

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА НАН УКРАЇНИ

На правах рукопису

МЕЙШ ЮЛІЯ АНАТОЛІЇВНА

УДК 539.3

**ДИНАМІКА ПІДКРІПЛЕНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ ТА ОБОЛОНОК З ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ҐРУНТОВИХ
СЕРЕДОВИЩ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Науковий консультант:
доктор технічних наук, професор
Петро Захарович Луговий

Київ 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Розділ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕОДНОРІДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА ПРУЖНІЙ ТА ҐРУНТОВІЙ ОСНОВІ

1.1. Характеристика пружних основ

1.2. Задачі динамічної поведінки ґрунтів. Чисельні методи розв'язування задач динаміки ґрунтових середовищ.

1.2.1. Основні рівняння динаміки ґрунтових середовищ.

1.2.2. Методи чисельного моделювання динамічного деформування ґрунтових середовищ при нестационарних навантаженнях

1.3. Теорія і чисельне дослідження динамічних задач підкріплених оболонки

1.3.1. Аналіз коливальних процесів підкріплених оболонки в рамках прикладних теорій оболонки та стержнів

1.3.2. Характеристика основних чисельних методів дослідження динамічних задач підкріплених оболонки

1.4. Зв'язані задачі взаємодії оболонки з навколишнім середовищем

Висновки до першого розділу

Розділ 2

ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

2.1. Постановка динамічних задач теорії підкріплених оболонки на пружній основі

2.1.1. Основні положення теорії пружних оболонки та стержнів типу Тимошенка. Вихідні положення.

2.1.2. Рівняння коливань дискретно - підкріплених оболонки обертання з врахуванням дії зовнішнього середовища

2.1.3. Рівняння коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок з врахуванням дії зовнішнього середовища

2.1.4. Постановка задач та рівняння коливань для адаптера (тришарові оболонки з врахуванням дискретності ребристого наповнювача)

2.2 Постановка зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище.

2.2.1. Модель ґрунтового середовища

2.2.2. Постановка одновимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтове середовище

2.2.3. Постановка двовимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтове середовище (циліндрична симетрія)

Висновки до другого розділу

Розділ 3

ПОБУДОВА ЧИСЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ ТА ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩ

3.1. Розв'язок осесиметричних задач теорії неоднорідних циліндричних оболонок на пружній основі

3.2. Чисельний алгоритм розв'язування осесиметричних задач теорії підкріплених оболонок обертання на пружній основі

3.3. Чисельний алгоритм розв'язування неосесиметричних задач циліндричних підкріплених оболонок на пружній основі

3.3.1. Чисельний алгоритм знаходження розв'язку в гладкій області оболонки

3.3.2. Розв'язок на i -й та j -й ліній розривів (для i -го та j -го підкріплюючих ребер)

3.3.3. Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для рівнянь коливань дискретно підкріплених неоднорідних циліндричних оболонок кругового перерізу.

3.4. Чисельний алгоритм розв'язку двовимірних динамічних задач теорії тришарових циліндричних оболонок з дискретним наповнювачем (для рівнянь коливань адаптера)

3.5. Чисельний алгоритм зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище

3.5.1. Чисельний алгоритм розв'язування задач про взаємодію циліндричних оболонок з ґрунтовим середовищем

3.5.2. Чисельний алгоритм розв'язування задач про взаємодію сферичних оболонок з ґрунтовим середовищем

3.5.3. Чисельний алгоритм розв'язування двовимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтове середовище (циліндрична симетрія)

Висновки до третього розділу

Розділ 4

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ОБОЛОНКА – ҐРУНТОВЕ СЕРЕДОВИЩЕ

4.1. Циліндрична оболонка – ґрунтове середовище (одномірний випадок, циліндрична симетрія)

4.2. Сферична оболонка – ґрунтове середовище (одномірний випадок, сферична симетрія)

4.3. Циліндрична оболонка – двошарове ґрунтове середовище (одномірний випадок, циліндрична симетрія)

4.4. Чисельний розв'язок задач про динамічну взаємодію конструктивно - ортотропних циліндричних оболонок з пружним середовищем

4.5. Чисельний розв'язок динамічних задач для ґрунтового середовища періодичної структури (двовимірний випадок, циліндрична симетрія)

4.6 Чисельний розв'язок зв'язаних задач циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури (двовимірний випадок, циліндрична симетрія)

Висновки до четвертого розділу

Розділ 5

ДИНАМІКА ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ: ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТА НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

5.1. Підкріплені конічні оболонки на пружній основі (осесиметричний випадок)

5.2. Розв'язок задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок (конструктивно - ортотропна модель) при нестационарних навантаженнях

5.3. Нестационарна деформація повздовжньо - поперечно підкріплених циліндричних оболонок на пружній основі (неосесиметрична задача)

5.4. Модельні задачі динамічної поведінки адаптера (тришарові циліндричні оболонки з дискретним ребристим наповнювачем)

5.4.1. Нестационарні коливання тришарових циліндричних оболонок з повздовжнім дискретним ребристим наповнювачем

5.4.2. Динамічна поведінка тришарових циліндричних оболонок з дискретним повздовжньо- поперечним ребристим наповнювачем

Висновки до п'ятого розділу

Розділ 6

ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

6.1. Розв'язок задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях (конструктивно - ортотропна модель)

6.2. Розв'язок задач динамічної поведінки циліндричної оболонки еліптичного перерізу з дискретним повздовжньо - поперечним набором підкріплюючих ребер

6.3. Коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при імпульсних навантаженнях

6.4. Нестационарні коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі

6.5. Достовірність чисельних розрахунків

Висновки до шостого розділу

ВИСНОВКИ

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

ДОДАТОК

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі теоретичного дослідження динаміки підкріплених оболонкових конструкцій на пружній основі під дією нестационарних навантажень виникають в багатьох галузях техніки, наприклад, різні резервуари і трубопроводи, які закладені в ґрунтове середовище, колони нафтових і газових свердловин, пускові шахти, тунелі метро та інші конструкції спеціального призначення. Діючі на ці конструкції імпульсні навантаження можуть бути генеровані полями тиску сейсмічних хвиль, гірських ударів, стрибками тиску в трубних магістралях, ефектами детонації, вибухами природного газу, ударними хвилями технологічних вибухів та ін.

При дії нестационарних навантажень на підкріплені оболонки обертання, які мають контакт з навколишнім пружним середовищем, в останніх виникають складні поля напружень і деформацій, структура яких залежить від способу врахування розміщення ребер жорсткості, фізико-механічних властивостей пружної основи, характеру взаємодії оболонка – середовище та інших чинників.

Більша частина відомих досліджень по вказаній проблемі виконана на основі співвідношень теорії стержнів і оболонок Кірхгофа–Лява при дії статичних навантажень, а пружне середовище моделюється основою Вінклера. Існує ряд робіт по вивченню динамічної поведінки балок, пластин та оболонок обертання на одно - та двопараметричній пружній основі. В цих роботах здебільшого використовується технічна теорія оболонок і лише в окремих роботах – уточнені теорії оболонок. Започатковані, як експериментальні, так і теоретичні дослідження по визначенню коефіцієнтів пружного середовища.

Оскільки, вказані оболонкові елементи конструкцій досить широко зустрічаються в техніці, можна зробити висновок, що задачі теоретичного дослідження на базі лінійної уточненої теорії стержнів і оболонок динаміки дискретно підкріплених оболонок обертання, які контактують з ґрунтовим середовищем, яке моделюється трикомпонентним нелінійним ґрунтом, є актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано у відповідності з науковими темами Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, а саме: держбюджетними темами НДР: № 347 “Стійкість пластинчато-оболонкових циліндричних систем і оболонок з локальними початковими прогинами” терміном І кв. 2005- IV кв. 2007р.; постанова Бюро ВМех НАН України від 11.07.2007р. протокол №4 1.3.1.367 - 08 “Стійкість та коливання конструкцій з циліндричних оболонок та пластин з врахуванням впливу зовнішнього середовища та технологічних особливостей” терміном (2008 - 2012 рр., номер державної реєстрації 0107U008618); постанова Бюро ВМех НАН України від 08.11.2011р. протокол №5 1.3.1.382 -12 “Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей” терміном (2012 - .2016 рр., номер державної реєстрації 0102U000249); постанова Бюро ВМех НАН України від 26.06.2015р. протокол №5 1.3.1.402 - 16 “Динаміка складних оболонкових систем при дії розподілених та локальних нестационарних навантажень” терміном (2016 - 2019 рр., номер державної реєстрації 0115U005704); пошуковими темами НДР: № 474- П “Розробка нового підходу до чисельного розрахунку критичних навантажень недосконалих гладких і ребристих оболонок та його експериментальне обґрунтування” терміном II кв 2007 – II кв. 2009р.; постанова Вченої ради Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України від 18.12.2012р. протокол № 11 1.3.2.513 П- 13 “ Коливання та стійкість гладких та дискретно підкріплених циліндричних оболонок на пружній основі при статичних та імпульсних навантаженнях” терміном I кв. 2013 р. - IV кв.2013 р.; тема впровадження НДР постанова Бюро ВМех НАН України від 02.10.2013р. протокол №3 1.3.1.392-14 “Коливання та стійкість гладких та дискретно підкріплених циліндричних оболонок при статичних та імпульсних навантаженнях ” (2014 - 2015 рр., номер державної реєстрації 0114U002164). Договір про наукове співробітництво № 7 від 14 квітня 2013 р. з «Конструкторським бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля»; договір з

«Конструкторським бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» «Динаміка і міцність оболонок обертання» № 151 – 2016.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є створення нової загальної методології, що дозволяє розраховувати напружено - деформівний стан (НДС) неоднорідних елементів конструкцій (дискретно – підкріплених оболонок), зв'язаних з пружними середовищами Вінклера та Пастернака, при дії динамічних силових навантажень різного вигляду (раптових, імпульсних і т.п.) та способу їх прикладання (розподілених, локальних, зосереджених). Розв'язок зв'язаних задач циліндричні оболонки – ґрунтове середовище, на базі яких є можливим визначити коефіцієнт постелі Вінклера при нестационарних навантаженнях. Розглянуто зв'язані задачі нестационарної динаміки системи циліндрична оболонка – ґрунтове середовище, сферична оболонка – ґрунтове середовище, циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури при дії імпульсного навантаження. Розв'язок даних задач дає можливість визначення коефіцієнта Вінклера в залежності від геометрії та фізико – механічних властивостей ґрунтового середовища. В подальшому отримані залежності використовуються при розв'язку динамічних неоднорідних задач на пружній основі.

До задач слід віднести: постановку початково – крайових задач до розрахунку НДС пружних, дискретно – підкріплених елементів конструкцій зв'язаних з без інерційними середовищами Вінклера та Пастернака при динамічних навантаженнях. Постановку та розв'язок зв'язаних задач пружна оболонка – ґрунтове середовище. Розробку методів розв'язку для підкріплених оболонок на пружній основі виходячи з параметрів розв'язку зв'язаних задач. Чисельний розв'язок та аналіз залежності параметрів коливань від граничних умов, геометричних та фізико - механічних параметрів оболонки та підкріплюючих ребер, величини та виду навантаження, характеристик та моделей пружних середовищ.

Об'єктом дослідження є хвильові процеси в неоднорідних оболонкових структурах з врахуванням параметрів напружено – деформованого стану (НДС) дискретно – підкріплених оболонок та ґрунтових середовищ.

Предметом дослідження є параметри коливань та НДС в гладких та підкріплених елементах конструкцій зв'язаних з пружним середовищем при різних видах динамічних навантажень.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано основні співвідношення динамічної теорії оболонок та криволінійних стержнів на основі уточненої теорії Тимошенка та теорії руху ґрунтових середовищ згідно рівнянь Ейлера. З використанням розв'язків зв'язаних задач теорії оболонка – ґрунтового середовища отримано інженерні формули коефіцієнтів Вінклера в залежності від виду геометрії (циліндрична, сферична оболонки) та фізико – механічних параметрів ґрунтового середовища. Отримані результати дозволяють розв'язувати більш складні задачі динамічної поведінки дискретно – підкріплених оболонок на пружній основі, з використанням отриманих результатів. Розв'язок зв'язаних одновимірних та двовимірних динамічних задач базується на використанні скінчено – різницевих схем Мак – Кормака. Розв'язок більш складних задач динамічної поведінки дискретно – підкріплених оболонок на пружній основі базується на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем по просторовим координатам та явній різницевій апроксимації по часовій координаті.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що дана уточнена постановка задач та вивід рівнянь осесиметричних та неосесиметричних коливань дискретно підкріплених оболонок обертання, що контактують з ґрунтовым середовищем. Покладалося, що напружено–деформований стан неоднорідної пружної структури визначається в рамках геометрично лінійної теорії стержнів і оболонок типу Тимошенка. Для отримання рівнянь коливань використовується варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського, який дає можливість отримати рівняння коливань підкріплених оболонок обертання з врахуванням дії ґрунтового середовища, записати природні

граничні та початкові умови для дискретно підкріплених оболонок. Також, проводиться постановка та чисельний розв'язок зв'язаних задач: циліндрична оболонка – нескінченне одношарове ґрунтове середовище, сферична оболонка – нескінченне одношарове ґрунтове середовище, циліндрична оболонка – двошарове ґрунтове середовище, циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури. На основі розв'язку задач про вимушені коливання оболонка – ґрунтове середовище, є можливість визначити коефіцієнт Вінклера в залежності від геометричних (нескінченний циліндр, замкнена сфера) та фізико – механічних параметрів ґрунтового середовища. Знайдені залежності в подальшому використовуються при розв'язанні більш складних задач вимушених коливань теорії оболонок на пружній основі.

Розроблені чисельні алгоритми розв'язування динамічних задач неоднорідних оболонкових структур на пружній основі з врахуванням коефіцієнта Вінклера, знайденого з розв'язку зв'язаних задач оболонка – ґрунтове–середовище.

Для розв'язування зв'язаних динамічних задач оболонка – ґрунтове середовище побудовані відповідні скінченно–різницеві схеми Мак – Кормака.

В роботі створена нова науково–обґрунтована загальна методика математичного дослідження НДС неоднорідних елементів конструкцій на основі пружних середовищ Вінклера та Пастернака, розв'язані зв'язні задачі теорії оболонка – ґрунтове середовище в рамках механіки суцільних середовищ.

Отримані розв'язки задач осесиметричних та неосесиметричних коливань дискретно підкріплених оболонок обертання на пружному середовищі при нестационарних навантаженнях в залежності від геометрії об'єкту та фізико – механічних параметрів ґрунтового середовища.

Теоретична і практична цінність отриманих у роботі результатів. Теоретична цінність отриманих у роботі результатів полягає в тому, що математична модель та алгоритм можуть бути узагальнені для широкого класу оболонок; використання розроблених алгоритмів дозволяє проводити розрахунки з оцінки меж міцності елементів конструкцій, оцінки меж застосування більш

простих теорій, а також створити працездатні оболонкові конструкції з оптимальними параметрами при врахуванні конструктивних, технологічних та експлуатаційних факторів і виключити необхідність у проведенні дорогих пошукових експериментальних досліджень.

Практичне значення отриманих у роботі результатів. полягає в тому, що розв'язки нових задач динаміки дискретно підкріплених оболонок обертання на пружній основі при імпульсних навантаженнях, які одержані в роботі, можуть бути застосовані для дослідження прикладних задач, які виникають при прогнозуванні динамічної поведінки колекторів нафтових та газових свердловин при застосуванні імпульсних технологій інтенсифікації видобутку вуглеводнів, складанні проектів проведення вибухово–прострільних робіт в копальнях, оцінці аварійних ризиків в пускових шахтах та захисних оболонкових структурах атомних електростанцій, визначенні ефективності підкріплень при модернізації підземних трубопроводів. Практичне значення мають також розроблені в роботі теоретичні методики визначення коефіцієнтів пружної основи для водонасичених ґрунтів.

Теоретичні та практичні результати, які викладені в дисертації, знайшли практичне застосування в «Конструкторському бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», зокрема, при дослідженні розділення ступенів ракет носіїв і космічного обладнання з допомогою пірозамків розташованих у відповідних оболонках – адаптерах, які підлягають локальним імпульсним навантаженням великої інтенсивності.

Акт впровадження результатів прикладається.

Достовірність результатів забезпечується:

- строгістю та коректністю постановок вихідних задач;
- перевіркою практичної збіжності обчислювального процесу;
- використанням умови стійкості, яка гарантує стійкий розрахунок;
- застосуванням апробованого чисельного методу;
- тестуванням розробленої методики на ряді задач даного класу.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи отримано автором самостійно. Матеріали, опубліковані у співавторстві, та використані в дисертації, отримані здобувачем особисто, включаючи постановку задач, та безпосереднє виконання всіх етапів робіт. В роботах написаних із науковим консультантом йому належить загальний задум проведення досліджень. В роботах написаних із співавторами їм належить участь в аналізі та інтерпретації результатів досліджень.

Апробація результатів дисертації. Дисертаційна робота пройшла достатньо повну апробацію. Матеріали дисертації були представлені на Міжнародних конференціях: «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2002 р.); "Dynamical system modeling and stability investigation" (м. Київ, 2003 р.), IX Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2002 р.), кримській Міжнародній математичній школі "Метод функцій Ляпунова і його додатки" (м. Алушта, 2008 р., 2010 р.), Міжнародних конференціях "Математичні проблеми технічної механіки" (м. Дніпродзержинськ, 2005 р., 2006р., 2007 р., 2009 р., 2011 р., 2012 р., 2013 р., 2014 р., 2016 р.); Восьмая Крымская Международная Математическая школа МФЛ (Крым, Алушта, 2006 г.); XVII Міжнародному симпозиумі «Динамические и технологические проблемы механики конструкций» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2011 г.); «Актуальные проблемы инженерной механики» (Миколаїв, 2011 р., 2012 р.); "Актуальні проблеми прикладної механіки й міцності конструкцій" (м. Ялта, 2011 р.; м. Запоріжжя, 2012 р.), VII Всероссийской конференции (МГТУ им. Баумана, Москва, 2013 г.); III Международной научно – практической конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (Гомель, 2013 г.); VII Международная конференция «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Донецк – Мелекино, 2013 г.); «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, Беларусь, 2013 г.); «Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь» (Одеса, 2013 р.); «Математика в сучасному технічному університеті» (II

Міжнародна науково – практична конференція, Київ, 2013 р.); «Актуальные проблемы инженерной механики» (Одесса, 2015 г., 2016 г.); на Всеукраїнських наукових конференціях: «Математичні проблеми технічної механіки» (II, 2002 р., III 2003 р., IV 2004 р., м. Дніпродзержинськ); «Механика деформируемого твердого тела - 2008» (конференция молодых ученых, посвященная 90-й годовщине НАН Украины и Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, 2009 г.); «Сучасні проблеми природничих наук та підготовки фахівців у цій галузі» (XII Всеукраїнська науково – методична конференція, м. Миколаїв, 2009 р.); «Сучасні науково – методичні проблеми у вищій школі» (Всеукраїнська науково – методична конференція, м. Київ, 2013 р.); «Сучасні проблеми фізико – математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (XIV Всеукраїнська науково – методична конференція присвячена 100 – річчю з дня заснування МНУ ім. В.О. Сухолинського, м. Миколаїв, 2013 р.) на українсько-російському семінарі "Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, обумовлені дією полів різної фізичної природи" (м. Львів, 2012 р.); «Математичне моделювання та математична фізика» (Всеукраїнська наукова конференція присвячена 165 – річчю від дня народження С.В. Ковалевської, м. Кременчук, 2015 р.). Окремі положення дисертації періодично доповідались на наукових семінарах відділу будівельної механіки тонкостінних конструкцій (Київ, 2013–2016 р.).

В повному обсязі дисертація доповідалася і обговорювалася на науковому семінарі відділу будівельної механіки тонкостінних конструкцій Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2016 р.); на семінарі секції за напрямком „Механіка оболонкових систем” Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2016 р.); на засіданні загальноінститутського наукового семінару з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (Київ, 2016); на семінарах кафедри вищої математики та кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (Київ, 2016).

Публікації. За результатами дисертації опубліковано 69 робіт, в тому числі

10 публікацій у індексованих Google Scholar наукових виданнях, 17 статей у фахових журналах і збірниках України, 42 роботи у збірниках матеріалів і праць міжнародних наукових конференцій. Зазначені наукові роботи були опубліковані після захисту (2001р.) кандидатської дисертації автора, а їх матеріали не включалися до кандидатської дисертації.

Структура і обсяг роботи. Робота складається із вступу, шести розділів, висновків та списку використаної літератури (295 найменувань на 28 сторінках) та додатку. Загальний обсяг роботи становить 299 сторінок тексту, 65 рисунків та графіків, 5 таблиць, додаток на 1 сторінці.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому консультанту д.т.н., професору П.З. Луговому за постійну увагу до роботи та консультації при її виконанні.

У вступі обґрунтовано актуальність теми роботи, сформульовано мету і задачі досліджень, розкрито наукову новизну одержаних результатів, наведено відомості щодо їх практичного застосування, дані про публікації та апробацію результатів дисертації, відзначено особистий внесок здобувача та описано структуру роботи.

В першому розділі розглянуто сучасний стан питання динамічної поведінки неоднорідних елементів конструкцій на пружній основі.

Питанням динамічної поведінки неоднорідних елементів конструкцій на пружній основі присвячена значна кількість робіт. Проведено умовну класифікацію робіт по темі: 1) оболонки на пружній основі; 2) зв'язані задачі взаємодії оболонок із зовнішнім середовищем; 3) динамічні задачі неоднорідних оболонок.

В другому розділі приводиться постановка динамічних задач теорії підкріплених оболонок на пружній основі, а також постановка зв'язаних задач циліндрична (сферична оболонка) – ґрунтове середовище. Приведено постановки неосесиметричних задач коливань дискретно–підкріплених оболонок обертання при імпульсних (нестационарних) навантаженнях. Покладається, що НДС складеної оболонки базується на рівняннях коливань моделі оболонок та

стержнів типу Тимошенка. Виходячи із варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського отримані рівняння коливань дискретно – підкріплених оболонок на пружній основі. Розглядається варіант безінерційного пружного середовища. Приведені природні граничні та початкові умови.

В другій частині даного розділу приведено постановки одновимірних задач циліндр (сфера) – ґрунтове середовище при дії внутрішнього імпульсного навантаження. Ґрунтове середовище розглядається в рамках моделі ґрунтів В.М. Ляхова. Також розглядається задача нестационарних коливань циліндрична оболонка – пружне середовище періодичної структури (двовимірна задача в ейлерових координатах – одновимірна задача оболонок в рамках моделі Тимошенка).

В третьому розділі приведені чисельні алгоритми розв'язку вихідних задач. Спочатку розглядаються зв'язані задачі нестационарного деформування циліндричних та сферичних оболонок при дії внутрішніх імпульсних навантажень. Виходячи із розв'язку зв'язаних задач, наближено визначається коефіцієнт Вінклера для циліндричної та сферичної симетрії (одновимірні та двовимірні задачі).

В четвертому розділі розглянуто розв'язок задач про взаємодію циліндричних та сферичних оболонок (одновимірний випадок) з ґрунтовим середовищем. Виходячи з розв'язку цих задач, отримано коефіцієнти Вінклера для представлених динамічних задач. Розглянуто чисельні розв'язки задач про взаємодію циліндричної оболонки з двошаровим середовищем (одновимірна задача – циліндрична симетрія). Також розглянуто задачу про взаємодію нескінченної циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем періодичної структури (двовимірна задача – циліндрична симетрія).

В п'ятому розділі розв'язано задачі динамічної поведінки неоднорідних оболонок на пружній основі при імпульсних навантаженнях: осесиметричні задачі (неоднорідні тришарові циліндричні оболонки на пружній основі, конічні підкріплені оболонки на пружній основі); неосесиметричні задачі (поздовжньо – поперечно дискретно підкріплені циліндричні оболонки на пружній основі).

В шостому розділі розглядаються чисельні розв'язки задач про напружено деформований стан циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі. Також, розглянуто задачі про динамічну поведінку поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при дії внутрішнього імпульсного навантаження.

У висновках сформульовані основні результати дисертаційної роботи.

В додатку приведено акт впровадження дисертаційної роботи Мейш Ю.А. Теоретичні та практичні результати, які викладені в дисертації, знайшли практичне застосування в «Конструкторському бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля», зокрема, при дослідженні розділення ступенів ракет носіїв і космічного обладнання з допомогою пірозамків розташованих у відповідних оболонках – адаптерах, які підлягають локальним імпульсним навантаженням великої інтенсивності.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕОДНОРІДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ НА ПРУЖНІЙ ТА ГРУНТОВІЙ ОСНОВІ

1.1. Характеристика пружних основ

Вибір розрахункової моделі ґрунтової основи є важливим етапом при розрахунку конструкцій, з якими вона взаємодіє, оскільки від ступеню відповідності прийнятої розрахункової моделі існуючої ґрунтової основи залежить ступінь достовірності розрахунків.

Слід відмітити необхідність класифікації, співставлення та порівняння існуючих різноманітних розрахункових моделей ґрунтових основ, які враховують різноманітні передумови, що відображують складний процес напружено – деформованого стану в таких основах. Однак, до теперішнього часу відсутня повна та чітка класифікація для впорядкування вибору та використання відомих розрахункових моделей ґрунтових основ, які необхідні при розв'язку задач і визначенні меж їх використання за показниками універсальності, економічності та точності.

Розрахункові моделі ґрунтових основ запропоновано класифікувати за основною ознакою, якою володіють всі моделі даного класу, тобто за інтегральним або диференціальним законом зміни переміщень поверхні ґрунтового середовища.

Інтегральні розрахункові моделі ґрунтових основ відображують їх поведінку лише інтегрально на поверхні і залежать не тільки від пружних властивостей ґрунту у вертикальному напрямку, але також від його інерційних властивостей, неоднорідності, анізотропії, характеру зовнішніх навантажень, виду напружено – деформованого стану.

Диференціальні розрахункові моделі ґрунтових основ відображують деформаційні та інерційні властивості в кожній їх точці. Вони використовуються для розв'язку задач, зв'язаних з контактами, а також для визначення параметрів напружено – деформованого стану та опису хвильових процесів всередині ґрунтових основ.

До інтегральних розрахункових моделей ґрунтових основ можна віднести моделі, що використовуються при інтегральних статичних, квазістатичних та інтегральних динамічних розрахунках плит дорожніх та аеродромних покриттів на безінерційних та інерційних ґрунтових основах. При обґрунтованому виборі моделей та параметрів, що до них входять, вони завжди дозволяють отримати досить прості, але достатньо точні розв'язки.

Інтегральні лінійні моделі ґрунтових основ, що є з практичної точки зору найбільш важливими, в свою чергу можна поділити [70] на три групи:

- 1) моделі, що базуються на деякому феноменологічному представленні суцільної основи;
- 2) моделі, що описуються тільки своїми ядрами;
- 3) моделі, які носять умовний характер і вважаються як деякі елементарні механічні конструкції.

Класичним прикладом моделей першої групи, що ідеалізують роботу ґрунту, є найбільш характерні моделі Фусса – Вінклера (гіпотеза коефіцієнта постелі) та однорідний пружний ізотропний на півпростір [70].

Пружна основа в моделі Фусса – Вінклера розглядається як система окремих, не зв'язаних між собою пружин. Згідно цієї гіпотези приймається, що в кожній точці ґрунтової основи тиск q пропорційний прогину плити w в цій самій точці

$$q = Cw, \quad (1.1)$$

де w - прогин підошви конструкції; C - коефіцієнт пропорційності (постелі).

Відмітимо два основних недоліки цієї моделі:

1) не відповідає в повній мірі реальній роботі ґрунта, особливо при розрахунку краєвої зони плити. Це пояснюється відмовою від розподільної властивості основи, що приводить до завищених значень вигинаючих моментів в плиті;

2) невизначеність величини коефіцієнта постелі, який залежить від розмірів, форми та жорсткості штампа, а також характеру напруження: при однаковій інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження, коефіцієнт постелі отримується тим більше, чим менше площа штампа і чим більше відношення його периметру до площі підшви. Це пояснюється наявністю по периметру штампа розвантажуючих зрізуючих зусиль, які при розрахунках не враховуються.

Незважаючи на вказані недоліки, модель Фусса – Вінклера має ряд позитивних сторін:

- 1) достатня простота розрахунку;
- 2) достатня, в багатьох випадках, для практичних цілей точність;
- 3) однозначна відповідність між реакцією основи та переміщеннями плити;
- 4) можливість ефективного використання відомого розрахункового апарату при розв'язку задачі вигину плит скінчених розмірів, зокрема чисельних методів.

Прикладом моделей другої групи є комбіновані моделі пружної основи, що являють систему вінклерівських пружин, які опираються на пружний напівпростір.

Більш складними є умовні моделі, в яких ґрунт замінено умовною розрахунковою моделлю. Для цих моделей отримано рівняння переміщень поверхні ґрунтового середовища від одиничної зосередженої сили. До таких умовних моделей слід, в першу чергу, віднести мембранну та ламінарну моделі М.М. Філоненко – Бородича [71], які являють собою у випадку плоскої задачі нитку або балку, які лежать на системі пружин з лінійною характеристикою.

У випадку просторової задачі нитка або балка замінюються відповідною мембраною або плитою. Мембранна модель М.М. Філоненко – Бородича володіє розрахунковою гнучкістю, так як вона характеризується двома числовими параметрами. Ця модель приводить до диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами, які лише не набагато складніші за рівняння, що отримані за моделлю коефіцієнта постелі.

В.З. Власовим [72] запропоновано модель ґрунтової основи у вигляді стовпчиків скінченої довжини H , між якими діють сили опору зсуву. Модель В.З. Власова в деякій мірі аналогічна до моделі П. Пастернака [73], але оперує не інтегральними характеристиками основи, а узагальненими в теорії пружності, що призводить до невизначеності розв'язку, у зв'язку з необхідністю зазначення умовних розмірів шару, що суттєво впливає на результати розрахунків.

П. Пастернаком [73] розроблена модель основи з двома пружними характеристиками, розрахункова схема якої являє систему пружин, з'єднаних зверху зв'язками, що передають поперечну силу і при цьому пружно деформуються. Модель двох коефіцієнтів постелі, завдяки врахуванню опору ґрунту зсуву, дає можливість врахувати розподільчу властивість основи, що вигідно відрізняє її від моделі Фусса – Вінклера.

З розрахункової точки зору, ці моделі еквівалентні, так як вони мають однакові ядра: у випадку плоскої задачі ці ядра – експоненціальні функції, а у випадку просторової задачі – циліндричні функції Макдональда індексу нуль [70].

В основу динамічних розрахункових моделей ґрунтових основ прийняті стрижневі моделі, а також можливість враховувати інерційні властивості основ або за допомогою приєднаної маси, або деякого фіктивного демпфірування. При застосуванні таких моделей враховується інерція вертикального руху точок основи. Крім цього, перелічені стрижневі моделі мають деякий недолік – при відсутності зв'язку між стрижнями зовнішнє навантаження сприймається лише частиною основи, яка розташована під завантаженою областю. До стрижневих

моделей ґрунтових основ можна віднести наступні стрижневі моделі: модель Вінклера – Фойгта; моделі з двома пружними характеристиками і т.д.

Реакція ґрунтової основи у відповідності з моделлю Вінклера – Фойгта визначається згідно формули:

$$R(t) = kw(t) + Bw'(t), \quad (1.2)$$

де k - коефіцієнт жорсткості; B - коефіцієнт демпфірування ґрунтової основи.

Моделі з двома пружними характеристиками визначають зв'язок між переміщеннями основи w та навантаженням на неї R . Основа являє собою сукупність не зв'язаних між собою пружин жорсткістю k_1 , на яку накладено без тертя однорідну всебічно розтягнену мембрану жорсткістю k_2 :

$$R = k_1w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1.3)$$

де k_1 - жорсткість пружин; k_2 - жорсткість розтягнутої мембрани.

Моделі ґрунтових основ з двома коефіцієнтами постелі вивчалися в роботах В.З. Власова, Н.Н. Леонтьєва, П.Л. Пастернака, М.М. Філоненко – Бородича, та інших.

В ряді робіт отримані співвідношення між нормальним тиском $q_z(x, y, t)$, який прикладений до основи в його граничній площині (x, y) та переміщеннями $w_z(x, y, 0, t)$ вздовж осі z , напрямленої по нормалі всередину основи точок граничної площини:

$$q_z(x, y, t) = kw_z(x, y, 0, t) + \frac{\partial w_z(x, y, 0, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

де k - коефіцієнт пропорційний модулю пружності E матеріалу стрижнів; α - коефіцієнт ($\alpha = \sqrt{Em}$); m - маса одиниці об'єму основи.

Доданок $\alpha \frac{\partial w_z}{\partial t}$ - характеризує інерційні властивості основи, які

обумовлюють випромінювання енергії в основу. Інерційність основи вказаної

моделі враховується введенням в співвідношення, яке зв'язує прикладене до поверхні основи навантаження та переміщення поверхні, додатково до вінклеровського доданку, що відповідає в'язкому тертю. Отриману інтегральну стрижневу розрахункову модель, яка враховує інерційні властивості ґрунтової основи, називають вінклеровською основою. Недоліком інтегральної динамічної стрижневої розрахункової моделі, полягає в неспроможності розподіляти навантаження в горизонтальному напрямку, що було усунуто з введенням другого коефіцієнта постелі T . Три відомих способи його введення, що належать М.М. Філонененко – Бородичу, П.Л. Пастернаку та Б.З. Власову [71 - 73], приводять до співвідношень між навантаженням та переміщеннями поверхні одного й того ж виду. Об'єднавши торці стрижнів моделі натягнутою мембраною, отримана інтегральна динамічна стрижнева розрахункова модель з пружно – в'язкою основою з двома коефіцієнтами постелі, що враховує інерційні властивості ґрунтової основи і яка має властивості розподіляти навантаження в горизонтальному напрямку. Зв'язана модель на пружній в'язкій основі має вигляд:

$$q_z(x, y, t) = kw_z + \alpha \frac{\partial w_z}{\partial t} - T \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right). \quad (1.5)$$

Основними недоліками перерахованих інтегральних динамічних стрижневих моделей ґрунтових основ є наступні:

- 1) параметри розрахункових моделей відображують поведінку ґрунтових основ лише інтегрально на поверхні;
- 2) параметри розрахункових моделей значно залежать не тільки від пружних властивостей ґрунт в вертикальному напрямку, але і від інерційних властивостей ґрунт, його неоднорідності та анізотропії;
- 3) залежність параметрів розрахункових моделей ґрунт від характеру зовнішніх навантажень.

До числа диференціальних квазістатичних безінерційних розрахункових моделей ґрунтових основ можна віднести;

- 1) ізотропний пружний на півпростір;
- 2) трансверсально – ізотропний пружний напівпростір;
- 3) неоднорідний по глибині пружний на півпростір;
- 4) лінійно – деформівний однорідний на півпростір;
- 5) лінійно – деформівний стисний шар скінченої товщини;
- 6) пружний стисний шар скінченої товщини.

В групу диференціальних динамічних інерційних розрахункових моделей ґрунтових основ включається:

- 1) ізотропний пружний на півпростір;
- 2) трансверсально – ізотропний пружний на півпростір;
- 3) пружний стисний шар скінченої товщини;
- 4) лінійний деформівний стисний шар скінченої товщини;
- 5) хвильовий на півпростір.

Прикладом диференціальних динамічних інерційних розрахункових моделей ґрунтової основи є модель однорідного ізотропного пружного інерційного на півпросторі.

При відсутності об'ємних сил ($K_z = 0$) наступне рівняння

$$B \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} + D \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right) + K_z - m \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

де B - коефіцієнт, який виражається через сталі, що характеризують матеріал шару; K_z - інтенсивність об'ємних вертикальних сил; m - маса ґрунтової основи, з допомогою заміни змінної z на $z_1 = z(D/B)^{1/2}$ зводиться до хвильового рівняння моделі ґрунтової основи, яку називають хвильовою моделлю.

Пружні властивості хвильової моделі характеризуються коефіцієнтами D і B , які визначаються на основі експериментів з реальними ґрунтовими основами або із умови мінімуму відхилення розв'язків, що відповідають хвильовій моделі, від розв'язків, які відповідають точним рівнянням теорії пружності.

1.2. Задачі динамічної поведінки ґрунтів. Чисельні методи розв'язування задач динаміки ґрунтових середовищ

1.2.1. Основні рівняння динаміки ґрунтових середовищ

Природні ґрунти поділяють [74] на два класи, що різко відрізняються за основними властивостями: скельні (масивно - кристалічні) та нескельні (дисперсійні). *Скельними* називаються такі ґрунти, які являють собою тверді тіла, що володіють відносно високою міцністю та мало змінюють свої властивості при тривалому насиченні водою. *Нескельні* ґрунти являють собою дуже слабо зцементовані скупчення частинок та уламків різних гірських порід, що легко розпадаються у воді. Іноді виділяють [75] *напівскельні* ґрунти – зцементовані породи осадового походження (пористі пісковики, вапняки, туфи) та *м'які* ґрунти – рихлі осадові відкладення (глини, суглинки, піски).

