

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА**

Кіпніс Олександр Леонідович

УДК 539.375

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ МІЖФАЗНИХ ЗСУВНИХ ТРІЩИН
У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка
Національної академії наук України, м. Київ

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук, професор
Назаренко Володимир Михайлович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
завідувач відділу обчислювальної механіки та техніки.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Куц Володимир Іванович,
Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля
НАН України,
провідний науковий співробітник;


доктор фізико-математичних наук, професор
Мартиненко Михайло Антонович,
Національний університет харчових технологій,
завідувач кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «4» _____ жовтня 2016 р. о 13³⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.166.01 в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «1» вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,
доктор фізико-математичних наук

 О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Створення сучасної високоефективної техніки постійно ставить перед наукою про міцність матеріалів нові задачі, пов'язані з необхідністю підвищення надійності і довговічності конструкцій. Неминуча наявність в будь-якому матеріалі тріщин та тріщиноподібних ефектів, які з'являються ще на стадії його виготовлення, в ході наступної обробки, під дією навантажень і можуть стати причиною руйнування конструкції, пояснює неперервно зростаючий інтерес дослідників до механіки руйнування – галузі науки про міцність матеріалів, що стала у даний час одним з найбільш актуальних напрямків механіки.

Основи механіки руйнування були закладені в роботах Гриффітса, Ірвіна, Орована. Великий внесок у розвиток цього розділу механіки деформівного твердого тіла, зокрема, у розвиток методів розв'язання задач про тріщини-розрізи і близьких до них в математичному відношенні задач про тонкі включення у деформівних твердих тілах, зробили В.М. Александров, О.Є. Андрейків, Ю.А. Антипов, Л.Т. Бережницький, В.Л. Богданов, П.М. Витвицький, Р.В. Гольдштейн, І.О. Гузь, О.М. Гузь, О.П. Дацишин, С.О. Калоєров, А.О. Камінський, В.С. Кирилюк, Г.С. Кіт, В.А. Кривень, О.Ф. Кривий, Р.М. Кушнір, В.І. Куш, М.Я. Леонов, В.В. Лобода, М.А. Мартиненко, Р.М. Мартиняк, М.А. Махутов, В.О. Меньшиков, О.В. Меньшиков, В.В. Михаськів, Є.М. Морозов, М.Ф. Морозов, В.М. Назаренко, М.М. Николишин, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Ю.М. Подільчук, В.Г. Попов, Г.Я. Попов, М.П. Саврук, Л.Й. Слеп'ян, М.Г. Стащук, Г.Т. Сулим, А.Ф. Улітко, М.В. Хай, Л.П. Хорошун, Г.П. Черепанов, С.Я. Ярема, М. Comninou, А.Н. Cottrell, D.S. Dugdale, J. Dundurs, F. Erdogan, H. Liebowitz, J.R. Rice, G.C. Sih, M.L. Williams, A.R. Zak та інші.

Сучасні конструкції, які виконані з композитних матеріалів, передбачають наявність різноманітних гострокінцевих концентраторів напружень, зокрема, кутових точок складної структури. Ці точки є надзвичайно небезпечними, оскільки саме біля таких концентраторів напружень слід очікувати початок руйнування тіла у першу чергу. У відповідній задачі теорії пружності при наближенні точки тіла до кутової точки – гострокінцевого концентратора напруження прямують до нескінченності. Внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе зародження тріщин, що виходять з неї, довжини яких значно менші, ніж розміри тіла (маломасштабні тріщини). Якщо рівновага тріщини, що зародилася, виявиться нестійкою, то після досягнення стану граничної рівноваги режим її розвитку буде динамічним. Це може призвести до непередбаченого катастрофічного руйнування конструкції.

Викладене вище свідчить про те, що наявність розв'язків задач про тріщини у кутових точках є особливо цінною при вирішенні питань щодо руйнування конструкцій.

Але більшість праць, які присвячені дослідженню напружено-деформованого стану пружних тіл біля тріщин у кутових точках, відноситься до випадків, коли тіло в задачі, що розглядається, є однорідним. Значно менше таких праць стосується кутових точок кусково-однорідних тіл (вивчалися лише випадки, де кутовою точкою є кінець тріщини). Це пояснюється математичними труднощами, які виникають на шляху розв'язання відповідних крайових задач. Тому актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла є здійснення досліджень напружено-деформованого стану кусково-однорідних пружних тіл біля тріщин у кутових точках. В даній роботі таке дослідження проведене.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася у рамках держбюджетних науково-дослідних тем Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України «Дослідження крайових ефектів, стійкості, закритичного стану елементів конструкцій шаруватої структури композитних та нанокompозитних матеріалів» (2012 – 2015 рр., номер державної реєстрації 0112U000243), «Стійкість і закритична поведінка волокнистих і шаруватих композитних матеріалів та елементів конструкцій з локальними ефектами і недосконаlostями при різних умовах навантаження» (2016 – 2020 рр., номер державної реєстрації 0115U005702).

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи* є розвиток підходу до дослідження напруженого стану кусково-однорідних ізотропних пружних тіл біля маломасштабних зсувних тріщин у кутових точках та розв'язання з його використанням задач про граничну рівновагу тіла з міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ.

Поставлена мета досягалась шляхом виконання таких *завдань*:

- здійснення переходу від задач механіки руйнування про маломасштабні міжфазні зсувні тріщини в кутовій точці межі поділу середовищ до відповідної задачі теорії пружності для кусково-однорідного клиноподібного тіла з лініями розриву дотичного переміщення у вершині і умовою на нескінченності, що дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля;
- виведення і побудова точного розв'язку рівняння Вінера – Гопфа задачі;
- дослідження на основі цього розв'язку напруженого стану біля кінця маломасштабної зсувної тріщини в кутовій точці;
- установлення умови зрушення тріщини і дослідження її рівноваги на стійкість;
- аналіз поведінки напружень біля кутової точки.

Об'єкт дослідження – напружено-деформований стан кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу середовищ та гранична рівновага тіла з тріщинами.

