y_2 – приведені бічні сили відведення, $Y_i = \frac{\gamma_i \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{(\delta_i - \beta_i)^2}{(\beta_i)^2}}}$.

Для моделі двовісного екіпажу з жорстким рульовим управлінням (що враховує нелінійні залежності сил відведення у вигляді монотонно зростаючих функцій) характерна тільки дивергентна втрата стійкості.

На рис. 10 представлена біфуркаційна множина, отримана графо-аналітичним способом у разі представлення сил відведення у вигляді нелінійної немонотонної залежності.



а) загальний вигляд множини

б) фрагменти множини

Рис. 10. Біфуркаційна множина для моделі екіпажу з нелінійною немонотонною залежністю сил відведення від кута відведення

Аналіз стійкості стаціонарних станів проводився на основі теорії індексів Пуанкаре. Фазові портрети підтверджують результати, отримані графоаналітичним підходом, і дають можливість оцінити області притягання.

Спадаюча ділянка сили відведення породжує нестійкі стаціонарні режими, індекси Пуанкаре яких $+1$, але дивергенція векторного поля позитивна, що ілюструє рис. 11, а. На рис. 11, б проілюстрована область притягання стійкого кругового режиму у разі немонотонних (спадяючих) залежностей сил відведення, її якісний характер співпадає з результатами, отриманими для монотонних залежностей.

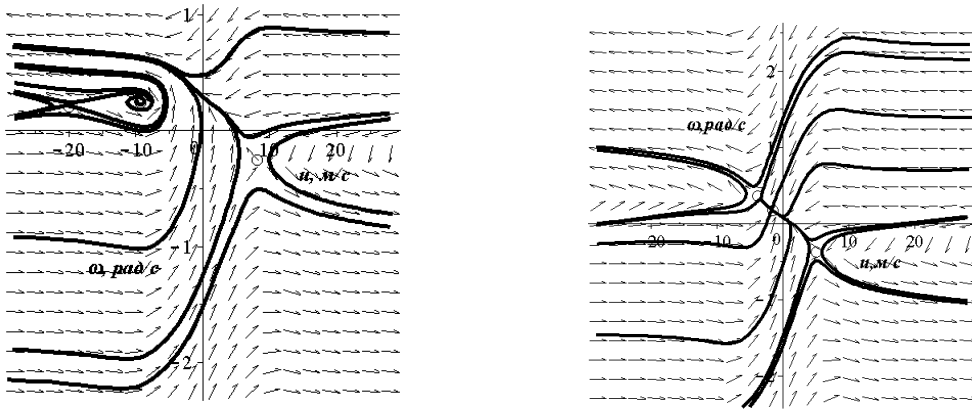
а) $v = 30 \text{ м/с}$, $\theta = 0.06 \text{ рад}$.б) $v = 20 \text{ м/с}$, $\theta = 0.02 \text{ рад}$.

Рис. 11. Характерні фазові портрети моделі колісного екіпажу з нелінійною немонотонною залежністю сил відведення

Відомо, що для лінійної моделі автомобіля з пружними по І. Рокару колесами характеристика повороткості (1 - недостатня, 2 - нейтральна, 3 - надлишкова) визначається співвідношенням безрозмірних коефіцієнтів опору відведення на передній і задній осях: 1 - $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$; 2 - $\bar{k}_2 = \bar{k}_1$; 3 - $\bar{k}_2 < \bar{k}_1$.

При русі екіпажа по колу радіусу R з різними значеннями параметра швидкості V (поздовжня складова швидкості ЦМ) виконується співвідношення

$$l/R = \theta + \delta_2 - \delta_1. \quad (13)$$

Тоді значення кута повороту керованих коліс визначається співвідношенням

$$\theta = l/R + (\delta_1 - \delta_2), \quad (14)$$

де різниця $(\delta_2 - \delta_1)$ залежить від апроксимації сил відведення, а саме

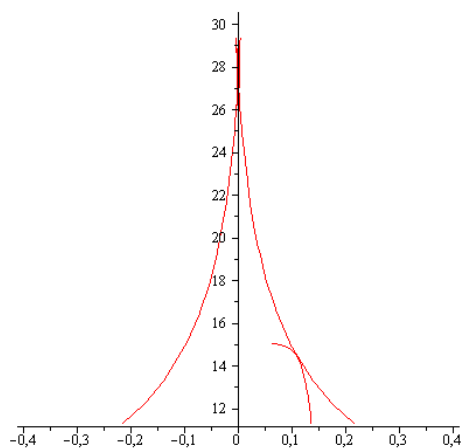
$$(\delta_2 - \delta_1) = G(Y) = F_2(Y) - F_1(Y).$$

Визначивши функцію $G(Y)$, отримаємо узагальнений вигляд кривої повороткості :