Об'єктом дослідження даної роботи є нескельні м'які ґрунти. В подальшому під ґрунтом будемо розуміти м'який ґрунт. Тверді мінеральні частинки різного розміру та мінералогічного складу складають *скелет* ґрунту; проміжки між частинками – *пори* – можуть містити рідину (воду, розчини солей) та газу (пар, повітря). Властивості ґрунтів визначаються відносним вмістом частинок різних мінералів та крупністю цих частинок, а також властивостями речовин, що заповнюють пори ґрунту. Просте перерахування речовин, що складають ґрунт, характеризує його *якісний склад*, але за звичай вказується також відносний вміст по вазі чи об'єму різноманітних складових ґрунту, неоднакових за своїми властивостями. В залежності від складу скелета та відносного розташування його частинок, а також характеру зв'язків між ними механічні властивості ґрунтів коливаються в дуже широких межах.

В основі механіки ґрунтових середовищ лежить вивчення фізико – механічних властивостей ґрунтів. Фізичні характеристики ґрунту експериментально визначаються без врахування залежностей, що приймаються в розрахункових моделях ґрунтів та використовуються тільки для оцінки виду і стану ґрунту, але не його поведінки при зміні зовнішніх умов. До загальних

фізичних властивостей відносяться густина частинок ґрунту, густина сухого та вологого ґрунту, пористість, вологість, гранулометричний склад.

Поряд із фізичними властивостями для ґрунтів визначаються механічні характеристики, якими кількісно вимірюється реакція на зовнішню дію. Механічні характеристики оцінюють поведінку ґрунту в рамках деякої розрахункової моделі, параметрами якої вони є. В основі моделей динаміки ґрунтів за звичай лежить феноменологічний підхід, який не враховує в явному вигляді структуру тих середовищ, в яких протікає явище.

Крім того, для ефектного розв'язку практичних задач допускаються різні спрощення властивостей ґрунтів та розглядаються замість реальних ідеалізовані матеріали, що володіють лише деякими, основними для даного класу задач властивостями природних ґрунтів. Критерієм правильності феноменологічних теорій слугують безпосередні експерименти, з допомогою яких встановлюються чисельні параметри, що характеризують поведінку даного середовища при даному виді зовнішньої дії при інших рівних умовах. Основною вимогою до цих параметрів середовища є їх незмінність при кількісній зміні зовнішніх дій даного типу.

Одним з видів ідеалізації матеріалу є заміна змінних характеристик сталими, наприклад, розрахункова модель ґрунту у вигляді лінійно пружного суцільного середовища. Введення в механіку ґрунтів такої моделі, як суцільне середовище дозволило розглядати напруження та деформації нескінченно малих елементів, переходячи від них до напружено – деформованого стану в усьому об'ємі середовища, застосовуючи методи математичного аналізу. Наявний досвід говорить про ефективність застосування до задач механіки ґрунтів розв'язків, що знайдені в теорії пружності, теорії пластичності та в інших розділах динаміки деформівного твердого тіла.

Найбільш важливими фізико – механічними властивостями ґрунту є стисність та опір зсуву [74, 76]. Стисність ґрунту, поряд із загальною деформівністю ґрунтів, при невеликих тисках в основному обумовлена зміною його пористості за рахунок перепакування частинок.

Постановка дослідів по визначенню стисливості ґрунту та інших його параметрів при динамічній дії суттєво відрізняються від статичних дослідів. В лабораторних умовах з використанням маятникового копра досліджувалося розповсюдження хвиль скінченної амплітуди в піскових та глинистих ґрунтах [76]. На базі виміряних значень швидкостей фронту хвилі, частинки ґрунту за фронтом хвилі та використання законів збереження маси та імпульсу були отримані динамічні криві стиску у вигляді залежностей напруження (деформація) $\sigma(\varepsilon)$.

Експериментальні дослідження стиску та розвантаження суміші піску та глини різного відсоткового вмісту проводилося на адіабатичних установках в умовах одноосної деформації [76, 77]. Показано, що в піскових ґрунтах пружна частина деформацій незначна і розвантаження відбувається практично при незмінній деформації; із збільшенням домішок глинистих частинок пружні деформації збільшуються. Відмічається також, що стисливість ґрунту може бути різною в залежності від швидкості приросту тиску.

В цілому можна відмітити, що ґрунт є нелінійним стисливим середовищем з переважно пластичними деформаціями.

Найбільш повно та достовірно значення характеристик ґрунтів визначаються при сполученні польових та лабораторних методів досліджень. Систематичне експериментальне вивчення деформаційних та міцнісних властивостей м'яких ґрунтів при вибуховому навантаженні було проведено в середині минулого століття [77 - 82].

В польових вибухових експериментах [78, 82] отримані поля швидкостей та напружень в піскових ґрунтах порушеної та непорушеної структури. Одночасне визначення радіальних та тангенціальних головних напружень дало можливість отримати параметри діаграми стисливості та інваріантної умови пластичності піскового ґрунту. Діаграма стисливості прималася у вигляді степеневі залежності тиску від об'ємної деформації при тисках до 10МПа, інтенсивність тензора напружень отримано лінійно залежною від тиску. Справедливість останнього співвідношення підтверджена також дослідями в

умовах циліндричної та осьової симетрії. Центральна – симетричне поле напружень в експериментах здійснювалося сферичним зарядом вибухової речовини масою від 0,2 до 200 кг, що відповідає зміні масштабу моделювання на порядок; отримані в різних умовах подібні результати говорять про відсутність впливу часових факторів типу в'язкості.

А.А. Вовк, Л.С. Євтерєв, Б.В. Замишляєв, І.А. Лучко, А.В. Михайлюк, В.А. Плаксий, Г.І. Чорний досліджували [83, 84] в'язкі та пластичні властивості суглинків та глин різної вологості при вимірюванні швидкості навантаження. Вплив швидкості навантаження та деформаційні і міцні сні властивості піскових, глинистих та лісових ґрунтів проводилося також в лабораторних умовах [77, 82]. Відмічається вплив в'язкістних ефектів в глинистих та суглинчастих ґрунтах при тисках порядку 1 МПа та наявності граничної динамічної діаграми при більш високих тисках та швидкостях навантаження.

В роботах А.С. Компанейца [85], А.С. Сагомояна [76] було отримано замкнену систему рівнянь одновимірних рухів ґрунту при центральній – симетричній вибуху. Додатково вводилися дотичні напруження, зв'язані з нормальними напруженнями за законом типу Кулона – Мора. Наближені розв'язки задачі про плоску одновимірну вибухову хвилю були отримані також Г.М. Ляховим [81] на базі моделі ідеальної стисливої рідини з врахуванням багатокомпонентного складу рідини. Модель Ляхова враховує вплив защемленого в поровій воді газу та, як показують дані дослідів [81, 84] добре описує реакцію водо насичених ґрунтів на динамічне навантаження. Розповсюдження хвиль навантаження та розліт сферичного об'єму при підземному вибуху в сипучих ґрунтах із внутрішнім тертям теоретично та експериментально досліджувалися Ю.С. Вахрамєєвим, В.Н. Родіоновим, А.Н. Ромашовим, С.А. Христиановичем, Є.І. Шемякіним [86 - 89]. На базі теорії коротких хвиль отримані формули, що визначають затухання амплітуд напружень та швидкостей частинок у хвилях напружень при підземних вибухах в ґрунтах та гірських породах.

Наведені вище постановки та розв'язки одновимірних задач про дію вибуху в ґрунтовому середовищі характеризуються наявністю сильних спрощуючи припущень про реальну поведінку ґрунту, носять досить якісний характер і не можуть бути узагальнені на багатовимірний випадок. Загальну математичну модель ґрунтового середовища було запропоновано С.С. Григоряном [80, 90]. В моделі запропоновано необоротна залежність середнього тиску від зміни об'єму, для опису граничної зсувної деформованості прийнята схема Прандтля – Рейсса з умовою пластичності Мізеса – Шлейхера – Боткіна. Таким чином, враховані всі основні механічні властивості ґрунтів, суттєві для динамічних процесів: нелінійна та необоротна об'ємна стисливість, пружнопластичний зсув, залежність межі текучості від тиску. Було проведено детальний аналіз загальних властивостей та якісних особливостей руху, які описуються моделлю, проведено конкретизацію функцій у визначальних співвідношеннях на базі польових динамічних експериментів [77, 78, 81, 82]. На базі загальної системи рівнянь приведено постановки та дослідження розв'язків деяких задач про підземний вибух в м'яких ґрунтах [79, 80].

Проведений параметричний аналіз моделей та чисельне дослідження механізмів затухання хвиль в таких середовищах в порівнянні з експериментами показав суттєвий вплив на максимальний тиск, швидкість фронту хвилі та масову швидкість частинок об'ємної частки газоподібної компоненти та більш слабкий вплив коефіцієнта об'ємної в'язкості. Процес перетворення вибухової хвилі в неперервну хвилю стиску визначається як пористістю, так і об'ємною в'язкістю. В цілому відмічається, що для визначення часових характеристик необхідне застосування моделі середовища з об'ємною в'язкістю, а експериментальні значення параметрів хвиль можуть бути наближено розраховані по моделі без врахування в'язкості.

Моделлю деформування ґрунтового середовища в широкому розумінні називають [75] сукупність рівнянь стану та способу завдання опорних залежностей та сталих, що в них входять. Під рівняннями стану розуміють математичні співвідношення, що замикають систему законів збереження маси,

імпульсу та енергії. В рамках єдиної математичної моделі врахування всіх відомих властивостей реального ґрунту не є можливим, тому розповсюдження отримали різні моделі, що достовірно описують динамічну поведінку м'якого ґрунтового середовища в обмеженому діапазоні навантажень при деяких спрощуючи припущеннях.

При існуючій різноманітності моделей ґрунтових середовищ, важливим є питання про адекватність або достовірність нелінійних рівнянь стану, що містять значну кількість експериментально визначених сталих. Виділяють [75] два моменти, що характеризують складність проблеми завдання сталих рівнянь стану: існуюча обмеженість інформації про фізико – механічних властивостей масивів ґрунтів та слабка вивченість взаємозв'язків між властивостями невеликих зразків, з якими зазвичай проводять експерименти, та властивості великих мас ґрунту. З цієї точки зору вигідно виділяється модель ґрунтового середовища Григоряна [79, 80, 90], що містить найменше із можливих число експериментальних функцій та сталих, потрібних для того, щоб в головних рисах відобразити складні механізми деформування ґрунтових середовищ.

Співвідношення моделі ґрунтового середовища Григоряна. Математична модель динаміки м'якого ґрунтового середовища Григоряна записуються у вигляді системи диференціальних рівнянь [79, 80].

Відносна нескладність моделі [79, 80, 90] є її перевагою в більшості прикладних задач. В ній враховані основні властивості ґрунтів, суттєві при короткочасних хвильових процесах (які характерні для ударного та вибухового навантаження) – не лінійність та необоротність діаграми об'ємного стиску з врахуванням пружних деформацій при малих тисках, пружнопластичний зсув, залежність границі текучості від тиску.

1.2.2. Методи чисельного моделювання динамічного деформування ґрунтових середовищ при нестационарних навантаженнях

Давній та плідний розвиток чисельних методів при інтенсивному розвитку обчислювальної техніки привело до створення ведучими науковими колективами

потужних програмних комплексів, призначених для розв'язку нестационарних задач гідродинаміки та механіки деформівного твердого тіла. Серед них можна виділити такі, як «Астра» [91], «Тензор» [92], «Хемп» [93], «Динаміка -1» [94], «Динаміка - 2» [95] та інші пакети прикладних програм [96]. Програмні комплекси реалізують чисельні методи, серед яких найбільше розповсюдження отримали: метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених об'ємів (МСО), варіаційно – різницевий метод (ВРМ) на базі підходів Ейлера, Лагранжа або сумісного ейлерово – лагранжева (СЕЛ) підходу до опису руху суцільних середовищ, переваги та недоліки яких добре відомі [97].

Моделювання процесу на базі підходу Ейлера, і відповідно, використання ейлерових незалежних змінних, має ту перевагу, що дозволяє проводити розрахунки при сильних деформаціях та великих відносних переміщеннях, але для врахування історії навантаження потрібне формування відповідних процедур. Крім того, в ньому важко визначати малі зміни параметрів при дослідженні руху в великій області, виникають проблеми з визначенням меж, число вузлів різницевої сітки розрахункової області змінюється в процесі розрахунків, що призводить до зниження точності розв'язку задачі.

Підхід Лагранжа є найбільш природним для опису течій із складним рухом вільних поверхонь. Перевага лагранжевих змінних пов'язана з рухом розрахункової сітки разом з середовищем, що дає можливість автоматично визначати межі області і лінії розділу середовищ, враховувати історію навантаження при аналізі пружнопластичного деформування, що в явних методах інтегрування по часу призводить до зменшення кроку по часу і до втрати точності розв'язку. Використання рухомої ейлерово – лагранжевої різницевої сітки чи методу частинок в комірках дозволяє уникнути значних спотворень комірок сіток в СЕЛ – методах, але ці методи, маючи загальність і універсальність, мають складну логічну структуру, що робить їх більш трудомісткими.

Чисельний розв'язок задач гідродинаміки здійснюється, як правило, з використанням МСР або МСО [98] на базі ейлерова та СЕЛ – підходів, а при

моделюванні процесів пружнопластичного деформування суцільних середовищ розповсюдження отримали МСЕ (метод скінчених елементів) та ВРМ на базі підходу Лагранжа [99 - 101]. Ці методи при виборі відповідного рівняння стану можуть використовуватися і для чисельного розв'язку задач імпульсного навантаження ґрунтових середовищ, при цьому розв'язок ряду задач про вибух при проникненні в ґрунт можуть бути отримані за допомогою різних методик при порівнянних обчислювальних витратах.

В МСЕ чи ВРМ для усунення сильної деформації сіток на чотирикутних елементах необхідно застосовувати процедури локальної перебудови, що потребує серйозного ускладнення алгоритму або інтерактивного втручання. Використання нерегулярних трикутних сіток, пов'язано з великими витратами пам'яті та машинного часу, недоцільно в дослідженні хвильових процесів, де можливе застосування регулярних чотирикутних сіток.

Таким чином, на теперішній час розроблено безліч методів чисельного моделювання та їх модифікацій, що використовуються для розв'язку задач гідраеродинаміки, теорії пружності та пластичності. Апарат чисельного розв'язку нелінійних задач динамічного деформування суцільних середовищ, що сформувався представляється достатньо розвиненим і принципіально застосовним до аналізу вибухових та ударних процесів в ґрунтових середовищах. Але єдиного метода чи чисельної схеми, досить ефективно розв'язуючої довільну поставлену задачу із більш – менш широкого класу, не існує. Невипадково численні сучасні ПК припускають сумісне використання різних методів та підходів для оптимального розв'язку задачі.

Для ряду задач є можливим застосовувати методи з врахуванням особливостей процесів, що протікають, які дозволяють отримувати розв'язки потрібної точності з меншими обчислювальними витратами: виділення фронтів хвиль, використання точних розв'язків на контактних межах та інше.

Отже, вибір конкретного методу чи їх комбінацій не є тривіальною проблемою, визначається класом поставлених задач та потребує спеціального розгляду. Крім того, постають питання верифікації та розвитку математичних

моделей ґрунтових середовищ, розробка способів достовірного визначення опорних залежностей та сталих нелінійного рівняння стану ґрунтів.

В подальшому опис динамічного деформування елементів конструкцій, масивних та жорстких тіл та їх нестационарна дія з ґрунтовими середовищами відбувається з позицій механіки суцільних середовищ в двовимірній осесиметричній постановці. Відповідні рівняння при цьому записуються в змінних Лагранжа або Ейлера. Чисельно вони реалізуються в залежності від інтенсивності дії чи варіаційно – різницевим методом із другим порядком точності, або з використанням модифікаційного ейлерово – лагранжевого підходу типу методу скінчених об’ємів з першим порядком точності. Для більш ефективного розв’язку поставленої задачі розроблена можливість сумісного використання в розрахунках різних математичних моделей та реалізуючи їх чисельних схем.

1.3. Теорія і чисельне дослідження динамічних задач підкріплених оболонок

1.3.1. Аналіз коливальних процесів підкріплених оболонок в рамках прикладних теорій оболонок та стержнів

Загальний підхід. З огляду робіт, які присвячені вивченню вільних та вимушених коливань пружних підкріплених оболонок, можна зробити висновок, що на сьогоднішній день існують два основні підходи розв’язання такого класу задач, які відрізняються способом врахування підкріплюючих елементів. Перший підхід полягає у заміні ребристої оболонки конструктивно – ортотропною оболонкою, другий – дослідження ребристої оболонки відбувається з врахуванням дискретного розміщення ребер.

Перший підхід полягає у заміні ребристої оболонки деякою гладкою оболонкою, за рахунок “розмазування” фізичних та механічних властивостей підкріплюючих елементів по поверхні оболонки. Отримана таким чином оболонка розглядається як однорідна (конструктивно – ортотропна модель), але для неї характерні нові властивості, в залежності від конструктивних особливостей вихідної ребристої оболонки. Застосування конструктивної

ортотропії дає можливість не враховувати особливості силової взаємодії між ребрами та обшивкою, що дозволяє значно спростити вихідну задачу. Такий підхід застосовується, якщо розглядається оболонка з достатньо густим регулярним підкріпленням.

На основі даного підходу розв'язано ряд важливих задач і досліджено вплив параметрів підкріплення на напружено – деформований стан, коливання і стійкість різного виду оболонок в лінійній і нелінійній постановках в роботах І.Я. Аміро В.А. Заруцького [102 -106]; Андріанова І.В., Пасечника А.Н. [107, 108]; А.В. Кармішина, В.А. Лясковця, В.І. Мяченкова, А.Н. Фролова [109]; В.В. Новожилова [110] та інших дослідників.

Але не дивлячись на переваги, такий підхід має ряд недоліків, коли дослідження стосуються розрахунку тонких оболонок з невеликою нерегулярною кількістю ребер. Використання конструктивно – ортотропної моделі дозволяє визначати лише усереднені напруження і деформації, що в свою чергу (наприклад, при локальних і динамічних навантаженнях) може привести до значних похибок, навіть при частому підкріпленні ребер [107]. В рамках даної теорії не являється можливим визначити ряд важливих закономірностей, які пов'язані з наявністю дискретно підкріплюючих ребер.

Тому, для виявлення закономірностей, які пов'язані саме з наявністю ребер, використовується другий підхід, в основі якого лежить аналіз поведінки підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер.

Перша задача, розв'язана на основі енергетичного методу і з врахуванням дискретного розміщення ребер, це задача про стійкість пластинки, підкріпленої ребрами, яку розв'язав С.П. Тимошенко [108, 109]. Також була розв'язана задача про осесиметричний напружено – деформований стан циліндричної оболонки, підкріпленої кільцевими ребрами [109]. До числа перших монографій, в яких враховувалось дискретне розміщення ребер, відносяться дослідження Ю.А. Шиманського [110], присвячені розрахунку підводних човнів. В даній монографії був отриманий точний розв'язок задачі про осесиметричний напружено –

деформований стан циліндричної оболонки з поперечними підкріплюючими ребрами.

Суттєвий вклад в розвиток другого підходу теорії ребристих оболонок зробили А.І. Лур'є [111] і В.З. Власов [112, 113], які побудували рівняння рівноваги в переміщеннях для підкріпленої стрингерами циліндричної оболонки. А.І. Лур'є для виведення рівнянь рівноваги використовував умови екстремальності повної потенціальної енергії системи обшивка – ребро. В.З. Власов враховував вплив ребер введенням їх реакцій в рівняння рівноваги обшивки в якості додаткових навантажень. Стаття [113] була однією з перших робіт, в якій використовувався підхід В.З. Власова. Вперше була розв'язана задача для кругової циліндричної оболонки, повздожньо підкріпленої ребрами. Були отримані диференціальні рівняння рівноваги в переміщеннях з врахуванням ширини ребер.

В останні роки виріс інтерес дослідників до теорії підкріплених оболонок, яка враховує дискретне розміщення ребер. На основі припущень даної теорії виведені рівняння руху ребристих оболонок довільної форми, а також оболонок обертання в роботах Н.П. Абовського [114, 115]; І.Я. Аміро, В.О. Заруцького [104, 116, 117]; Ю.П. Жигалка [118 - 121]; П.З. Лугового, В.Ф. Мейша [122 - 150]; А.І. Лур'є [111]; В.Н. Ревуцького [151, 152]; Ю.В. Скосаренка [153 - 156]; Б.П. Умушкіна [157] та інших вчених.

В силу своїх переваг, даний підхід набув широкого використання в теоретичних та експериментальних дослідженнях. В результаті чого була побудована загальна теорія ребристих оболонок, особливістю якої є послідовне врахування дискретного розміщення ребер.

Як впливає з огляду робіт, на сьогоднішній день в основному розглянуто осесиметричні та неосесиметричні вільні коливання підкріплених оболонок простої геометрії (циліндричні, сферичні і конічні).

В роботах [102, 105, 108, 109, 158] на основі теорії конструктивно – ортотропних оболонок проведено аналіз впливу розміщення ребер на напружено деформований стан і досліджені частоти власних коливань підкріплених

циліндричних оболонки. Розрахункові формули, одержані з врахуванням дискретності розміщення ребер, наведені в роботах [102, 105, 109, 160 - 163].

Найбільша кількість робіт присвячена дослідженню вільних коливань циліндричних оболонки, підкріплених ребрами в одному напрямку. Зокрема, аналіз впливу граничних умов, ребер, їх кількості і жорсткісних характеристик на вільні коливання оболонки, підкріплених позаддовжніми ребрами, наведені в роботах [102, 113, 116, 164] або поперечними [109, 116, 155, 165 - 167]. Також розглянуто задачі для циліндричних оболонки, підкріплених перехресною системою ребер [102, 105, 116, 163, 168]. Ці дослідження узагальнені в огляді [103], монографіях [102, 105, 109, 116].

Врахуванню дискретного розміщення ребер та їх геометрично – жорсткісних параметрів присвячені роботи [105, 116, 169 - 172]. Оцінка похибки конструктивно–ортотропної моделі наведена [172, 173]. В більшості з перерахованих вище робіт досліджувались лінійні власні коливання. Вплив кута конусності на власні коливання конічних ребристих оболонки досліджено в роботі [156].

Власні коливання сферичних оболонки, підкріплених меридіональними ребрами розглянуто в роботах [105, 152] та кільцевими ребрами [105, 174 - 176], перехресна [104, 105]. Визначено власні частоти та форми коливань сферичних підкріплених оболонки на основі конструктивно – ортотропної теорії [104, 177] та з врахуванням дискретного розміщення ребер [105, 151, 152].

Переходячи до розгляду результатів вивчення вимушених коливань ребристих оболонки, відмітимо, що значну увагу приділялися дослідженню коливань підкріплених тонкостінних структур під дією гармонічних навантажень.

Найбільша кількість робіт присвячена вивченню закономірностей протікання процесу вимушених гармонічних коливань підкріплених циліндричних оболонки [102 - 105, 107, 120, 163, 178 - 180]. Аналіз цих праць свідчить, що у випадку гармонічних навантажень, максимальні значення змінних по часу переміщень, зусиль та напружень, досягаються поблизу резонансу, коли

частоти збурюючи навантажень близькі до частот власних коливань. В силу відносної простоти задачі, в основному розглянуто вимушені гармонічні коливання циліндричних оболонок, підкріплених ребрами в одному напрямку. Зокрема, в роботах [102, 105, 108] наведено розв'язки задач для оболонок з повздовжніми ребрами. Поперечно підкріплені циліндричні оболонки розглянуто в [108, 163, 182]. Також розв'язано задачі для циліндричних оболонок, підкріплених сіткою повздовжніх та поперечних ребер [108, 163, 182].

Аналіз впливу дискретного розміщення ребер на напружено деформований стан підкріплених циліндричних оболонок та характеристики процесу коливань з використанням теорії врахування дискретності розміщення ребер, проведено в роботах [105, 108, 182]. Досліджено вплив граничних умов, кількості ребер та їх жорсткісних характеристик. В вище наведених роботах в основному розглянуто задачі про вимушені гармонічні коливання підкріплених оболонок з регулярно розміщеними ребрами.

Аналізу напружено – деформованого стану кінчних підкріплених оболонок присвячені роботи [105, 154]. Коливання ребристих кінчних оболонок під дією гармонічного навантаження та закономірності даного динамічного процесу висвітлені в [102, 104, 105, 107, 154, 183]. З огляду робіт випливає, що в основному розглянуто гармонічні коливання ребристих кінчних оболонок з однонаправленим набором ребер. Вплив поперечного підкріплення на закономірності коливань кінчних оболонок проаналізовано в роботах [105, 154].

Динамічні процеси, що протікають в конструкціях умовно можна розділити на стаціонарні та нестаціонарні. Аналіз перелічених вище праць свідчить, що більшість робіт про динамічну поведінку неоднорідних оболонок присвячені стаціонарній постановці (поширення вільних хвиль, вимушені гармонічні коливання, рух хвилі тиску зі сталою швидкістю по поверхні оболонки).

Розвиток сучасної техніки приводить до необхідності вивчення нестаціонарних динамічних процесів в різноманітних конструкціях. Нестаціонарні процеси виникають при дії на конструкції імпульсних,

короткочасних та рухомих навантажень. З огляду робіт можна зробити висновок, що найбільш детально розроблено методику розв'язування задач динамічних коливань пружних гладких оболонок. Оскільки на практиці частіше використовуються неоднорідні конструкції (підкріплюючі ребра, приєднані і зосереджені маси та ін.), то значна увага дослідників приділялась вивченню динамічної поведінки вказаних неоднорідних конструкцій під дією нестационарних навантажень. Серед перелічених вище неоднорідних структур, особливе місце займають дискретно підкріплені оболонки. Динамічні процеси в конструкціях, які складаються з оболонок та ребер, як правило, досить складні. Тому дослідження таких процесів в загалом розділяється на етапи: визначення діючих на конструкцію зовнішніх сил; вибір розрахункової моделі, яка схематизує реальний об'єкт (фізична модель); складання рівнянь коливань розрахункової моделі (математична модель); визначення механічних характеристик матеріалу в динаміці; вибір методу розв'язання задачі, отримання розв'язку і дослідження фізичних процесів; експериментальна перевірка теоретичних результатів, вибір критеріїв міцності та руйнування конструкції, створення розрахункової методики [184].

Результати досліджень по вимушеним коливанням динамічної поведінки тонкостінних підкріплених оболонок систематизовані в роботах В.Л. Агамірова [185]; І.Я. Аміро, В.О. Заруцького, В.Г. Паламарчука, В.Н. Ревуцького, Ю.В. Скосаренка, А. І. Телалова, С.Ю. Фиалка [102 - 106]; І.В. Андріанова, В.А. Леснічої, Л.І. Манєвича [107, 186 - 187]; Н.А. Абросимова, В.Г. Баженова [188]; А.Є. Богдановича, Т.Б. Кошкіної [189 - 192]; П. Жигалка, Л.М. Дмитрієвої [118, 119, 193]; С.С. Кохманюка, Е.Г. Янютін, А.Г. Романенка [194]; В.К. Ломунова [195]; П.З. Лугового, В.Ф. Мейша [126, 127, 137 - 150]; А.К. Перцева і Е.Г. Платонова [184] та інших вчених.

Найбільш простою моделлю динамічного процесу коливань неоднорідних структур є рівняння коливань підкріплених циліндричних оболонок з врахуванням дискретного розміщення поперечних ребер при осесиметричних

навантаженнях. Даній тематиці присвячені праці [124, 141, 184, 196]. Неосесиметричні коливання розглядалися в роботах [197 - 199].

Підкріплені оболонки в рамках класичної моделі. Однією з найпростіших моделей тонкостінних пружних дискретно підкріплених оболонок є модель, побудована на основі класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява і стержнів Кірхгофа – Клебша (хто перший). Класична теорія оболонок заснована на припущеннях, які вперше ввів розгляд Г. Кірхгоф в теорії пластин, а пізніше Ляв розповсюдив і узагальнив їх для оболонок. Перша гіпотеза полягає в тому, що елемент, перпендикулярний до вихідної поверхні, після деформації залишається прямолінійним і перпендикулярним до деформованої поверхні та не змінює своєї довжини. Згідно другої гіпотези, в співвідношеннях узагальненого закону Гука для пружних тіл можна знехтувати поперечним нормальним напруженням в порівнянні з іншими.

Згідно оглядових праць [102, 103, 106, 117, 200], основні результати досліджень по вивченню напружено – деформованого стану, коливань та стійкості ребристих оболонок, отримані за допомогою використання класичної теорії. В роботі [201] досліджено питання обґрунтування розрахункових схем даної теорії та наведено оцінку похибки її застосування до розв'язування задач коливань підкріплених оболонок.

Більшість опублікованих праць присвячено вивченню власних коливань підкріплених циліндричних оболонок в рамках класичної теорії [102 - 107]. В роботах проведено детальний аналіз впливу геометричних і фізичних параметрів оболонки та ребер, а також граничних умов на характеристики власних коливань. Досліджено оптимальні параметри підкріплень регулярною сіткою ребер [102, 163], та нерегулярно підкріплених повздожніми ребрами циліндричних оболонок [106, 107, 202]. Неосиметричне розміщення ребер відносно обшивки розглянуто в [102].

В рамках класичної теорії досліджено особливості власних коливань конічних підкріплених оболонок, які пов'язані з більш складною, ніж у циліндричних оболонок геометрією, в роботах [17, 102 - 106, 203].

Власні коливання сферичних підкріплених оболонок та вплив кута полураствору, граничних умов, параметрів підкріплюючих елементів на протікання процесу коливань досліджено на основі класичної теорії в роботах [151, 152, 174 - 176].

Відмітимо, що найбільше результатів вивчення вимушених коливань підкріплених оболонок на основі класичної теорії, отримано для коливань при гармонічних навантаженнях. Гармонічні коливання підкріплених циліндричних та конічних оболонок при різних граничних умовах досліджено в [104, 105, 118, 154]. Важливим фактором, який впливає протікання хвильових процесів в ребристих оболонках, є дискретне розташування підкріплюючих ребер. В наведених роботах розглянуто коливання циліндричних та конічних оболонок, які підкріплені ребрами в одному напрямку. В [104] на основі теорії конструктивно – ортотропних циліндричних оболонок досліджено вплив граничних умов на закономірності процесу коливань [104, 106]. В роботах [102, 104, 105, 154] на основі теорії врахування дискретного розміщення ребер досліджено вплив дискретного розміщення підкріплюючих ребер, граничних умов, геометрично – жорсткісних параметрів ребер та кута конусності на закономірності протікання гармонічних коливань підкріплених ребрами конічних оболонок. В роботі [105] приділялась увага дослідженню осесиметричних та неосесиметричних вимушених гармонічних коливань.

Особливості напружено – деформований стан ребристих оболонок в вакуумі або рідині розглянуто в [204, 205]. Досліджено вплив параметрів нерегулярно розміщених підкріплюючих ребер на гармонічні коливання. Особливо цікавою є задача, в якій розглянуто шарнірно оперту циліндричну оболонку з повздовжніми ребрами, довжина яких менша довжини оболонки [204], згідно методу розв'язування такого типу задач [205].

Переходячи до огляду робіт по нестационарним коливанням підкріплених оболонок в рамках класичної теорії слід відмітити, що найбільша кількість робіт присвячена дослідженню циліндричних оболонок [109, 184, 189 – 192, 206, 207]. Зокрема, більшість робіт присвячена циліндричним оболонкам, підкріплених

поперечними ребрами жорсткості [184, 189 - 192, 206]. Розглянуто задачі динамічної поведінки підкріплених оболонок в рамках конструктивно – ортотропної моделі [184] і моделі з врахуванням дискретного розміщення ребер під дією зовнішнього імпульсного навантаження [184] та осьового стискуючого удару [207]. Наведена порівняльна характеристика застосування цих двох моделей. Розв'язано задачі для вимушених осесиметричних коливань циліндричних оболонок, підкріплених пружними і жорсткими ребрами та досліджено вплив ширини ребер на прогини, деформації і напруження в області розміщення підкріплюючих ребер [184]. В роботі [208] досліджено особливості процесу коливань для оболонки з ребрами довільної орієнтації.

Слід відмітити задачі на стійкість та коливання в класичній постановці для неоднорідних конструкцій (циліндричні оболонки з отворами, коливання лопатей вітроенергетичних установок і т.д.) [209 - 214]. В рамках використання спрощуючи моделей та експерименту розглянуто задачі деформування та міцності шаруватих вуглепластиків при статичному термомеханічному навантаженні [215 - 217].

Таким чином, на основі проведеного аналізу робіт, можна зробити висновок, що класична теорія оболонок Кірхгофа – Лява і стержнів Кірхгофа – Клебша є досить вагомим апаратом для досліджень динамічних процесів в неоднорідних оболонкових конструкціях під дією різного роду навантажень. На її основі розв'язано широкий клас задач, які можна вважати еталонними. Недоліком даної теорії є те, що вона дозволяє отримувати розв'язок лише при достатньо жорстких обмеженнях на області частот коливань, довжини хвиль переміщень, деформацій і напружень неоднорідних оболонкових структур. Рівняння коливань підкріплених оболонок отримані на основі класичної теорії, належать до рівнянь параболічного типу (згідно з класифікацією рівнянь математичної фізики). А той факт, що для дослідження хвильових процесів при короткочасних навантаженнях бажано використовувати рівняння гіперболічного типу, приводить до певних протиріч. Дана невідповідність може призвести до суттєвих похибок.

Уточнюючі теорії підкріплених оболонок. В ряді випадків, при проведенні досліджень динамічних процесів в неоднорідних оболонкових конструкціях необхідним є врахування деформацій поперечного зсуву і інерції обертання нормального елемента, а в деяких випадках і поперечних нормальних деформацій. Вказані проблеми призвели до необхідності побудови уточнюючих теорій.

Найбільшого розповсюдження набула неklasична уточнююча двовимірна теорія, яка враховує деформації поперечного зсуву і інерції обертання нормального елемента для оболонки і підкріплюючих ребер жорсткості (теорія оболонок і стержнів теорії Тимошенка). Дана модель була розроблена С.П. Тимошенко для розв'язування задач поперечних коливань балок [218]. Пізніше вона була узагальнена і поширена на задачі коливань оболонок і стержнів [219, 220] та отримала назву “моделі оболонок і стержнів теорії Тимошенка”.

В основі даної теорії лежать гіпотези, перша з яких полягає в тому, що елемент, перпендикулярний до вихідної поверхні, після деформації залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до деформованої поверхні, а повертається на деякий кут і не змінює своєї довжини. Згідно другої гіпотези, в співвідношеннях узагальненого закону Гука для пружних тіл можна знехтувати поперечним нормальним напруженням в порівнянні з іншими.

При розгляді ребер в основу покладається гіпотеза недеформованості поперечного перерізу криволінійного стержня.

На основі теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка можна розв'язати більш широкий клас прикладних задач, ніж з використанням класичної теорії. Оскільки рівняння коливань підкріплених оболонок за теорією типу Тимошенка відносяться до гіперболічного типу, то даний факт дає змогу більш точно описувати хвильові процеси в неоднорідних оболонках під дією короткочасних навантажень (тривалість навантаження менша часу пробігу пружною хвилею характерного розміру конструкції). Крім того, рівняння коливань типу Тимошенка можна застосовувати для досліджень підкріплених оболонок з більш складними геометричними та фізико – механічними параметрами.

Перейдемо до розгляду результатів дослідження хвильових процесів в підкріплених оболонках з використання теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка.

Велика кількість робіт присвячена дослідженню питань динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок при дії на них нестационарних навантажень в даної рамках теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка. В роботах [194, 221] отримано аналітичні розв'язки задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок при нестационарних осесиметричних навантаженнях. Ці розв'язки використовуються як тестові задачі для відпрацювання і достовірності чисельних алгоритмів розв'язку задач теорії підкріплених оболонок типу Тимошенка.

Вимушені коливання поперечно підкріплених оболонок та вплив виду нестационарного навантаження на закономірності протікання процесу коливань досліджено в роботах [124, 142, 194, 198, 199, 222]. Зокрема, в роботах [124, 131, 132, 141] наведені різницеві схеми та їх детальний аналіз для рівнянь руху ребристих циліндричних оболонок під дією імпульсного навантаження. Рівняння руху отримано з використанням варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Проведено дослідження нестационарної динаміки повздовжньо підкріплених циліндричних оболонок та виявлено особливості, пов'язані з характеристиками ребер [144, 223]. Нестационарна поведінка циліндричних оболонок з перехресним набором ребер при повздовжньому імпульсному навантаженні досліджена в [136, 143, 224]. Теорія розв'язування динамічних задач нестационарної поведінки циліндричних оболонок з дискретним підкріпленням змінної жорсткості викладена в [134, 136].

Геометрично нелінійна постановка теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка застосовувалась при дослідженнях ребристих циліндричних оболонок і пластин в роботах [133, 134]. Особливості застосування лінійної та нелінійної теорії підкріплених оболонок відмічені в [176]. Вплив ортотропії матеріалу оболонки досліджено в [134, 139, 144]. Розв'язання хвильових рівнянь теорії оболонок і пластин типу Тимошенка наведено в [225, 226].

Приділялась увага теоретичному обґрунтуванню застосування даної уточнюючої теорії. Зокрема, в роботі [227] вирішено питання про єдність і неперервність від початкових даних розв'язку рівнянь руху ребристих оболонок обертання. Розв'язування задач динамічного деформування підкріплених циліндричних оболонок в рамках різних прикладних теорії оболонок та теорії пружності і порівняльний аналіз наведено в [134, 224]. Розрахунок напружено – деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними ребрами жорсткості при нестационарних навантаженнях [145, 147, 149, 228].