Предмет дослідження – коефіцієнти інтенсивності напружень у кінцях тріщин, показники степеня сингулярності напружень у кутових точках, руйнуюче навантаження.

Методи дослідження: загальні положення про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл; метод відокремлення змінних; метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- на основі побудованих в роботі точних розв'язків нових задач теорії пружності для кусково-однорідних клиноподібних тіл вперше у механіці руйнування досліджено напружений стан біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин в кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ;

- встановлено характер зміни рівня концентрації напружень біля кінця тріщини та біля кутової точки у залежності від кута і пружних сталей;

- метод розв'язання одновимірних функціональних рівнянь Вінера – Гопфа задач теорії пружності для однорідних клиноподібних тіл поширено на випадок кусково-однорідного тіла;

- виведено рівняння для визначення руйнуючого навантаження, при досягненні якого відбувається зрушення тріщини; показано, що рівновага тріщини є нестійкою;

- досліджено граничну рівновагу кусково-однорідної площини з міжфазними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини; встановлено характер зміни руйнуючого навантаження в залежності від кута і пружних сталей.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується використанням як вихідних лише класичних положень механіки деформованого твердого тіла; коректністю постановок крайових задач теорії пружності; застосуванням точних математичних методів для розв'язання задач; збігом результатів в окремих випадках з відомими; узгодженістю висновків, що випливають з одержаних результатів з фізичними міркуваннями.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи подано у вигляді зручних для практичного користування формул, числових таблиць і графіків, які відповідають різним значенням кута між лініями межі поділу середовищ в її кутовій точці і пружних сталей. Ці дані можуть становити інтерес для будівництва, машинобудування, приладобудування і використовуватись при вирішенні питань, що пов'язані з розрахунками міцності елементів конструкцій.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 12 наукових праць: 1 стаття у науковому фаховому виданні України, яке включено до міжнародних наукометричних баз; 4 статті у наукових фахових виданнях України; 7 робіт у матеріалах конференцій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи одержані здобувачем самостійно. В [1, 3 – 12] здобувачу належить участь у постановці задач, виконання всіх аналітичних перетворень при побудові точних розв'язків задач теорії пружності для клиноподібних тіл, дослідження на основі цих розв'язків напруженого стану біля кінців тріщин та біля кутових точок, дослідження граничної рівноваги тіл з тріщинами, проведення необхідних розрахунків. Співавторам в [1, 3 – 12] належить формулювання загальної проблеми, з якою пов'язана дана робота; участь в постановці задач і вибір методів їх розв'язання; участь спільно зі здобувачем в обговоренні одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Основні положення та результати дисертації доповідались і обговорювались на Міжнародних конференціях «Dynamical system modelling and stability investigation: modelling&stability» (Київ, 2013, 2015); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013); 5-й міжнародній науковій конференції «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій» (Львів, 2014); 12-му міжнародному симпозиумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2015); Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2016); Міжнародній конференції «Математичні проблеми технічної механіки - 2016» (Дніпропетровськ, 2016).

У повному обсязі дисертація доповідалась і обговорювалась на наукових семінарах відділу обчислювальної механіки та техніки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України, професора В.М. Назаренка; семінарі з наукового напрямку «Механіка композитних і неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Я.Я. Рушицького.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, висновків та списку використаної літератури, що включає 169 найменувань. Загальних обсяг дисертації становить 133 сторінки, у тому числі 112 сторінок основного тексту. Робота містить 22 рисунки і 8 таблиць.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому керівнику члену-кореспонденту НАН України, професору Володимиру Михайловичу Назаренку за постійну увагу до роботи, консультації та численні методичні вказівки, які були використані при її виконанні.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми роботи; сформульовано мету і завдання дослідження; указано методи розв'язання поставлених задач; охарактеризовано наукову новизну і достовірність одержаних результатів, їх практичне значення; наведено відомості про публікації та особистий внесок в них здобувача; указано рівень апробації результатів.

У **першому розділі** проведено огляд літератури за темою дисертації: коротко описано результати досліджень плоских статичних задач теорії пружності для клиноподібних тіл, зокрема, для клиноподібних тіл з тріщинами у вершині, а також інших задач про лінії розриву переміщення в кутових точках. Такі задачі досліджували В.М. Александров, Р.Д. Банцурі, Л.Т. Бережницький, В.Б. Говоруха, А.О. Камінський, Л.А. Кіпніс, М.М. Кундрат, Ю.М. Лапуста, В.В. Лобода, В.І. Острик, М.П. Саврук, Б.І. Сметанін, Я.С. Уфлянд, А.О. Храпков, Г.П. Черепанов, А.Є. Шевельова, Н.Е. Doran, F. Erdogan, E.E. Gdoutos, R.D. Gregory, L.M. Keer, T. Kondo, F. Ouchterlony, R.P. Srivastav, O. Tamate, P.S. Theocaris, R.A. Westmann та інші.

Даний огляд свідчить про те, що у більшості досліджених задач про лінії розриву переміщення в кутових точках тіло вважається однорідним. У випадку кусково-однорідного тіла досліджувались лише задачі про лінії розриву переміщення в кінцях міжфазних тріщин та у кінці тріщини, що виходить на межу поділу середовищ. Задачі механіки руйнування, в яких досліджувався б напружено-деформований стан біля тріщин у кутових точках кусково-однорідних пружних тіл, не розглядалися. Тому вони становлять новий клас плоских статичних задач теорії пружності для тіл з тріщинами. В даній роботі досліджено задачі, що належать цьому класу.

У **другому розділі** наведено основні положення підходу до дослідження напруженого стану кусково-однорідних пружних тіл біля маломасштабних зсувних тріщин у кутових точках, який запропоновано використовувати в даній роботі. Суть підходу полягає у здійсненні переходу від задач про тріщини в кутових точках до задач теорії пружності для тіл клиноподібною конфігурації з лінією розриву дотичного переміщення у вершині і умовами на нескінченності, що дозволяють врахувати вплив зовнішнього поля; побудові методом Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна точних розв'язків цих задач та проведенні на основі побудованих розв'язків дослідження граничної рівноваги пружних тіл з маломасштабними зсувними тріщинами у кутових точках.