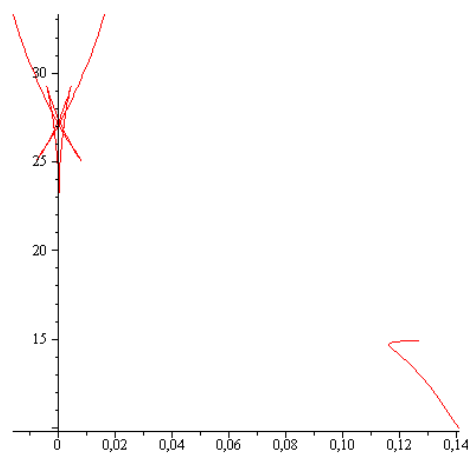
$$\theta = l/R - G(Y). \quad (15)$$

Узагальнений вираз кривої повороткості (15) може пояснити зміну властивостей повороткості автомобіля, що іноді відбувається на практиці (на основі лінійної гіпотези відведення вона залишається незмінною).

На рис. 12 представлені діаграми стійкості та повороткості в площині керованих параметрів (v, θ) моделі автомобіля :



а) $\varphi_1 = 0.8$



б) $\varphi_1 = 0.75$

Рис. 12. Діаграми стійкості та повороткості в площині керованих параметрів моделі

- у випадку $\varphi_1 = 0.8$ (рис. 12, а) «крива повороткості» торкається біфуркаційної множини при швидкості $V=14,7$ м/с - відбувається втрата стійкості екіпажа в русі по колу радіусу R (характер надлишкової повороткості не змінюється);

- у разі $\varphi_1 = 0.75$ (рис. 12, б) перетину «кривої поворотності» з біфуркаційною множиною не відбувається, отже втрата стійкості не відбувається (в цьому випадку характер поворотності змінюється з надлишкової на недостатню).

Таким чином, проявляється зв'язок між характером втрати стійкості прямолінійного руху небезпечною-безпечною і властивістю поворотності екіпажу (безпечна втрата стійкості прямолінійного руху гарантує перехід від надлишкової поворотності до недостатньої).

ВИСНОВКИ

Основні результати проведених досліджень, представлених в дисертації, полягають у наступному:

1. Проведено якісний аналіз структури розбиття фазової площини траєкторіями, при зміні двох керованих параметрів моделі колісного екіпажу, з урахуванням найбільш загальних геометричних характеристик сил відведення.
2. Показано можливість використання двох моделей взаємодії колеса з опорною поверхнею (аксіоматики І. Рокара або моделі М.В. Келдиша) при аналізі автоколивань шимі в нелінійній постановці.
3. Одержано умови виникнення автоколивань в аналітичному вигляді при русі колісної зчипки в прямих і кругових ділянках колії, розглянуто вплив різних типів апроксимації нелінійних залежностей сил відведення і стабілізуючого моменту на інтенсивність автоколивань колісного модуля.
4. Досліджено вплив структури сил на інтенсивність автоколивань стійки шасі з двома ступенями свободи в нелінійній постановці.
5. Досліджено дивергентну і флатерну втрату стійкості прямолінійного режиму руху нелінійної моделі екіпажу з керованим колісним модулем на основі біфуркаційного аналізу, отримана геометрична інтерпретація умов небезпечної-безпечної за М.М. Баутініми границі стійкості в просторі параметрів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Вельмагина Н.А. Бифуркационное множество модели двухосного экипажа с нелинейной немонотонной зависимостью сил увода / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2010 – Д., НАНУ ИПММ, 2010. – С. 131–139.
2. Velmagina N. The bifurcation set for a two-axes vehicle model with the non-linear dependence of slipping forces / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet // Тезисы докладов 3-й международной конференции «Нелинейная динамика – 2010», 21-24 сентября 2010г. – Х.: ООО «ЭДЭНА». – 2010. – С. 219–224.

3. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в прямолинейном режиме движения / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2011 – Д., НАНУ ИПММ. – 2011. – С. 100–108.
4. Вельмагина Н.А. Бифуркационное множество нелинейной модели автомобиля / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий, В.Г. Хребет // XIУ Міжнародна наукова конференція ім. ак. М.Кравчука, 19-21 квітня, 2012 р., Київ: мат. конф. – К., НТУУ. – 2012. – Т.1. – С.95.
5. Вельмагіна Н.О. Аналіз автоколивань колісного модуля / Н.О. Вельмагіна, В.Г. Вербицький, В.Г. Хребет // Тезиси докладов міжнародної конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», «Тараповские чтения-2012». – Харьков. – 01-31 мая 2012. – С. 33.
6. Velmagina N. Steerability and stability of automobile non-linear model / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet, A. Kravchenko // 10 An international journal on motorization, vehicle operation, energy efficiency and mechanical engineering «ТЕКА commission of motorization and energetics in agriculture», vol.12, no 3. – Lublin – Lugansk 2012. – P. 77-84.
7. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в круговом режиме движения / Н.А. Вельмагина // Матеріали Міжнародної наукової практичної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», 15 – 16 листопада, 2012 р., Кіровоград, Вид-во КЛА НАУ. – 2012. – С. 302–304.
8. Вельмагина Н.А. Устойчивость и бифуркации стационарных режимов движения модели колесного экипажа с управляемым колесным модулем / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Межведомственный сборник научных трудов «Механика твердого тела» Донецк 2012 – Д., НАНУ ИПММ. – 2012. – С. 125–134.
9. Velmagina N. Force structure impact on the wheel module stability and oscillation process / N. Velmagina, V. Verbitskii, V. Khrebet, A. Kravchenko // An international quarterly journal on motorization, vehicle operation, energy efficiency and mechanical engineering «ТЕКА commission of motorization and energetics in agriculture», vol.13, no 4. – Lublin, Rzeszow. – 2013. – P. 126–133.
10. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля при двух моделях взаимодействия колеса с опорной поверхностью / Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий // Материалы 2 международной заочной научно – практической конференции «Наука вчера, сегодня, завтра». 24 июля 2013г., – Новосибирск. – 2013. – С. 7–15.
11. Вельмагина Н.А. Бифуркации автоколебаний колесного модуля в окрестности прямолинейного режима движения / Н.А. Вельмагина // Международный научный журнал «Прикладная механика», том 49(59), №6, август – сентябрь, 2013 г. – Киев. – 2013. – Т.49(59). №6 – С. 113–120.
12. Вельмагина Н.А. Анализ автоколебаний колесного модуля в круговом режиме движения. / Н.А. Вельмагина // Вісник Донецького Національного

університета. Серія А: Природничі науки. Донецьк 2013 – Д., ДонНУ. – 2013. – С. 28–32.

13. Вельмагіна Н.А. Влияние структуры сил на устойчивость колесного модуля и процесс автоколебаний / Н.А. Вельмагіна, В.Г. Вербицкий, В.Г. Хребет // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», «Тараповские чтения-2013». – Харьков. – 29 сентября – 4 октября 2013 г. – С. 73–74.

АНОТАЦІЯ

Вельмагіна Н.О. Біфуркаційний аналіз стійкості нелінійних механічних систем з коченням, моделюючих колісні екіпажі. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2016.

У дисертації проведений аналіз стійкості нелінійних механічних систем з коченням, реальними прототипами яких є елементи шасі і колісні екіпажі, на основі наближених підходів теорії нелінійних коливань і прикладної теорії дійсних біфуркацій (класифікацій каспоїдних особливостей).

Отримані оцінки інтервалів автоколивань і їх амплітуд в аналітичному виді; розглянутий вплив структури сил і різних типів нелінійної апроксимації сил відведення на інтенсивність автоколивань колісного модуля з однією і з двома ступенями свободи; проаналізовано багатовиди рівноважних станів, властивості стійкості стаціонарних станів та зміну властивостей повороткості нелінійної моделі колісного екіпажу.

Ключові слова: стійкість, автоколивання, колісний екіпаж, стаціонарні стани, дійсні біфуркації.

АННОТАЦИЯ

Вельмагіна Н.А. Бифуркационный анализ устойчивости нелинейных механических систем с качением, моделирующих колесные экипажи – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертации проведен анализ устойчивости нелинейных механических систем с качением, реальными прототипами которых являются элементы шасси и колесные экипажи, на основе приближенных подходов теории нелинейных колебаний и прикладной теории вещественных бифуркаций (классификаций каспоидных особенностей).

Получены оценки интервалов автоколебаний и их амплитуд в аналитическом виде; рассмотрено влияние структуры сил и вида нелинейных зависимостей сил увода на интенсивность автоколебаний колесного модуля с одной и с двумя степенями свободы; проанализировано многообразие равновесных состояний, свойства устойчивости стационарных состояний и смена свойств поворачиваемости нелинейной модели колесного экипажа.

Ключевые слова: устойчивость, автоколебания, колесный экипаж, стационарные состояния, вещественные бифуркации.

SUMMARY

Velmagina N.A. Bifurcation analysis of stability of nonlinear mechanical systems with rolling which are the prototype of the wheeled vehicles. – Manuscript.

Thesis for Candidates Degree of Physical and Mathematical Sciences in speciality 01.02.01 – Theoretical Mechanics. – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis analyzes a stability of the nonlinear mechanical systems with rolling, the real prototypes of which are elements of undercarriage and the wheeled vehicles, on the basis of approximate approaches theory of nonlinear oscillation and applied theory of real bifurcations (Arnold's classifications of singularities).

The influence of structure of forces and approximation type of nonlinear slipping forces on intensity of self-excited oscillations of the wheeled module with one-two degrees of freedom are investigated; the manifold of the steady states, properties of stability of steady-states and changing of properties of steering of nonlinear model of vehicle is analyzed.

Key words: stability, self-excited oscillations, wheeled vehicles, steady-states, real bifurcations.