Отже, на основі проведеного аналізу робіт, можна зробити висновок, що теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка, набула великого розповсюдження для розв'язування динамічних задач підкріплених оболонок і в останні роки є однією з найбільш поширених теорій для розв'язування вказаного класу задач. Використовуючи вказану теорію досліджено широкий клас прикладних задач для підкріплених оболонок різної геометричної форми (циліндричних, конічних, сферичних) з складними геометричними та фізико – механічними параметрами для ребер і оболонок при дії на них різного роду нестационарних навантажень (імпульсних (локальних та розподілених), ударних, рухомих та ін.).

1.3.2. Характеристика основних чисельних методів дослідження динамічних задач підкріплених оболонок

У зв'язку з інтенсивним розвитком обчислювальної техніки, на сьогоднішній день, в основному, широкого застосування для дослідження вимушених коливань підкріплених оболонок набули наступні чисельні методи: метод граничних елементів, метод скінчених елементів, метод скінчених різниць, метод ортогональної прогонки. Ці методи досить універсальні і застосовуються для розв'язування досить складних лінійних і нелінійних задач.

Метод граничних елементів (МГЕ) дозволяє здійснити перехід від розв'язування системи диференціальних рівнянь і відповідних їм граничних умов до розв'язування системи інтегральних рівнянь по границі області. Даний метод

зручний тим, що дає можливість зменшити розмірність вихідної задачі на одиницю. Більш детально МГЕ описаний в монографіях [229, 230]. МГЕ, в основному застосовується для розв'язку лінійних задач. Для розв'язку динамічних задач теорії неоднорідних оболонок даний метод не отримав достатнього поширення.

Метод ортогональної прогонки [226, 231] отримав широке поширення для розв'язування задач статички та вільних коливань гладких та неоднорідних по товщині (змінна неперервна товщина, наприклад, по довжині) оболонок та пластин.

Метод скінчених елементів (МСЕ) базується на варіаційних принципах. МСЕ зручний при розв'язуванні задач в областях складної геометрії, оскільки він дає можливість представити складну вихідну область у вигляді сукупності достатньо простих підобластей. Перевагою МСЕ є його велика фізична наочність і те, що він дозволяє отримувати високу точність розв'язків на нерегулярних сітках. Основи МСЕ в теорії пластин і оболонок викладено в монографії [219, 233 - 236]. В статті [237] розроблений алгоритм підвищення ефективності МСЕ при розв'язуванні задач. Досліджено нелінійні невстановлені реакції конструкцій на основі МСЕ [238].

Найбільшого поширення при розв'язку нестационарних задач теорії дискретно підкріплених оболонок отримав *метод скінчених різниць*.

Метод скінчених різниць (МСР) полягає в тому, що область неперервної зміни аргументів шуканих функцій заміняють дискретною множиною точок – вузлів розрахункової сітки. Частинні похідні, які входять в досліджувану систему диференціальних рівнянь, замінюють скінченими різницями. При цьому диференціальні рівняння переходять в систему алгебраїчних рівнянь, шуканими в яких є значення шуканих функцій в вузлах сітки. Різницева задача повинна бути поставлена так, щоб при зменшенні кроку сітки її розв'язок наближався до розв'язку диференціальної задачі, тобто процес обчислень збігався до точного розв'язку. Теоретичні основи МСР описано в монографіях [238 - 242].

Переходячи до висвітлення робіт, які присвячені вивченню нестационарних коливань ребристих оболонок, потрібно відмітити, що одним із методів побудови скінчено – різницевих схем є інтегро – інтерполяційний метод, який розробили А.А. Самарський [241] та Г.І. Марчук [242]. Надалі цей підхід був розвинений і поширений для розв'язання рівнянь коливань дискретно підкріплених оболонок в роботах [122 - 150, 195, 223].

В роботі [195] на основі такого підходу була розв'язана задача випучування дискретно – підкріплених циліндричних і конічних пружно – пластичних оболонок при осьовому ударі. В Інституті механіки НАН України на основі розроблених вказаних алгоритмів було розв'язано клас динамічних задач. Зокрема, задачі динамічної поведінки тришарових оболонок обертання при нестационарних навантаженнях (при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару) і задачі динамічної поведінки тришарових неоднорідних по товщині оболонок при нестационарних навантаженнях; задачі динамічної поведінки багатошарових дискретно – підкріплених оболонок при нестационарних навантаженнях [122 – 150, 224].

1.4. Зв'язані задачі взаємодії оболонок з навколишнім середовищем

Задачі взаємодії оболонок з навколишнім середовищем розглянуті в роботах: Н.А. Алумяе, В.Г. Баженова, Н.Д. Векслера, А.В. Вестяка, А.С. Вольміра, Ш.У. Галієва, А.Г. Горшкова, Е.І. Григолюка, О.М. Гузя, А.В. Кочеткова, В.Д. Кубенка, М.І. Михайлової, А.К. Перцева, Д.В. Тарлаковського, Berger B.S., Geers T.L., Huang H, Wang Y.E. та інших дослідників [243 - 286]. Зокрема, задачі взаємодії оболонок з ґрунтовими середовищами розглянуто в роботах В.Г. Баженова, А.В. Кочеткова, І.А. Лучка, В.А. Плаксія, Н.С. Ремез [287 - 295].

Задачам теорії нестационарної аерогідропружності оболонок та нестационарної взаємодії деформованих тіл з навколишнім середовищем присвячено ряд оглядових монографій та статей [249 – 251, 255, 257- 259, 263, 264, 268, 270, 272].

В роботах [263, 264] викладено проблеми нестационарної взаємодії жорстких тіл та деформованих елементів конструкцій з середовищем, рух якого описується хвильовим рівнянням акустичного наближення або рівняннями газової динаміки. Проведено аналіз існуючих підходів до розв'язку задач нестационарної аерогідропружності. Досліджуються нестационарні навантаження та напружено – деформований стан тіл при дії нестационарних хвиль з плоским, сферичним і циліндричним фронтом в безмежному середовищі. Розглядаються внутрішні та змішані задачі для замкнених елементів конструкцій, а також задачі для систем вкладених оболонок. Вивчається лінійне та нелінійне деформування одно– та багат шарових оболонок. Відмінною особливістю робіт є намагання отримати розв'язок гідро пружної задачі при строгому врахуванні механізму взаємодії тіла та середовища. При такому підході задача не виглядає як задача для оболонки, рівняння руху якої доповнені членом, який враховує гідродинамічну частину навантаження. На передній план висувається розв'язок хвильових (газодинамічних рівнянь) для областей, границями яких є пружні оболонки. В ряді випадків враховується хвильовий характер розповсюдження збурень в елементах конструкцій. Все це дозволяє з наперед заданою точністю отримати конкретні результати, які можуть слугувати орієнтиром при апробації різноманітних наближених підходів.

Нестационарна взаємодія елементів конструкцій з середовищем, зокрема рідиною, представлена в роботах [269 - 272]. Розглянуто задачі нестационарного деформування заповнених рідиною оболонок при дії слабких ударних хвиль, задачі деформування сферичних оболонок під дією сферичної гідроакустичної хвилі, задачі стійкості і нелінійних коливань замкнених оболонок циліндричної форми при взаємодії з протікаючою рідиною.

Взаємодія ударних хвиль з деформованими перешкодами, динамічна та нестационарна взаємодія оболонок і пластин з навколишніми пружними середовищами, аерогідропружність конструкцій, нестационарна аерогідропружність тіл сферичної форми розглянуто в роботах [255 - 259].

Проблеми взаємодії оболонок з рідиною, нестационарні гідро пружні коливання товстостінної сфери, реакція тришарових циліндричних оболонок на дію повітряної ударної хвилі розглянуто в роботах [260 - 262].

Експериментальне дослідження дифракції ударних хвиль в воді на абсолютно жорсткому нерухомому циліндрі, динаміки навантаження циліндричних і сферичних хвиль з ударними хвилями проведено в [243 - 248].

Задачам визначення динамічних навантажень при підводному вибуху, гідро пружності оболонок, нестационарним пружним хвилям і хвилям в рідині присвячені монографії [266, 273, 278].

Взаємодію акустичної хвилі тиску на циліндричну оболонку підкріплену ребрами жорсткості, зокрема жорсткими шпангоутами, розглянуто в роботах [274, 275, 277]. Взаємодія поперечно – підкріплених оболонок, зокрема циліндричних оболонок, при осесиметричному навантаженні в вигляді функцій Хевісайда, в рідині досліджувалась в [282, 283]. Поведінка періодично підпертих циліндричних оболонок в рідині розглянуто в роботі [284].

Вільні коливання і локальні резонансні ефекти в багатошарових балках та кругових багатошарових пластинах на пружній основі розглянуто в роботах [285, 286].

Практично в усіх вищевказаних роботах при дослідженнях та отриманні кількісних та якісних результатів використовувалися аналітичні та чисельно – аналітичні методи розв'язання задач. Це досягалося за рахунок використання лінійних моделей та ряду спрощувальних допущень. Розв'язок більш складних нелінійних зв'язаних задач аеропружності вимагає застосування сучасних чисельних методів. Зокрема, в роботах [244, 245, 247, 253, 265, 276] представлені чисельні розв'язки задач в пружній та фізично – нелінійній постановці, як для оболонок так і для середовищ. В [244] розглянуто чисельний розв'язок плоских і осесиметричних задач взаємодії пружнопластичних оболонок з ударними хвилями, в [245] розглянуто нелінійну динамічну взаємодію тонкостінних конструкцій з ідеальними стисними середовищами.

Робота [265] присвячена розвитку методики для розв'язку плоских та осесиметричних задач нелінійної взаємодії деформованих елементів конструкцій з рідкісними і ґрунтовими середовищами. Фізично нелінійна поведінка конструкцій описується співвідношеннями теорії пластичної течії. Ґрунт розглядається, як ідеальне, пластично стичне середовище, для якого справедлива модель, запропонована С.С. Григоряном [80]. Рівнянням стану середовища слугує залежність тиску від густини (об'ємної деформації), різної для процесів активного навантаження та розвантаження. Враховується також вплив дотичних складових тензора напружень на процес деформування ґрунтових середовищ. Для опису геометрично нелінійної поведінки об'єктів, що взаємодіють, застосовуються рухомі ейлерово – лагранжеві сітки. В роботі [276] методика чисельного розв'язку двовимірних задач нестационарної аерогідропружності оболонки розвинена на розв'язок задач взаємодії тонкостінних конструкцій з водо насиченими ґрунтовими середовищами (приймається рівняння стану ідеального трикомпонентного середовища Г.М. Ляхова [81]). Параметри вибухових хвиль, які діють на конструкцію, визначаються із розв'язку одновимірних задач. Досліджується поведінка контактних навантажень, параметрів напружено – деформованого стану циліндричної оболонки в залежності від вмісту в середовищі защемленого повітря. В роботі [253] розглядається плоска задача нестационарної взаємодії тонкостінної циліндричної оболонки з хвилями в навколишньому пружному ізотропному середовищі. Основні результати отримані згідно припущення жорсткої склейки середовища і оболонки на поверхні контакту. Вивчається процес взаємодії оболонки з пружним середовищем при різних умовах контакту – жорстка склейка, не проникнення з ідеальним проковзуванням та проковзуванням з тертям. Чисельне моделювання задач відбувається на застосуванні варіаційно – різницевої моментної схеми для оболонки і схеми з консервативного згладжування для ізотропного середовища. Ці чисельні алгоритми реалізовані в рамках пакета прикладних програм «Динаміка - 2» [95]. В роботі [247] приведені чисельні результати розрахунків параметрів хвильового поля в рідині (воді), яка заповнює

ззовні в середині нескінченну циліндричну сталеву трубу, при вибуху зарядів вибухової речовини, які розташовані в середині на осі симетрії системи. Робота присвячена чисельному моделюванню гідро пружних динамічних процесів, які протікають в даних системах, і порівнянню з експериментальними даними. Розглядалися задачі при наступних навантаженнях: циліндрична оболонка під дією вибуху шнурового заряду (одновимірна задача) і задача навантаження циліндричної оболонки вибухом сферичного заряду (двовимірна задача).

В роботах [287 - 292] розглянуто ряд задач нестационарної поведінки циліндричних та сферичних оболонок при вибухах зарядів циліндричної та сферичної форми в ґрунтовому середовищі. Ґрунтове середовище розглядалося в рамках моделей В.М. Ляхова [81] та С.С. Григоряном [80]. В роботі [287] розглянуто взаємодії циліндричних вибухових хвиль в в'язкопластиному середовищі з нерухомою перешкодою. В роботі [228] досліджувалося деформування товстостінних циліндричних оболонок з пористим заповнювачем при внутрішньому вибуховому навантаженні. Результати чисельного аналізу ударних хвиль при взаємодії з циліндричною оболонкою в ґрунтовому масиві представлено в [282]. Циліндрична оболонка моделювалася в рамках теорії пружності. В роботі [290] розглянута нестационарна взаємодія циліндричних оболонок з ударними хвилями при вибуху сферичного заряду в ґрунтовому масиві (двовимірний випадок). Пружнопластична поведінка двошарової сферичної оболонки та шаруватої циліндричної оболонки при дії вибухових навантажень в ґрунтовому середовищі розглядалися в [291, 292]. Двошарова сферична оболонка та шарувата циліндрична оболонка розглядалися в рамках моделі теорії пружності.

Всі вказані задачі по нестационарній поведінці оболонкових конструкцій при взаємодії з ґрунтовими середовищами розв'язувалися на основі чисельного методу М.Л. Уілкінса [93]. Також задовільно зарекомендував себе чисельний метод розв'язування задач аеропружності Мак – Кормака предиктор – коректор для одновимірних [295] та неодновимірних задач [293, 294].

Висновки до першого розділу

В даному розділі проведено аналіз сучасного стану динамічної поведінки неоднорідних конструкцій (підкріплених оболонок) на пружній та в ґрунтовому середовищі. Проведено характеристику безінерційних пружних основ Вінклера та Пастернака. Показано позитивні сторони використання цих моделей та їх недоліки. Приведено моделі ґрунтів, які використовуються, як рівняння стану при розв'язку задач динамічної поведінки ґрунтових середовищ в рамках механіки суцільних середовищ - модель ґрунтів В.М. Ляхова, С.С. Григоряна і т.д. Рівняння руху ґрунтового середовища з відповідним рівнянням стану описується в рамках механіки суцільних середовищ. Це достатньо складні нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних. Приведено аналіз чисельних алгоритмів і методів для розв'язку вказаних задач. Виходячи з теми дисертаційної роботи та мети досліджень проведено аналіз сучасного стану теорії підкріплених оболонок в рамках конструктивно – ортотропної моделі та моделі підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер. Розглядалися динамічні задачі для підкріплених оболонок в рамках класичної та уточнюючої моделей. Приведено основні підходи чисельного розв'язування задач теорії дискретно підкріплених оболонок. Також проведено аналіз сучасного стану проблеми розв'язку зв'язаних задач взаємодії оболонок з навколишнім середовищем (повітря, рідина, ґрунт).

Виходячи з приведенного літературного огляду можна зробити висновок, що в сучасній літературі достатньо повно представлено дослідження по теорії і методам розв'язку задач динаміки підкріплених оболонок. Враховуючи тему досліджень даної дисертації, було проведено аналіз пружних основ, ґрунтових середовищ, методів розв'язування динамічних задач для ґрунтових середовищ. Були розглянуті роботи взаємодії оболонок з навколишнім середовищем.

Практично відсутні дослідження по динаміці підкріплених оболонок на пружній основі при нестационарних навантаженнях та неоднорідних оболонок з врахуванням дії ґрунтових середовищ. Цей фактор обумовлює актуальність та новизну теми досліджень.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

При побудові рівнянь коливань підкріплених оболонок обертання з врахуванням дискретності розміщення ребер та впливу зовнішнього середовища в даній роботі використовується геометрично лінійний варіант теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка, як частковий випадок геометрично нелінійного варіанту теорії оболонок та стержнів (2.1) – (2.6). Використовуючи варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона - Остроградського, з врахуванням умов контакту оболонка - ребро, отримані рівняння осесиметричних та неосесиметричних коливань неоднорідних оболонкових структур з врахуванням зовнішнього середовища в варіаційній та диференціальній формах з відповідними природними граничними та початковими умовами. Розглянуто постановку задач про взаємодію циліндричних та сферичних оболонок з ґрунтовим середовищем.

2.1. Постановка динамічних задач теорії підкріплених оболонок на пружній основі

2.1.1. Основні положення теорії пружних оболонок та стержнів типу Тимошенка. Вихідні положення

Нехай пружне тіло, що віднесено до ортогональної криволінійної системи координат α_1, α_2, z , під дією деяких сил деформується. Тоді деяка точка тіла M , що має координати (α_1, α_2, z) , отримає переміщення, яке може бути представлене трьома проекціями вектора повного переміщення в напрямках дотичних до координатних ліній α_1, α_2, z

$$u_1^z = u_1^z(\alpha_1, \alpha_2, z), \quad (2.1)$$

$$u_2^z = u_2^z(\alpha_1, \alpha_2, z),$$

$$u_3^z = u_3^z(\alpha_1, \alpha_2, z).$$

Деформаційний стан оболонки тіла в околі точки $M(\alpha_1, \alpha_2, z)$ в рамках геометрично нелінійної теорії пружності характеризується наступними співвідношеннями (2.2) – (2.4)

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{21} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right], \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \left[e_{22}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33} + \frac{1}{2} \left[e_{33}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right)^2 \right],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{11} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \\ + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} = e_{13} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right) + e_{33} \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) + \\ + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = e_{23} + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right) + e_{33} \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right) + \\ + \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right); \end{aligned}$$

де e_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$)

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1^z}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2^z + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial z} u_3^z, \quad (2.3)$$

$$e_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2^z}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial z} u_3^z + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} u_1^z,$$

$$e_{33} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3^z}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u_1^z + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_2^z,$$

$$e_{12} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2^z}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1^z}{H_1} \right),$$

$$e_{13} = \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_1^z}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_3^z}{H_3} \right),$$

$$e_{23} = \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_3^z}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_2^z}{H_2} \right);$$

$$2\omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 u_3^z) - \frac{\partial}{\partial z} (H_2 u_2^z) \right], \quad (2.4)$$

$$2\omega_2 = \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial z} (H_1 u_1^z) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_3 u_3^z) \right],$$

$$2\omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 u_2^z) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 u_1^z) \right].$$

В співвідношеннях (2.3), (2.4) величини $H_i = H_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $(i = \overline{1, 3})$ – коефіцієнти Ляме, які при побудові теорії оболонок мають вигляд

$$H_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)(1 + k_1 z), \quad (2.5)$$

$$H_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2)(1 + k_2 z),$$

де k_1, k_2 – головні кривизни середньої поверхні оболонки; причому $k_1 = 1/R_1, k_2 = 1/R_2$, R_1, R_2 – радіуси головних кривизн; $A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми.

Коефіцієнти першої квадратичної форми A_1, A_2 пов'язані з величинами k_1, k_2 відомими співвідношеннями Гауса–Кодаці

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (k_2 A_2) = k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (k_1 A_1) = k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = -k_1 k_2 A_1 A_2.$$

При розгляді розподілу деформацій і напружень, будемо покладати, що тіло є анізотропним і в процесі деформацій залишається пружним і підпорядковується узагальненому закону Гука для даного анізотропного тіла (2.7). Зокрема, як частковий випадок загального анізотропного тіла, будемо розглядати ортотропне тіло, у якого через кожну точку тіла проходить три взаємно ортогональні площини пружної симетрії. Зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій у такому тілі мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В формулах (2.7) пружні сталі мають наступний зміст E_1, E_2, E_3 – модулі Юнга у відповідних напрямках α_1, α_2, z ; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву для поверхонь $z = const, \alpha_1 = const, \alpha_2 = const$; $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ – коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечний стиск при розтягу в напрямі осей координат (перший індекс показує напрям поперечного стиску, другий – напрям дії сили). Причому, згідно умов симетрії маємо

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}, \quad E_3 \nu_{32} = E_2 \nu_{23}, \quad E_1 \nu_{13} = E_3 \nu_{31}.$$

Основні положення теорії оболонок типу Тимошенка. Розглядається оболонка постійної товщини h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній криволінійній системі координат α_1, α_2, z . Координатні лінії α_1, α_2 на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ співпадають з лініями головних кривизн; координатна лінія z є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні. Будемо рахувати величину z додатною, якщо точка знаходиться зі сторони опуклості серединної поверхні.

В основу побудови математичної теорії оболонок типу Тимошенка покладені наступні кінематичні і статичні гіпотези.

1. Покладається, що нормаль до вихідної поверхні до деформації залишається прямолінійною після деформації; не змінює своєї довжини, але повертається відносно цієї поверхні на деякий кут. Згідно цих припущень закон розподілення переміщень приймається у вигляді

$$u_1^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.8)$$

$$u_2^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$u_3^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

де $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2), \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – кути повороту нормалі.

2. Компоненти тензора деформацій визначаються згідно найпростішого нелінійного варіанту теорії ортотропних оболонок в квадратичному наближенні (2.2) – (2.4). З врахуванням формул (2.8), співвідношення (2.2) – (2.4) мають наступний вигляд

$$\varepsilon_{11}^z = E_{11} + zK_{11}, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{22}^z = E_{22} + zK_{22},$$

$$\varepsilon_{12}^z = E_{12} + zK_{12},$$

$$\varepsilon_{13}^z = \varphi_1 + \theta_1, \quad \varepsilon_{23}^z = \varphi_2 + \theta_2,$$

де

$$E_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad E_{22} = e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad (2.10)$$

$$E_{12} = \omega + \theta_1\theta_2,$$

$$K_{11} = \kappa_{11}, \quad K_{22} = \kappa_{22},$$

$$K_{12} = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} + \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2},$$

$$e_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{u_3}{R_1},$$

$$e_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{u_3}{R_2},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, \quad \theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2,$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} u_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_2,$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_1,$$

$$\tau_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_1,$$

$$\tau_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_2.$$

3. Розв'язуючи перші три рівняння співвідношень (2.7) відносно σ_{11} , σ_{22} при врахуванні, що $\varepsilon_{33} = 0$ і нехтуванні величиною σ_{33} в порівнянні з σ_{11} і σ_{22} , отримаємо наступні формули, що зв'язують напруження з відповідними деформаціями

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11}^z + B_{12}\varepsilon_{22}^z, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_{11}^z + B_{22}\varepsilon_{22}^z,$$

де величини B_{11} , B_{22} , B_{12} , B_{21} мають наступний вигляд

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

4. Зсувні поперечні напруження σ_{13} і σ_{23} мають вигляд

$$\sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, z) = G_{13}\varepsilon_{13}^z, \quad (2.12)$$

$$\sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, z) = G_{23}\varepsilon_{23}^z.$$

Основні положення теорії криволінійних стержнів з врахуванням деформацій зсуву. Нехай маємо тонкий криволінійний стержень довільного поперечного зрізу. В центрі ваги площини зрізу розташуємо початок координат α_1 у z , причому вісь α_1 направлена вздовж осі стержня, а осі y і z паралельні головним осям цього поперечного зрізу. Припускається, що вздовж осі поперечний зріз стержня сталий. Координатна лінія α_1 при $y = 0$, $z = 0$ співпадає з лінією головної кривизни; лінії y і z являються ортогональними до координатної лінії α_1 . Величина z вважається додатною, якщо розглянута точка лежить зі сторони опуклості координатної лінії. Система координат α_1 у z – ортогональна по побудові і її коефіцієнти Ляме мають вигляд

$$H_1 = A_1(\alpha_1)(1 + zk_1), \quad H_2 = 1, \quad H_3 = 1, \quad (2.13)$$

де $A_1(\alpha_1)$ – параметр Ляме серединної лінії; k_1 – головна кривизна, причому $k_1 = 1/R_1$, R_1 – радіус головної кривизни.

Прийняття гіпотези недеформованості поперечного зрізу криволінійного стержня, при врахуванні малих розмірів поперечного зрізу стержня в напрямках y і z в порівнянні з його довжиною дозволяє виразити компоненти вектора переміщень поперечного зрізу у вигляді

$$u_1^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_1(\alpha_1) + y\gamma_1(\alpha_1) + z\gamma_2(\alpha_1), \quad (2.14)$$

$$u_2^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_2(\alpha_1) + z\psi_2(\alpha_1),$$

$$u_3^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_3(\alpha_1) - y\psi_2(\alpha_1).$$

Представлення (2.14) дозволяє описувати сумісний розтяг – стиск, згин, зсув, і кручення в стержнях.

Деформаційні співвідношення для криволінійного стержня у випадку простішого нелінійного варіанту теорії стержнів в квадратичному наближенні мають вигляд (частковий випадок рівнянь (2.2) – (2.4))

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12}, \quad \varepsilon_{13} = e_{13}, \quad \varepsilon_{23} = 0,$$

де

$$e_{11}^{yz} = \frac{1}{1 + zk_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^{yz}}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3^{yz}, \quad (2.16)$$

$$e_{12}^{yz} = \frac{1}{1 + zk_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^{yz}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1^{yz}}{\partial y},$$

$$e_{13}^{yz} = (1 + zk_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_1^{yz}}{1 + zk_1} \right) + \frac{1}{1 + zk_1} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{yz}}{\partial \alpha_1},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} e_{12}^{yz} + \omega_3^{yz}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} e_{13}^{yz} + \omega_2^{yz},$$

$$\omega_2^{yz} = \frac{1}{2} \frac{1}{A_1(1+zk_1)} \left[\frac{\partial}{\partial z} (A_1(1+zk_1)) u_1^{yz} - \frac{\partial u_3^{yz}}{\partial \alpha_1} \right],$$

$$\omega_3^{yz} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+zk_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^{yz}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1^{yz}}{\partial y} \right].$$

Доповнимо залежності (2.14)–(2.16) співвідношеннями закону Гука, де

$$\sigma_{11}^{yz} = E \varepsilon_{11}^{yz}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{12}^{yz} = G \varepsilon_{12}^{yz}, \quad \sigma_{13}^{yz} = G \varepsilon_{13}^{yz},$$

де E, G – пружні константи матеріалу.

Моделі Вінклера та Пастернака для оболонкових структур. На сьогоднішній день досягнуто значні успіхи в області дослідження динамічних процесів в елементах конструкцій канонічної форми (циліндричні, сферичні та конічні оболонки). Проте, ряд проблем в цьому напрямі залишаються незавершеними. Не достатньо дослідженими є задачі динамічної взаємодії однорідних та неоднорідних оболонкових структур з пружними середовищами. Вказані задачі мають велике народногосподарське значення, оскільки оболонкові структури знаходять широке застосування в інженерних конструкціях і спорудах у вигляді трубопроводів, тунелів, різноманітних резервуарів, які укладені в ґрунтове середовище і т.д.

Як вже вказувалося в розділі 1, найбільш повно властивості пружного середовища, в якому знаходиться оболонка, описуються рівняннями тривимірної теорії пружності. Але, в математичному плані ця задача є достатньо складною. Крім того, в більшості випадків інтерес представляє реакція пружного середовища в зоні контакту з оболонкою, а не переміщення та напруження в матеріалі середовища. Тому задача врахування пружного середовища зводиться

до знаходження більш простого математичного виразу, який з достатньою точністю дозволяє визначити реакцію пружного середовища в області контакту. При цьому, пружне середовище, яке наділено локальними характеристиками, отримало назву основи.

Дослідженню взаємодії елементів конструкцій з пружними основами присвячена значна кількість публікацій (див. розділ 1). В основному розглядаються пластини або гладкі циліндричні оболонки. Зокрема, при розгляді циліндричних оболонок як в задачах статички, так і в задачах динаміки, пружне середовище більше всього розглядається на основі гіпотез Вінклера (див. розділ 1). Модель Вінклера – це найбільш проста модель пружного середовища, для опису якої достатньо одного коефіцієнта постелі (пружної основи). Основа типу Вінклера моделюється рядом незалежних пружних пружин і достатньо точно описує поведінку водонасичених і рихлих ґрунтів. Зв'язок між реакцією пружного середовища $\tilde{R}(x, s, t)$ і радіальними переміщеннями точок серединної поверхні оболонки $u_3(x, s, t)$ у випадку моделі Вінклера має вигляд (параграф 1.1.)

$$\tilde{R}(x, s, t) = C_1 u_3(x, s, t),$$

де C_1 - коефіцієнт постелі пружної основи, який характеризує роботу на розтяг - стиск; x, s - основа та окружна координата серединної поверхні циліндричної оболонки і t - часова координата.

Більш близькою до дійсності апроксимацією пружного середовища є двопараметрична модель пружної основи, яка розглянута в монографії В.З. Власова і Н.Н. Леонтьєва (див. параграф 1.1.). Серед моделей двопараметричних пружних основ слід відмітити модель пружної основи, яка була розроблена П.Л. Пастернаком в 1937 році. Для пружної основи Пастернака зв'язок між реакцією пружного середовища і радіальними зміщеннями точок серединної поверхні, зокрема для циліндричної оболонки, має вигляд

$$\tilde{R}(x, s, t) = C_1 u_3(x, s, t) + C_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right),$$

де C_2 - коефіцієнт постелі, який характеризує роботу пружної основи на зсув.

2.1.2. Рівняння коливань дискретно - підкріплених оболонок обертання з врахуванням дії зовнішнього середовища

Рівняння коливань неоднорідних оболонок в загальному випадку. Неоднорідна пружна структура з врахуванням дискретних включень представляє собою безпосередньо обшивку та набір дискретних повздовжньо - поперечних підкріплюючих ребер. Приймається, що напружено – деформований стан обшивки може бути визначений в рамках геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка. Для розрахунку дискретних ребер приймається геометрично нелінійний варіант теорії стержнів Тимошенка – співвідношення (2.13)–(2.17). Деформований стан обшивки може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$. Деформований стан ребра, направлено вздовж вісі α_1 , будемо визначати узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. Відповідно, ребра, направлено вздовж осі α_2 – вектором $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$. Припускається, що шари оболонки та дискретні підкріплюючі елементи жорстко з'єднані між собою.

Будемо вважати, що загальна система координат віднесена до серединної поверхні обшивки товщиною h . Координату z будемо відраховувати в сторону зростання зовнішньої нормалі до вихідної поверхні.

Умови контакту між компонентами вектора переміщень центра ваги поперечного зрізу i – го ребра, яке направлено вздовж осі α_1 і компонентами узагальненого вектора переміщень вихідної серединної поверхні записуються у вигляді [136, 223]:

$$U_{1i}(\alpha_1) = U_1(\alpha_1, \alpha_{2i}) + h_{ci} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_{2i}), \quad (2.18)$$

$$U_{2i}(\alpha_1) = U_2(\alpha_1, \alpha_{2i}) + h_{ci} \varphi_2(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$U_{3i}(\alpha_1) = U_3(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$\varphi_{2i}(\alpha_1) = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$\varphi_{3i}(\alpha_1) = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_{2i}).$$

Аналогічним чином записуються умови контакту j – го підкріплюючого ребра, яке направлене вздовж осі α_2 , з обшивкою.

В формулах (2.18) h_{ci} – віддаль від вихідної серединної поверхні до лінії центру ваги поперечного зрізу i - го ребра.

Для виводу рівнянь коливань дискретно підкріпленої структури використовується варіаційний принцип Гамільтона - Остроградського, згідно якого [136, 223]

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - T) - \delta A] dt = 0, \quad (2.20)$$

де Π – потенціальна енергія системи з врахуванням зовнішнього середовища, T – кінетична енергія; A – робота зовнішніх сил.

Вираз для потенціальної енергії має вигляд

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^I \Pi_i + \sum_{j=1}^J \Pi_j + \Pi_{found},$$

де Π_0 - потенціальна енергія обшивки, Π_i - потенціальна енергія i -го ребра, Π_j - потенціальна енергія j -го ребра, Π_i - потенціальна енергія i -го ребра, Π_{found} - потенціальна енергія пружної основи (модель Пастернака).

Вирази для $\delta\Pi$ та δT мають наступний вигляд

$$\delta\Pi_0 = \iint_S \int_z [\sigma_{11}^z \delta\varepsilon_{11}^z + \sigma_{22}^z \delta\varepsilon_{22}^z + \sigma_{12}^z \delta\varepsilon_{12}^z + \sigma_{13}^z \delta\varepsilon_{13}^z + \sigma_{23}^z \delta\varepsilon_{23}^z] dS, \quad (2.21)$$

$$\delta\Pi_i = \int_{\alpha_1} \sum_{i=1}^I \int_{F_i} [\sigma_{11}^{yz} \delta\varepsilon_{11}^{yz} + \sigma_{12}^{yz} \delta\varepsilon_{12}^{yz} + \sigma_{13}^{yz} \delta\varepsilon_{13}^{yz}] dF_i d\alpha_1,$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_j &= \int \sum_{\alpha_2, j=1}^J \int_{F_j} \left[\sigma_{22}^{xz} \delta\varepsilon_{22}^{xz} + \sigma_{21}^{xz} \delta\varepsilon_{21}^{xz} + \sigma_{23}^{xz} \delta\varepsilon_{23}^{xz} \right] dF_j d\alpha_2, \\
\delta\Pi_{found} &= \iint_S \left[C_1 u_3 \delta u_3 + C_2 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \delta \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) + C_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \delta \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \right] dS, \\
\delta T &= - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \sum_z \rho \int_z \left(\frac{\partial^2 U_1^z}{\partial t^2} \delta U_1^z + \frac{\partial^2 U_2^z}{\partial t^2} \delta U_2^z + \frac{\partial^2 U_3^z}{\partial t^2} \delta U_3^z \right) dz dS + \right. \\
&\quad + \int \sum_{\alpha_1, i=1}^I \rho_i \int_{F_i} \left(\frac{\partial^2 U_{1i}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{1i}^{yz} + \frac{\partial^2 U_{2i}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{2i}^{yz} + \frac{\partial^2 U_{3i}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{3i}^{yz} \right) dF_i d\alpha_1 + \\
&\quad \left. + \int \sum_{\alpha_2, j=1}^J \rho_j \int_{F_j} \left(\frac{\partial^2 U_{1j}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{1j}^{yz} + \frac{\partial^2 U_{2j}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{2j}^{yz} + \frac{\partial^2 U_{3j}^{yz}}{\partial t^2} \delta U_{3j}^{yz} \right) dF_j d\alpha_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Співвідношення (2.20) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \iint_S \{ T_{11} \delta\varepsilon_{11} + T_{22} \delta\varepsilon_{22} + T_{12} \delta\varepsilon_{12} + T_{13} \delta\varepsilon_{13} + T_{23} \delta\varepsilon_{23} + M_{11} \delta\kappa_{11} + \\
&\quad + M_{22} \delta\kappa_{22} + M_{12} \delta\kappa_{12} + \\
&\quad + C_1 u_3 \delta u_3 + C_2 \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \delta \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) + C_2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \delta \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) - \\
&\quad - \left[\left(I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta U_1 + \left(I_1 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta U_2 + I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \delta U_3 + \right. \\
&\quad + \left(I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1 + \left(I_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_2 - \\
&\quad - (P_1 \delta U_1 + P_2 \delta U_2 + P_3 \delta U_3 + m_1 \delta \varphi_1 + m_2 \delta \varphi_2) + \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^I \{ T_{11i} \delta\varepsilon_{11i} + T_{12i} \delta\varepsilon_{12i} + T_{13i} \delta\varepsilon_{13i} + M_{11i} \delta\kappa_{11i} + M_{12i} \delta\kappa_{12i} - \right.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \left(I_{1i} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta U_1 + \left(I_{1i} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta U_2 + \right. \\
& + I_{1i} \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \delta U_3 + \left[I_{2i} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + (\pm h_{ci} I_{2i} + I_{3i}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_1 + \\
& + \left. \left[I_{2i} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + (\pm h_{ci} I_{2i} + I_{3i}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_2 \right\} \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \\
& + \sum_{j=1}^J \{ T_{22j} \delta \varepsilon_{22j} + T_{21j} \delta \varepsilon_{21j} + T_{23j} \delta \varepsilon_{23j} + M_{22j} \delta \kappa_{22j} + M_{21j} \delta \kappa_{21j} - \\
& - \left\{ \left(I_{1j} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \delta U_1 + \left(I_{1j} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) \delta U_2 + \right. \\
& + I_{1j} \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \delta U_3 + \left[I_{2j} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + (\pm h_{cj} I_{2j} + I_{3j}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_1 + \\
& + \left. \left[I_{2j} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + (\pm h_{cj} I_{2j} + I_{3j}) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] \delta \varphi_2 \right\} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \} dS dt = 0.
\end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в функціоналі (2.22) отримаємо наступні три групи рівнянь [136, 223].