Даний підхід передбачає застосування деяких загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл. Вони також наведені у другому розділі. Використання цих положень пов'язане з побудовою розв'язків однорідних задач теорії пружності для клиноподібних тіл. Наведено розв'язки

деяких таких однорідних задач. Зокрема, розглянуто симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, розв'язок якої використовується у наступних розділах.

У **третьому розділі** розв'язано задачу механіки руйнування про маломасштабні міжфазні зсувні тріщини, що зародилися в кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ.

У підрозділі 3.1 дано постановку задачі.

В умовах плоскої деформації в рамках статичної симетричної задачі розглянемо кусково-однорідне тіло з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яке складене з ізотропних пружних частин з модулями Юнга E_1, E_2 ($E_1 > E_2$) і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 (рис. 1).

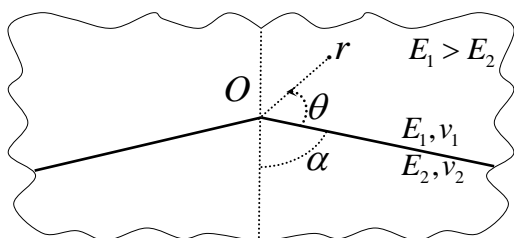


Рис.1

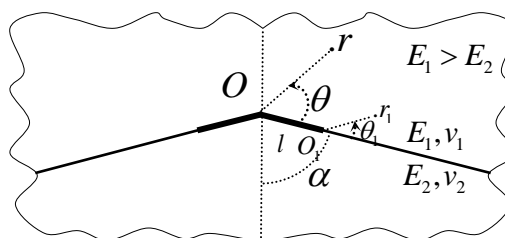


Рис.2

У відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл, які наведено в підрозділі 2.1, кутова точка межі поділу середовищ O являє собою концентратор напружень зі степеневою особливістю. Головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ є розв'язком однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, який породжується єдиним на інтервалі $] -1; 0[$ коренем λ_0 її характеристичного рівняння.

Указану задачу (задача К) розглянуто у підрозділі 2.1.

При цьому мають місце формули виду

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = C g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}),$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = C g_2(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}), \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}$$

$$(r \rightarrow 0),$$

де функції g_1, g_2 визначаються з розв'язку задачі К, а стала C – з розв'язку кожної конкретної задачі теорії пружності, яка зображена на рис. 1. Сталу C , що залежить від зовнішнього навантаження, можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Результати розрахунків показують, що $\lambda_0 > -1/2$; $g_1(\alpha) < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$; $g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0$; $g_1 = 0$, якщо $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$; $g_2(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$; $g_2(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$;

Таблиця 1

$g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\pi/2) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi) = 0$; $g_2 = 0$, якщо $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$. Якщо e_0 збільшується, то α_1, α_2 зменшуються. Деякі значення λ_0 наведено у табл.1 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення α_1° , що дорівнюють $38,2^\circ; 34,4^\circ; 29,3^\circ; 21,7^\circ$, і значення α_2° , що дорівнюють $134,2^\circ; 133,4^\circ; 133,1^\circ; 131,3^\circ$.

Якщо $C < 0$ (нижче показано, що повинна виконуватись саме ця умова) і $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$, то згідно з інформацією про функцію g_2 та формулою, що наведено вище, $\sigma_\theta(r, 0) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$, а тому на межі поділу середовищ біля кутової точки нормальні напруження є стискаючими. У цьому випадку внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе зародження міжфазних зсувних тріщин, що виходять з неї, з повністю контактуючими берегами, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла (рис. 2). Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$, тим ширша область значень кута α при яких слід очікувати утворення таких тріщин.

Вважатимемо, що тертя між берегами тріщин відсутнє.

Якщо $C < 0$ і $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$, то на межі поділу середовищ біля кутової точки має місце висока концентрація нормальних розтягуючих напружень. У цьому випадку слід очікувати зародження відкритих тріщин. Дослідження такого випадку не є темою даної роботи. Тому розглядатимемо лише випадок $C < 0$, $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$.

Ставиться задача визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} у кінці O_1 тріщини, установлення умови зрушення тріщин, дослідження їх рівноваги на стійкість та вивчення поведінки напружень біля кутової точки (рис. 2).

При $r_1 \rightarrow 0$ у відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл реалізується асимптотика, що являє собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, яка містить на прямолінійній межі поділу середовищ півнескінченну лінію розриву дотичного переміщення (рис. 3), що породжується коренем $-1/2$ її характеристичного рівняння. Зокрема,

α°	e_0			
	2	3	5	10
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,112	-0,180	-0,258	-0,332
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi) \sim -\frac{K_{II} e'}{2(1 + \alpha_2 e) \sqrt{2\pi r_1}} \quad (r_1 \rightarrow 0),$$

$$e' = 1 - \alpha_1 - (1 - \alpha_2)e, \quad e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Оскільки $e' > 0$, а контактне напруження $\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi)$ від'ємне, повинна виконуватись умова $K_{II} > 0$.

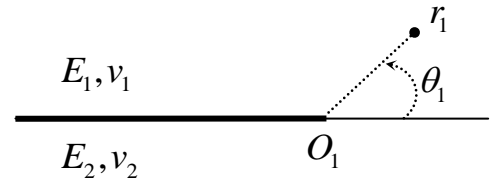


Рис. 3

З урахуванням малості тріщин приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що містить розрізи скінченної довжини, які виходять з кутової точки та розташовані на цій межі (рис. 4).