Рівняння коливань власно ортотропної оболонки в гладкій області (області без особливостей)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} + \right. \\
& + \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (S + k_1 H) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} (S + k_2 H) \right] + \\
& + k_1 \bar{T}_{13} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 T_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{11} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (S + k_2 H) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (S + k_1 H) \right] + \\
& + k_2 \bar{T}_{23} + P_2 = I_1 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_2 \bar{T}_{23}) \right] + \\
& + \frac{1}{A_1 A_2} \left[C_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) + C_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \\
& - C_1 u_3 - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 H) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] - T_{13} = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_1 M_{22}) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 H) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] - T_{23} = I_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};
\end{aligned}$$

де

$$S = T_{12} - k_2 M_{21}, \quad H = M_{12} = M_{21}.$$

У випадку лінійних рівнянь покладається

$$\bar{T}_{13} = T_{13}, \quad \bar{T}_{23} = T_{23}.$$

Рівняння коливань i -го дискретного поздовжнього ребра, направленого вздовж осі α_1 мають вигляд

$$[\tilde{S}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11i}}{\partial \alpha_1} + k_1 \bar{T}_{13i} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}, \quad (2.24)$$

$$[T_{22}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial \alpha_1} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2},$$

$$[\bar{T}_{23}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial \alpha_1} - T_{11i} k_{1i} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2},$$

$$[H]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11i}}{\partial \alpha_1} - T_{13i} = \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2},$$

$$[M_{22}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12i}}{\partial \alpha_1} = \rho_i I_{\partial i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2};$$

Рівняння коливань j -го дискретного ребра, направленого вздовж осі α_2

$$[T_{11}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial \alpha_2} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad (2.25)$$

$$[\tilde{S}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22j}}{\partial \alpha_2} + k_{2j} \bar{T}_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2},$$

$$[\bar{T}_{13j}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{T}_{13j}}{\partial \alpha_2} - k_{2j} T_{22j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2},$$

$$[M_{11}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{21j}}{\partial \alpha_2} = \rho_j I_{\partial j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

$$[H]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22j}}{\partial \alpha_2} - T_{23} = \rho_j I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

Для випадку лінійних рівнянь (2.24) – (2.25) покладається $\bar{T}_{12i} = T_{12i}$, $\bar{T}_{13i} = T_{13i}$, $\bar{T}_{21j} = T_{21j}$, $\bar{T}_{23j} = T_{23j}$. В співвідношеннях (2.24), (2.25) позначення

типу $[S]_i$ відповідають сумарній дії величин зусиль – моментів обшивки на i -й (або j -й) дискретний підкріплюючий елемент.

Вирази для зусиль – моментів обшивки та підкріплюючих елементів визначаються згідно формул

$$T_{11} = \int_z \sigma_{11} dz, \quad T_{22} = \int_z \sigma_{22} dz, \quad (2.26)$$

$$T_{13} = \int_z \sigma_{13} dz, \quad \int T_{12} = \int_z \sigma_{12} dz,$$

$$M_{11} = \int_z z \sigma_{11} dz, \quad M_{22} = \int_z z \sigma_{22} dz,$$

$$M_{12} = \int_z z \sigma_{12} dz;$$

$$T_{11i} = \int_{F_i} \sigma_{11i} dF_i, \quad T_{12i} = \int_{F_i} \sigma_{12i} dF_i, \quad (2.27)$$

$$T_{13i} = \int_{F_i} \sigma_{13i} dF_i, \quad M_{11i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{11i} dF_i, \quad M_{12i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{12i} dF_i;$$

$$T_{22j} = \int_{F_j} \sigma_{22j} dF_j, \quad T_{21j} = \int_{F_j} \sigma_{21j} dF_j, \quad (2.28)$$

$$T_{23j} = \int_{F_j} \sigma_{23j} dF_j, \quad M_{21j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{21j} dF_j, \quad M_{22j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{22j} dF_j.$$

В співвідношеннях (2.27), (2.28) величини $F_i, I_{1i}, I_{kpi}, F_j, I_{2j}, I_{kpj}$ відповідають геометричним характеристикам відповідно повздовжніх і поперечних ребер.

Рівняння коливань (2.23) – (2.25) доповнюються відповідними природними граничними та початковими умовами виду

$$u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0.$$

Рівняння осесиметричних коливань підкріплених оболонок. У випадку осесиметричних коливань оболонкових структур з врахуванням дискретності розміщення ребер підкріплень параметри напружено-деформованого стану структури залежать тільки від координати α_1 . При цьому, рівняння коливань (2.23) – (2.25) значно спрощуються і мають наступний вигляд:

– в гладкій області

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} \right] + \quad (2.29) \\ & + k_1 \bar{T}_{13} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}) \right] + \frac{C_2}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) - \\ & - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} - C_1 u_3 + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \\ & \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] - \\ & - T_{13} = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

– рівняння коливань j -го дискретного ребра

$$\begin{aligned} [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad (2.30) \\ [\bar{T}_{13j}]_j - k_{2j} T_{22j} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \quad [M_{11}]_j = \rho_j I_{\partial \partial j} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Осесиметричні рівняння коливань оболонкової неоднорідної структури (2.29), (2.30) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами. У випадку вільного краю при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничні умови мають вигляд:

$$T_{11} = \bar{T}_{13} = M_{11} = 0.$$

У випадку жорстко - закріпленого краю при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничні умови мають вигляд: $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$.

Початкові умови записуються у вигляді

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

2.1.3. Рівняння коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок з врахуванням дії зовнішнього середовища

В даному підрозділі розглядається постановка задачі про вимушені коливання циліндричних дискретно підкріплених оболонок на пружній основі при імпульсному навантаженні. Рівняння коливань дискретно підкріпленої циліндричної оболонки на пружній основі представлені як частковий випадок дискретно підкріплених оболонок обертання. Покладається $\alpha_1 = x$, $y = \alpha_2 A_2$, $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$. Вихідні рівняння являють собою систему нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних по змінним x , y , t при наявності просторових розривів по координатам x та y . Просторовими розривами є лінії проектування центрів мас поперечного перерізу дискретних ребер на середину поверхню циліндричної оболонки i – го ребра по координаті x та j – го ребра по координаті y . Виходячи з цього, вихідну систему рівнянь представимо наступним чином:

✓ рівняння в гладкій області

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}}{R} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$C_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \theta_1 + S \theta_2, \quad \bar{T}_{23} = T_{23} + T_{22} \theta_2 + S \theta_1;$$

✓ рівняння на i -й лінії розриву вздовж осі ОХ

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [\bar{T}_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right],$$

$$\bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i} \theta_{1i}, \quad \bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i} \theta_{2i};$$

✓ рівняння на j -й лінії розриву вздовж осі ОУ

$$\frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + [T_{11}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right],$$

$$\bar{T}_{23j} = T_{23j} + T_{22j} \theta_{2j}, \quad \bar{T}_{21j} = T_{21j} + T_{22j} \theta_{1j}.$$

В рівняннях (2.32), (2.33) величини в квадратних дужках є зусиллями – моментами гладкої оболонки, що діють на відповідний дискретний i – й (або j –й) підкріплюючий елемент, розташований вздовж осі ОХ (відповідно осі ОУ) – $[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-$, $[\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-$.

Зв'язок між зусиллями – моментами та відповідними величинами деформацій має вигляд

$$T_{11} = B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}), \quad (2.34)$$

$$S = B_{12}\varepsilon_{12}, \quad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23},$$

$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}), \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11}), \quad H = D_{12}\kappa_{12},$$

де

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$B_{12} = G_{12} h, \quad B_{13} = G_{13} h k^2, \quad B_{23} = G_{23} h k^2,$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad B_{12} = G_{12} \frac{h^3}{12},$$

Співвідношення, які пов'язують величини деформацій з компонентами узагальненого вектора переміщень мають вигляд

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_1^2, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \frac{u_3}{R}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \theta_1\theta_2, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - \frac{u_2}{R}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\
\kappa_{22} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \theta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \theta_2 &= \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Співвідношення між зусиллями – моментами та відповідними деформаціями i -го дискретного ребра розташованого вздовж осі ОХ мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_{11i} &= E_i F_i \varepsilon_{11i}, & T_{12i} &= G_i F_i \varepsilon_{12i}, \\
T_{13i} &= G_i F_i k_i^2 \varepsilon_{13i}, & M_{11i} &= E_i I_{1i} \kappa_{11i}, & M_{12i} &= G_i I_{kri} \kappa_{12i},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11i} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_{1i}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2i}^2, \\
\varepsilon_{12i} &= \theta_{2i}, & \varepsilon_{13i} &= \varphi_1 + \theta_{1i}, & \theta_{2i} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\
\theta_{1i} &= \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \kappa_{11i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \kappa_{12i} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

k^2, k_i^2 – коефіцієнти поперечного зсуву в теорії оболонок та стержнів Тимошенка.

Відповідні співвідношення для зусиль – моментів та відповідних деформацій у випадку j -го дискретного ребра розташованого вздовж осі ОУ записуються згідно [136, 223].

Рівняння коливань (2.31) – (2.37) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

2.1.4. Постановка задач та рівняння коливань для адаптера (тришарові оболонки з врахуванням дискретності ребристого наповнювача)

Розділення ступенів ракет носіїв і космічного обладнання відбувається за допомогою пірозамків, розташованих у відповідних оболонках – адаптерах, які підлягають локальним імпульсним навантаженням великої інтенсивності. Динамічна поведінка адаптера моделюється динамічною поведінкою тришарової циліндричної оболонки з врахуванням дискретності ребристого наповнювача.

Тришарова оболонка з дискретним внутрішнім наповнювачем являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої (індекс 1) і зовнішньої (індекс 2) обшивок і набору дискретних ребер, що жорстко з'єднані з вказаними обшивками. Зокрема, це може бути оболонка з дискретним набором шпангоутів, або оболонка з повздовжнім дискретним набором, або тришарова оболонка з повздовжньо – поперечним дискретним ребристим наповнювачем, що схематично зображено на рис. 2.1.

Приймається, що напружено – деформований стан обшивок та ребер може бути визначений в рамках геометрично нелінійної теорії оболонок та стержнів теорії Тимошенка – співвідношення (2.31) - (2.37).

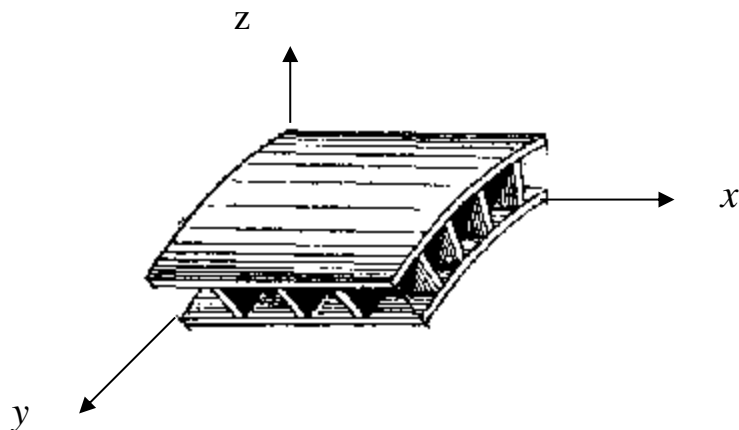


Рис. 2.1. Схематичне зображення елемента тришарової оболонки з ребристим повздовжньо – поперечним заповнювачем

Деформований стан внутрішньої і зовнішньої обшивок може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$. Деформований стан ребра, направлено вздовж осі x , будемо визначати узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. Відповідно, ребра, направлено вздовж осі y – вектором $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$.

Для виводу рівнянь коливань тришарової пружної структури з дискретним наповнювачем використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона–Остроградського, згідно якого

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (2.38)$$

де K – повна кінетична енергія пружної системи, Π – повна потенціальна енергія пружної системи, A – робота зовнішніх сил, t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу.

Вирази для повної потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{i=1}^I \Pi_i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi_j, \quad (2.39)$$

$$\delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{i=1}^I K_i + \delta \sum_{j=1}^J K_j, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi^i = \int_S (T_{11}^i \delta E_{11}^i + T_{22}^i \delta E_{22}^i + T_{13}^i \delta E_{13}^i + T_{12}^i \delta E_{12}^i + \\ + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i + H^i \delta \kappa_{12}^i) dS, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i = \int_{L_i} (T_{11i} \delta \varepsilon_{11i} + T_{12i} \delta \varepsilon_{12i} + T_{13i} \delta \varepsilon_{13i} + \\ + M_{11i} \delta \kappa_{11i} + M_{12i} \delta \kappa_{12i}) dL_i, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\delta\Pi_j = \int_{L_i} (T_{22j}\delta\varepsilon_{22j} + T_{21j}\delta\varepsilon_{21j} + T_{23j}\delta\varepsilon_{23j} +$$
 (2.43)

$$+ M_{21j}\delta\kappa_{21j} + M_{22j}\delta\kappa_{22j})dL_j,$$

$$\delta K^i = \int_S \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2} \delta u_2^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \right.$$
 (2.44)

$$\left. + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i + \frac{\partial^2 \varphi_2^i}{\partial t^2} \delta \varphi_2^i \right) \right] dS,$$

$$\delta K_i = \int_{L_i} \left[\rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2} \delta u_{1i} + \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2} \delta u_{2i} + \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2} \delta u_{3i} \right) + \right.$$
 (2.45)

$$\left. + \rho_i \left(I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2} \delta \varphi_{1i} + I_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2} \delta \varphi_{2i} \right) \right] dL_i,$$

$$\delta K_j = \int_{L_j} \left[\rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \delta u_{1j} + \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2} \delta u_{2j} + \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \delta u_{3j} \right) + \right.$$
 (2.46)

$$\left. + \rho_j \left(I_{1j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \delta \varphi_{1j} + I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} \delta \varphi_{2j} \right) \right] dL_j.$$

У співвідношення (2.41)–(2.43) введені наступні інтегральні характеристики для обшивок (індекс 1 відповідає внутрішній, індекс 2 – зовнішній) і внутрішнім дискретним ребрам

$$T_{11}^i = \int_{z_i} \sigma_{11}^i dz_i, \quad T_{22}^i = \int_{z_i} \sigma_{22}^i dz_i, \quad (2.47)$$

$$T_{13}^i = \int_{z_i} \sigma_{13}^i dz_i, \quad T_{12}^i = \int_{z_i} \sigma_{12}^i dz_i,$$

$$M_{11}^i = \int_{z_i} z_i \sigma_{11}^i dz_i, \quad M_{22}^i = \int_{z_i} z_i \sigma_{22}^i dz_i,$$

$$H_{12}^i = \int_{z_i} z_i \sigma_{12}^i dz_i;$$

$$T_{11i} = \int_{F_i} \sigma_{11i} dF_i, \quad T_{12i} = \int_{F_i} \sigma_{12i} dF_i, \quad (2.48)$$

$$T_{13i} = \int_{F_i} \sigma_{13i} dF_i, \quad M_{11i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{11i} dF_i,$$

$$M_{12i} = \int_{F_i} z_i \sigma_{12i} dF_i;$$

$$T_{22j} = \int_{F_j} \sigma_{22j} dF_j, \quad T_{21j} = \int_{F_j} \sigma_{21j} dF_j, \quad (2.49)$$

$$T_{23j} = \int_{F_j} \sigma_{23j} dF_j, \quad M_{21j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{21j} dF_j,$$

$$M_{22j} = \int_{F_j} z_j \sigma_{22j} dF_j.$$

В співвідношеннях (2.45), (2.46) величини F_i, I_{1i}, I_{kri} , F_j, I_{2j}, I_{krj} відповідають геометричним характеристикам відповідно повздовжніх і поперечних ребер.

При виводі рівнянь коливань тришарових оболонок з дискретним ребристим наповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти узагальнених векторів обшивки

$$\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T, \quad \bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$$

та компоненти узагальнених векторів переміщень центрів ваги поперечного зрізу відповідно повздовжнього дискретного наповнювача $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ і поперечного дискретного наповнювача $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (2.38), з врахуванням співвідношень (2.39)–(2.49), отримаємо чотири системи рівнянь:

– рівняння коливань в гладкій області внутрішньої і зовнішньої циліндричних оболонок (відповідно індекси 1 і 2)

$$\frac{\partial T_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial S^k}{\partial y} + P_1^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial S^k}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}^k}{R_k} + P_2^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13}^k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}^k}{\partial y} - \frac{T_{22}^k}{R_k} + P_3^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial H^k}{\partial y} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial y} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{13}^k = T_{13}^k + T_{11}^k \theta_1^k + S^k \theta_2^k,$$

$$\bar{T}_{23}^k = T_{23}^k + T_{22}^k \theta_2^k + S^k \theta_1^k.$$

Рівняння коливань для i -го дискретного заповнювача, що розташований вздовж осі Ox , в даній циліндричній структурі мають наступний вигляд

$$[S]_i + \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}, \quad (2.51)$$

$$[T_{22}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2},$$

$$[\bar{T}_{23}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2},$$

$$[H]_i + \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} = \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2},$$

$$[M_{22}]_i + \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} = \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i}\theta_{2i},$$

$$\bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i}\theta_{1i}.$$

Для j -го дискретного елемента, який розміщений вздовж осі ОУ, рівняння коливань мають вигляд

$$[T_{11}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad (2.52)$$

$$[S]_j + \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + k_{2j} \bar{T}_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2},$$

$$[T_{13}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - k_{2j} T_{22j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2},$$

$$[M_{11}]_j + \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

$$[H]_j + \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

Зв'язок між величинами зусиль – моментів і відповідних величин деформацій для обшивок визначається згідно формул

$$T_{11}^k = B_{11}^k (\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k), \quad T_{22}^k = B_{22}^k (\varepsilon_{22}^k + \nu_{12}^k \varepsilon_{11}^k), \quad (2.53)$$

$$S^k = B_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad T_{13}^k = B_{13}^k \varepsilon_{13}^k, \quad T_{23}^k = B_{23}^k \varepsilon_{23}^k,$$

$$M_{11}^k = D_{11}^k (\kappa_{11}^k + \nu_{21}^k \kappa_{22}^k), \quad M_{22}^k = D_{22}^k (\kappa_{22}^k + \nu_{12}^k \kappa_{11}^k),$$

$$S^k = B_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad H^k = D_{12}^k \kappa_{12}^k, \quad k = 1, 2;$$

де

$$B_{11}^k = \frac{E_1^k h_k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad B_{22}^k = \frac{E_2^k h_k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k},$$

$$B_{12}^k = G_{12}^k h_k, \quad B_{13}^k = K_T^2 G_{13}^k h_k, \quad B_{23}^k = K_T^2 G_{23}^k h_k,$$

$$D_{11}^k = \frac{E_1^k h_k^3}{12(1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k)}, \quad D_{22}^k = \frac{E_2^k h_k^3}{12(1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k)}, \quad D_{12}^k = G_{12}^k \frac{h_k^3}{12},$$

де K_T^2 – інтегральний коефіцієнт зсуву по товщині в теорії пластин і оболонок типу Тимошенка.

Величини деформацій пов'язані з величинами компонент узагальненого вектора переміщень обшивок формулами

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_1^k]^2, \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_{22}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial y} + \frac{u_3^k}{R_k} + \frac{1}{2}[\theta_2^k]^2,$$

$$\varepsilon_{12}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial x} + \frac{\partial u_1^k}{\partial y} + \theta_1^k \theta_2^k, \quad \varepsilon_{13}^k = \varphi_1^k + \theta_1^k,$$

$$\varepsilon_{23}^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial y} + \varphi_2^k - \frac{u_2^k}{R_k}, \quad \kappa_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x},$$

$$\kappa_{22}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial y}, \quad \kappa_{12}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial y},$$

$$\theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x}, \quad \theta_2^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial y} - \frac{u_1^k}{R_k}.$$

Для величин зусиль – моментів i -го дискретного елемента мають місце наступні формули

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}, \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}, \quad (2.55)$$

$$T_{13i} = K_{Ti}^2 G_i F_i \varepsilon_{13i},$$

$$M_{11i} = E_i I_{1i} \kappa_{11i}, \quad M_{12i} = G_i I_{12i} \kappa_{12i},$$

де

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_{1i}]^2 + \frac{1}{2}[\theta_{2i}]^2, \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_{12i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_{1i} + \theta_{1i},$$

$$\theta_{2i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial x}, \quad \theta_{1i} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial x},$$

$$\kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x}, \quad \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial x},$$

де K_{Ti}^2 – коефіцієнт зсуву в теорії стержнів Тимошенка.

Для величин зусиль – моментів j -го дискретного елемента, який направлений вздовж осі ОУ, мають місце наступні

$$T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j}, \quad T_{21j} = G_j F_j \varepsilon_{21j}, \quad (2.57)$$

$$T_{23j} = K_{Tj}^2 G_j F_j \varepsilon_{23j},$$

$$M_{22j} = E_j I_{2j} \kappa_{22j}, \quad M_{21j} = G_j I_{krj} \kappa_{21j},$$

де

$$\varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_{2j}}{\partial y} + \frac{1}{2}[\theta_{1j}]^2 + \frac{1}{2}[\theta_{2j}]^2, \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_{21j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}, \quad \varepsilon_{23j} = \varphi_{2j} + \theta_{2j},$$

$$\theta_{1j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}, \quad \theta_{2j} = \frac{\partial u_{3j}}{\partial y} - \frac{u_{2j}}{R_j},$$

$$\kappa_{22j} = \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y}, \quad \kappa_{21j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y},$$

K_{Tj}^2 – коефіцієнт зсуву в теорії стержнів Тимошенка.

В рівняннях (2.51), (2.52) величини в квадратних дужках відповідають зусиллям – моментам, що діють на відповідний дискретний i -й (або j -й) підкріплюючий елемент, який розташовано вздовж осі ОХ (відповідно осі ОУ)

$$[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-, \quad [\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-.$$

Рівняння коливань тришарової оболонки з дискретним повздовжньо – поперечним наповнювачем (2.50) – (2.58) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

2.2. Постановка зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище

2.2.1. Модель ґрунтового середовища

Вивчення хвильових процесів в рідких багатокомпонентних середовищах проводиться на основі двох підходів. Згідно першого підходу покладається, що простір заповнено декількома суцільними середовищами, кожне з яких відповідає компоненту середовища. При хвильових процесах відбувається взаємне проникнення і взаємозв'язаний рух цих середовищ, кожне з яких в загальному має свої параметри – швидкість частинок, тиск, температуру і т.д. Вивчення руху середовища на основі цього методу зводиться до вивчення умов сумісного переміщення компонент і величин, які характеризують їх взаємодію.

Розвиток цього напрямку було покладено роботами Х.А. Рахматуліна. Він запропонував замкнуту систему рівнянь руху багатокомпонентного середовища, яка дозволяє враховувати взаємне проникнення компонент середовища. Система включає рівняння збереження маси та імпульсу для кожної компоненти. Умова сумісного деформування передбачає рівність тиску компонент. Рівняння стиску компонентів приймалось в баротропному вигляді.

Наряду з першим підходом набув розвиток другий підхід, згідно якого багатокомпонентне середовище розглядається як єдине суцільне середовище з одним рівнянням стану, яке враховує властивості і взаємодію компонент

середовища. Вид цього рівняння може бути різним в залежності від властивостей середовища і степені врахування цих властивостей. Розвиток другого підходу було започатковано роботами В.М. Ляхова [81]. В роботах було прийнято, що стиск компонент в середовищі відбувається миттєво при дії навантаження по тих же рівнянням, що і в вільному стані. Матеріал рідких та твердих частинок стискується по нелінійному рівнянню Тета, газ – по адіабаті Пуассона.

Досліди [81] показують, що модель В.М. Ляхова правильно відображує деякі закономірності деформування рідких багатокомпонентних середовищ. Підтверджується, що при незначному збільшенні вмісту газового компоненту, від нуля до декількох процентів загального об'єму середовища, інтенсивність згасання нестационарних (вибухових) хвиль з віддалю зростає в десятки та сотні разів, як впливає з моделі. При цьому в десятки разів зменшується швидкість розповсюдження максимумів збурення.

Розглядаємо положення останньої моделі. Грунт розглядається як трикомпонентне середовище, що складається з повітряної, рідкої та твердої компоненти. При дії динамічного навантаження в мікрооб'ємі ґрунта кожний компонент відчуває однаковий тиск P і рухається з швидкістю U , а деформування кожної компоненти під дією тиску P відбувається по тим самим законам, що і у вільному стані. Для рівняння стану такого трикомпонентного середовища (водонасиченого ґрунту) вводяться такі позначення: α_i - вміст по об'єму компонентів; ρ_{i0} - густина; V_{i0} - їх питомий об'єм; c_{i0} - швидкість звуку в компонентах при атмосферному тиску P_0 ; i – номер компоненти (1 – повітря, 2 – рідина, 3 – тверді частинки). При тиску $P = P_0$ густина середовища ρ_0 та питомий об'єм V_0 визначається по формулам

$$\rho_0 = \frac{1}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1. \quad (2.59)$$

При тиску P параметри компонент позначимо V_i , ρ_i , c_i , а середовища в цілому V і ρ . У вільному стані газоподібний компонент стискується по адіабаті Пуассона [81]

$$P = P_0 \left(\frac{V_{10}}{V_1} \right)^{\gamma_1} = P_0 + \rho_{10} \frac{c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left(\frac{V_1}{V_{10}} \right)^{-\gamma_1} - 1 \right],$$

а рідка та тверда компоненти стискуються згідно рівняння Тета [81]

$$P = P_0 + \rho_{i0} \frac{c_{i0}^2}{\gamma_i} \left[\left(\frac{V_i}{V_{i0}} \right)^{-\gamma_i} - 1 \right], \quad i = 2, 3, \text{де } \gamma_i - \text{показник ізентропи } i \text{ -ї}$$

компоненти.

Збільшення густини середовища в результаті стиску кожної компоненти визначається виразом

$$\Delta \rho_i = \alpha_i \left(1 - \frac{V_i}{V_{i0}} \right) \rho.$$

Густина середовища при тиску P складається з початкової густини ρ_0 та членів, які обумовлені стиском кожної із компонент

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(1 - \frac{V_i}{V_{i0}} \right) \rho,$$

$$\rho = \rho_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \rho - \left(\alpha_1 \frac{V_1}{V_{10}} + \alpha_2 \frac{V_2}{V_{20}} + \alpha_3 \frac{V_3}{V_{30}} \right) \rho.$$

Звідси маємо

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}}.$$

Якщо в останній вираз підставити значення питомого об'єму компонентів при тиску P , то отримаємо рівняння стиску нелінійного пружного багатокомпонентного середовища у вигляді

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}, \quad (2.60)$$

де $\chi_i = \frac{1}{\gamma_i}$.

Перевагою цієї моделі є її простота, можливість представлення залежності швидкості звуку, швидкості хвилі від тиску у вигляді простих співвідношень.

Швидкість звуку при тиску D , визначаються із умови $c = \left(\frac{dP}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}$ і має

вигляд

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i - 1} \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.61)$$

2.2.2. Постановка одновимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтового середовища

Взаємодія циліндричних оболонок з ґрунтовим середовищем при нестационарних навантаженнях на конструкції. Розглядається процес деформування нескінченно довгої тонкої циліндричної оболонки в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні на оболонку.

Рух ґрунтового середовища для випадку розповсюдження циліндричних хвиль описується системою рівнянь в ейлеревих координатах

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U^2 + P)] - \frac{1}{r} P = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U)] = 0.$$

В рівняннях (2.62) - r - просторова координата, t - часова координата, U - швидкість, ρ - густина, P - тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатоконпонентного середовища (див. підрозділ 2.2.1)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{\frac{1}{\gamma_i}},$$

де позначення введено згідно попереднього параграфа.

Рівняння руху тонкої циліндричної оболонки радіусом R і товщиною h має вигляд

$$\rho_{i\dot{a}} h \ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1-\gamma^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t), \quad (2.63)$$

де $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню поверхню циліндричної оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунта на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; $\rho_{i\dot{a}}$, E , ν - фізико-механічні параметри матеріалу оболонки.

Зв'язаність задачі взаємодії циліндрична оболонка - ґрунтове середовище забезпечується завданням умов не проникнення на деформованій поверхні оболонки контакту оболонка - ґрунтове середовище

$$\dot{u}_3 = U_r, \quad (2.64)$$

де U_r - швидкість границі ґрунтового середовища на контакті.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (2.62) - (2.64) та умови відсутності збурення переміщення на нескінченності.

Взаємодія сферичних оболонок з ґрунтовим середовищем при нестационарних навантаженнях на конструкції. Розглядається процес деформування замкненої тонкої сферичної оболонки в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні на оболонку.

Для випадку сферичної оболонки, яка знаходиться в нескінченному ґрунтовому середовищі, розповсюдження сферичних хвиль в середовищі описується наступною системою рівнянь в ейлерових змінних

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U^2 + P)] - \frac{2}{r} P = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U)] = 0.$$

В рівняннях (2.65) - r - просторова координата, t - часова координата, U - швидкість, ρ - густина, P - тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатокомпонентного середовища (див. підрозділ 2.2.1)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{\frac{1}{\gamma_i}},$$

де позначення введено згідно попереднього параграфа.

Рівняння руху тонкої сферичної оболонки радіусом R і товщиною h мають вигляд

$$\rho_{i\dot{a}} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(t) - P_r(t), \quad (2.66)$$

$$T_{11} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2}, \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2},$$

де $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню поверхню циліндричної оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунта на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; $\rho_{i\dot{a}}$, E , ν - фізико-механічні параметри матеріалу оболонки.

Зв'язаність задачі взаємодії оболонка - ґрунтове середовище забезпечується завданням умов непроникнення на деформованій поверхні оболонки контакту оболонка - ґрунтове середовище

$$\dot{u}_3 = U_r, \quad (2.67)$$

де U_r - швидкість границі ґрунтового середовища на контакту.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (2.65) - (2.67) та умови відсутності збурення переміщення на нескінченності.

Постановка зв'язаної задачі неоднорідна циліндрична оболонка – ґрунтове середовище. Рівняння коливань неоднорідної циліндричної оболонки. Динамічні рівняння теорії підкріплених циліндричних оболонок в рамках моделі типу Тимошенка. Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки описується рівняннями осесиметричних коливань теорії оболонок типу Тимошенка в рамках конструктивно – ортотропної моделі. Розглядається циліндрична оболонка, підкріплена ребрами, напрямком яких співпадає з лініями головних кривизн серединної поверхні. Для безпосередньо гладкої оболонки приймається наступний закон розподілення переміщень по товщині

$$u_1^z(x, z) = u_1(x) + z\varphi_1(x), \quad (2.68)$$

$$u_3^z(x, z) = u_3(x).$$

Напружено – деформований стан ребра, направлено вздовж осі OX , можна описати за допомогою вектора переміщень центра ваги поперечного перерізу $\bar{U}_{pi} = (u_{1pi}, u_{3pi}, \varphi_{1pi})$. Відповідно, для ребра направлено вздовж осі OY , маємо $\bar{U}_{pj} = (u_{1pj}, u_{3pj}, \varphi_{1pj})$.

Виходячи із умов контакту жорсткого з'єднання оболонка ребро [136, 223], з використанням варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, отримаємо наступні рівняння коливань підкріпленої циліндричної оболонки в рамках конструктивно – ортотропної моделі

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) &= \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
&+ \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
T_{11} &= \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_1}{l_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm \frac{EF_1 h_{ci}}{l_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{E\nu h}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R}, \\
T_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{E\nu h}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R}, \quad T_{13} = \left(Gh + \frac{G_1 F_1}{l_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1 \right), \\
M_{11} &= \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_1 I_1}{l_1} \right), \\
I_1 &= \frac{a_1 h_1^3}{12}, \quad I_2 = \frac{a_2 h_2^3}{12}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

В рівняннях (2.69), (2.70) введено наступні позначення: ρ, E, G, ν – фізико – механічні параметри власно гладкої оболонки; ρ_1, E_1, G – фізико – механічні параметри повздовжнього набору підкріплень; ρ_2, E_2, G – відповідні фізико – механічні параметри поперечного набору підкріплень; h - товщина оболонки; l_1, l_2 - відстань між ребрами для повздовжнього та поперечного набору; a_1, h_1, F_1 – геометричні параметри ребер вздовж осі OX ; a_2, h_2, F_2 – геометричні параметри ребер вздовж осі OY ; $h_{ci} = 0,5(h + h_1)$, $h_{cj} = 0,5(h + h_2)$. Знаки \pm відповідають місцям розташування підкріплень – (+) – зовнішньому набору підкріплень, знак (–) – внутрішньому набору підкріплень; $P_3(x, t)$ - розподілене навантаження.

Рівняння (2.48), (2.49) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

Постановка зв'язаної задачі неоднорідна оболонка – ґрунтове середовище. Розглядається процес деформування нескінченно довгої підкріпленої циліндричної оболонки в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні. Рух ґрунтового середовища описується системою рівнянь в ейлерових змінних [223]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\rho V^2 + P) - \frac{1}{r} P \right] = 0, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho V)] = 0.$$

В рівняннях (2.71) r - просторова координата; t - часова координата; V - швидкість; ρ - густина; P - тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймаються згідно моделі нелінійного рідкого багатоконпонентного середовища [81]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}, \quad (2.72)$$

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1,$$

де величини з індексом 1 відносяться до повітря, 2 – до води та 3 – до твердої компоненти; α_i - вміст компонентів по об'єму; γ_i - показники ізентроп в газоподібній, рідкій та твердій компонентах середовища; c_{i0} - швидкість звуку у відповідних компонентах середовища при атмосферному тиску P_0 ; ρ_{i0} - густина компонентів середовища.

Швидкість звуку при тиску P_1 визначається виходячи із умови $c = (dp/d\rho)^{1/2}$ і має вигляд

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right\}^{1/2}}. \quad (2.73)$$

Рівняння коливань підкріпленої оболонки радіуса R і товщиною h приймаються згідно (2.69), (2.70). У випадку нескінченної оболонки рівняння (2.69), (2.70) мають вигляд

$$\rho_{sh} h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h} \right) \ddot{u}_3 = - \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (2.74)$$

Як частинний випадок, отримуємо рівняння коливань конструктивно ортотропної оболонки з регулярним повздовжнім підкріпленням

$$\rho_{sh} h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} \right) \ddot{u}_3 = - \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (2.75)$$

В рівняннях (2.74), (2.75) $P_3(t)$ – навантаження на внутрішню частину оболонки; $P_r(t)$ – тиск ґрунта на оболонку; u_3 – радіальне переміщення оболонки; ρ_{sh}, E, ν – фізико - механічні параметри матеріалу оболонки і ребер для випадку ізотропного матеріалу для обшивки та ребер.

Зв'язаність задачі взаємодії забезпечується умовою непротікання на поверхні контакту оболонка – ґрунтове середовище, що деформується

$$\dot{u}_3 = V_r, \quad (2.76)$$

де V_r – швидкість границі ґрунтового середовища.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (2.74) - (2.76) та умови незбуреного руху на нескінченності.

2.2.3. Постановка двовимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтове середовище (циліндрична симетрія)

Розглянемо нескінченну підкріплену циліндричну порожнину в ґрунтовому середовищі періодичної структури. Припускаємо, що до внутрішньої поверхні підкріплюючої оболонки при $r = r_0$ прикладене розподілене імпульсне навантаження $P_0(r_0, t)$. Схематичне представлення постановки вихідної задачі представлено на рис. 2.2, де індексами 1, 2 позначені шари періодичної ґрунтової структури з різними фізико – механічними властивостями.

Припускаємо, що динамічну поведінку підкріплюючої оболонки можна описати в рамках рівнянь теорії пружних оболонок [136, 223]. Таким чином, приходимо до розгляду задачі про динамічну взаємодію циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем періодичної структури при дії внутрішнього розподіленого нестационарного навантаження. Рівняння коливань циліндричної оболонки з врахуванням впливу дії на неї ґрунтового середовища представимо згідно моделі оболонок з врахуванням гіпотез Тимошенка [136, 223]

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) - P_r(x, r_0, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.$$

В рівняннях (2.77) величини u_1, u_3, φ_1 відповідають компонентам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні циліндричної оболонки; $T_{11}, T_{22}, T_{13}, M_{11}$ - величини інтегральних по товщині зусиль – моментів циліндричної оболонки; $P_3(x, t)$ - навантаження на внутрішню поверхню циліндричної оболонки; $P_r(x, r_0, t)$ - тиск ґрунта на оболонку.

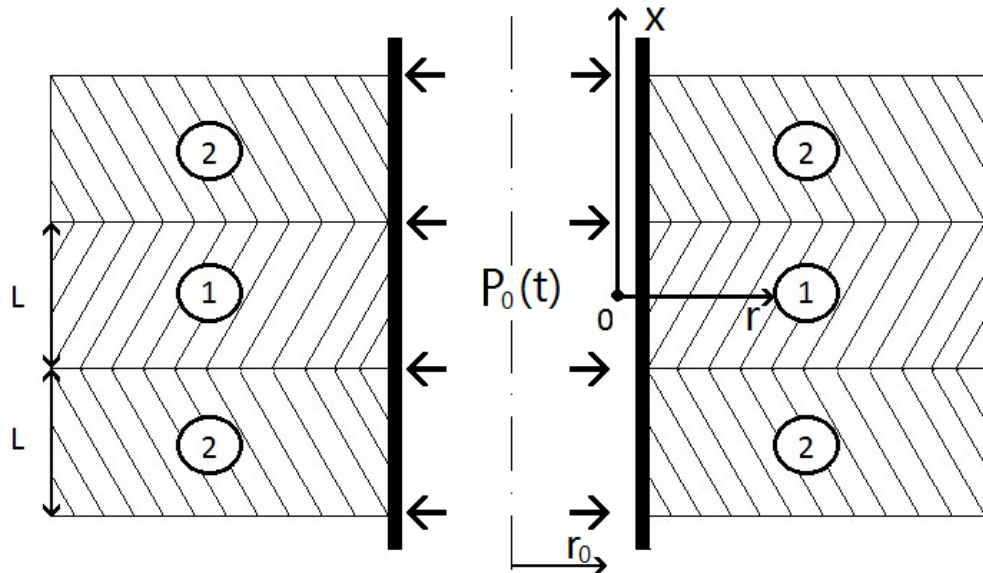


Рис. 2.2. Схематичне зображення взаємодії циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем періодичної структури

Рух середовища періодичної структури у випадку циліндричної симетрії описується системою рівнянь в ейлерових координатах [98]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u v) = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho v^2 + P)] - \frac{P}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = 0.$$

У векторному вигляді система рівнянь (2.78) приймає вигляд

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{B}) + \frac{\bar{C}_0}{r} = 0, \quad (2.79)$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \rho u^2 + P \\ \rho u v \\ \rho u \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho v \end{pmatrix}; \quad \bar{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $u(x, r)$ - швидкість переміщення частинок вздовж осі x ; $v(x, r)$ - швидкість переміщення частинок вздовж осі r ; $\rho(x, r)$ - густина відповідного шару ґрунта; $P(x, r)$ – тиск ґрунтового середовища.