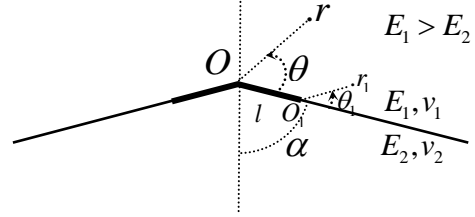


Рис.4

На нескінченності задана асимптотика поля напружень, що являє собою розв'язок аналогічної задачі без розрізів – задачі К, про який йшлося вище. Довільна ставала С, що входить до указанного розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатися з розв'язку зовнішньої задачі.

Беручи до уваги симетрію, крайові умови задачі (рис. 4) запишемо так:

$$\theta = \pi - \alpha, \quad \theta = -\alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = Cg_1 r^{\lambda_0} + o(1/r) \quad (-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha; \langle a \rangle - \text{стрибок } a). \quad (3)$$

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 4) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша (задача 1) відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (2) маємо

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = -Cg_1 r^{\lambda_0}, \quad (4)$$

а на нескінченності напруження згасають як $o(1/r)$ (у (3) відсутній перший доданок). Друга задача – задача К.

Підрозділи 3.2 і 3.3 присвячено виведенню функціонального рівняння Вінера – Гопфа задачі та побудові його розв'язку.

Для побудови точного розв'язку задачі 1 будемо використовувати метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна.

Застосовуючи перетворення Мелліна з комплексним параметром p до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука, умов (1) та враховуючи другу з умов (2) і умову (4), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} = G(p)\Phi^-(p), \quad (5)$$

$$G(p) = \frac{(1 + \varkappa_1)[a_0(p) + a_1(p)e]}{2[b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2]},$$

$$a_0(p) = (1 + \varkappa_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),$$

$$a_1(p) = (1 + \varkappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$b_1(p) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ \times [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - \\ - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha),$$

$$b_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau = -Cg_1 l^{\lambda_0},$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho l}^{\theta=0} \rho^p d\rho$$

($\Phi^\pm(p)$ – невідомі функції) у смугі комплексної площини, яка містить уявну вісь. Факторизація коефіцієнта $G(p)$ рівняння (5) на уявній осі здійснюється шляхом його розщеплення на функцію, що факторизується за допомогою гамма-функцій, і функцію, що факторизується за допомогою властивостей інтеграла типу Коші. З використанням цих факторизацій, принципу аналітичного продовження, теореми Ліувілля, деяких інших положень теорії функції комплексної змінної побудовано точний розв'язок рівняння Вінера – Гопфа, який виражається через інтеграли типу Коші та гамма-функції.

У підрозділі 3.4 досліджено напружений стан кусково-однорідного тіла клиноподібної конфігурації (рис. 4) біля кінців міжфазних зсувних тріщин у вершині та граничну рівновагу тіла з такими маломасштабними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ.

На основі розв'язку рівняння (5) одержано наступну формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці O_1 тріщини:

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) C l^{\lambda_0 + 1/2}, \quad k > 0. \quad (6)$$

Оскільки $K_{II} > 0$, $g_1 < 0$, повинна виконуватись умова $C < 0$.

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{II}^0 = -K_{II} / (C l^{\lambda_0 + 1/2})$ від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображено на рис. 5 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

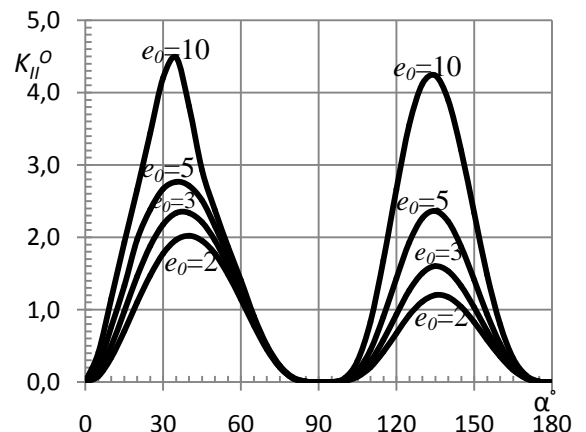


Рис. 5

Значення $\alpha_{\max 1}^{\circ}$, $\alpha_{\max 2}^{\circ}$ кута

Таблиця 2

α , при яких функції $K_{II}^0(\alpha)$ буде найбільшою на кожному з інтервалів $]0; \pi/2[$, $]\pi/2; \pi[$, і відповідні їй значення наведено у табл.2.

e_0	2	3	5	10
$\alpha_{\max 1}^{\circ}$	42,4	37,1	35,3	33,5
$K_{II}^0(\alpha_{\max 1})$	2,0224	2,3371	2,7663	4,5121
$\alpha_{\max 2}^{\circ}$	139,2	135,4	134,1	132,4
$K_{II}^0(\alpha_{\max 2})$	1,2025	1,6012	2,3644	4,2363

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута

α від α_1 до $\pi/2$ і від α_2 до π концентрація напружень біля кінця O_1 тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють 42,4°; 37,1°; 35,3°; 33,5°.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншими є гострий и тупий кути максимальної концентрації напружень.

Користуючись силовим критерієм руйнування і прирівнюючи праву частину (6) до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{IIc} , що являє собою задану сталу, приходимо до рівняння для визначення руйнуючого навантаження

$$C = \frac{K_{IIc}}{g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) l^{\lambda_0 + 1/2}}. \quad (7)$$

Зрушення тріщин відбудеться тоді, коли параметр навантаження C , зростаючі за модулем зі зростанням зовнішнього навантаження, досягне свого граничного значення, яке визначається формулою (7).

Оскільки $\lambda_0 > -1/2$, з (6) знаходимо

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = (\lambda_0 + 1/2) k C g_1 l^{\lambda_0 - 1/2} > 0. \quad (8)$$

Використовуючи (8) і критерій стійкості рівноваги тріщин, можна сформулювати наступний висновок. Якщо у кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ зародилися міжфазні тріщини, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла, то у випадку повного гладкого контакту берегів їх рівновага є нестійкою. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

У підрозділі 3.5 проаналізовано поведінку напружень біля кутової точки (рис. 4).

На основі розв'язку Вінера – Гопфа (5) одержано вирази для меллінівських трансформант напружень. У результаті застосування до цих виразів формули обернення Мелліна, знайдено напруження в задачі 1.

У задачі теорії пружності, що зображена на рис. 4, головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ визначаються формулами виду

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_1(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) C_1 + o(r^{\lambda_1}), \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_2(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$\sigma_r(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_3(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$C_1 = f(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) C l^{\lambda_0 - \lambda_1} \quad (-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha),$$

де λ_1 – єдиний на інтервалі $] -1; 0[$ корінь рівняння

$$(1 + \varkappa_1) [\cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1) \sin 2\alpha] + \quad (10)$$

$$+ (1 + \varkappa_2) [\cos 2(\lambda + 1)\alpha - \cos 2\alpha] [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1) \sin 2\alpha] e = 0.$$

Залежність кореня λ_1 – показника степеня сингулярності напружень у кутовій точці O від кута α якісно зображено на рис. 6. Деякі значення λ_1 наведено у табл. 3 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

З (9) випливає, що кутова точка O є особливою точкою крайової задачі теорії пружності, що розглядається (рис. 4). Вона являє собою концентратор напружень. При наближенні точки області до точки O напруження прямують до нескінченності.

Особливість напружень у точці O степенева. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієнтів Пуассона. Цей показник являє собою єдиний на інтервалі $] -1; 0[$ корінь певного трансцендентного рівняння (рівняння (10)).

Зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ концентрація напружень біля кутової точки послаблюється, а зі зростанням його від $\pi/2$ до π – посилюється.

Якщо матеріали однакові, то показник степеня сингулярності напружень співпадає з відповідним показником у задачі теорії пружності про розтяг площини з лініями ковзання, що виходять з її точки. Ця задача, а також відповідна задача про півнескінченні лінії ковзання були досліджені в роботах А.О. Камінського і співробітників.

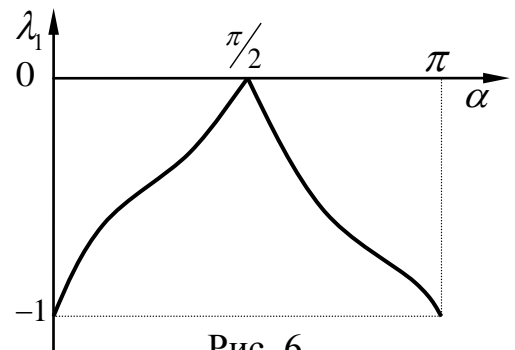


Рис. 6

Таблиця 3

α°	e_0			
	2	3	5	10
15	-0,738	-0,702	-0,652	-0,602
30	-0,640	-0,611	-0,577	-0,541
45	-0,547	-0,527	-0,506	-0,484
60	-0,430	-0,419	-0,408	-0,398
75	-0,262	-0,258	-0,255	-0,252
105	-0,274	-0,277	-0,280	-0,283
120	-0,467	-0,476	-0,484	-0,492
135	-0,613	-0,628	-0,641	-0,653
150	-0,731	-0,749	-0,767	-0,782
165	-0,835	-0,855	-0,873	-0,889

Якщо кут α прямує до нуля або π , показник степеня сингулярності напружень прямує до -1 . Якщо кут α прямує до $\pi/2$, то показник степеня сингулярності напружень прямує до нуля. Якщо кут α гострий, то зі зростанням відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$ концентрація напружень біля кутової точки послаблюється, а якщо тупий – посилюється.

У **четвертому розділі** розглянуто плоску статичну симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить маломасштабні міжфазні зсувні тріщини в кутовій точці і навантажену внутрішню півнескінченну тріщину (рис. 7). Береги тріщини знаходяться під дією тиску, розподіленого за законом F/r^2 , $r \geq L$ (F – задана додатна стала, що має розмірність сили).

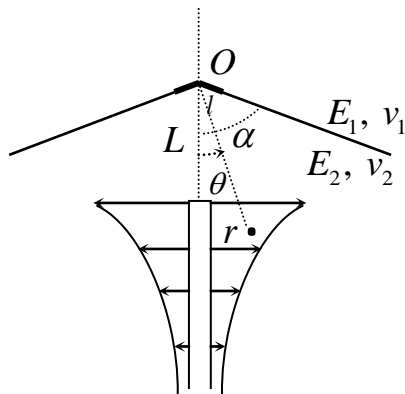


Рис. 7

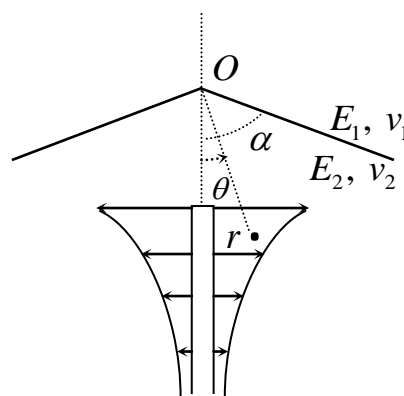


Рис. 8

З метою проведення дослідження напруженого стану біля кінців тріщин та кутової точки, у відповідності до підходу, який запропоновано використовувати в даній роботі, задачу, що розглядається, – задачу в цілому розкладемо на зовнішню і внутрішню задачі. Зовнішньою задачею по відношенню до задачі в цілому є задача теорії пружності для кусково-однорідної площини з внутрішньою півнескінченною тріщиною (рис. 8). Внутрішньою задачею по відношенню до задачі в цілому є задача, що досліджена у третьому розділі (рис. 4). У внутрішній задачі на нескінченності (при $r \rightarrow \infty$) головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди біля кутової точки (при $r \rightarrow 0$) у зовнішній задачі і являють собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, який породжується єдиним на інтервалі $]-1;0[$ коренем її характеристичного рівняння. Останню задачу розглянуто у підрозділі 2.1. Стала C , що входить до її указаного розв'язку, повинна бути знайдена із розв'язку зовнішньої задачі.