Рівняння стану ґрунтового середовища кожного шару представимо згідно моделі нелінійного багатокомпонентного середовища [81]

$$\frac{\rho_0}{\rho} - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right] = 0 \quad \text{або} \quad \Phi(P, \rho) = 0. \quad (2.80)$$

Зв'язаність задачі взаємодії «оболонка – ґрунтове середовище» забезпечується умовами непротікання на деформовану поверхню оболонки контакту оболонка – ґрунтове середовище, тобто

$$\dot{u}_1 = u, \quad \dot{u}_3 = v, \quad (2.81)$$

де u, v – швидкості границі переміщення ґрунтового середовища на контакті.

На границі контакту неоднорідних ґрунтових шарів приймаємо умови симетрії кінематичних та силових величин. За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового шару приймаємо рівняння (2.77), (2.81) та умови відсутності збурень переміщень на нескінченності.

Висновки до другого розділу

В даному розділі приведена постановка динамічних задач теорії підкріплених оболонок та оболонок на пружній основі. Умовно матеріал другого розділу можна розділити на дві групи: а) постановка динамічних задач теорії підкріплених оболонок на пружній основі; б) постановка зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище.

При постановці динамічних задач теорії підкріплених оболонок приймається модель оболонок і стержнів Тимошенка. Для виводу рівнянь коливань використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Отримано рівняння коливань неоднорідної оболонкової структури (рівняння коливань дискретно підкріплених оболонок обертання) в загальному випадку на пружній основі з відповідними природними граничними та початковими умовами. Пружна основа моделюється середовищем Вінклера та Пастернака. Проведена постановка відповідних початково - крайових задач для осесиметричного та неосесиметричного випадків. Також, виходячи з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, отримані рівняння коливань тришарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер, що описують динамічні процеси в адаптері, який використовується при розділенні ступенів ракет носіїв. Покладається, що оболонка та дискретні ребра наповнювача описуються згідно геометрично нелінійної моделі оболонок та стержнів Тимошенка.

При постановці зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище спочатку розглядається модель ґрунтового середовища. Рівняння стану ґрунтового середовища приймаються згідно моделі нелінійного пружного трикомпонентного середовища, згідно В.М. Ляхова. Проведено постановку двовимірних зв'язаних задач циліндрична оболонка – ґрунтове середовище, сферична оболонка – ґрунтове середовище. Також проведено постановку зв'язаних динамічних задач циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури (двовимірний випадок, циліндрична симетрія).

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА ЧИСЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗКУ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ ТА ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩ

Системи диференціальних рівнянь, які описують напружено – деформований стан підкріплених оболонок на пружній основі при осесиметричних коливаннях (2.29), (2.30) представляють собою, в загальному вигляді, нелінійні рівняння коливань по просторовій координаті α_1 і часовій координаті t . Отримати розв'язок таких задач відомими аналітичними методами достатньо складно. В зв'язку з цим, для розв'язку початково - крайових задач теорії підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер використовуються чисельні методи з подальшою реалізацією на сучасних персональних комп'ютерах. Зокрема, в даній роботі використовується метод скінчених різниць для розв'язку поставлених задач. Побудова чисельного алгоритму базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного метода побудови різницевих схем по просторовій координаті та явній скінчено – різницевої схемі інтегрування по часовій координаті [136, 223, 241]. Однією з особливостей розв'язку задач коливань неоднорідних пружних структур з врахуванням дискретності розміщення підкріплюючих ребер є наявність розривних коефіцієнтів в рівняннях коливань. Виходячи з цього, знаходиться чисельний розв'язок в гладкій області і “склеюється” на лініях розривів з врахуванням кінематичних умов зв'язку оболонка – ребро.

Підхід, який наведено даному розділі, є розвитком теорії побудови відомих чисельних алгоритмів розв'язку задач теорії неоднорідних оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер [136, 223].

3.1. Розв'язок осесиметричних задач теорії неоднорідних циліндричних оболонок на пружній основі

Рівняння коливань циліндричних оболонок з врахуванням дискретного розміщення кільцевих ребер при осесиметричних навантаженнях є найбільш простою моделлю процесів коливань вказаних структур на пружній основі. Не зменшуючи загальності на прикладі цих рівнянь для моделі Вінклера в даному параграфі буде детально проаналізовано підхід побудови чисельного алгоритму.

Покладаючи в рівняннях коливань (2.29)–(2.30) $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $\alpha_1 = x$, отримаємо наступні рівняння осесиметричних коливань для підкріпленої кільцевими ребрами циліндричної оболонки :

– в гладкій області

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

$$C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3(x, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} + P_3(x, t) = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

– на лінії розриву $x = x_j$

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (3.2)$$

$$[\bar{T}_{13}]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$[M_{11}]_j = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{I_{krj}}{F_j} + h_{cj}^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$h_{cj} = 0,5(h + h_j)$, h_j - висота j - го ребра.

Граничні умови для випадку $x = 0$, $x = L$ (L - довжина гладкої оболонки)

– для випадку вільних країв

$$T_{11} = 0, \quad \bar{T}_{13} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad (3.3)$$

– для випадку жорстко защемлених країв

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0. \quad (3.4)$$

Нульові початкові умови при $t = 0$

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0,$$

В рівняннях (3.1), (3.2) вирази для величин зусиль – моментів мають наступний вигляд

$$T_{11} = B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}), \quad (3.6)$$

$$T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}),$$

$$T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad M_{11} = D_{11}\kappa_{11};$$

$$T_{22j} = B_{22j}\varepsilon_{22j}; \quad j = \overline{1, J};$$

де

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_1]^2, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_3}{R}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1,$$

$$\theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x};$$

$$\varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}, \quad j = \overline{1, J};$$

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (3.8)$$

$$B_{13} = G_{13} h, \quad D_{11} = \frac{E_1^k h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$B_{22j} = E_j F_j, \quad j = \overline{1, J}.$$

Таким чином, рівняння (3.1) – (3.8) представляють повну постановку задач коливань підкріплених циліндричних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер на пружній основі при осесиметричних навантаженнях.

Побудова чисельного алгоритму починається з побудови різницевої сітки. Розділимо інтервал $[x_0, x_N]$ ($x_0 = 0$, $x_N = L$) на N рівних частин з кроком $\Delta x = L/N$ і отримаємо сітку с дискретними вузлами $x_l = x_0 + \Delta x \cdot l$, $l = \overline{1, N}$. Наряду з основною різницевою сіткою вводиться допоміжна різницева сітка $x_{l \pm 1/2}$, яка відповідає значенням величини x в напівцілих вузлах. По часовій координаті t вводиться аналогічна сітка на інтервалі $[0; T]$ розбиттям на N_1 рівних підінтервалів з кроком $\tau = T/N_1$, причому $\tau_n = n\tau$. Також вводиться допоміжна сітка по часу $\tau_{n+1/2}$, яка відповідає величинам t в напівцілих вузлах.

В подальшому будемо покладати, що величини переміщень узагальненого вектора обшивки u_1 , u_3 , φ_1 віднесені до цілих вузлів різницевої сітки по просторовій та часовій координатам (тобто різницева сітка по просторовій координаті будується таким чином, щоб центри ваги поперечного перерізу дискретних елементів попадали в цілі вузли різницевої сітки).

$$u_1, u_3, \varphi_1 \rightarrow (u_1)_l^n, (u_3)_l^n, (\varphi_1)_l^n; \quad (3.9)$$

Для побудови різницевої схеми для рівнянь (3.1) – (3.8), з врахуванням (3.9), будемо використовувати інтегро – інтерполяційний метод побудови скінчено – різницевих схем для гіперболічних рівнянь. Згідно цього підходу, рівняння (3.1) представимо наступним чином в області $\{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} dx dt = \rho_k h_k \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} dx dt; \quad (3.10)$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{\partial T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3(x, t) \right] dx dt =$$

$$= \rho h \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} \right] dx dt = \rho \frac{h^3}{12} \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} dx dt.$$

Після стандартних перетворень в співвідношеннях (3.10), отримаємо наступні різницеві апроксимації рівнянь (3.1)

$$\frac{T_{11 l+1/2}^n - T_{11 l-1/2}^n}{\Delta x} = \rho h (u_{1l}^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\Delta x} C_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{l+1/2} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{l-1/2} \right) + \frac{\bar{T}_{13 l+1/2}^n - \bar{T}_{13 l-1/2}^n}{\Delta x} -$$

$$- \frac{T_{22 l+1/2}^n + T_{22 l-1/2}^n}{2R} - C_1 u_{3l}^n + P_3(x_l, t_n) = \rho h (u_{3l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{M_{11 l+1/2}^n - M_{11 l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{13 l+1/2}^n + T_{13 l-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\bar{T}_{13 l \pm 1/2}^n = T_{13 l \pm 1/2}^n + T_{11 l \pm 1/2}^n \theta_{1 l \pm 1/2}^n.$$

Рівняння (3.11) можна представити у наступному вигляді

$$\frac{T_{11\ l+1/2}^n - T_{11\ l-1/2}^n}{\Delta x} = \rho h (u_{1l}^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.12)$$

$$C_2 \frac{u_{3l+1}^n - 2u_{3l}^n + u_{3l-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\bar{T}_{13\ l+1/2}^n - \bar{T}_{13\ l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{22\ l+1/2}^n + T_{22\ l-1/2}^n}{2R} - C_1 u_{3l}^n + P_3(x_l, t_n) = \rho h (u_{3l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{M_{11\ l+1/2}^n - M_{11\ l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{13\ l+1/2}^n + T_{13\ l-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\bar{T}_{13\ l\pm 1/2}^n = T_{13\ l\pm 1/2}^n + T_{11\ l\pm 1/2}^n \theta_{1\ l\pm 1/2}^n.$$

В співвідношеннях (3.12) позначення дискретних функцій і похідних вводиться згідно (3.1). Як випливає з представлення (3.12), величини зусиль та моментів відносяться до різницевих точок в напівцілих вузлах по просторовій координаті і в цілих вузлах по часовій координаті

$$(T_{11}, T_{22}, \bar{T}_{13}, M_{11}) \rightarrow (T_{11\ l\pm 1/2}^n, T_{22\ l\pm 1/2}^n, \bar{T}_{13\ l\pm 1/2}^n, M_{11\ l\pm 1/2}^n).$$

Виходячи з цього, рівняння (3.6) інтегруються в області

$$\{x_{l-1} \leq x \leq x_l, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \text{ і } \{x_l \leq x \leq x_{l+1}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} T_{11} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} [B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22})] dx dt; \quad (3.13)$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} T_{22} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} [B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11})] dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} T_{13} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} B_{13}\varepsilon_{13} dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} M_{11} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} D_{11} \kappa_{11} dx dt.$$

Відповідно, рівняння (3.7) також інтегруються по області

$$\{x_{l-1} \leq x \leq x_l, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \text{ і } \{x_l \leq x \leq x_{l+1}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varepsilon_{11} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\theta_1)^2 \right] dx dt; \quad (3.14)$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varepsilon_{22} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \left[\frac{u_3}{R} \right] dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varepsilon_{13} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} [\varphi_1 + \theta_1] dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \theta_1 dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{\partial u_3}{\partial x} dx dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \kappa_{11} dx dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx dt.$$

Після перетворень в (3.13), (3.14), з врахуванням індексів по просторовій та часовій координатам в (3.12), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$T_{11l\pm 1/2} = B_{11}(\varepsilon_{11l\pm 1/2} + v_{21}\varepsilon_{22l\pm 1/2}), \quad (3.15)$$

$$T_{22l\pm 1/2} = B_{22}(\varepsilon_{22l\pm 1/2} + v_{12}\varepsilon_{11l\pm 1/2}),$$

$$T_{13l\pm 1/2} = B_{13}\varepsilon_{13l\pm 1/2},$$

$$M_{11l\pm 1/2} = D_{11}\kappa_{11l\pm 1/2},$$

$$\varepsilon_{11l-1/2}^n = \frac{u_{1l}^n - u_{1l-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1l-1/2}^n]^2, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_{22\ l-1/2}^n = \frac{u_{3\ l-1}^n + u_{3\ l}^n}{2R},$$

$$\varepsilon_{13\ l-1/2}^n = \frac{\varphi_{1\ l-1}^n + \varphi_{1\ l}^n}{2} + \theta_{1\ l-1/2}^n,$$

$$\theta_{11\ l-1/2}^n = \frac{u_{3\ l}^n - u_{3\ l-1}^n}{\Delta x}, \quad \kappa_{11\ l-1/2}^n = \frac{\varphi_{1\ l}^n - \varphi_{1\ l-1}^n}{\Delta x}.$$

Співвідношення для величин деформацій в точках $x_{l+1/2}$ записуються аналогічно формулам (3.16)

$$\varepsilon_{11\ l+1/2}^n = \frac{u_{1\ l+1}^n - u_{1\ l}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1\ l+1/2}^n]^2, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{22\ l+1/2}^n = \frac{u_{3\ l+1}^n + u_{3\ l}^n}{2R},$$

$$\varepsilon_{13\ l+1/2}^n = \frac{\varphi_{1\ l+1}^n + \varphi_{1\ l}^n}{2} + \theta_{1\ l+1/2}^n,$$

$$\theta_{11\ l+1/2}^n = \frac{u_{3\ l+1}^n - u_{3\ l}^n}{\Delta x}, \quad \kappa_{11\ l+1/2}^n = \frac{\varphi_{1\ l+1}^n - \varphi_{1\ l}^n}{\Delta x}.$$

Враховуючи, що рівняння коливань (3.2) на лініях розривів $x = x_j$ не залежать від координати x , то інтегрування відбувається по області $\{t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} [T_{11}]_j = \rho_j F_j \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \left[\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] dt, \quad (3.18)$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \left\{ [\bar{T}_{13}]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} \right\} = \rho_j F_j \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} dt,$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} [M_{11}]_j = \rho_j F_j \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{I_{krj}}{F_j} + h_{cj}^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.18), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$[T_{11}]_j^n = \rho_j F_j [(u_{1j}^n)_{\bar{t}t} \pm h_{cj} (\varphi_{1j}^n)_{\bar{t}t}], \quad (3.19)$$

$$[\bar{T}_{13}]_j^n - \frac{T_{22j}^n}{R_j} = \rho_j F_j (u_{3j}^n)_{\bar{t}t},$$

$$[M_{11}]_j^n = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} (u_{1j}^n)_{\bar{t}t} + \left(\frac{I_{krj}}{F_j} + h_{cj}^2 \right) (\varphi_{1j}^n)_{\bar{t}t} \right],$$

де

$$T_{22j}^n = E_j F_j \frac{u_{3j}^n}{R_j}.$$

Виходячи з вище приведених формул, чисельний алгоритм розв'язування поставленої задачі полягає в послідовності виконання наступних формул:

- на n -м часовому шарі в гладкій області по просторовій координаті обчислюються величини відповідних деформацій та зусиль – моментів по формулам (3.15) - (3.17);
- по відомим величинам деформацій та зусиль – моментів обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень обшивки в гладкій області на $n + 1$ часовому шарі – формули (3.12);
- згідно формул (3.19) обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень для j -го дискретного елемента на лінії розриву $x = x_j$.

Різницева схема згідно формул (3.12)–(3.19) є явною по часовій координаті, виходячи з чого є умовно стійкою по просторовій та часовій координатам, тобто існує залежність між величинами τ та Δx в залежності від геометричних і фізико – механічних параметрів обшивки і підкріплюючих ребер, при яких обчислювальний процес є стійким. В наступному, при розгляді чисельних розв'язків задач осесиметричних коливань отримаємо формули для залежності різницевих кроків Δx та τ , які наведено нижче.

В матрично – векторному вигляді різницеві рівняння (3.12)–(3.19)

можна представити наступним чином

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t),$$

де $[M]$ і $[C]$ – матриці мас і жорсткостей дискретної різницевої системи, \bar{U} і \bar{F} – вектори дискретних переміщень та зовнішнього навантаження.

Покладаючи, що матриця $[M]$ невироджена, запишемо останнє рівняння у вигляді

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t),$$

де матриця $[D] = [M]^{-1}[C]$.

В роботі [242] показано, що при використанні явної скінчено – різницевої схеми для інтегрування рівнянь необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь є умова вигляду

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max} = 2\sqrt{\beta(D)},$$

де Ω_{\max} – максимальна частота власних коливань різницевої системи; $\beta(D)$ – верхня границя спектра матриці $[D]$.

Використовуючи для оцінки значення $\beta(D)$ зверху теорему Гершгоріна, отримаємо

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max_j \sum |d_{ij}|,$$

де d_{ij} – елементи матриці $[D]$.

Згідно позначень в рівняннях (3.13) – (3.19), умова стійкості для різницевих рівнянь має вигляд

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max},$$

де Ω_{\max} визначається виходячи з наступних нерівностей

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max j}^2),$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max([\Omega_1]^2, [\Omega_2]^2, [\Omega_3]^2),$$

$$\Omega_{\max j}^2 \leq \max \Omega_{1j}^2, \quad j = \overline{1, J},$$

а величини $[\Omega_1]^2, [\Omega_2]^2, [\Omega_3]^2, \Omega_{1j}^2$ визначаються згідно співвідношень

$$[\Omega_1]^2 = \frac{E_1}{\rho (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left[\frac{4}{(\Delta x)^2} + \nu_{21} \left(\frac{1}{R \Delta x} \right) \right],$$

$$[\Omega_2]^2 = \frac{E_1}{\rho (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x h} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{4C_2}{(\Delta x)^2} + C_1 \right] + \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{1}{R^2} + \nu_{12} \frac{1}{R \Delta x} \right] \right\},$$

$$[\Omega_3]^2 = \frac{E_1}{\rho (1 - \nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{4}{(\Delta x)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{12G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\}, \quad \rho_j F_j \Omega_{1j}^2 = \frac{E_j F_j}{R_j^2}.$$

3.2. Чисельний алгоритм розв'язування осесиметричних задач теорії підкріплених оболонок обертання на пружній основі

У випадку осесиметричних коливань підкріплених оболонок обертання з врахуванням дискретного розміщення ребер на пружній основі, рівняння коливань можна записати в наступному вигляді :

– в гладкій області

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{11}) - \Psi T_{22} + \quad (3.20)$$

$$+k_1\bar{T}_{13} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{C_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{A_2}{\partial s} \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} -$$

$$-C_1 u_3 + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 M_{11}) - \Psi M_{22} - T_{13} + m_1 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \theta_1, \quad \Psi = \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds};$$

– на лінії розриву $s = s_j$

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right), \quad (3.21)$$

$$[\bar{T}_{13}]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$[M_{11}]_j = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{I_{krj}}{F_j} + h_{cj}^2 \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right].$$

Граничні та початкові умови для рівнянь (3.20), (3.21) записуються аналогічно формулам (3.3)–(3.5).

В рівняннях коливань (3.20), (3.21) зв'язок між величинами зусиль – моментів і відповідних деформацій мають вигляд

$$T_{11} = B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}), \quad (3.22)$$

$$T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}),$$

$$M_{11} = D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}),$$

$$M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{21}\kappa_{11}),$$

$$T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad T_{22j} = B_{22j}\varepsilon_{22j};$$

де

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{2}[\theta_1]^2 + k_1 u_3, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{22} = \Psi u_1 + k_2 u_3, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j},$$

$$\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial s} - k_1 u_1,$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \quad \kappa_{22} = \Psi \varphi_1.$$

Величини жорсткостей в рівняннях (3.22) визначаються згідно формул (3.8), причому

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}.$$

Побудова чисельного алгоритму розв'язування вище вказаних рівнянь (3.20) - (3.23) проводиться по аналогії з викладками, які приведено для алгоритму розв'язування задач теорії коливань циліндричних оболонок – формули (3.12)–(3.17).

Розглядається просторовий інтервал $s_0 \leq s \leq s_N$, $s = A_1 \alpha_1$. Проводиться розбиття інтервалу на N рівних частин з дискретними кроками $\Delta s = s/N$. Вводиться різницева сітка в цілих і напівцілих вузлах. Компоненти узагальнених векторів переміщень обшивки і ребер відносимо до цілих вузлів різницевої сітки

$$u_1, u_3, \varphi_1 \rightarrow (u_1)_l^n, (u_3)_l^n, (\varphi_1)_l^n; \quad (3.24)$$

Побудова різницевої схеми проводиться з використанням інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем. Розглядаються рівняння коливань (3.20) в області $\{s_{l-1/2} \leq s \leq s_{l+1/2}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$. Проводиться інтегрування лівих і правих частин рівнянь (3.20) по відповідним областям, які розглядаються

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{11}) - \Psi T_{22} + k_1 \bar{T}_{13} + P_1 \right] ds dt = \quad (3.25)$$

$$= \rho h \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} ds dt;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \left[\frac{C_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} \left(A_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - \right.$$

$$\left. - k_2 T_{22} - C_1 u_3 + P_3 \right] ds dt = \rho h \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} ds dt ;$$

$$\int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 M_{11}) - \Psi M_{22} - T_{13} \right] ds dt =$$

$$= \rho \frac{h^3}{12} \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} ds dt.$$

Після операції інтегрування в (3.25), з врахуванням (3.24), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$\frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} T_{11l+1/2}^n - A_{2l-1/2} T_{11l-1/2}^n}{\Delta s} - \quad (3.26)$$

$$- \frac{\Psi_l}{2} (T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n) + \frac{k_{1l}}{2} (\bar{T}_{13l+1/2}^n + \bar{T}_{13l-1/2}^n) +$$

$$+ P_{1l}^n = \rho h (u_{1l}^n)_{\bar{t}t};$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_2}{A_{2l}} \left[\left(A_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) - \left(A_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} \bar{T}_{13l+1/2}^n - A_{2l-1/2} \bar{T}_{13l-1/2}^n}{\Delta s} - \\
& - \frac{k_{1l}}{2} (T_{11l+1/2}^n + T_{11l-1/2}^n) - \frac{k_{2l}}{2} (T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n) + \\
& - C_1 u_{3l}^n + P_{3l}^n = \rho h (u_{3l}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} M_{11l+1/2}^n - A_{2l-1/2} M_{11l-1/2}^n}{\Delta s} - \\
& - \frac{\Psi_l}{2} (M_{22l+1/2}^n + M_{22l-1/2}^n) - \frac{1}{2} (T_{13l+1/2}^n + T_{13l-1/2}^n) + \\
& + m_{1l}^n = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t};
\end{aligned}$$

$$\bar{T}_{13l\pm 1/2}^n = T_{13l\pm 1/2}^n + T_{11l\pm 1/2}^n \theta_{1l\pm 1/2}^n;$$

$$\Psi_l = \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s}.$$

Різницеві співвідношення (3.26) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} T_{11l+1/2}^n - A_{2l-1/2} T_{11l-1/2}^n}{\Delta s} - \\
& - \frac{\Psi_l}{2} (T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n) + \frac{k_{1l}}{2} (\bar{T}_{13l+1/2}^n + \bar{T}_{13l-1/2}^n) + \\
& + P_{1l}^n = \rho h (u_{1l}^n)_{\bar{t}t}; \\
& \frac{C_2}{A_{2l} \Delta x} \left(A_{2l+1/2} \frac{u_{3l+1}^n - u_{3l}^n}{\Delta s} - A_{2l-1/2} \frac{u_{3l}^n - u_{3l-1}^n}{\Delta s} \right) +
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} \bar{T}_{13l+1/2}^n - A_{2l-1/2} \bar{T}_{13l-1/2}^n}{\Delta s} - \\
& - \frac{k_{1l}}{2} (T_{11l+1/2}^n + T_{11l-1/2}^n) - \frac{k_{2l}}{2} (T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n) + \\
& - C_1 u_{3l}^n + P_{3l}^n = \rho h (u_{3l}^n)_{\bar{t}t};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} M_{11l+1/2}^n - A_{2l-1/2} M_{11l-1/2}^n}{\Delta s} - \\
& - \frac{\Psi_l}{2} (M_{22l+1/2}^n + M_{22l-1/2}^n) - \frac{1}{2} (T_{13l+1/2}^n + T_{13l-1/2}^n) + \\
& + m_{1l}^n = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t};
\end{aligned}$$

$$\bar{T}_{13l\pm 1/2}^n = T_{13l\pm 1/2}^n + T_{11l\pm 1/2}^n \theta_{1l\pm 1/2}^n;$$

$$\Psi_l = \frac{1}{A_{2l}} \frac{A_{2l+1/2} - A_{2l-1/2}}{\Delta s}.$$

Апроксимація величин зусиль – моментів (3.22) має вигляд

$$T_{11l\pm 1/2}^n = B_{11} (\varepsilon_{11l\pm 1/2}^n + \nu_{21} \varepsilon_{22l\pm 1/2}^n); \quad (3.28)$$

$$T_{22l\pm 1/2}^n = B_{22} (\varepsilon_{22l\pm 1/2}^n + \nu_{12} \varepsilon_{11l\pm 1/2}^n);$$

$$M_{11l\pm 1/2}^n = D_{11} (\kappa_{11l\pm 1/2}^n + \nu_{21} \kappa_{22l\pm 1/2}^n);$$

$$M_{22l\pm 1/2}^n = D_{22} (\kappa_{22l\pm 1/2}^n + \nu_{12} \kappa_{11l\pm 1/2}^n);$$

$$T_{13l\pm 1/2}^n = B_{13} \varepsilon_{13l\pm 1/2}^n.$$

Апроксимації величин деформацій, які входять в формули (3.28), згідно формул (3.23), мають наступний вигляд

$$\varepsilon_{11l+1/2}^n = \frac{u_{1l+1}^n - u_{1l}^n}{\Delta s} + \frac{1}{2} [\theta_{1l+1/2}^n]^2 + k_{1l+1/2} \frac{u_{3l+1}^n - u_{3l}^n}{\Delta s}, \quad (3.29)$$

$$\theta_{1l+1/2}^n = \frac{u_{3l+1}^n - u_{3l}^n}{\Delta s} - \frac{1}{2} k_{1l+1/2} (u_{1l+1}^n + u_{1l}^n),$$

$$k_{1l+1/2} = \frac{1}{2} (u_{1l+1}^n + u_{1l}^n),$$

$$\varepsilon_{22l+1/2}^n = \frac{1}{2} \Psi_{l+1/2} (u_{1l+1}^n + u_{1l}^n) + \frac{1}{2} k_{2l+1/2} (u_{3l+1}^n + u_{3l}^n),$$

$$\Psi_{l+1/2} = \frac{1}{A_{2l+1/2}} \left(\frac{A_{2l+1} - A_{2l}}{\Delta s} \right), \quad A_{2l+1/2} = \frac{1}{2} (A_{2l+1} + A_{2l}),$$

$$\varepsilon_{13l+1/2}^n = \frac{1}{2} (\varphi_{1l+1}^n + \varphi_{1l}^n) + \theta_{1l+1/2}^n,$$

$$\kappa_{11l+1/2}^n = \frac{\varphi_{1l+1} - \varphi_{1l}}{\Delta s}, \quad \kappa_{22l+1/2}^n = \frac{1}{2} \Psi_{l+1/2} (\varphi_{1l+1} + \varphi_{1l}).$$

Для дискретних величин деформацій з індексом $l-1/2$ співвідношення (3.23) запишуться наступним чином

$$\varepsilon_{11l-1/2}^n = \frac{u_{1l}^n - u_{1l-1}^n}{\Delta s} + \frac{1}{2} [\theta_{1l-1/2}^n]^2 + k_{1l-1/2} \frac{u_{3l}^n - u_{3l-1}^n}{\Delta s}, \quad (3.30)$$

$$\theta_{1l-1/2}^n = \frac{u_{3l}^n - u_{3l-1}^n}{\Delta s} - \frac{1}{2} k_{1l-1/2} (u_{1l}^n + u_{1l-1}^n),$$

$$k_{1l-1/2} = \frac{1}{2} (k_{1l}^n + k_{1l-1}^n),$$

$$\varepsilon_{22l-1/2}^n = \frac{1}{2} \Psi_{l-1/2} (u_{1l}^n + u_{1l-1}^n) + \frac{1}{2} k_{2l-1/2} (u_{3l}^n + u_{3l-1}^n),$$

$$\Psi_{l-1/2} = \frac{1}{A_{2l-1/2}} \left(\frac{A_{2l} - A_{2l-1}}{\Delta s} \right), \quad A_{2l-1/2} = \frac{1}{2} (A_{2l} + A_{2l-1}),$$

$$\varepsilon_{131-1/2}^n = \frac{1}{2}(\varphi_{11}^n + \varphi_{11-1}^n) + \theta_{11-1/2}^n,$$

$$\kappa_{11l-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l}^n - \varphi_{1l-1}^n}{\Delta s}, \quad \kappa_{22l-1/2}^n = \frac{1}{2}\Psi_{l-1/2}(\varphi_{1l}^n + \varphi_{1l-1}^n).$$

Апроксимація рівнянь коливань на лінії розриву $s = s_j$ має вигляд

$$[T_{11}]_{jl}^n = \rho_j F_j [(u_{1j}^n)_{\bar{i}t} \pm h_{cj} (\varphi_{1j}^n)_{\bar{i}t}], \quad (3.31)$$

$$[\bar{T}_{13}]_{jl}^n - \frac{T_{22j}^n}{R_j} = \rho_j F_j (u_{3j}^n)_{\bar{i}t},$$

$$[M_{11}]_{jl}^n = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} (u_{1j}^n)_{\bar{i}t} + \left(\frac{I_{kj}}{F_j} + h_{cj}^2 \right) (\varphi_{1j}^n)_{\bar{i}t} \right],$$

$$T_{22j}^n = B_{22j} \varepsilon_{22j}^n, \quad \varepsilon_{22j}^n = \frac{u_{3j}^n}{R_j}.$$

В рівняння (3.31) в квадратних дужках з позначеннями $[...]_{jl}^n$ входять величини із рівнянь (3.28).

Виходячи з вище приведених формул, чисельний алгоритм розв'язування рівнянь для підкріплених оболонок обертання на пружній основі полягає в послідовності виконання наступних кроків:

- на n -м часовому шарі в гладкій області по просторовій координаті обчислюються величини відповідних деформацій та зусиль – моментів за формулами (3.28) - (3.30);
- за відомими величинами деформацій та зусиль – моментів обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень обшивки в гладкій області на $n+1$ часовому шарі – формули (3.27);
- згідно формул (3.31) обчислюються величини компонент узагальненого вектора переміщень для j -го дискретного елемента на лінії розриву $x = x_j$.

3.3. Чисельний алгоритм розв'язування неосесиметричних задач циліндричних підкріплених оболонок на пружній основі

3.3.1 Чисельний алгоритм знаходження розв'язку в гладкій області оболонки

Рівняння неосесиметричних коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок кругового перерізу являють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних по змінним x , y , t при наявності просторових розривів по координатам x і y . Просторовими розривами є лінії проектування центрів ваги поперечних перерізів i -го поздовжнього ребра по координаті x та j -го поперечного ребра по координаті y на серединну поверхню циліндричної оболонки кругового перерізу. Виходячи з цього, чисельний алгоритм розв'язання задачі теорії циліндричних оболонок кругового перерізу з врахування дискретного підкріплення будується наступним чином: шукається розв'язок в гладкій області циліндричної оболонки кругового перерізу i на лініях просторових розривів [136, 223]. Різницевий алгоритм заснований на застосуванні інтегро–інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевої схем по просторовим координатам і явній скінчено – різницевої апроксимації по часовій координаті.

Перехід від неперервної системи до скінчено – різницевої виконується в 2 етапи:

- 1-ий етап полягає в скінчено – різницевої апроксимації рівнянь коливань в зусиллях – моментах;

- 2-ий етап полягає в апроксимації рівнянь полягає в скінчено – різницевої апроксимації зусиль – моментів і відповідних деформацій.

Розглянемо область D , яка задається наступним чином

$$D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 2\pi R, 0 \leq t \leq T\}.$$

В області D введемо різницеву сітку $\Omega = \Omega_{\Delta x \Delta y} \cdot \Omega_{\tau}$,

де

$$\Omega_{\Delta x \Delta y} = \{(x_l, y_m) = (l\Delta x, m\Delta y), \Delta x = L/l,$$

$$\Delta y = 2\pi R/M; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}\},$$

$$\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, \tau = T/N, n = \overline{0, N}\}.$$

Поряд з основною різницевою сіткою, будемо користуватися допоміжними різницевиими сітками в дискретних точках $(x_{l\pm 1/2}, y_m)$, $(x_l, y_{m\pm 1/2})$, $(x_{l\pm 1/2}, y_{m\pm 1/2})$, де $x_{l\pm 1/2} = (l \pm 1/2)\Delta x$, $y_{m\pm 1/2} = (m \pm 1/2)\Delta y$.

Оскільки різницева сітка будується таким чином, щоб точки розривів попадали в цілі вузли, то користуючись допоміжними різницевиими сітками, застосуємо інтегро – інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь в області Ω_1 :

$$\Omega_1 = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\}, \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}.$$

Рівняння коливань для гладкої циліндричної оболонки кругового перерізу при цьому матимуть вигляд

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2 T_{11}) + \frac{\partial S}{\partial y} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt, \quad (3.32)$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2 S) + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + k_2 T_{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} - k_2 T_{22} + \mathcal{D}_3 \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt$$

$$\int_t \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x} (A_2 H) + \frac{\partial \dot{I}_{22}}{\partial y} - T_{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \int_{\Omega_1} \left[\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.32) на вказаних інтервалах, з використанням явної апроксимації по часовій координаті, отримаємо наступні

різницеві рівняння, які апроксимують рівняння коливань в гладкій області циліндричної оболонки кругового перерізу

$$\frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{(A_2 T_{11})_{l+1/2,m}^n - (A_2 T_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta x} \right) + \frac{S_{l,m+1/2}^n - S_{l,m-1/2}^n}{\Delta y} = \rho h (u_{1l,m}^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{(A_2 S)_{l+1/2,m}^n - (A_2 S)_{l-1/2,m}^n}{\Delta x} \right) + \frac{T_{22l,m+1/2}^n - T_{22l,m-1/2}^n}{\Delta y} +$$

$$+ k_{2l} \left(\frac{T_{23l,m+1/2}^n + T_{23l,m-1/2}^n}{2} \right) = \rho h (u_{2l,m}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{(A_2 T_{13})_{l+1/2,m}^n - (A_2 T_{13})_{l-1/2,m}^n}{\Delta x} \right) + \frac{T_{23l,m+1/2}^n - T_{23l,m-1/2}^n}{\Delta y} -$$

$$- k_{2l} \left(\frac{T_{22l,m+1/2}^n + T_{22l,m-1/2}^n}{2} \right) + P_3^n(S_{1l}, S_{2m}, t^n) = \rho h (u_{3l,m}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{(A_2 M_{11})_{l+1/2,m}^n - (A_2 M_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta x} \right) + \frac{H_{l,m+1/2}^n - H_{l,m-1/2}^n}{\Delta y} -$$

$$- \frac{T_{13l+1/2,m}^n + T_{13l-1/2,m}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l,m}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{1}{A_{2l}} \left(\frac{(A_2 H)_{l+1/2,m}^n - (A_2 H)_{l-1/2,m}^n}{\Delta x} \right) + \frac{M_{22l,m+1/2}^n - M_{22l,m-1/2}^n}{\Delta y} -$$

$$- \frac{T_{23l,m+1/2}^n + T_{23l,m-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2l,m}^n)_{\bar{t}t}.$$

Таким чином, в різницевих рівняннях (3.33) компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки

кругового перерізу $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$ віднесені до цілих вузлів різницевої сітки $\bar{U}_{l,m} = (u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m})$ по просторовим координатам.

В рівняннях (3.33) зусилля – моменти віднесені до різницевої сітки з дробовими індексами $(x_{l\pm 1/2}, y_m)$, $(x_l, y_{m\pm 1/2})$. Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів в (3.32) рівняння коливань інтегруються в областях: Ω_1 ,

$$\Omega_2 = \{x_{l-1} \leq x \leq x_l; y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\},$$

$$\Omega_3 = \{x_l \leq x \leq x_{l+1}; y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\},$$

$$\Omega_4 = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}; y_{m-1} \leq y \leq y_m\},$$

$$\Omega_5 = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}; y_m \leq y \leq y_{m+1}\},$$

при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Для області Ω_2 маємо наступні співвідношення:

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}] d\Omega_2 dt, \quad (3.34)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [S] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_s \varepsilon_{12}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [H] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_s \chi_{12}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{12}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [S + k_2 H] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{13}\varepsilon_{13}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{22}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22}] d\Omega_2 dt.$$

Аналогічні співвідношення записуються для областей Ω_3 , Ω_4 , Ω_5 .

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.34), отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують величини зусиль – моментів з відповідними величинами деформацій

$$T_{11l-1/2,m}^n = B_{11} \varepsilon_{11l-1/2,m}^n + B_{12} \varepsilon_{22l-1/2,m}^n, \quad (3.35)$$

$$T_{12l-1/2,m}^n = S_{l-1/2,m}^n + k_{1l-1/2} H_{l-1/2,m}^n,$$

$$T_{13l-1/2,m}^n = B_{13} \varepsilon_{13l-1/2,m}^n,$$

$$\dot{I}_{11l-1/2,m}^n = D_{11} \chi_{11l-1/2,m}^n + D_{12} \chi_{22l-1/2,m}^n,$$

$$M_{12l-1/2,m}^n = D_s \chi_{12l-1/2,m}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь коливань по області Ω_3 маємо

$$T_{11l+1/2,m}^n = B_{11} \varepsilon_{11l+1/2,m}^n + B_{12} \varepsilon_{22l+1/2,m}^n, \quad (3.36)$$

$$T_{12l+1/2,m}^n = S_{l+1/2,m}^n + k_{1l+1/2} H_{l+1/2,m}^n,$$

$$T_{13l+1/2,m}^n = B_{13} \varepsilon_{13l+1/2,m}^n,$$

$$\dot{I}_{11l+1/2,m}^n = D_{11} \chi_{11l+1/2,m}^n + D_{12} \chi_{22l+1/2,m}^n,$$

$$M_{12l+1/2,m}^n = D_s \chi_{12l+1/2,m}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь коливань по області Ω_4 маємо

$$T_{21l,m-1/2}^n = S_{l,m-1/2}^n + k_{1l} H_{l,m-1/2}^n, \quad (3.37)$$

$$T_{22l,m-1/2}^n = B_{21} \varepsilon_{11l,m-1/2}^n + B_{22} \varepsilon_{22l,m-1/2}^n,$$

$$M_{21l,m-1/2}^n = D_s \chi_{12l,m-1/2}^n,$$

$$\dot{I}_{22l,m-1/2}^n = D_{21} \chi_{11l,m-1/2}^n + D_{22} \chi_{22l,m-1/2}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь коливань по області Ω_5 маємо

$$T_{21l,m+1/2}^n = S_{l,m+1/2}^n + k_{1l} H_{l,m+1/2}^n, \quad (3.38)$$

$$T_{22l,m+1/2}^n = B_{21} \varepsilon_{11l,m+1/2}^n + B_{22} \varepsilon_{22l,m+1/2}^n,$$

$$M_{21l,m+1/2}^n = D_s \chi_{12l,m+1/2}^n,$$

$$M_{22l,m+1/2}^n = D_{21} \chi_{11l,m+1/2}^n + D_{22} \chi_{22l,m+1/2}^n.$$

В різницевих рівняннях (3.33), (3.35) – (3.38) позначення різницевих функцій і різницевих похідних введені згідно [136, 223, 241].

Для того, щоб отримати узгоджені величини деформацій в співвідношеннях (3.35) – (3.38), проінтегруємо вирази для компонент деформацій в областях Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 , Ω_5 відповідно при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Після стандартних перетворень в інтегральних співвідношеннях для деформацій в областях Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 , Ω_5 отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують відповідні деформації з компонентами узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу.

Для області Ω_2 маємо наступні різницеві співвідношення:

$$\varepsilon_{11l-1/2,m}^n = \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l-1,m}^n}{\Delta x}, \quad (3.39)$$

$$\theta_{1l-1/2,m}^n = \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\omega_{1l-1/2,m}^n = \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\omega_{2l-1/2,m}^n = \frac{u_{1l-1/2,m+1/2}^n - u_{1l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta y},$$

$$\omega_{l-1/2,m}^n = \omega_{1l-1/2,m}^n + \omega_{2l-1/2,m}^n,$$

$$\varepsilon_{13l-1/2,m}^n = \varphi_{1l-1/2,m}^n + \theta_{1l-1/2,m}^n,$$

$$\chi_{11l-1/2,m}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\chi_{12l-1/2,m}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta x} + \frac{\varphi_{1l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{1l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta y} + k_{2l-1/2} \omega_{2l-1/2,m}^n,$$

$$\varepsilon_{22l-1/2,m}^n = \frac{u_{2l-1/2,m+1/2}^n - u_{2l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta y} + k_{2l-1/2} u_{3l-1/2,m}^n,$$

$$\theta_{2l-1/2,m}^n = \frac{u_{3l-1/2,m+1/2}^n - u_{3l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta y},$$

$$\chi_{22l-1/2,m}^n = \frac{\varphi_{2l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{2l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta y}.$$

Аналогічним чином отримаємо різниці співвідношення для деформацій в областях Ω_3 , Ω_4 , Ω_5 .

Детально викладення матеріалу для отримання різницевої співвідношень для зусиль-моментів та величин деформацій викладено в [136, 223].

3.3.2 Розв'язок на i -й та j -й ліній розривів (для i -го та j -го підкріплюючих ребер)

Розглянемо побудову різницевого алгоритму для i -го підкріплюючого повздовжнього ребра. Перехід від неперервної системи до скінчено – різницевої виконується в 2 етапи:

- 1-ий етап полягає в скінчено – різницевої апроксимації рівнянь коливань в зусиллях – моментах.

- 2-ий етап апроксимації рівнянь полягає в скінчено – різницевої апроксимації зусиль – моментів і відповідних деформацій.

Оскільки різницева сітка будується таким чином, щоб точки розривів попадали в цілі точки сітки, то по аналогії з різницевою сіткою для гладкої циліндричної оболонки будується різницева сітка для i -го підкріплюючого повздовжнього ребра, направлено вздовж осі x , в областях $\Omega_{1^3} = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}\}$, $\Omega_{2^3} = \{x_{l-1} \leq x \leq x_l\}$, $\Omega_{3^3} = \{x_l \leq x \leq x_{l+1}\}$, при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Рівняння коливань по області Ω_{1i} для i -го ребра, при цьому матимуть вигляд

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial \dot{\Omega}_{11^3}}{\partial x} + [S]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt, \quad (3.40)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [T_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{13i}}{\partial x} + [T_{23}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [H]_i \right\} d\Omega_{1i} dt =$$

$$= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left[h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [M_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt =$$

$$= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.40) на вказаних інтервалах, з використанням явної апроксимації по часовій координаті, отримаємо наступні

різницеві рівняння, які апроксимують вихідні рівняння для i -го повздовжнього підкріплюючого ребра, направлено вздовж осі x

$$\frac{T_{11il+1/2}^n - T_{21il-1/2}^n}{\Delta x} + [S]_i^n = \rho_i F_i \left[\left(u_{1l,m}^n \right)_{tt} \pm h_{ci} \left(\varphi_{1l,m}^n \right)_{tt} \right], \quad (3.41)$$

$$\frac{T_{12il+1/2}^n - T_{12il-1/2}^n}{\Delta x} + [T_{22}]_i^n = \rho_i F_i \left[\left(u_{2l,m}^n \right)_{tt} \pm h_{ci} \left(\varphi_{2l,m}^n \right)_{tt} \right],$$

$$\frac{T_{13il+1/2}^n - T_{13il-1/2}^n}{\Delta x} + [T_{23}]_i^n = \rho_i F_i \left(u_{3l,m}^n \right)_{tt},$$

$$\frac{M_{11il+1/2}^n - M_{21il-1/2}^n}{\Delta x} - T_{13il}^n \pm h_{ci} \left(\frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta x} + k_{1il} T_{13il}^n \right) + [H]_i^n =$$

$$= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \left(u_{1l,m}^n \right)_{tt} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{li}}{F_i} \right) \left(\varphi_{1l,m}^n \right)_{tt} \right],$$

$$\frac{M_{12il+1/2}^n - M_{12il-1/2}^n}{\Delta x} \pm h_{ci} \frac{T_{12ik+1/2}^n - T_{12ik-1/2}^n}{\Delta x} + [M_{22}]_i^n =$$

$$= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \left(u_{2l,m}^n \right)_{tt} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{\tilde{n}ri}}{F_i} \right) \left(\varphi_{2l,m}^n \right)_{tt} \right].$$

Аналогічно до випадку гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу, в різницевих рівняннях (3.41) компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ віднесені до цілих вузлів різницевої сітки $\bar{U}_{l,m} = (u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m})$ по просторовим координатам.

В рівняннях (3.41) зусилля – моменти віднесені до різницевої сітки з дробовими індексами $(x_{l\pm 1/2}, u_m)$. Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів в (3.41) рівняння інтегруються в областях Ω_{2z} , Ω_{3z} , при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Для області $\Omega_{2,3}$ маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{11i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i F_i \varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{12i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i F_i \varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{13i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [k_1^2 G_i F_i \varepsilon_{13i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{11i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i I_{1i} \chi_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{12i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i I_{cri} \chi_{12i}] d\Omega_{2i} dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.42), отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують величини зусиль – моментів з відповідними величинами деформацій

$$\begin{aligned} T_{11il-1/2}^n &= E_i F_i \varepsilon_{11il-1/2}^n, \\ T_{12il-1/2}^n &= G_i F_i \varepsilon_{12il-1/2}^n, \\ T_{13il-1/2}^n &= k_1^2 G_i F_i \varepsilon_{13il-1/2}^n, \\ M_{11il-1/2}^n &= E_i I_{1i} \chi_{11il-1/2}^n, \\ M_{12il-1/2}^n &= G_i I_{cri} \chi_{12il-1/2}^n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Аналогічні співвідношення отримуємо в області $\Omega_{3,3}$.

Для того, щоб отримати узгоджені різницеві величини деформацій в співвідношеннях (3.43), проінтегруємо вирази для компонент деформацій відповідно в областях $\Omega_{2,3}$, $\Omega_{3,3}$ при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Для області $\Omega_{2,3}$ маємо співвідношення

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [e_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \quad (3.44)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\dot{a}_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{13i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varphi_1 + \theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial u_3}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial u_2}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\chi_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\chi_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.44) отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують відповідні деформації з компонентами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го ребра.

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.44), маємо

$$\varepsilon_{11il-1/2}^n = \dot{a}_{11il-1/2}^n, \quad (3.45)$$

$$e_{11il-1/2}^n = \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l-1,m}^n}{\Delta x} \pm h_{ci} \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\varepsilon_{12il-1/2}^n = \theta_{2il-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{13il-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{2} + \theta_{1il-1/2}^n, \quad \theta_{1il-1/2}^n = \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\theta_{2il-1/2}^n = \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l-1,m}^n}{\Delta x} \pm h_{ci} \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta x},$$

$$\chi_{11il-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta x}, \quad \chi_{12il-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta x}.$$

Аналогічні різницеві співвідношення для величин деформацій отримаємо для області Ω_{33} .

Побудову різницевого алгоритму для j -го підкріплюючого поперечного ребра виконується аналогічно алгоритму побудови різницевих рівнянь для i -го ребра. В результаті маємо наступні різницеві рівняння для j -го ребра:

- рівняння коливань

$$\frac{T_{21jm+1/2}^n - T_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [T_{11}]_j^n = \rho_j F_j \left[(u_{1l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{1l,m}^n)_{tt} \right], \quad (3.46)$$

$$\frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} + k_{2jm} T_{23jm}^n + [S]_j^n =$$

$$= \rho_j F_j \left[(u_{2l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{2l,m}^n)_{tt} \right],$$

$$\frac{T_{23jm+1/2}^n - T_{23jm-1/2}^n}{\Delta y} - k_{2jm} T_{22jm}^n + [T_{13}]_j^n = \rho_j F_j (u_{3l,m}^n)_{tt},$$

$$\frac{M_{21jm+1/2}^n - M_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} \pm h_{cj} \frac{T_{21jm+1/2}^n - T_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [M_{11}]_j^n =$$

$$= \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} (u_{1l,m}^n)_{tt} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) (\varphi_{1l,m}^n)_{tt} \right],$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_{22jm+1/2}^n - M_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} - T_{23jm}^n \pm h_{cj} \left(\frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} + k_{2jm} T_{23jm}^n \right) + [H]_j^n = \\ & = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} (u_{2l,m}^n)_{tt} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) (\varphi_{2l,m}^n)_{tt} \right]. \end{aligned}$$

- співвідношення зусилля - моменти-деформації

$$T_{21jm-1/2}^n = G_j F_j \varepsilon_{21jm-1/2}^n, \quad T_{21jm+1/2}^n = G_j F_j \varepsilon_{21jm+1/2}^n, \quad (3.47)$$

$$T_{22jm-1/2}^n = E_j F_j \varepsilon_{22jm-1/2}^n, \quad T_{22jm+1/2}^n = E_j F_j \varepsilon_{22jm+1/2}^n,$$

$$T_{23jm-1/2}^n = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23jm-1/2}^n, \quad T_{23jm+1/2}^n = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23jm+1/2}^n,$$

$$M_{21jm-1/2}^n = G_j I_{crj} \chi_{21jm-1/2}^n, \quad M_{21jm+1/2}^n = G_j I_{crj} \chi_{21jm+1/2}^n,$$

$$M_{22jm-1/2}^n = E_j I_j \chi_{22jm-1/2}^n, \quad M_{22jm+1/2}^n = E_j I_j \chi_{22jm+1/2}^n.$$

- різниці співвідношення деформації - переміщення

$$\varepsilon_{22jm-1/2}^n = e_{22jm-1/2}^n, \quad (3.48)$$

$$e_{22jm-1/2}^n = \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l,m-1}^n}{\Delta y} \pm h_{cj} \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta y} + k_{2jm} u_{3l,m-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{21jm-1/2}^n = \theta_{2jm-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{23jm-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta y} + \theta_{1jm-1/2}^n,$$

$$\theta_{1jm-1/2}^n = \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l,m-1}^n}{\Delta y} - k_{2j} (u_{2l,m-1/2}^n \pm h_{cj} \varphi_{2l,m-1/2}^n),$$

$$\theta_{2jm-1/2}^n = \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l,m-1}^n}{\Delta y} \pm h_{cj} \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l,m-1}^n}{\Delta y},$$

$$\chi_{21jl-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l,m-1}^n}{\Delta y},$$

$$\chi_{22jl-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta y}.$$

Таким чином, чисельний алгоритм розв'язування задач теорії циліндричних оболонок кругового перерізу з врахуванням повздовжньо – поперечного набору ребер складається з наступних етапів:

1. Знаходиться розв'язок в гладкій області:

- за відомими величинами узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій за формулами (3.39);

- за обчисленими величинам деформацій згідно формул (3.39) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів по формулам (3.35) – (3.38);

- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів за формулами (3.35) – (3.38) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки згідно різницевих рівнянь коливань (3.33) на $(n+1)$ -му часовому шарі;

2. Знаходження різницевого розв'язку на i -й лінії розриву вздовж осі x :

- за відомими величинами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го підкріплюючого ребра на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій за формулами (3.45);

- за обчисленими величинами деформацій згідно формул (3.45) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для i -го підкріплюючого ребра за формулами (3.43);

- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів за формулами (3.43) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів i -го підкріплюючого ребра згідно різницевих рівнянь коливань (3.41) на $(n+1)$ -му часовому шарі;

3. Знаходження різницевого розв'язку на j -й лінії розриву вздовж осі y :

- за відомими величинами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів j -го підкріплюючого ребра на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій по формулам (3.48);
- за обчисленими величинам деформацій згідно формул (3.47) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для j -го підкріплюючого ребра по формулам (3.50) – (3.51);
- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів по формулам (3.50) – (3.51) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів j -го підкріплюючого ребра згідно різницевих рівнянь коливань (3.46) на $(n + 1)$ -му часовому шарі.

3.3.3 Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для рівнянь коливань дискретно підкріплених неоднорідних циліндричних оболонок кругового перерізу

Скінчено – різницеві схеми, які апроксимують вихідні рівняння коливань, явні по часовій координаті, тому вони умовно стійкі по просторовим і часовій координатам. У зв'язку з цим виникає необхідність провести дослідження на стійкість різницевих схем.

Оскільки скінчено – різницеві схеми умовно стійкі, то існує залежність між величинами τ і величинами Δx , Δy в залежності від геометричних і фізико – механічних параметрів гладкої циліндричної оболонки кругового перерізу і підкріплюючих ребер, при яких обчислювальний процес є стійким.

Представимо різницеві рівняння (3.33) – (3.48) в матрично – векторній формі

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t), \quad (3.49)$$

де $[C]$ і $[M]$ – матриці мас і жорсткостей дискретної різницевої системи; \bar{U} і \bar{F} – вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження.

Припускаючи, що матриця $[M]$ не вироджена, запишемо рівняння (3.49) у вигляді

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t), \quad (3.50)$$

де матриця $[D] = [M]^{-1}[C]$.

В роботі Г.І Марчука [242] встановлено, що необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь, при використанні явної скінчено – різницевої схеми для інтегрування рівнянь коливань є умова вигляду

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max} = \frac{2}{\sqrt{\beta(D)}}, \quad (3.51)$$

де Ω_{\max} – оцінка максимальних частот власних коливань різницевої системи; $\beta(D)$ – верхня границя спектру матриці $[D]$.

Для оцінки верхнього значення $\beta(D)$ скористаємося теоремою Гершгоріна і отримаємо

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max_j \sum_j |d_{ij}|, \quad (3.52)$$

де d_{ij} – елементи матриці $[D]$.

Враховуючи позначення в формулах (3.33) – (3.48) та вираз (3.52), умова стійкості різницевих рівнянь (3.51) матиме вигляд

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max},$$

де Ω_{\max} визначається з наступних нерівностей

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max i}^2, \Omega_{\max j}^2),$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, \Omega_4^2, \Omega_5^2),$$

$$\Omega_{\max i}^2 \leq \max(\Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2), \quad i = \overline{1, I},$$

$$\Omega_{\max j}^2 \leq \max(\Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2, \Omega_{5j}^2), \quad j = \overline{1, J},$$

де величини $\Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, \Omega_4^2, \Omega_5^2, \Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2, \Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2,$

Ω_{5j}^2 визначаються з наступних співвідношень

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \left[\frac{4}{(\Delta x)^2} + \nu_{21} \left(\frac{1}{k_2 \Delta x} + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} \right] \right\}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{1}{k_2 \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} + \nu_{12} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{k_2 \Delta y} + \frac{1}{k_2 h} - \frac{1}{k_2^2} \right] \right\}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x h} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k \Delta y} + \nu_{12} \frac{1}{k \Delta x} \right] \right\}, \\ \Omega_4^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \left[\nu_{12} \frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x_1 \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_5^2 = & \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\ & + \frac{E_2}{E_1} \left[\frac{4}{(\Delta y)^2} + \nu_{12} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right] + \\ & \left. + \frac{12G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[\frac{1}{h \Delta y} + \frac{1}{kh} - \frac{1}{h^2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\rho_i F_i \Omega_{1i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{4i}^2 = E_i F_i \frac{4}{(\Delta x)^2} \pm E_i F_i h_i \frac{1}{h(\Delta x)^2},$$

$$\rho_i F_i \Omega_{2i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{5i}^2 = G_i F_i \frac{4}{(\Delta x)^2} \pm G_i F_i h_i \frac{1}{h(\Delta x)^2},$$

$$\rho_i F_i \Omega_{3i}^2 = k_i^2 G_i F_i \left[\frac{4}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{\Delta x h} \right],$$

$$\rho_i F_i \left(h_i^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \Omega_{4i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{1i}^2 = E_i F_i I_{1i} \frac{4}{(\Delta x)^2} + k_i^2 G_i F_i \left(\frac{h}{\Delta x} + 1 \right),$$

$$\rho_i F_i \left(h_i^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \Omega_{5i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{2i}^2 = G_i I_{cri} \frac{4}{(\Delta x)^2};$$

$$\rho_j F_j \Omega_{1j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{4j}^2 = G_j F_j \frac{4}{(\Delta y)^2} \pm G_j F_j h_j \frac{1}{h(\Delta y)^2},$$

$$\rho_j F_j \Omega_{2j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{5j}^2 = E_j F_j \frac{4}{(\Delta y)^2} \pm E_j F_j h_j \frac{1}{h(\Delta y)^2},$$

$$\rho_j F_j \Omega_{3j}^2 = k_j^2 G_j F_j \left[\frac{4}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{h \Delta y} \right],$$

$$\rho_j F_j \left(h_j^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \Omega_{4j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{1j}^2 = G_j I_{crj} \frac{4}{(\Delta y)^2},$$

$$\rho_j F_j \left(h_j^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \Omega_{5j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{2j}^2 = E_j I_{2j} \frac{4}{(\Delta y)^2} + k_1^2 G_j F_j \left(\frac{h}{\Delta y} + 1 - \frac{h}{k_{2j}} \right).$$

3.4. Чисельний алгоритм розв'язку двовимірних динамічних задач теорії тришарових циліндричних оболонок з дискретним наповнювачем (для рівнянь коливань адаптера)

В підрозділі 2.1.4 наведені рівняння коливань тришарових циліндричних оболонок кругового перерізу з дискретним ребристим наповнювачем, які описують динамічну поведінку адаптера. Виходячи з цього, будуємо чисельний алгоритм розв'язку двовимірних динамічних задач теорії тришарових циліндричних оболонок з дискретним ребристим наповнювачем.

Рівняння коливань вказаної тришарової циліндричної оболонки можна записати у вигляді:

- рівняння коливань для внутрішньої і зовнішньої обшивок в гладкій області

$$\frac{\partial T_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial S^k}{\partial y} + P_1^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial S^k}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}^k}{R_k} + P_2^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13}^k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}^k}{\partial y} - \frac{T_{22}^k}{R_k} + P_3^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial H^k}{\partial y} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial y} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{13}^k = T_{13}^k + T_{11}^k \theta_1^k + S^k \theta_2^k,$$

$$\bar{T}_{23}^k = T_{23}^k + T_{22}^k \theta_2^k + S^k \theta_1^k, \quad k = 1, 2;$$

- рівняння коливань для i -го дискретного заповнювача, що розташований вздовж вісі ОХ, в даній циліндричній структурі мають наступний вигляд

$$[S]_i + \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}, \quad (3.54)$$

$$[T_{22}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2},$$

$$[\bar{T}_{23}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2},$$

$$[H]_i + \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + = \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2},$$

$$[M_{22}]_i + \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} = \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i} \theta_{2i},$$

$$\bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i} \theta_{1i};$$

- рівняння коливань для j -го дискретного елемента, який розміщений вздовж вісі ОУ мають вигляд

$$[T_{11}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad (3.55)$$

$$[S]_j + \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + k_{2j} \bar{T}_{23j} + = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2},$$

$$[T_{13}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - k_{2j} T_{22j} + = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2},$$

$$[M_{11}]_j + \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

$$[H]_j + \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

Зв'язок між величинами зусиль – моментів і відповідних величин деформацій для обшивок визначається згідно формул

$$T_{11}^k = B_{11}^k (\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k), \quad T_{22}^k = B_{22}^k (\varepsilon_{22}^k + \nu_{12}^k \varepsilon_{11}^k), \quad (3.56)$$

$$S^k = B_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad T_{13}^k = B_{13}^k \varepsilon_{13}^k, \quad T_{23}^k = B_{23}^k \varepsilon_{23}^k,$$

$$M_{11}^k = D_{11}^k (\kappa_{11}^k + \nu_{21}^k \kappa_{22}^k), \quad M_{22}^k = D_{22}^k (\kappa_{22}^k + \nu_{12}^k \kappa_{11}^k),$$

$$S^k = B_{12}^k \varepsilon_{12}^k, \quad H^k = D_{12}^k \kappa_{12}^k, \quad k = 1, 2;$$

де

$$B_{11}^k = \frac{E_1^k h_k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad B_{22}^k = \frac{E_2^k h_k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k},$$

$$B_{12}^k = G_{12}^k h_k, \quad B_{13}^k = K_T^2 G_{13}^k h_k, \quad B_{23}^k = K_T^2 G_{23}^k h_k,$$

$$D_{11}^k = \frac{E_1^k h_k^3}{12(1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}, \quad D_{22}^k = \frac{E_2^k h_k^3}{12(1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}, \quad D_{12}^k = G_{12}^k \frac{h_k^3}{12},$$

де K_T^2 – інтегральний коефіцієнт зсуву по товщині в теорії пластин і оболонок типу Тимошенка.

Величини деформацій пов'язані з величинами компонент узагальненого вектора переміщень обшивок формулами

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2} [\theta_1^k]^2, \quad (3.57)$$

$$\varepsilon_{22}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial y} + \frac{u_3^k}{R_k} + \frac{1}{2} [\theta_2^k]^2,$$

$$\varepsilon_{12}^k = \frac{\partial u_2^k}{\partial x} + \frac{\partial u_1^k}{\partial y} + \theta_1^k \theta_2^k, \quad \varepsilon_{13}^k = \varphi_1^k + \theta_1^k,$$

$$\varepsilon_{23}^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial y} + \varphi_2^k - \frac{u_2^k}{R_k}, \quad \kappa_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x},$$

$$\kappa_{22}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial y}, \quad \kappa_{12}^k = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial y},$$

$$\theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x}, \quad \theta_2^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial y} - \frac{u_1^k}{R_k}.$$

Для величин зусиль – моментів i -го дискретного елемента мають місце наступні формули

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}, \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}, \quad (3.58)$$

$$T_{13i} = K_{Ti}^2 G_i F_i \varepsilon_{13i},$$

$$M_{11i} = E_i I_{1i} \kappa_{11i}, \quad M_{12i} = G_i I_{kri} \kappa_{12i},$$

де

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_{1i}]^2 + \frac{1}{2}[\theta_{2i}]^2, \quad (3.59)$$

$$\varepsilon_{12i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_{1i} + \theta_{1i},$$

$$\theta_{2i} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial x}, \quad \theta_{1i} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial x},$$

$$\kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x}, \quad \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial x},$$

де K_{Ti}^2 – коефіцієнт зсуву в теорії стержнів Тимошенка.

Для величин зусиль – моментів j -го дискретного елемента, який направлений вздовж осі ОУ, мають місце наступні

$$T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j}, \quad T_{21j} = G_j F_j \varepsilon_{21j}, \quad (3.60)$$

$$T_{23j} = K_{Tj}^2 G_j F_j \varepsilon_{23j},$$

$$M_{22j} = E_j I_{2j} \kappa_{22j}, \quad M_{21j} = G_j I_{krj} \kappa_{21j},$$

де

$$\varepsilon_{22j} = \frac{\partial u_{2j}}{\partial y} + \frac{1}{2} [\theta_{1j}]^2 + \frac{1}{2} [\theta_{2j}]^2, \quad (3.61)$$

$$\varepsilon_{21j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}, \quad \varepsilon_{23j} = \varphi_{2j} + \theta_{2j},$$

$$\theta_{1j} = \frac{\partial u_{1j}}{\partial y}, \quad \theta_{2j} = \frac{\partial u_{3j}}{\partial y} - \frac{u_{2j}}{R_j},$$

$$\kappa_{22j} = \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y}, \quad \kappa_{21j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y},$$

де K_{Tj}^2 – коефіцієнт зсуву в теорії стержнів Тимошенка.

Зв'язок між компонентами векторів переміщень, що описують напружено–деформований стан обшивок, і відповідними величинами дискретних підкріплюючих елементів записуються згідно формул при $\alpha_1 = x$, $\alpha_{2i} = y_i$ і при $\alpha_2 = y$, $\alpha_{1j} = x_j$:

– для обшивок і дискретних повздовжніх ребер наповнювача

$$u_{1i}(\alpha_1) = u_1^k(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm H_i^k \varphi_1^k(\alpha_1, \alpha_{2i}), \quad (3.62)$$

$$u_{2i}(\alpha_1) = u_2^k(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm H_i^k \varphi_2^k(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$u_{3i}(\alpha_1) = u_3^k(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$\varphi_{1i}(\alpha_1) = \varphi_1^k(\alpha_1, \alpha_{2i}),$$

$$\varphi_{2i}(\alpha_1) = \varphi_2^k(\alpha_1, \alpha_{2i}), \quad k = 1, 2;$$

– для обшивок і дискретних поперечних ребер наповнювача

$$u_{1j}(\alpha_2) = u_2^k(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm H_j^k \varphi_2^k(\alpha_{1j}, \alpha_2), \quad (3.63)$$

$$u_{2j}(\alpha_2) = u_1^k(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm H_j^k \varphi_1^k(\alpha_{1j}, \alpha_2),$$

$$u_{3j}(\alpha_2) = u_3^k(\alpha_{1j}, \alpha_2),$$

$$\varphi_{1j}(\alpha_2) = \varphi_2^k(\alpha_{1j}, \alpha_2),$$

$$\varphi_{2j}(\alpha_2) = \varphi_1^k(\alpha_{1j}, \alpha_2), \quad k = 1, 2.$$

В співвідношеннях (3.62), (3.63) $H_i^k = 0,5(h_i + h_k)$, $H_j^k = 0,5(h_j + h_k)$, $k = 1, 2$; h_i, h_j – висоти i -го і j -го дискретного наповнювача; h_k ($k = 1, 2$) – товщини обшивок, α_{2i} – координатна лінія проектування центрів ваги поперечного зрізу i -го повздовжнього дискретного елемента наповнювача, направленою вздовж осі α_1 на відповідну серединну поверхню обшивки; α_{1j} – координатна лінія проектування центрів ваги поперечного зрізу j -го поперечного дискретного елемента наповнювача, направленою вздовж осі α_2 та відповідну серединну поверхню обшивки.

В рівняннях (3.59), (3.61) величини в квадратних дужках відповідають зусиллям–моментам, що діють на відповідний дискретний i -й (або j -й) підкріплюючий елемент, який розташовано вздовж осі ОХ (відповідно вісі ОУ)

$$[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-, \quad [\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-.$$

Побудову чисельного алгоритму почнемо з рівнянь коливань для обшивок.

Розглянемо область D , яка задається наступним чином

$$D_k = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 2\pi R_k, 0 \leq t \leq T\}.$$

В області D_k вводиться різницева сітка

$$\Omega = \Omega_{\Delta x \Delta y} \cdot \Omega_\tau,$$

де

$$\Omega_{\Delta x \Delta y} = \{(x_l, y_m) = (l\Delta x, m\Delta y), \Delta x = CL/L,$$

$$\Delta y = 2\pi R/M; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}\},$$

$$\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, \tau = T/N, n = \overline{0, N}\},$$

де позначення CL – відповідає величині довжини оболонки по осі OX ; L, M – кількість інтервалів розбиття по осям OX і OY відповідно.

Крім основної різницевої сітки, використовуються допоміжні різницеві сітки в дискретних точках $(x_{l\pm 1/2}, y_m)$, $(x_l, y_{m\pm 1/2})$, $(x_{l\pm 1/2}, y_{m\pm 1/2})$, де $x_{l\pm 1/2} = (l \pm 1/2)\Delta x$, $y_{m\pm 1/2} = (m \pm 1/2)\Delta y$.

Різницева сітка будується таким чином, щоб точки розривів попадали в цілі вузли. Використовуючи допоміжні різницеві сітки, застосовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь в області $\Omega_1 = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\}$, при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial T_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial S^k}{\partial y} + P_1^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt, \quad (3.64)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial S^k}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}^k}{R_k} + P_2^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial \bar{T}_{13}^k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}^k}{\partial y} - \frac{T_{22}^k}{R_k} + P_3^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial M_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial H^k}{\partial y} - T_{13}^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[\frac{\partial H^k}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial y} - T_{23}^k \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[\rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \bar{T}_{13}^k d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} (T_{13}^k + T_{11}^k \theta_1^k + S^k \theta_2^k) d\Omega_1 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \bar{T}_{23}^k d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} (T_{23}^k + T_{22}^k \theta_2^k + S^k \theta_1^k) d\Omega_1 dt, \quad k = 1, 2.$$

Після стандартних перетворень в (3.64), отримаємо різниці співвідношення, які апроксимують вихідні рівняння (3.33) в гладкій області

$$\frac{T_{11l+1/2,m}^{kn} - T_{11l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{S_{11l,m+1/2}^{kn} - S_{11l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} + \quad (3.65)$$

$$+ P_{1lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{1lm}^{kn})_{\bar{t}t},$$

$$\frac{S_{l+1/2,m}^{kn} - S_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} - T_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} +$$

$$+ \frac{\bar{T}_{23l,m+1/2}^{kn} + \bar{T}_{23l,m-1/2}^{kn}}{2R_k} + P_{2lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{2lm}^{kn})_{\bar{t}t},$$

$$\frac{\bar{T}_{13l+1/2,m}^{kn} - \bar{T}_{13l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{\bar{T}_{23l,m+1/2}^{kn} - \bar{T}_{23l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} -$$

$$- \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} + T_{22l,m-1/2}^{kn}}{2R_k} + P_{3lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{3lm}^{kn})_{\bar{t}t},$$

$$\frac{M_{11l+1/2,m}^{kn} - M_{11l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{H_{l,m+1/2}^{kn} - H_{l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} -$$

$$- \frac{T_{13l+1/2,m}^{kn} + T_{13l-1/2,m}^{kn}}{2} + m_{1lm}^{kn} = \rho_k \frac{h_k^3}{12} (\varphi_{1lm}^{kn})_{\bar{t}t},$$

$$\frac{H_{l+1/2,m}^{kn} - H_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{M_{22l,m+1/2}^{kn} - M_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} -$$

$$-\frac{T_{23l,m+1/2}^{kn} + T_{23l,m-1/2}^{kn}}{2} + m_{2lm}^{kn} = \rho_k \frac{h_k^3}{12} (\varphi_{2lm}^{kn})_{\bar{t}t},$$

$$\bar{T}_{13l\pm 1/2,m}^{kn} = T_{13l\pm 1/2,m}^{kn} + T_{11l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{1l\pm 1/2,m}^{kn} + S_{l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{2l\pm 1/2,m}^{kn},$$

$$\bar{T}_{23l,m\pm 1/2}^{kn} = T_{23l,m\pm 1/2}^{kn} + T_{22l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{2l,m\pm 1/2}^{kn} + S_{l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{1l,m\pm 1/2}^{kn},$$

де позначення різницевих похідних введені згідно [241]. Таким чином, в різницевих рівняннях компоненти узагальненого вектора переміщень віднесені до цілих вузлів різницевої сітки, а зусилля – моменти – до різницевої сітки з дробовими індексами $(x_{l\pm 1/2}, y_m)$ або $(x_l, y_{m\pm 1/2})$. Для узгодження величин зусиль – моментів в (3.65), проінтегруємо рівняння (3.56) в області

$$\Omega_2 = \{x_{l-1} \leq x \leq x_l, y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\} \text{ і}$$

$$\Omega_3 = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, y_{m-1} \leq y \leq y_m\} \text{ при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}.$$

В області Ω_2

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{11}^k (\varepsilon_{11}^k + \nu_{21}^k \varepsilon_{22}^k)] d\Omega_2 dt, \quad (3.66)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [S^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{12}^k \varepsilon_{12}^k] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\bar{T}_{13}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}^k + T_{11}^k \theta_1^k + S^k \theta_{22}^k] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{13}^k \varepsilon_{13}^k] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{11}^k (\kappa_{11}^k + \nu_{21}^k \kappa_{22}^k)] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [H^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{12}^k \kappa_{12}^k] d\Omega_2 dt.$$