У підрозділі 4.1 дано постановку зовнішньої задачі і виведено її функціональне рівняння Вінера – Гопфа. Точний розв'язок рівняння побудовано у підрозділі 4.2.

Підрозділ 4.3 присвячено аналізу поведінки напружень біля кутової точки у зовнішній задачі (рис. 8) і дослідженню напруженого стану біля кінця внутрішньої тріщини.

На основі розв'язку рівняння Вінера – Гопфа знайдено головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ (зокрема, сталу C) і коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці тріщини K_I .

Мають місце формули виду

$$C = \Sigma(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \frac{F}{L^{\lambda_0+2}}, \quad K_I = q(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \frac{F}{L^{3/2}}, \quad (11)$$

де λ_0 – єдиний на інтервалі $]-1; 0[$ корінь рівняння

$$\begin{aligned} & [\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha][\alpha_1 \sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + (\lambda+1)\sin 2\alpha] + \{(1+\alpha_1) \times \\ & \times (1+\alpha_2)\sin^2 \lambda\pi - [\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha][\alpha_1 \sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + (\lambda+1) \times \\ & \times \sin 2\alpha] - [\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)\sin 2\alpha][\alpha_2 \sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)\sin 2\alpha]\} e \\ & + [\sin 2(\lambda+1)(\pi-\alpha) - (\lambda+1)\sin 2\alpha][\alpha_2 \sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)\sin 2\alpha] e^2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Результати розрахунків показують, що $\Sigma(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0; \pi/2[$; $\Sigma(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\pi/2; \pi[$; $\Sigma(0) = \Sigma(\pi/2) = \Sigma(\pi) = 0$.

Залежності кореня λ_0 рівняння (12) – показника степеня сингулярності напружень у кутовій точці (рис. 8) від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображено на рис. 9 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

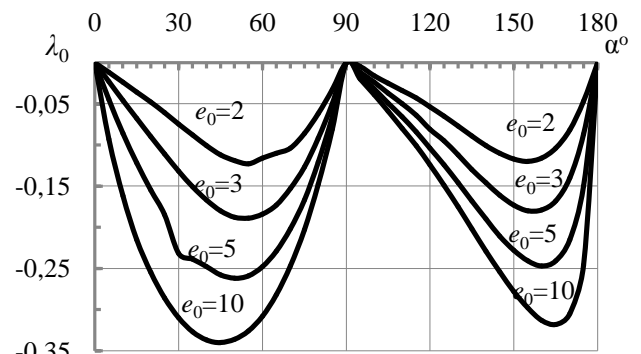


Рис. 9

Значення $\alpha_{\min 1}^\circ$, $\alpha_{\min 2}^\circ$ кута α , при яких функція $\lambda_0(\alpha)$ досягає свого найменшого значення на

кожному з інтервалів $]0; \pi/2[$, $]\pi/2; \pi[$, а також значення $\lambda_0(\alpha_{\min 1})$, $\lambda_0(\alpha_{\min 2})$ наведено у табл. 4.

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I^0 = K_I L^{3/2} / F$ від

кута α та від відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображено на рис. 10 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ і від $\pi/2$ до π концентрація напружень біля кутової точки (рис. 8)

Таблиця 4

e_0	2	3	5	10
$\alpha_{\min 1}^\circ$	57,3	54,1	46,7	42,2
$\lambda_0(\alpha_{\min 1})$	-0,1232	-0,1893	-0,2622	-0,3321
$\alpha_{\min 2}^\circ$	152,6	155,8	163,4	168,3
$\lambda_0(\alpha_{\min 2})$	-0,1204	-0,1801	-0,2474	-0,3181

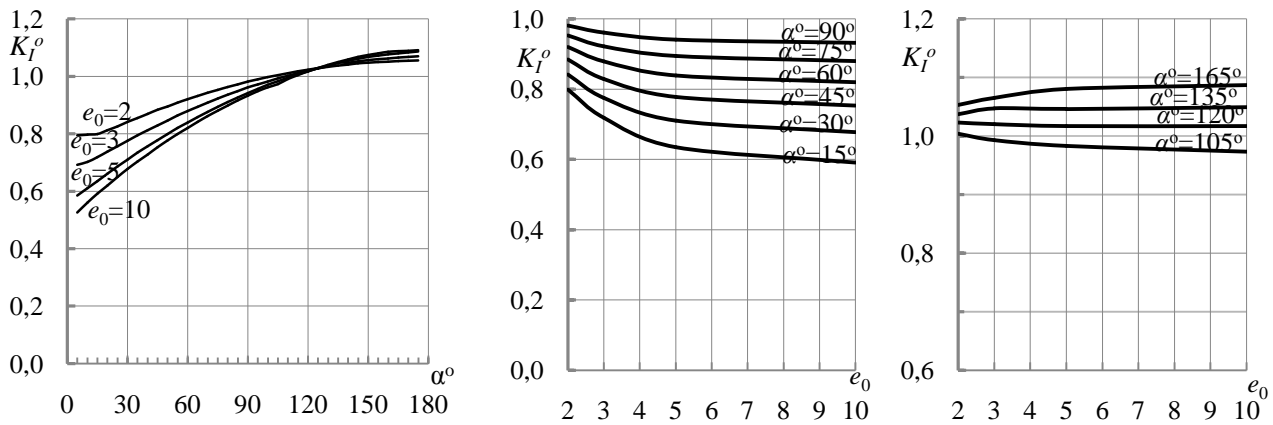


Рис. 10

спочатку посилюється, а потім послаблюється. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки. Зі зростанням e_0 гострий кут максимальної концентрації напружень зменшується, а тупий – збільшується.

Зі зростанням навантаження концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини посилюється. Чим менша відстань між кутовою точкою і кінцем тріщини, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини.

Зі зростанням кута α концентрація напружень біля кінця тріщини посилюється. Якщо $\alpha \leq 120^\circ$, то зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється, а якщо $\alpha \geq 130^\circ$ – посилюється. На проміжку $120^\circ < \alpha < 130^\circ$ існують значення кута, при яких зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється; спочатку послаблюється, а потім посилюється; посилюється.