В області Ω_3

$$\int_t \iint_{\Omega_3} [S^k] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [B_{12}^k \varepsilon_{12}^k] d\Omega_3 dt, \quad (3.67)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_3} [T_{22}^k] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [B_{22}^k (\varepsilon_{22}^k + \nu_{12}^k \varepsilon_{11}^k)] d\Omega_3 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_3} [\bar{T}_{23}^k] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [T_{23}^k + T_{22}^k \theta_2^k + S^k \theta_1^k] d\Omega_3 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_3} [H^k] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [D_{12}^k \kappa_{12}^k] d\Omega_3 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_3} [M_{22}^k] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [D_{22}^k (\kappa_{22}^k + \nu_{12}^k \kappa_{11}^k)] d\Omega_3 dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.66) і (3.67) отримаємо наступні різниці співвідношення, які зв'язують величини зусиль – моментів з відповідними величинами деформацій

$$T_{11l\pm 1/2,m}^{kn} = B_{11}^k (\varepsilon_{11l\pm 1/2,m}^{kn} + \nu_{21}^k \varepsilon_{22l\pm 1/2,m}^{kn}), \quad (3.68)$$

$$S_{l\pm 1/2,m}^{kn} = B_{12}^k \varepsilon_{12l\pm 1/2,m}^{kn},$$

$$\bar{T}_{13l\pm 1/2,m}^{kn} = T_{13l\pm 1/2,m}^{kn} + T_{11l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{1l\pm 1/2,m}^{kn} + S_{l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{2l\pm 1/2,m}^{kn},$$

$$T_{13l\pm 1/2,m}^{kn} = B_{13}^k \varepsilon_{13l\pm 1/2,m}^{kn},$$

$$M_{11l\pm 1/2,m}^{kn} = D_{11}^k (\kappa_{11l\pm 1/2,m}^{kn} + \nu_{21}^k \kappa_{22l\pm 1/2,m}^{kn}),$$

$$H_{l\pm 1/2,m}^{kn} = D_{12}^k \kappa_{12l\pm 1/2,m}^{kn};$$

$$S_{l,m\pm 1/2}^{kn} = B_{12}^k \varepsilon_{12l,m\pm 1/2}^{kn}, \quad (3.69)$$

$$T_{22l,m\pm 1/2}^{kn} = B_{22}^k (\varepsilon_{22l,m\pm 1/2}^{kn} + \nu_{12}^k \varepsilon_{11l,m\pm 1/2}^{kn}),$$

$$\bar{T}_{23l,m\pm 1/2}^{kn} = T_{23l,m\pm 1/2}^{kn} + T_{22l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{1l,m\pm 1/2}^{kn} + S_{l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{2l,m\pm 1/2}^{kn},$$

$$T_{23l,m\pm 1/2}^{kn} = B_{13}^k \varepsilon_{13l,m\pm 1/2}^{kn},$$

$$M_{22l,m\pm 1/2}^{kn} = D_{22}^k (\kappa_{22l,m\pm 1/2}^{kn} + \nu_{12}^k \kappa_{11l,m\pm 1/2}^{kn}),$$

$$H_{l,m\pm 1/2}^{kn} = D_{12}^k \kappa_{12l,m\pm 1/2}^{kn}.$$

В співвідношеннях (3.68), (3.69) величини з індексами $(l+1/2, m)$ і $(l, m+1/2)$ отримані інтегруванням рівнянь (3.56) в областях $\{x_l \leq x \leq x_{l+1}, y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2}\}$ і $\{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, y_m \leq y \leq y_{m+1}\}$ при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Для отримання узгоджених величин деформацій в співвідношеннях (3.68), (3.69) проінтегруємо співвідношення (3.57) по областям Ω_2 і Ω_3 відповідно при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2} [\theta_1^k]^2 \right] d\Omega_2 dt, \quad (3.70)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{22}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_2^k}{\partial y} + \frac{1}{2} [\theta_2^k]^2 + \frac{w_3^k}{R_k} \right] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{12}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_1^k}{\partial y} + \frac{\partial u_2^k}{\partial x} + \theta_1^k \theta_2^k + \frac{w_3^k}{R_k} \right] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\varepsilon_{13}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [\varphi_1^k + \theta_1^k] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\kappa_{11}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} \right] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\kappa_{22}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial \varphi_2^k}{\partial y} \right] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [\kappa_{12}^k] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial x} \right] d\Omega_2 dt,$$

$$\begin{aligned}
\int_t \iint_{\Omega_2} [\theta_1^k] d\Omega_2 dt &= \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_3^k}{\partial x} \right] d\Omega_2 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_2} [\theta_2^k] d\Omega_2 dt &= \int_t \iint_{\Omega_2} \left[\frac{\partial u_3^k}{\partial y} - \frac{u_2^k}{R_k} \right] d\Omega_2 dt; \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\varepsilon_{11}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2} [\theta_1^k]^2 \right] d\Omega_3 dt, \tag{3.71} \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\varepsilon_{22}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial u_3^k}{\partial y} + \frac{u_3^k}{R_k} + \frac{1}{2} [\theta_2^k]^2 \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\varepsilon_{12}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial u_1^k}{\partial y} + \frac{\partial u_2^k}{\partial x} + \theta_{11}^k \theta_2^k \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\varepsilon_{23}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} [\varphi_2^k + \theta_2^k] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\kappa_{11}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x} \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\kappa_{22}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial \varphi_2^k}{\partial y} \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\kappa_{12}^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial \varphi_1^k}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial x} \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\theta_1^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial u_3^k}{\partial x} \right] d\Omega_3 dt, \\
\int_t \iint_{\Omega_3} [\theta_2^k] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} \left[\frac{\partial u_3^k}{\partial y} - \frac{u_2^k}{R_k} \right] d\Omega_3 dt.
\end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в (3.70), (3.71) отримаємо наступні різниці співвідношення, які зв'язують відповідні деформації з компонентами узагальненого вектора переміщень

$$\varepsilon_{11l+1/2,m}^{kn} = \frac{u_{1l+1,m}^{kn} - u_{1l,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1l+1/2,m}^{kn}]^2, \quad (3.72)$$

$$\varepsilon_{11l-1/2,m}^{kn} = \frac{u_{1l,m}^{kn} - u_{1l-1,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1l-1/2,m}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{22l+1/2,m}^{kn} = \frac{u_{2l+1/2,m+1/2}^{kn} - u_{2l+1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{u_{3l+1,m}^{kn} + u_{3l,m}^{kn}}{2R_k} + \frac{1}{2} [\theta_{2l+1/2,m}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{22l-1/2,m}^{kn} = \frac{u_{2l-1/2,m+1/2}^{kn} - u_{2l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} +$$

$$+ \frac{u_{3l,m}^{kn} + u_{3l-1,m}^{kn}}{2R_k} + \frac{1}{2} [\theta_{2l-1/2,m}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{13l+1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{1l+1,m}^{kn} + \varphi_{1l,m}^{kn}}{2} + \theta_{1l+1/2,m}^{kn},$$

$$\varepsilon_{13l-1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{1l,m}^{kn} + \varphi_{1l-1,m}^{kn}}{2} + \theta_{1l-1/2,m}^{kn},$$

$$\varepsilon_{13l+1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{1l+1,m}^{kn} + \varphi_{1l,m}^{kn}}{2} + \theta_{1l+1/2,m}^{kn},$$

$$\theta_{1l+1/2,m}^{kn} = \frac{u_{3l+1,m}^{kn} - u_{3l,m}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\theta_{1l-1/2,m}^{kn} = \frac{u_{3l,m}^{kn} - u_{3l-1,m}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\kappa_{11l+1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{1l+1,m}^{kn} - \varphi_{1l,m}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\kappa_{11l-1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{1l,m}^{kn} - \varphi_{1l-1,m}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\kappa_{22l+1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{2l+1/2,m+1/2}^{kn} - \varphi_{2l+1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta y},$$

$$\kappa_{22l-1/2,m}^{kn} = \frac{\varphi_{2l-1/2,m+1/2}^{kn} - \varphi_{2l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta y},$$

$$\varepsilon_{11l,m+1/2}^{kn} = \frac{u_{1l+1,m+1/2}^{kn} - u_{1l-1/2,m+1/2}^{kn}}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1l,m+1/2}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{11l,m-1/2}^{kn} = \frac{u_{1l+1,m-1/2}^{kn} - u_{1l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta x} + \frac{1}{2} [\theta_{1l,m-1/2}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{22l,m+1/2}^{kn} = \frac{u_{2l,m+1}^{kn} - u_{2l,m}^{kn}}{\Delta y} + \frac{u_{3l,m+1}^{kn} + u_{3l,m}^{kn}}{2R_k} + \frac{1}{2} [\theta_{2l,m+1/2}^{kn}]^2,$$

$$\varepsilon_{22l,m-1/2}^{kn} = \frac{u_{2l,m}^{kn} - u_{2l,m-1}^{kn}}{\Delta y} + \frac{u_{3l,m}^{kn} + u_{3l,m-1}^{kn}}{2R_k} + \frac{1}{2} [\theta_{2l,m-1/2}^{kn}]^2,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11l,m+1/2}^{kn} &= \frac{u_{1l,m+1}^{kn} - u_{1l,m}^{kn}}{\Delta y} + \frac{u_{2l+1/2,m+1/2}^{kn} - u_{2l-1/2,m+1/2}^{kn}}{\Delta x} + \\ &\quad + \theta_{1l,m+1/2}^{kn} \theta_{2l,m+1/2}^{kn}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12l,m-1/2}^{kn} &= \frac{u_{1l,m}^{kn} - u_{1l,m-1}^{kn}}{\Delta y} + \frac{u_{2l+1/2,m-1/2}^{kn} - u_{2l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta x} + \\ &\quad + \theta_{1l,m-1/2}^{kn} \theta_{2l,m-1/2}^{kn}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{23l,m+1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{2l,m+1}^{kn} + \varphi_{2l,m}^{kn}}{2} + \theta_{2l,m+1/2}^{kn},$$

$$\varepsilon_{23l,m-1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{2l,m}^{kn} + \varphi_{2l,m-1}^{kn}}{2} + \theta_{2l,m-1/2}^{kn},$$

$$\theta_{1l,m+1/2}^{kn} = \frac{u_{3l+1/2,m+1/2}^{kn} - u_{3l-1/2,m+1/2}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\theta_{1l,m-1/2}^{kn} = \frac{u_{3l+1/2,m-1/2}^{kn} - u_{3l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\theta_{2l,m+1/2}^{kn} = \frac{u_{3l,m+1}^{kn} - u_{3l,m}^{kn}}{\Delta y} - \frac{1}{2R_k} (u_{2l,m+1}^{kn} + u_{2l,m}^{kn}),$$

$$\theta_{2l,m-1/2}^{kn} = \frac{u_{3l,m}^{kn} - u_{3l,m-1}^{kn}}{\Delta y} - \frac{1}{2R_k} (u_{2l,m}^{kn} + u_{2l,m-1}^{kn}),$$

$$\kappa_{11l,m+1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{1l+1/2,m+1/2}^{kn} - \varphi_{1l-1/2,m+1/2}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\kappa_{11l,m-1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{1l+1/2,m-1/2}^{kn} - \varphi_{1l-1/2,m-1/2}^{kn}}{\Delta x},$$

$$\kappa_{22l,m+1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{2l,m+1}^{kn} - \varphi_{2l,m}^{kn}}{\Delta y},$$

$$\kappa_{22l,m-1/2}^{kn} = \frac{\varphi_{2l,m}^{kn} - \varphi_{2l,m-1}^{kn}}{\Delta y}.$$

Враховуючи, що лінії розривів попадають в цілі точки різницевої сітки, різницевий алгоритм для i -го повздожнього ребра будується наступним чином. По аналогії з різницевою сіткою для гладкої області будується різницева сітка в областях

$$\Omega_{1i} = \{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}\}, \quad \Omega_{2i} = \{x_{l-1} \leq x \leq x_l\}, \quad \Omega_{3i} = \{x_l \leq x \leq x_{l+1}\}$$

при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Проінтегруємо рівняння коливань (3.54) по області Ω_{1i} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt, & (3.73) \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [T_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [\bar{T}_{23}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \\ &= \rho_i I_{1i} \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} + [M_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i I_{kri} \int_t \int_{\Omega_{1i}} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2} d\Omega_{1i} dt. \end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в (3.73), отримаємо наступні різницеві співвідношення для рівнянь (3.54)

$$\begin{aligned} \frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta x} + [S]_{il}^n &= \rho_i F_i (u_{1il}^n)_{\bar{t}t}, & (3.74) \\ \frac{\bar{T}_{12il+1/2}^n - \bar{T}_{12il-1/2}^n}{\Delta x} + [T_{22}]_{il}^n &= \rho_i F_i (u_{2il}^n)_{\bar{t}t}, \\ \frac{\bar{T}_{13il+1/2}^n - \bar{T}_{13il-1/2}^n}{\Delta x} + [\bar{T}_{23}]_{il}^n &= \rho_i F_i (u_{3k,l}^n)_{\bar{t}t}, \\ \frac{M_{11il+1/2}^n - M_{11il-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{13il+1/2}^n - T_{13il-1/2}^n}{\Delta x} + [H]_{il}^n &= \rho_i I_{1i} (\varphi_{1il}^n)_{\bar{t}t}, \end{aligned}$$

$$\frac{M_{12il+1/2}^n - M_{12il-1/2}^n}{\Delta x} + [M_{22}]_{il}^n = \rho_i I_{kri} (\varphi_{2il}^n)_{it}.$$

Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів проінтегруємо рівняння (3.59) в областях Ω_{2i} , Ω_{3i} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{11i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i F_i \varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt, & (3.75) \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\bar{T}_{12i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{12i} + T_{11i} \theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{12i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i F_i \varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\bar{T}_{13i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{13i} + T_{11i} \theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{11i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i I_{li} \kappa_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{12i}] d\Omega_{2i} dt &= \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i I_{kri} \kappa_{12i}] d\Omega_{2i} dt. \end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в (3.75), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$\begin{aligned} T_{11il\pm 1/2}^n &= E_i F_i \varepsilon_{11il\pm 1/2}^n, & (3.76) \\ \bar{T}_{12il\pm 1/2}^n &= T_{12il\pm 1/2}^n + T_{11il\pm 1/2}^n \theta_{2il\pm 1/2}^n, \\ T_{12il\pm 1/2}^n &= G_i F_i \varepsilon_{12il\pm 1/2}^n, \\ \bar{T}_{13il\pm 1/2}^n &= T_{13il\pm 1/2}^n + T_{11il\pm 1/2}^n \theta_{1il\pm 1/2}^n, \\ T_{13il\pm 1/2}^n &= K_i^2 G_i F_i \varepsilon_{13il\pm 1/2}^n, \\ M_{11il\pm 1/2}^n &= E_i I_{li} \kappa_{11il\pm 1/2}^n, \\ M_{12il\pm 1/2}^n &= G_i I_{kri} \kappa_{12il\pm 1/2}^n. \end{aligned}$$

Для отримання різницевих співвідношень, які зв'язують деформації з відповідними переміщеннями, проінтегруємо співвідношення (3.59) по області Ω_{2i} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial u_{1i}}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_{1i}^2 + \frac{1}{2} \theta_{2i}^2 \right] d\Omega_{2i} dt, \quad (3.77)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{13i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varphi_{1i} + \theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \frac{\partial u_{3i}}{\partial x} d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial u_{2i}}{\partial x} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\kappa_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial x} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\kappa_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[\frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial x} \right] d\Omega_{2i} dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.77), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$\varepsilon_{11il-1/2}^n = \frac{u_{1il}^n - u_{1il-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\left(\theta_{1il-1/2}^n \right)^2 + \left(\theta_{2il-1/2}^n \right)^2 \right], \quad (3.78)$$

$$\varepsilon_{12il-1/2}^n = \theta_{2il-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{13il-1/2}^n = \frac{\varphi_{1il}^n - \varphi_{1il-1}^n}{\Delta x} + \theta_{1il-1/2}^n,$$

$$\theta_{2il-1/2}^n = \frac{u_{2il}^n - u_{2il-1}^n}{\Delta x}, \quad \theta_{1il-1/2}^n = \frac{u_{3il}^n - u_{3il-1}^n}{\Delta x},$$

$$\kappa_{11il-1/2}^n = \frac{\varphi_{1il}^n - \varphi_{1il-1}^n}{\Delta x}, \quad \kappa_{12il-1/2}^n = \frac{\varphi_{2il}^n - \varphi_{2il-1}^n}{\Delta x}.$$

Інтегрування співвідношень (3.59) по області Ω_{3i} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ приводить до наступних різницевих співвідношень

$$\varepsilon_{11il+1/2}^n = \frac{u_{1il+1}^n - u_{1il}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\left(\theta_{1il+1/2}^n \right)^2 + \left(\theta_{2il+1/2}^n \right)^2 \right], \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{12il+1/2}^n = \theta_{2il+1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{13il+1/2}^n = \frac{\varphi_{1l+1}^n + \varphi_{1il}^n}{2} + \theta_{1il+1/2}^n,$$

$$\theta_{2il+1/2}^n = \frac{u_{2il+1}^n - u_{2il}^n}{\Delta x}, \quad \theta_{1il+1/2}^n = \frac{u_{3il+1}^n - u_{3il}^n}{\Delta x},$$

$$\kappa_{11il+1/2}^n = \frac{\varphi_{1il+1}^n - \varphi_{1il}^n}{\Delta x}, \quad \kappa_{12il+1/2}^n = \frac{\varphi_{2il+1}^n - \varphi_{2il}^n}{\Delta x}.$$

Для побудови різницевих співвідношень для j -го підкріплюючого ребра будуються різницеві сітки в областях $\Omega_{1j} = \{ y_{m-1/2} \leq y \leq y_{m+1/2} \}$, $\Omega_{2j} = \{ y_{m-1} \leq y \leq y_m \}$ і $\Omega_{3j} = \{ y_m \leq y \leq y_{m+1} \}$ при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

Проінтегруємо рівняння коливань (3.55) по області Ω_{1j} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$

$$\int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + [T_{11}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt = \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt, \quad (3.80)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S]_j \right\} d\Omega_{1j} dt = \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [\bar{T}_{13}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_j F_j \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt, \\
\int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} + [M_{11}]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \rho_j I_{krj} \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt, \\
\int_t \int_{\Omega_{1j}} \left\{ \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H]_j \right\} d\Omega_{1j} dt &= \\
&= \rho_j I_{2j} \int_t \int_{\Omega_{1j}} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} d\Omega_{1j} dt.
\end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в (3.80), отримаємо наступні різниці співвідношення для рівнянь (3.55)

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{T}_{21jm+1/2}^n - \bar{T}_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [T_{11}]_{jm}^n = \rho_j F_j (u_{1jm}^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.81) \\
&\frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{\bar{T}_{23jm+1/2}^n + \bar{T}_{23jm-1/2}^n}{2R_j} + \\
&\quad + [S]_{jm}^n = \rho_j F_j (u_{2jm}^n)_{\bar{t}t}, \\
&\frac{\bar{T}_{23jm+1/2}^n - \bar{T}_{23jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{T_{22jm+1/2}^n + T_{22jm-1/2}^n}{2R_j} + \\
&\quad + [\bar{T}_{13}]_{jm}^n = \rho_j F_j (u_{3jm}^n)_{\bar{t}t}, \\
&\frac{M_{21jm+1/2}^n - M_{21jm-1/2}^n}{\Delta y} + [M_{11}]_{jm}^n = \rho_j I_{krj} (\varphi_{1jm}^n)_{\bar{t}t}, \\
&\frac{M_{22jm+1/2}^n - M_{22jm-1/2}^n}{\Delta y} - \frac{T_{23jm+1/2}^n + T_{23jm-1/2}^n}{2} + \\
&\quad + [H]_{jm}^n = \rho_j I_{2j} (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{t}t}.
\end{aligned}$$

Для отримання узгоджених величин зусиль – моментів проінтегруємо рівняння (3.60) відповідно в областях Ω_{2j} , Ω_{3j} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\bar{T}_{21j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [T_{21j} + T_{22j}\theta_{1j}] d\Omega_{2j} dt, \quad (3.82)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [T_{21j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [G_j F_j \varepsilon_{21j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [T_{22j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [E_j F_j \varepsilon_{22j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\bar{T}_{23j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [T_{23j} + T_{22j}\theta_{2j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [M_{21j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [G_j I_{krj} \kappa_{21j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [M_{22j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [E_j I_{2j} \kappa_{22j}] d\Omega_{2j} dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.82), отримаємо наступні різниці співвідношення

$$\bar{T}_{21jm\pm 1/2}^n = T_{21jm\pm 1/2}^n + T_{22jm\pm 1/2}^n \theta_{1jm\pm 1/2}^n, \quad (3.83)$$

$$T_{21jm\pm 1/2}^n = G_j F_j \varepsilon_{21jm\pm 1/2}^n,$$

$$T_{22jm\pm 1/2}^n = E_j F_j \varepsilon_{22jm\pm 1/2}^n,$$

$$T_{23jm\pm 1/2}^n = G_j F_j K_j^2 \varepsilon_{23jm\pm 1/2}^n,$$

$$\bar{T}_{23jm\pm 1/2}^n = T_{23jm\pm 1/2}^n + T_{22jm\pm 1/2}^n \theta_{2jm\pm 1/2}^n,$$

$$M_{21jm\pm 1/2}^n = G_j I_{krj} \kappa_{21jm\pm 1/2}^n,$$

$$M_{22jm\pm 1/2}^n = E_j I_{2j} \kappa_{22jm\pm 1/2}^n.$$

Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів проінтегруємо рівняння (3.61) відповідно в області Ω_{2j} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$.

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\varepsilon_{22j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} \left[\frac{\partial u_{2j}}{\partial y} + \frac{u_{3j}}{R_j} + \frac{1}{2} [\theta_{1j}^2 + \theta_{2j}^2] \right] d\Omega_{2j} dt, \quad (3.84)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\varepsilon_{21j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [\theta_{1j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\varepsilon_{23j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} [\varphi_{2j} + \theta_{2j}] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\theta_{1j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} \frac{\partial u_{1j}}{\partial y} d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\theta_{2j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} \left[\frac{\partial u_{3j}}{\partial y} - \frac{u_{2j}}{R_j} \right] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\kappa_{21j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} \left[\frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial y} \right] d\Omega_{2j} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2j}} [\kappa_{22j}] d\Omega_{2j} dt = \int_t \int_{\Omega_{2j}} \left[\frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial y} \right] d\Omega_{2j} dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.84), отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$\varepsilon_{22jm-1/2}^n = \frac{u_{2jm}^n - u_{2jm-1}^n}{\Delta y} + \frac{u_{3jm}^n + u_{3jm-1}^n}{2R_j} + \quad (3.85)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(\theta_{1jm-1/2}^n)^2 + (\theta_{2jm-1/2}^n)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{21jm-1/2}^n = \theta_{21jm-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{23jm-1/2}^n = \frac{\varphi_{2jm}^n - \varphi_{2jm-1}^n}{\Delta y} + \theta_{2jm-1/2}^n,$$

$$\theta_{1jm-1/2}^n = \frac{u_{1jm}^n - u_{1jm-1}^n}{\Delta y},$$

$$\theta_{2jm-1/2}^n = \frac{u_{3jm}^n - u_{3jm-1}^n}{\Delta y} - \frac{1}{R_j} \left(\frac{u_{2jm}^n + u_{2jm-1}^n}{2} \right),$$

$$\kappa_{21jm-1/2}^n = \frac{\varphi_{1jm}^n - \varphi_{1jm-1}^n}{\Delta y}, \quad \kappa_{22jm-1/2}^n = \frac{\varphi_{2jm}^n - \varphi_{21jm-1}^n}{\Delta y}.$$

Інтегрування співвідношень (3.61) по області Ω_{3j} при $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ приводить до наступних різницевих співвідношень

$$\varepsilon_{22jm+1/2}^n = \frac{u_{2jm+1}^n - u_{2jm}^n}{\Delta y} + \frac{u_{3jm}^n + u_{3jm+1}^n}{2R_j} + \quad (3.86)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\theta_{1jm+1/2}^n \right)^2 + \left(\theta_{2jm+1/2}^n \right)^2 \right],$$

$$\varepsilon_{21jm+1/2}^n = \theta_{1jm+1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{23jm+1/2}^n = \frac{\varphi_{2jm+1}^n + \varphi_{2jm}^n}{2} + \theta_{2jm+1/2}^n,$$

$$\theta_{1jm+1/2}^n = \frac{u_{1jm+1}^n - u_{1jm}^n}{\Delta y},$$

$$\theta_{2jm+1/2}^n = \frac{u_{3jm+1}^n - u_{3jm}^n}{\Delta y} - \frac{1}{R_j} \left(\frac{u_{2jm+1}^n + u_{2jm}^n}{2} \right),$$

$$\kappa_{21jm+1/2}^n = \frac{\varphi_{1jm+1}^n - \varphi_{1jm}^n}{\Delta y}, \quad \kappa_{22jm+1/2}^n = \frac{\varphi_{2jm+1}^n - \varphi_{2jm}^n}{\Delta y}.$$

Таким чином, чисельний алгоритм розв'язування задач теорії циліндричних оболонок з дискретним повздожньо – поперечним набором ребер складається з наступних етапів:

1) знаходження розв'язку в гладкій області

- за відомими величинами узагальненого вектора переміщень на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій по формул (3.60);

- за обчисленими величинами деформацій згідно формул (3.72) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів за формулами (3.68), (3.69);

- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів за формулами (3.68), (3.69) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень згідно різницевих рівнянь коливань (3.65) на $(n + 1)$ -му часовому шарі;

2) знаходження різницевого розв'язку на i -й лінії розриву вздовж осі ОХ

- за відомим величинам узагальненого вектора переміщень лінії центра ваги поперечного перерізу i -го дискретного ребра на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій згідно формул (3.78), (3.79);

- за обчисленими величинам деформацій згідно формул (3.78), (3.79) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для i -го дискретного елемента за формулами (3.76);

- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів згідно формул (3.76) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень згідно різницевих рівнянь коливань i -го підкріплюючого елемента по формулам (3.74) на $(n + 1)$ -му часовому шарі;

- виходячи з результатів розрахунків за формулами (3.74) згідно формул (3.62) відбувається перерахунок компонентів узагальненого вектора лінії центра ваги i -го підкріплюючого елемента на відповідні лінії серединних поверхонь внутрішньої і зовнішньої обшивок;

3) знаходження різницевого розв'язку на j -й лінії розриву вздовж осі ОУ

- за відомими величинам узагальненого вектора переміщень лінії центра ваги поперечного перерізу j -го дискретного ребра на n -му часовому шарі знаходяться величини деформацій згідно формул (3.85), (3.86);

– по обчисленим величинам деформацій згідно формул (3.85), (3.86) на n -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для j -го дискретного елемента за формулами (3.83);

– виходячи з отриманих величин зусиль – моментів згідно формул (3.83) на n -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень згідно різницевих рівнянь коливань j -го підкріплюючого елемента по формулам (3.81) на $(n + 1)$ -му часовому шарі;

– виходячи з результатів розрахунків по формулам (3.81) згідно формул (3.62) відбувається перерахунок компонентів узагальненого вектора лінії центра ваги j -го підкріплюючого елемента на відповідні лінії серединних поверхонь внутрішньої і зовнішньої обшивок.

В матрично – векторному вигляді різницеві рівняння (3.65)–(3.85) можна представити наступним чином

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t), \quad (3.87)$$

де $[M]$ і $[C]$ – матриці мас і жорсткості дискретної різницевої системи, \bar{U} і \bar{F} – вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження.

Вважаючи, що матриця $[M]$ не вироджена, запишемо рівняння (3.87) у вигляді

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t), \quad (3.88)$$

де матриця $[D] = [M]^{-1}[C]$.

В роботі [242] встановлено, що при використанні явної скінчено – різницевої схеми для інтегрування рівнянь необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь є умова наступного вигляду

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max} = 2\sqrt{\beta(D)},$$

де Ω_{\max} – максимальна частота власних коливань різницевої системи; $\beta(D)$ – верхня межа спектру матриці $[D]$.

Використовуючи для оцінки значення $\beta(D)$ зверху теорему Гершгоріна, отримаємо

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max_j \sum_j |d_{ij}|, \quad (3.89)$$

де d_{ij} – елементи матриці $[D]$.

Згідно позначень в рівняннях (3.65)–(3.86), умова стійкості різницевих рівнянь (3.89) має вигляд

$$\tau \leq 2 / \Omega_{\max},$$

де Ω_{\max} визначається виходячи з наступних нерівностей

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max i}^2, \Omega_{\max j}^2),$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max([\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2, [\Omega_4^k]^2, [\Omega_5^k]^2), \quad k = 1, 2,$$

$$\Omega_{\max i}^2 \leq \max(\Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2), \quad i = \overline{1, I},$$

$$\Omega_{\max j}^2 \leq \max(\Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2, \Omega_{5j}^2), \quad j = \overline{1, J},$$

де величини $[\Omega_1^k]^2, [\Omega_2^k]^2, [\Omega_3^k]^2, [\Omega_4^k]^2, [\Omega_5^k]^2, \Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2, \Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2, \Omega_{5j}^2$ визначаються згідно співвідношень

$$[\Omega_1^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left\{ \left[\frac{4}{(\Delta x)^2} + \nu_{21}^k \left(\frac{1}{R_k \Delta x} + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right) \right] + \frac{G_{12}^k (1 - \nu_{21}^k \nu_{12}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} \right] \right\},$$

$$[\Omega_2^k]^2 = \frac{E_1^k}{\rho_k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left\{ \frac{G_{12}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_2^k}{E_1^k} \left[\frac{1}{R_k \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} + \nu_{12}^k \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right] + \\
& + \frac{G_{13}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{R_k \Delta y} + \frac{1}{R_k h_k} - \frac{1}{R_k^2} \right] \Bigg\}, \\
[\Omega_3^k]^2 &= \frac{E_1^k}{\rho_k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left\{ \frac{G_{13}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x h_k} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{E_2^k}{E_1^k} \left[\frac{1}{R_k^2} + \frac{1}{R_k \Delta y} + \nu_{12}^k \frac{1}{R_k \Delta x} \right] \right\}, \\
[\Omega_4^k]^2 &= \frac{E_1^k}{\rho_k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left\{ \left[\nu_{12}^k \frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\
& + \frac{G_{12}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta y)^2} \right] + \\
& \left. + \frac{12 G_{13}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x h_k} + \frac{1}{h_k^2} \right] \right\}, \\
[\Omega_5^k]^2 &= \frac{E_1^k}{\rho_k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)} \left\{ \frac{G_{12}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} + \frac{4}{(\Delta x)^2} \right] + \right. \\
& + \frac{E_2^k}{E_1^k} \left[\frac{4}{(\Delta y)^2} + \nu_{12}^k \frac{1}{\Delta x \Delta y} \right] + \\
& \left. + \frac{12 G_{13}^k (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)}{E_1^k} \left[\frac{1}{h_k \Delta y} + \frac{1}{R_k h_k} - \frac{1}{h_k^2} \right] \right\}; \\
\rho_i F_i \Omega_{1i}^2 &= E_i F_i \frac{4}{(\Delta x)^2}; & \rho_i F_i \Omega_{2i}^2 &= G_i F_i \frac{4}{(\Delta x)^2}; \\
\rho_i F_i \Omega_{3i}^2 &= K_i^2 G_i F_i \left[\frac{4}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{\Delta x h_i} \right];
\end{aligned}$$

$$\rho_i I_{1i} \Omega_{4i}^2 = E_i F_i I_{1i} \frac{4}{(\Delta x)^2} + K_i^2 G_i F_i \left(\frac{h_i}{\Delta x} + 1 \right);$$

$$\rho_i I_{kri} \Omega_{5i}^2 = G_i I_{kri} \frac{4}{(\Delta x)^2};$$

$$\rho_j F_j \Omega_{1j}^2 = G_j F_j \frac{4}{(\Delta y)^2}; \quad \rho_j F_j \Omega_{2j}^2 = E_j F_j \frac{4}{(\Delta y)^2};$$

$$\rho_j F_j \Omega_{3j}^2 = K_j^2 G_j F_j \left[\frac{4}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{h_j \Delta y} \right];$$

$$\rho_j I_{krj} \Omega_{4j}^2 = G_j I_{krj} \frac{4}{(\Delta y)^2};$$

$$\rho_j I_{2j} \Omega_{5j}^2 = E_j I_{2j} \frac{4}{(\Delta y)^2} + K_1^2 G_j F_j \left(\frac{h_j}{\Delta y} + 1 - \frac{h_j}{R_j} \right).$$

3.5. Чисельний алгоритм зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище

3.5.1. Чисельний алгоритм розв'язування задач про взаємодію циліндричних оболонок з ґрунтовим середовищем

Розглядається процес деформування нескінченно довгої тонкої циліндричної оболонки в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні на оболонку.

Рух ґрунтового середовища для випадку розповсюдження циліндричних хвиль описується системою рівнянь в ейлерових координатах

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U^2 + P)] - \frac{1}{r} P = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho U)] = 0.$$

В рівняннях (3.90) - r - просторова координата, t - часова координата, U - швидкість, ρ - густина, P - тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатоконпонентного середовища (див. підрозділ 2.4.1)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_i}},$$

де позначення введено згідно величин попереднього розділу.

Рівняння руху тонкої циліндричної оболонки радіусом R і товщиною h має вигляд

$$\rho_{iá} h \ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1 - \gamma^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t), \quad (3.91)$$

де $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню поверхню циліндричної оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунта на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; $\rho_{iá}$, E , ν - фізико - механічні параметри матеріалу оболонки.

Зв'язаність задачі взаємодії оболонка - ґрунтове середовище забезпечується завданням умов не проникнення через деформовану поверхню контакту оболонка - ґрунтове середовище

$$\dot{u}_3 = U_r, \quad (3.92)$$

де U_r - швидкість границі ґрунтового середовища на контактї.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (3.90) - (3.92) та умови відсутності збурення переміщення на нескінченності.

Алгоритм розв'язку задачі про взаємодію циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем, рівняння (3.91), (3.92), базується на застосуванні скінчено – різницевої схеми Мак-Кормака [294, 295].

На кроці предиктор різницевої рівняння мають вигляд

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\rho^n V^n)_{k+1} - (r\rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right], \quad (3.93)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{V})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left\{ \frac{[r\rho(V^2 + P)^n]_{k+1} - [r(\rho V^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - P_k^n \right\},$$

$$F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На кроці коректор рівняння записуються наступним чином

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r\tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}, \quad (3.94)$$

$$(\rho V)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{V}^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{[r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - \tilde{P}_k \right] \right\},$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для знаходження шуканих величин на поверхні контакту оболонка - ґрунтове середовище використовується наступна процедура. Рівняння руху оболонки (3.91) представимо у вигляді

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = H, \quad H = \frac{1}{\rho_{iá}} \left[-\frac{\sigma_{22}}{R} + \frac{P_3(t) - P_0}{h} \right]. \quad (3.95)$$

На кроці предиктор рівняння (3.95) апроксимуємо наступними співвідношеннями

$$\tilde{V}_0 = V_0^n + \tau H_0(t^n), \quad \text{де } H_0(t^n) = \frac{1}{\rho_{iá}} \left[-\frac{\sigma_{22}^n}{R} + \frac{P_3(t^n) - P_0^n}{h} \right].$$

Величини $\tilde{\rho}_0, \tilde{P}_0$ знаходяться по формулам

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\rho_0^n V_0^n) + 4r_1(\rho_1^n V_1^n) - r_2(\rho_2^n V_2^n)}{2\Delta r} \right], \quad (3.96)$$

$$F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0.$$

На кроці коректор для апроксимації рівнянь (3.37) використовуються скінчено – різницеві співвідношення вигляду

$$V_0^{n+1} = 0,5 \left[V_0^n + \tilde{V}_0 + \tau H_1(t^{n+1}) \right], \quad (3.97)$$

де

$$H_1(t^{n+1}) = \frac{1}{\rho_{i\dot{a}}} \left[-\frac{\sigma_{22}^{n+1}}{R} + \frac{P_3(t^{n+1}) - \tilde{P}_0}{h} \right].$$

Величини ρ_0^{n+1} и P_0^{n+1} знаходяться згідно наступних формул

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0} \left[\frac{-3r_0(\tilde{\rho}_0 \tilde{V}_0) + 4r_1(\tilde{\rho}_1 \tilde{V}_1) - r_2(\tilde{\rho}_2 \tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\},$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

В співвідношеннях (3.94)–(3.97) функція $F(P, \rho)$ має вигляд згідно рівняння

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (3.98)$$

Для знаходження величини тиску P по заданим значенням густини ρ використовується ітераційна процедура Ньютона – Рафсона. Враховуючи, що різницева схема Мак – Кормака (3.93), (3.94) є явною, то при розрахунках використовувалася умова стійкості

$$(|V| + c)\tau / \Delta r < 1,$$

де величина c відповідає локальній швидкості звуку

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right\}^{1/2}}. \quad (3.99)$$

3.5.2. Чисельний алгоритм розв'язування задач про взаємодію сферичних оболонок з ґрунтовим середовищем

Для випадку сферичної оболонки, яка знаходиться в нескінченному ґрунтовому середовищі, розповсюдження сферичних хвиль в середовищі описується наступною системою рівнянь в ейлеревих змінних

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 (\rho U^2 + P) \right] - \frac{2}{r} P = 0, \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 (\rho U) \right] = 0.$$

В рівняннях (3.100) r - просторова координата, t - часова координата, U - швидкість, ρ - густина, P - тиск.

Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатоконпонентного середовища (див. підрозділ 2.4.1)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\frac{1}{\gamma_i}},$$

де позначення введено згідно величин попереднього розділу.

Рівняння руху тонкої сферичної оболонки радіусом R і товщиною h мають вигляд

$$\rho_{iá} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(t) - P_r(t), \quad (3.101)$$

$$T_{11} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2}, \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2},$$

де $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню поверхню сферичної оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунта на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; $\rho_{i\acute{a}}$, E , ν - фізико-механічні параметри матеріалу оболонки.

Зв'язаність задачі взаємодії сферична оболонка - ґрунтове середовище забезпечується завданням умов не проникнення через деформовану поверхню контакту оболонка - ґрунтове середовище

$$\dot{u}_3 = U_r, \quad (3.102)$$

де U_r - швидкість границі ґрунтового середовища на контакту.

За граничні умови для задачі динаміки ґрунтового середовища приймаються рівняння (3.101), (3.102) та умови відсутності збурення переміщення на нескінченності.

Алгоритм розв'язку задачі про взаємодію сферичної оболонки з ґрунтовим середовищем, рівняння (3.100) – (3.102), також базується на застосуванні скінчено – різницевої схеми Мак - Кормака (по аналогії з матеріалом попереднього параграфу).