У підрозділі 4.4 досліджено граничну рівновагу кусково-однорідної площини з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини (рис. 7).

Оскільки повинна виконуватись умова $C < 0$, то беручи до уваги (11) і інформацію про функцію Σ , вважатимемо, що кут α є гострим.

Підставляючи C з (11) у (6), визначимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці O_1 міжфазної тріщини у задачі механіки руйнування, яку зображено на рис. 7:

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \Sigma(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \left(\frac{l}{L} \right)^{\lambda_0 + 1/2} \frac{F}{L^{3/2}}.$$

Прирівнюючи праву частину до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{IIC} , одержуємо наступну формулу для визначення руйнуючого навантаження F_p :

$$F_p = \frac{K_{IIC} L^{\lambda_0+2}}{g_1(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) k(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) \Sigma(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) l^{\lambda_0+1/2}}.$$

Залежності безрозмірного руйнуючого навантаження

$$F_p^o = \frac{F_p}{K_{IIC} L^{3/2}} = \frac{1}{g_1 k \Sigma \left(\frac{l}{L} \right)^{\lambda_0+1/2}}$$

від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображено на рис. 11 ($l/L = 0,03$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Наведені дані свідчать про те, що чим менша відстань між кутовою точкою O і кінцем внутрішньої тріщини, тим менше руйнуюче навантаження. Чим більша довжина міжфазної тріщини, тим менше руйнуюче навантаження.

Зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ руйнуюче навантаження спочатку зменшується, а потім збільшується. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найменшого руйнуючого навантаження, що дорівнюють $40,3^\circ$; $36,5^\circ$; $34,1^\circ$; $30,7^\circ$.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим менше руйнуюче навантаження і меншим є кут найменшого руйнуючого навантаження.

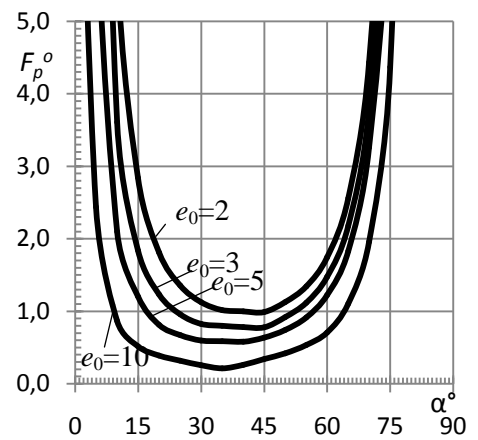


Рис. 11

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

В роботі вперше у механіці руйнування проведено дослідження напруженого стану кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин в кутовій точці межі поділу середовищ. Дослідження виконано на основі побудованих в роботі точних розв'язків нових задач теорії пружності для кусково-однорідних клиноподібних тіл.

Основні результати роботи такі.

1. Здійснено перехід від задач про маломасштабні зсувні тріщини до задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, лініями розриву дотичного переміщення, які

виходять з вершини, і умовою на нескінченності, що дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля.

2. Побудовано точний розв'язок задачі.

3. На основі цього розв'язку виведені формула, яка установлює зв'язок між коефіцієнтом інтенсивності напружень у кінці тріщини і коефіцієнтом інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ, а також трансцендентне рівняння для визначення показника степеня сингулярності напружень в кутовій точці за наявності в ній тріщин.

4. Одержано рівняння для визначення руйнуючого навантаження і показано, що рівновага тріщин є нестійкою.

5. Розв'язано задачу про граничну рівновагу кусково-однорідної площини з міжфазними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини (задача А).

Аналіз одержаних в роботі результатів дозволив зробити такі основні висновки для широкого класу задач про міжфазні зсувні тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ.

1. Зі зростанням кута α на проміжках допустимих значень концентрація напружень біля кінця тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Кут найбільшої концентрації напружень є гострим.

2. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншими є гострий і тупий кути максимальної концентрації напружень.

3. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

4. Зі зростанням гострого кута α концентрація напружень біля кутової точки за наявності в ній тріщин послаблюється, а зі зростанням тупого – посилюється. Якщо кут гострий, то зі зростанням e_0 концентрація напружень послаблюється, а якщо тупий – посилюється.

5. У випадку задачі А зі зростанням на проміжку допустимих значень кута α , який є гострим, руйнуюче навантаження спочатку зменшується, а потім збільшується. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим менше руйнуюче навантаження і меншим є кут найменшого руйнуючого навантаження.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Кипнис Л.А. О предельном равновесии кусочно-однородного тела с межфазными трещинами в угловой точке при сжатии / Л.А. Кипнис, Г.А.

- Хазин, Т.В. Полищук, А.Л. Кипнис // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – № 51. – С.91 – 100.
2. Кипнис А.Л. О подходе к решению задач о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела / А.Л. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2014. – № 10. – С.51 – 55.
3. Назаренко В.М. Концентрація напружень біля кутової точки межі поділу середовищ у кусково-однорідній площині за наявності тріщини / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. - № 3. – С. 42 – 45.
4. Назаренко В.М. Концентрация напряжений вблизи вершины внутренней полубесконечной трещины в кусочно-однородной плоскости с негладкой границей раздела сред/В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис // Прикладная механика: международный научный журнал. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 92 – 97.
(*English translation: Nazarenko V.M. Stress concentration near the tip of an internal semi-infinite crack in a piecewise-homogeneous plane with a nonsmooth interface // V.M. Nazarenko, A.L. Kipnis. – 2015. – Vol. 51 (4). – P. 443 – 448).*)
5. Назаренко В.М. Об интенсивности напряжений в концах межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред / В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2015. - № 8. – С.58 – 63.
6. Назаренко В.М. Задача механіки руйнування про напівнескінченну тріщину нормального відриву у кусково-однорідній площині / V конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача : Тези доповідей – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2013. – Т.2. – С.76.
7. Назаренко В.М. Кусково-однорідна площина з напівнескінченною тріщиною / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // DSMSI: XVI International Conferece: Modeling and stability: Abstracts of conf. reports, Kiev. – 2013. P. 298.
8. Назаренко В.М. Напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній площині з негладкою межею поділу середовищ / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: збірник наукових праць 5-ї міжнародної конференції / Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України. – 2014. – С. 321 – 324.
9. Назаренко В.М. Про інтенсивність напружень біля кінця внутрішньої півнескінченної тріщини у біоднорідній площині / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // DSMSI: XVII International Conferece: Modeling and stability: Abstracts of conf. reports, Kiev. – 2015. P. 110.
10. Назаренко В.М. Пружна рівновага кусково-однорідної площини з півнескінченною тріщиною / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // XII міжнародній симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2015. – С. 40.

11. Назаренко В.М. Кусково-однорідна площина з межею поділу середовищ у формі сторін кута за наявності півнескінченної тріщини / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – С.205 – 208.

12. Назаренко В.М. Про півнескінченну навантажену тріщину нормального відриву у кусково-однорідній площині / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Математичні проблеми технічної механіки – 2016: Матеріали міжнародної конференції. – С.65.

АНОТАЦІЯ

Кіпніс О.Л. Напружений стан біля міжфазних зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу середовищ. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидати фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2016.

На основі точних розв'язків нових плоских статичних симетричних задач теорії пружності для клиноподібних тіл проведено дослідження напруженого стану кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин в кутовій точці межі поділу середовищ. З метою виконання дослідження здійснено перехід від задач про маломасштабні зсувні тріщини до задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, лініями розриву дотичного переміщення, які виходять з вершини, і умовою на нескінченності, що дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля.

Установлено характер зміни рівня концентрації напружень біля кінця тріщини та біля кутової точки у залежності від кута і пружних сталих. Визначено умову зрушення тріщин і досліджено їх рівновагу на стійкість.

Вивчено граничну рівновагу кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить маломасштабні міжфазні зсувні тріщини в кутовій точці і навантажену внутрішню півнескінченну тріщину. Установлено характер зміни руйнуючого навантаження.

Для проведення досліджень використано метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна.

Ключові слова: межа поділу пружних середовищ, кутова точка, маломасштабні міжфазні зсувні тріщини, коефіцієнт інтенсивності напружень, концентрація напружень, гранична рівновага, метод Вінера – Гопфа.

АННОТАЦИЯ

Кипнис А.Л. Напряженное состояние вблизи межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2016.

На основе точных решений новых плоских статических симметричных задач теории упругости для клиновидных тел проведено исследование напряженного состояния кусочно-однородного изотропного упругого тела вблизи маломасштабных межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред. С целью выполнения исследования осуществлен переход от задач о маломасштабных сдвиговых трещинах к задаче теории упругости для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, линиями разрыва касательного смещения, исходящими из вершины, и условием на бесконечности, позволяющим учесть влияние внешнего поля.

Установлен характер изменения уровня концентрации напряжений вблизи конца трещины и вблизи угловой точки в зависимости от угла и упругих постоянных. Определено условие страгивания трещин и исследовано их равновесие на устойчивость.

Изучено предельное равновесие кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, которая содержит маломасштабные межфазные сдвиговые трещины в угловой точке и нагруженную внутреннюю полубесконечную трещину. Установлен характер изменения разрушающей нагрузки.

Для проведения исследований использован метод Винера – Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина.

Показано, что если отношение модулей Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, а 2α – угол между линиями границы раздела сред, соответствующий материалу 2, то с ростом острого угла α и, аналогично, с ростом тупого угла α концентрация напряжений вблизи конца трещины сначала усиливается, а затем ослабевает. Угол наибольшей концентрации напряжений – острый. Чем больше e_0 , тем сильнее концентрация напряжений вблизи конца трещины и меньшими являются острый и тупой углы максимальной концентрации напряжений. Равновесие трещин неустойчиво и после достижения состояния предельного равновесия режим их развития будет динамическим. С ростом острого угла α концентрация напряжений вблизи угловой точки при наличии в ней трещин ослабевает, а с ростом тупого – усиливается. Если угол острый, то с ростом e_0 концентрация напряжений ослабевает, а если тупой – усиливается.

Ключевые слова: граница раздела упругих сред, угловая точка, маломасштабные межфазные сдвиговые трещины, коэффициент интенсивности напряжений, концентрация напряжений, предельное равновесие, метод Винера – Хопфа.

SUMMARY

Kipnis A. L. Stress state near the interfacial shear cracks at the corner point of the media-separating boundary. – Manuscript.

Thesis for candidate's degree of physical and mathematical sciences on specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solid. – S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

Basing on the exact solutions of new plane static symmetrical problems of the theory of elasticity for wedge-shaped bodies the investigation of stress of piece-homogeneous isotropic elastic body near the small-scale interfacial shear cracks at the corner point of the media-separating boundary is completed. To this end, the transition from the problems on the small-scale shear cracks to the problem of theory of elasticity for piece-homogeneous plane with the media-separating boundary in the form of the sides of angle, lines of rupture of tangential displacement, which emanate from the vertex, and the condition at infinity taking into account the influence of the external field is accomplished.

Character of changing of concentration level of the stress near the crack tip and near the corner point depending on the angle and elastic constants is determined. The condition of the start of cracks is determined and stability of their equilibrium is investigated.

The limit equilibrium of piece-homogeneous plane with the media-separating boundary in the form of the sides of angle, which contains the small-scale interfacial shear cracks at the corner point and loaded internal semi-infinite crack, is studied. Character of changing of breaking load is determined.

For research the Wiener – Hopf method and the apparatus of Mallin's integral transform were used.

Keywords: media-separating boundary, corner point, small-scale interfacial shear cracks, stress intensity factor, stress concentration, limit equilibrium, Wiener – Hopf method.