На кроці предиктор різницеві рівняння мають вигляд

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \rho^n V^n)_{k+1} - (r^2 \rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right], \quad (3.103)$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{V})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left\{ \frac{[r^2 \rho(V^2 + P)^n]_{k+1} - [r^2 (\rho V^2 + P)^n]}{\Delta r} - 2P_k^n r_k \right\},$$

$$F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На кроці коректор рівняння записуються наступним чином

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r^2 \tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}, \quad (3.104)$$

$$(\rho V)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{V}^n)_k - \right. \\ \left. - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{[r^2(\tilde{\rho} \tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r^2(\tilde{\rho} \tilde{V}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1} - 2\tilde{P}_k r_k}{\Delta r} \right] \right\},$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для знаходження шуканих величин на поверхні контакту сферична оболонка - ґрунтове середовище використовується наступна процедура. Рівняння руху оболонки (3.101) представимо у вигляді

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = H, \quad H = \frac{1}{\rho_{\dot{a}\dot{a}}} \left[-\frac{\sigma_{11}}{R} - \frac{\sigma_{22}}{R} + \frac{P_3(t) - P_0}{h} \right]. \quad (3.105)$$

На кроці предиктор рівняння (3.105) апроксимуємо наступними співвідношеннями

$$\tilde{V}_0 = V_0^n + \tau H_0(t^n),$$

$$\text{де } H_0(t^n) = \frac{1}{\rho_{\dot{a}\dot{a}}} \left[-\frac{\sigma_{11}^n}{R} - \frac{\sigma_{22}^n}{R} + \frac{P_3(t^n) - P_0^n}{h} \right].$$

Величини $\tilde{\rho}_0, \tilde{P}_0$ знаходяться по формулам

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0^2} \left[\frac{-3r_0^2(\rho_0^n V_0^n) + 4r_1^2(\rho_1^n V_1^n) - r_2^2(\rho_2^n V_2^n)}{2\Delta r} \right], \quad (3.106)$$

$$F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0.$$

На кроці коректор для апроксимації рівнянь (3.47) використовуються скінчено – різницеві співвідношення вигляду

$$V_0^{n+1} = 0,5 [V_0^n + \tilde{V}_0 + \tau H_1(t^{n+1})], \quad (3.107)$$

де

$$H_1(t^{n+1}) = \frac{1}{\rho_{\dot{a}\dot{a}}} \left[-\frac{\sigma_{11}^{n+1}}{R} - \frac{\sigma_{22}^{n+1}}{R} + \frac{P_3(t^{n+1}) - \tilde{P}_0}{h} \right].$$

Величини ρ_0^{n+1} и P_0^{n+1} знаходяться згідно наступних формул

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0^2} \left[\frac{-3r_0^2(\tilde{\rho}_0 \tilde{V}_0) + 4r_1^2(\tilde{\rho}_1 \tilde{V}_1) - r_2^2(\tilde{\rho}_2 \tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\},$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

В співвідношеннях (3.104)–(3.107) функція $F(P, \rho)$ має вигляд згідно рівняння

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (3.108)$$

Для знаходження величини тиску P по заданим значенням густини ρ використовується ітераційна процедура Ньютона – Рафсона. Враховуючи, що різницева схема Мак – Кормака (3.103), (3.104) є явною, то при розрахунках використовувалася умова стійкості

$$(|V| + c)\tau / \Delta r < 1,$$

де величина c відповідає локальній швидкості звука – формула (3.99).

3.5.3. Чисельний алгоритм розв'язування двовимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтового середовища (циліндрична симетрія)

Чисельний алгоритм розв'язування двовимірних зв'язаних задач оболонка - ґрунтового середовища (циліндрична симетрія) розглянуто на основі постановки задачі циліндрична оболонка - ґрунтового середовища періодичної структури (постановка приводиться в підрозділі 2.2.3). Розглядається задача динамічної взаємодії циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем періодичної структури при дії внутрішнього розподіленого нестационарного навантаження. Рівняння коливань циліндричної оболонки з врахуванням впливу дії на неї ґрунтового середовища представимо згідно моделі оболонок з врахуванням гіпотез Тимошенка [136, 223] у вигляді

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) - P_r(x, r_0, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.$$

Рух ґрунтового середовища періодичної структури для випадку розповсюдження циліндричних хвиль описується системою рівнянь в ейлерових координатах [98] (див. підрозділ 2.2.3).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u v) = 0, \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho v^2 + P)] - \frac{P}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = 0.$$

Рівняння стану приймаються згідно моделі нелінійного пружного багатокомпонентного середовища В.М. Ляхова $\Phi(P, \rho) = 0$ (див. підрозділ 2.2.1).

Для розв'язку рівнянь (3.109) використовується інтегро – інтерполяційний метод побудови різницевих схем для одновимірних рівнянь коливань циліндричних оболонок, який викладено в підрозділі 3.1. Різницеві рівняння в цьому випадку мають вигляд

$$\frac{T_{11l+1/2}^n - T_{11l-1/2}^n}{\Delta x} = \rho h (u_{1l}^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.111)$$

$$\frac{\bar{T}_{13l+1/2}^n - \bar{T}_{13l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n}{2R} +$$

$$+ P_3(x_l, t_n) - P_r(x_l, r_0, t_n) = \rho h (u_{3l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\frac{M_{11l+1/2}^n - M_{11l-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{13l+1/2}^n + T_{13l-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t},$$

$$\bar{T}_{13l\pm 1/2}^n = T_{13l\pm 1/2}^n + T_{11l\pm 1/2}^n \theta_{1l\pm 1/2}^n.$$

Позначення різницевої величин в дискретних рівняннях (3.111) введено згідно підрозділу 3.1.

Для розв'язку рівнянь руху середовища (3.110) використовується двокрокова схема Мак – Кормака предиктор - коректор [293, 294]. На кроці предиктор різницевої рівняння мають вигляд

$$(\tilde{\rho}\tilde{u})_{k,l} = (\rho u)_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho u^2 + P)_{k,l}^n - (\rho u^2 + P)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \right. \quad (3.112)$$

$$\left. + \frac{1}{r_k} \frac{(r\rho uv)_{k,l}^n - (r\rho uv)_{k-1,l}^n}{\Delta r} \right],$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{v})_{k,l} = (\rho v)_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho uv)_{k,l}^n - (\rho uv)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_k} \frac{[r(\rho v^2 + P)]_{k,l}^n - [r(\rho v^2 + P)]_{k,l-1}^n}{\Delta r} - \frac{P_{k,l}^n}{r_k} \right],$$

$$\tilde{\rho}_{k,l} = \rho_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho u)_{k,l}^n - (\rho u)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r\rho v)_{k,l}^n - (r\rho v)_{k-1,l}^n}{\Delta r} \right],$$

$$\tilde{p}_{k,l} = F(P_{k,l}^n, \tilde{\rho}_{k,l}).$$

На кроці коректор різницевої рівняння записуються наступним чином:

$$(\rho u)_{k,l}^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho u)_{k,l}^{n+1} + (\tilde{\rho}\tilde{u})_{k,l} - \right. \quad (3.113)$$

$$\left. - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{p})_{k,l+1} - (\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{p})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})_{k+1,l} - (r\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})_{k,l}}{\Delta r} \right] \right\};$$

$$\begin{aligned}
(\rho v)_{k,l}^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho v)_{k,l}^n + (\tilde{\rho} \tilde{v})_{k,l}^n - \right. \\
&\left. - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k,l+1} - (\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{[r(\tilde{\rho} \tilde{v}^2 + \tilde{P})]_{k+1,l} - [r(\tilde{\rho} \tilde{v}^2 + \tilde{P})]_{k,l}}{\Delta r} - \frac{\tilde{P}_{k,l}}{r_k} \right] \right\}; \\
\rho_{k,l}^{n+1} &= 0,5 \left\{ \rho_{k,l}^n + \tilde{\rho}_{k,l} - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l+1} - (\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r \tilde{\rho} \tilde{v})_{k+1,l} - (r \tilde{\rho} \tilde{v})_{k,l}}{\Delta r} \right] \right\}; \\
\tilde{P}_{k,l}^{n+1} &= F(P_{k,l}^n, \tilde{\rho}_{k,l}^{n+1}).
\end{aligned}$$

Величина тиску в рівняннях (3.112), (3.113) виходячи з рівняння стану визначаються ітераційною процедурою Ньютона – Рафсона. Враховуючи, що різницева схема Мак – Кормака (3.112), (3.113) є явною, тому при розрахунках використовувалась умова стійкості: $\max(|u|+c)\tau/\Delta x, (|v|+c)\tau/\Delta r < 1$, де величина c відповідає локальній швидкості розповсюдження звуку в ґрунтовому середовищі [81].

Якщо рівняння середовища задані у векторному вигляді (2.79)

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{B}) + \frac{\bar{C}_0}{r} = 0, \quad (3.114)$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \rho u^2 + P \\ \rho u v \\ \rho u \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho v \end{pmatrix}; \quad \bar{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix},$$

то різницева схема має вигляд:

- на кроці предиктор

$$\tilde{\bar{F}}_1 = \bar{F}_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{\bar{A}_{k,l} - \bar{A}_{k,l-1}}{\Delta x} + \frac{\bar{B}_{k,l} - \bar{B}_{k,l-1}}{\Delta r} + \bar{C}_{k,l} \right]^n, \quad \Phi(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0; \quad (3.115)$$

- на кроці коректор

$$\bar{F}_{k,l}^{n+1} = 0,5 \left\{ \bar{F}_{k,l}^n - \tilde{F}_{k,l} - \Delta t \left[\frac{\tilde{A}_{k,l+1} - \tilde{A}_{k,l}}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{k+1,l} - \tilde{B}_{k,l}}{\Delta r} + \tilde{C}_{k,l} \right] \right\},$$

$$\Phi(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Висновки до третього розділу

В даному розділі проведено побудову чисельних алгоритмів розв'язку динамічних задач теорії підкріплених та неоднорідних оболонкових елементів з врахуванням дії пружної основи та ґрунтових середовищ. По суті, даний розділ займає центральне місце в дисертаційній роботі. На основі розроблених чисельних алгоритмів створено відповідне математичне забезпечення для ПК, яке дало можливість отримати чисельні розв'язки вказаних задач. Так як і при постановці задач в другому розділі, так і в цьому розділі чисельні алгоритми умовно можна розділити на дві частини: а) побудова чисельних алгоритмів розв'язку динамічних задач теорії підкріплених оболонок з врахуванням дії пружної основи типу Вінклера, Пастернака; б) побудова чисельних алгоритмів для динамічних зв'язаних задач оболонка – ґрунтове середовище.

Чисельні алгоритми розв'язку динамічних задач теорії дискретно підкріплених оболонок на пружній основі базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих апроксимацій по просторовим змінним і явній скінчено – різницевій апроксимації по часовій координаті. Беручи до уваги, що використовується явна скінчено – різницева схема по часу, було проведене теоретичне дослідження необхідної умови стійкості різницевих схем для ряду випадків (циліндричні підкріплені оболонки, оболонки обертання, тришарові оболонки).

У випадку побудови чисельних алгоритмів зв'язаних задач використовувалася двокрокова різницева схема Мак – Кормака предиктор – коректор, яка достатньо ефективно зарекомендувала себе при розв'язку зв'язаних

задач циліндрична оболонка – ґрунтове середовище, сферична оболонка – ґрунтове середовище та задачі взаємодії циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури. Циліндрична оболонка в останньому випадку розглядається згідно теорії оболонок Тимошенка.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ОБОЛОНКА – ГРУНТОВЕ СЕРЕДОВИЩЕ

4.1. Циліндрична оболонка – ґрунтове середовище (одномірний випадок, циліндрична симетрія)

Розглядалася циліндрична оболонка в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні $P_3(t)$. Постановка задач приведена згідно рівнянь (2.62) – (2.64). Відповідні різницеві співвідношення – формули (3.93) – (3.98). Розрахунки проводилися для сталеві оболонки радіусом $R = 0,1$ м; товщиною $h = 0,01$ м. Модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0,3$; густина $\rho_{sh} = 7880$ кг/м³. Навантаження $P_3(t)$ задавалося наступною залежністю

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (4.1)$$

де T – час навантаження; A – амплітуда навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. При розрахунках покладалося $A = 1,0$ Мпа; $T = 50$ мкс.

Задача розв'язувалася для двох типів водонасичених ґрунтів. Характеристики компонент ґрунтів наступні :

- 1) повітря – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$;
- 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$;
- 3) твердий компонент – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.1 приведено залежності поширення хвилі тиску P по ґрунтовому середовищу в залежності від просторової координати r в різні моменти часу (варіант компонент ґрунта $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,4$; $\alpha_3 = 0,6$). Крива 1

відповідає часу $t_1 = 0,35 \cdot 10^{-4}$ с, крива 2 – $t_2 = 0,125 \cdot 10^{-3}$ с, крива 3 – $t_3 = 0,25 \cdot 10^{-3}$ с.

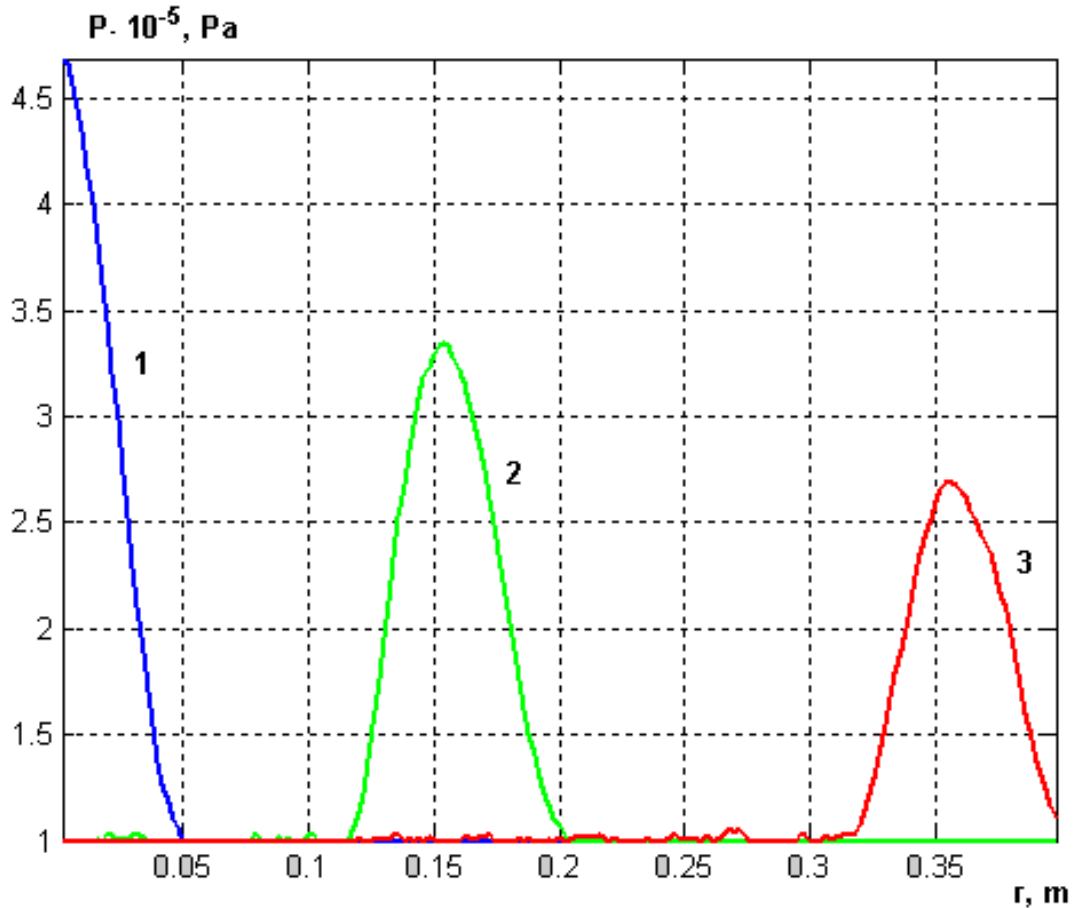


Рис. 4. 1. Залежність величини тиску P від просторової координати r (варіант 1)

На рис. 4.2 приведено аналогічні криві для варіанту 2 – компоненти ґрунта $\alpha_1 = 0,01$; $\alpha_2 = 0,39$; $\alpha_3 = 0,6$. Як видно з приведених кривих, вміст газоподібної компоненти α_1 суттєво впливає на розподіл тиску по просторовій та часовій координатам. Максимум тиску $P_0(t)$ (на границі оболонка – ґрунтове середовище) більш ніж в три рази менший в порівнянні з аналогічними розрахунками згідно варіанту 1. Вміст повітря значно впливає на форму імпульса тиску – відбувається розмивання форми імпульсу (криві 2 і 3

відповідно). Значно змінюється і швидкість розповсюдження хвиль тиску в порівнянні з варіантом 1 (відсутність компоненти α_1). Крива 1 відповідає часу $t_1 = 0,6 \cdot 10^{-4}$ с; крива 2 – $t_2 = 0,125 \cdot 10^{-2}$ с; крива 3 – $t_3 = 0,188 \cdot 10^{-2}$ с. Також спостерігається більш інтенсивне затухання хвиль тиску в порівнянні з варіантом 1. На рис. 4.3 приведено залежності величини u_3 від часової координати згідно розрахункам по вище приведеним варіантам. Крива 1 відповідає розрахункам по варіанту 1, крива 2 – по варіанту 2. З графіків видно, що для варіанту 2 прогини в оболонці на 60% більші ніж для варіанта 1.

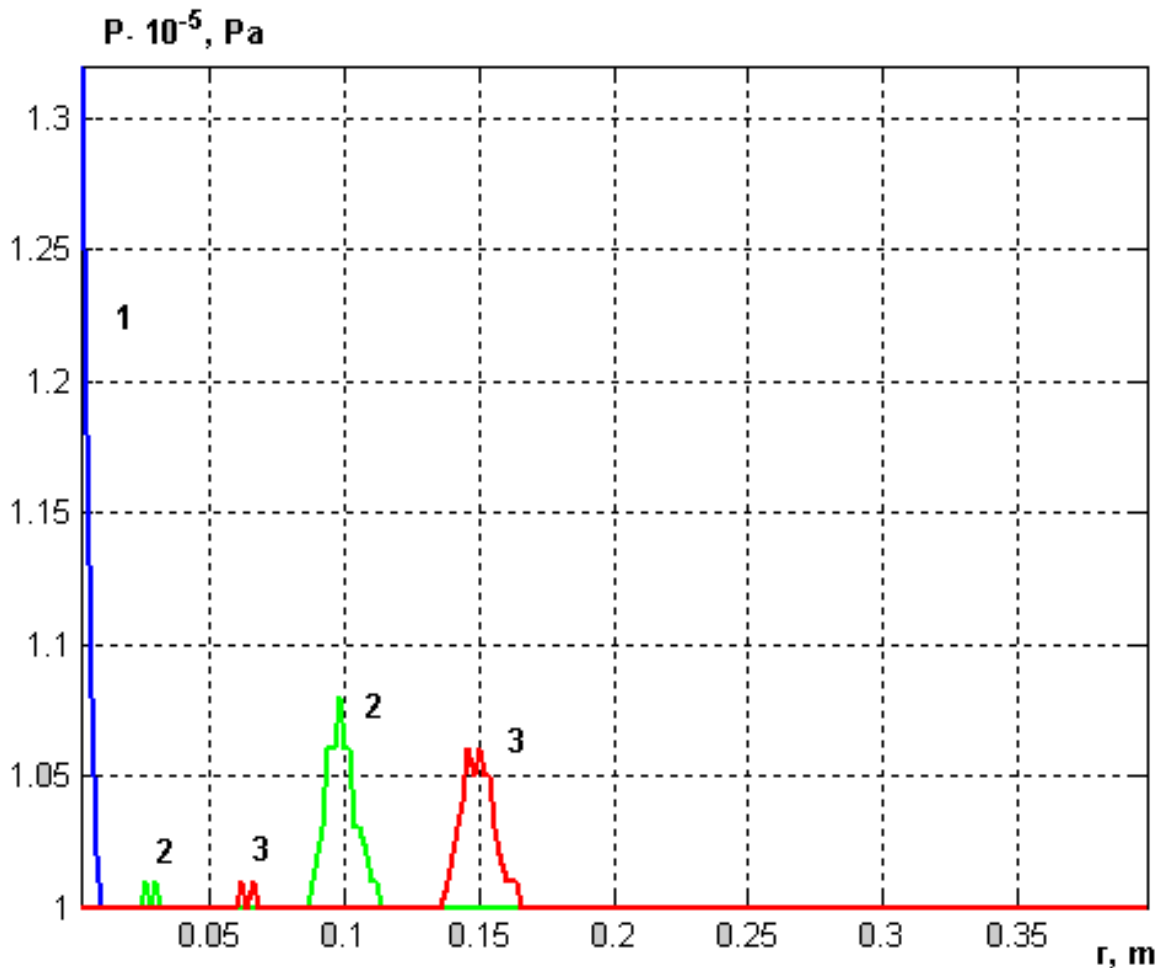


Рис. 4.2. Залежність величини тиску P від просторової координати r (варіант 2)

Як частковий випадок рівнянь коливань розглядалася нескінченна циліндрична оболонка на пружній основі при дії імпульсного внутрішнього навантаження $P_3(t)$. Рівняння коливань в цьому випадку мають вигляд

$$-\frac{T_{22}}{R} - c_w u_3 + P_3(t) = \rho h \ddot{u}_3. \quad (4.2)$$

Навантаження $P_3(t)$ задавалося згідно формули (4.1). Метою проведення розрахунків згідно рівнянь (4.2) було досягнення максимально можливої рівності прогинів u_3 оболонки з розрахунками по рівнянням (2.62)–(2.64). Порівняння проводилося наступним чином. Виходячи з рівнянь вигляду (2.63) і (4.2) можна отримати формулу для коефіцієнтів основи Вінклера c_w для випадку кожного конкретного варіанту коливань системи оболонка –

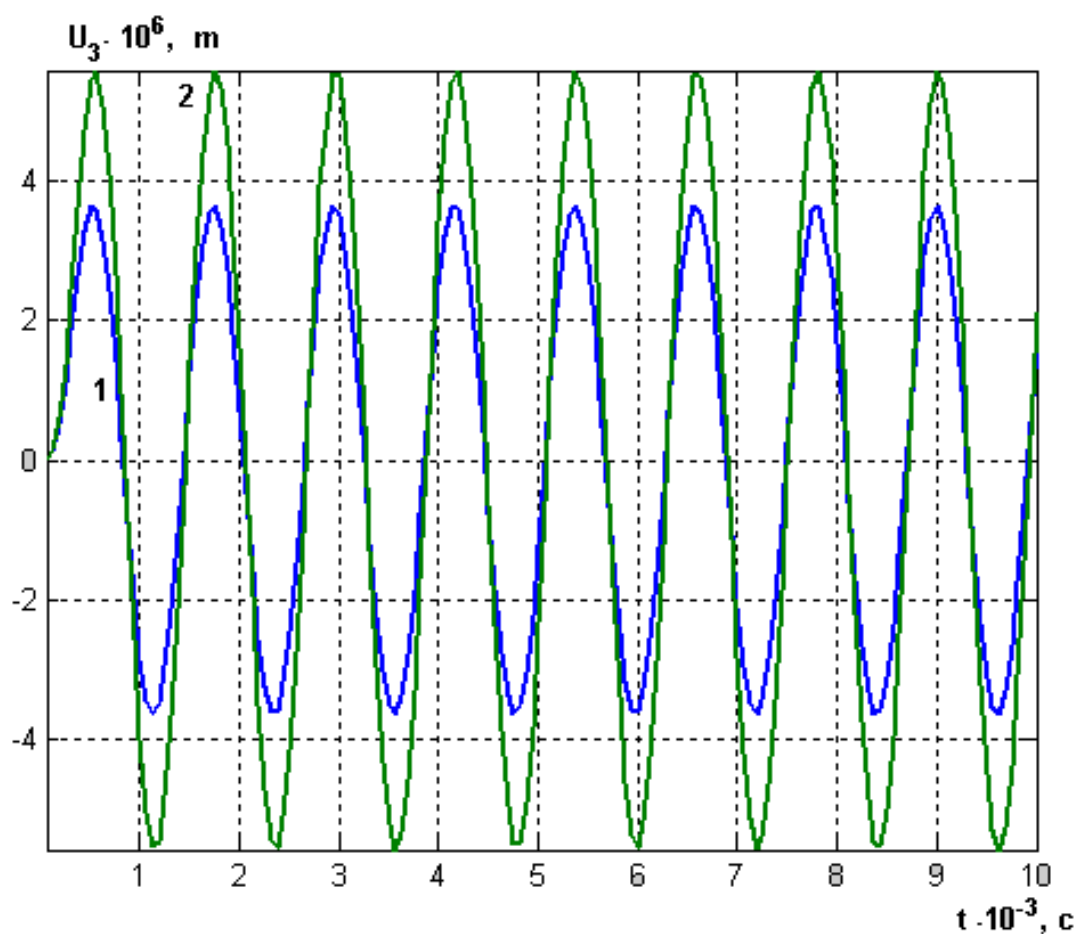


Рис. 4. 3. Залежність величини прогину u_3 від часової координати в циліндричній оболонці

грунтове середовище у вигляді

$$c_w = \frac{\max P_0(t)}{u_3(t^*)}, \quad (4.3)$$

де величини $P_0(t)$, $u_3(t)$ – визначаються з розв’язку задачі (2.62)–(2.64); t^* – час досягнення $\max P_0(t)$. Враховуючи, що повного співпадіння результатів згідно двох моделей досягнути неможливо, то за критерій достовірності приймалося максимально можливе співпадіння амплітуд величини u_3 в першому періоді коливань.

На рис. 4.4 приведено залежності величини u_3 від часової координати в циліндричній оболонці згідно розрахунків задачі з врахуванням ґрунтового середовища – рівняння (2.62) – (2.64) (варіант 2) та згідно рівняння (4.2) з врахуванням величини c_w по формулі (4.3). Крива 1 відповідає розрахункам по формулам (2.62) – (2.64), крива 2 – (4.2), (4.3).

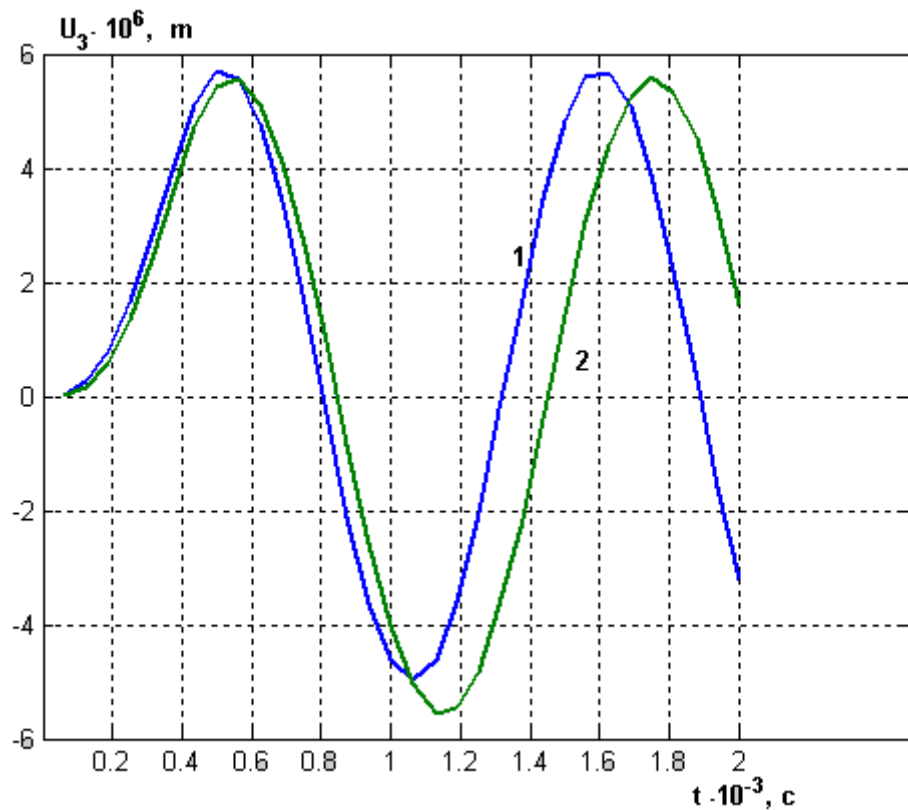


Рис. 4.4. Залежності величини u_3 від часової координати для двох варіантів розрахунків

4.2. Сферична оболонка – ґрунтове середовище (одномірний випадок, сферична симетрія)

Розглядалася замкнута сферична оболонка в ґрунтовому середовищі при осесиметричному внутрішньому імпульсному навантаженні $P_3(t)$ – рівняння (2.65) – (2.67). Приймається модель ґрунтового середовища згідно розділу 2. Відповідні різницеві рівняння задаються формулами – (3.103) – (3.107). Розрахунки проводилися для сталюї оболонки радіусом $R = 0,1$ м; товщиною $h = 0,01$ м. Модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуасона – $\nu = 0,3$; густина матеріалу $\rho_{sh} = 7880$ кг/м³. Осесиметричне імпульсне навантаження $P_3(t)$ задавалося у вигляді

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де T – час навантаження; A – амплітуда навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. При розрахунках покладалося $A = 10$ МПа; $T = 50$ мкс.

Задача розв'язувалася для трьох типів водонасичених ґрунтів. Характеристики компонент ґрунтів наступні:

- 1) повітря – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$;
- 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$;
- 3) твердий компонент – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.5 приведено закономірності розповсюдження хвилі тиску P в ґрунтовому середовищі по просторовій координаті r в різні моменти часу (варіант 1 - компоненти ґрунта $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,4$; $\alpha_3 = 0,6$). Крива 1 відповідає часу $t_1 = T$, крива 2 – $t_2 = 3T$, крива 3 – $t_3 = 5T$, крива 4 – $t_4 = 7T$, крива 5 – $t_5 = 9T$. На рис. 4.6 приведено аналогічні залежності для варіанту 2 – компоненти ґрунта $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$. Як видно з приведених кривих, при більшому вмісті твердої компоненти в ґрунті (варіант 1 - $\alpha_3 = 0,6$),

швидкість розповсюдження хвилі тиску P більша в порівнянні з варіантом 2 ($\alpha_3 = 0,4$). В першому варіанті ґрунта хвиля тиску P проходить відстань $r = 8R$ при $t = 9T$, а в другому варіанті в той же час хвиля долає відстань $r \approx 7,4R$. Також відрізняються амплітуди хвиль тиску P . У випадку 1 – амплітуда хвилі тиску P в момент часу $t = T$ - $P \approx 2,4$ МПа. У випадку 2 ($\alpha_3 = 0,4$ - менш тверде середовище в цілому в порівнянні з варіантом 1) – хвиля тиску P в момент часу $t = T$ має значення $P \approx 2,0$ МПа. Відповідно відрізняються значення хвиль тиску і в інші моменти часу.

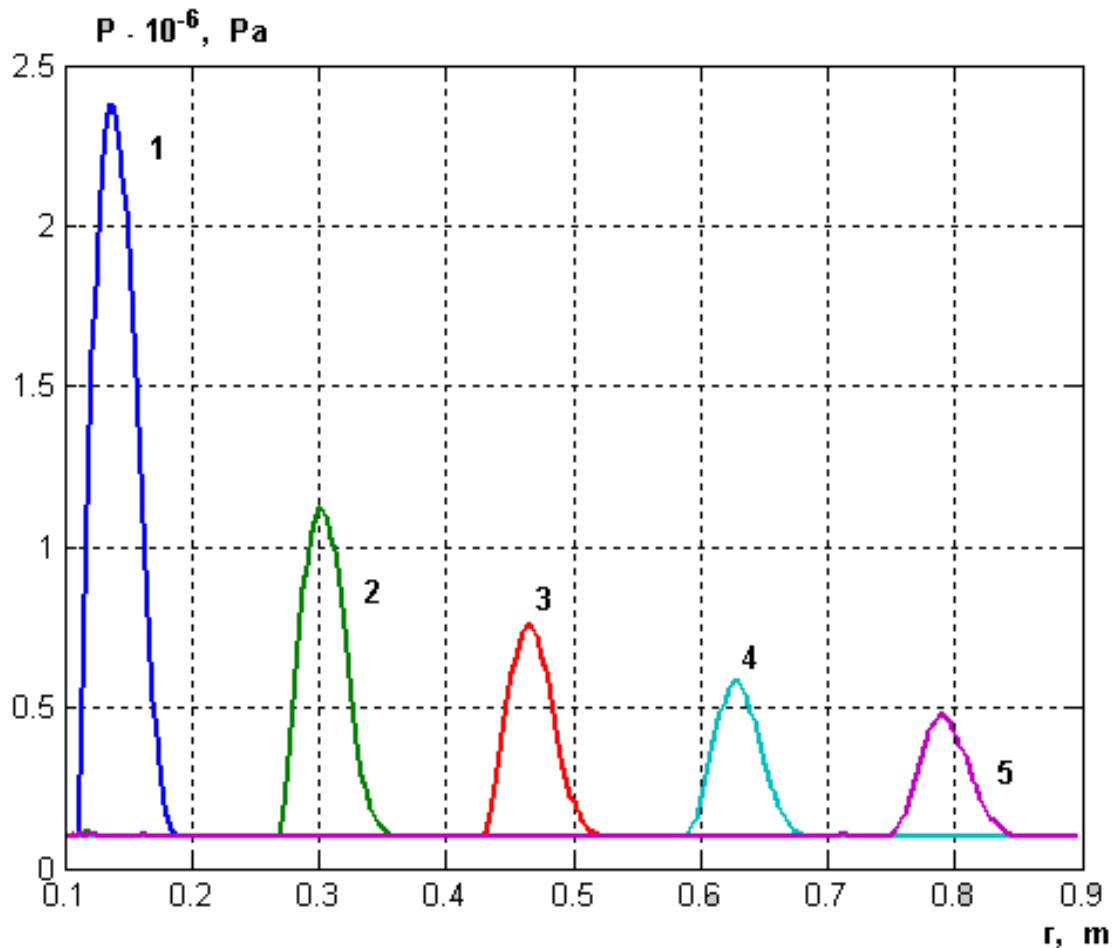


Рис.4.5. Залежність хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу (варіант 1).

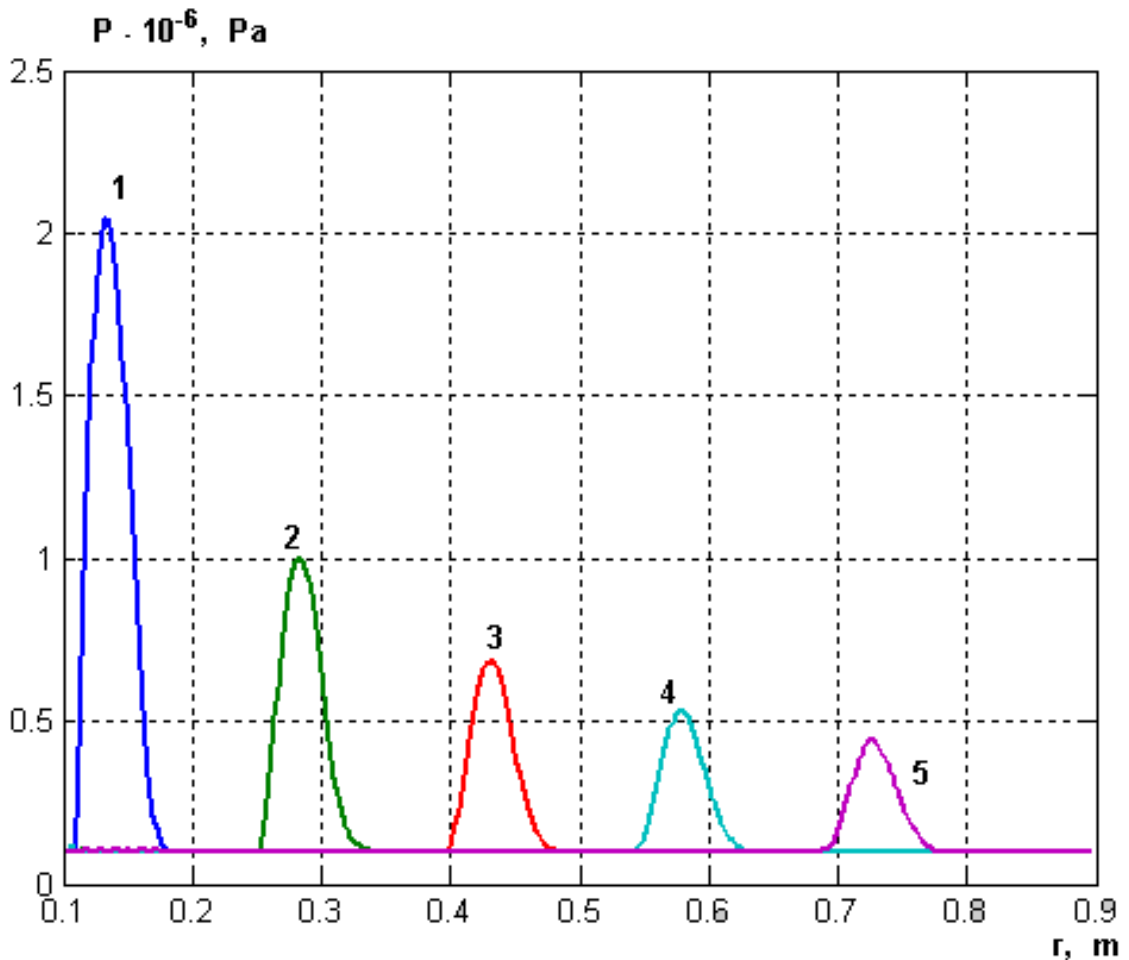


Рис. 4.6. Залежність хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу (варіант 2).

На рис. 4.7 приведено залежності хвилі тиску P в ґрунтовому середовищі по координаті r для третього варіанту ґрунта ($\alpha_1 = 0,01$; $\alpha_2 = 0,39$; $\alpha_3 = 0,6$) в моменти часу, які розглядалися вище. Як бачимо з наведеного матеріалу, вміст газоподібної компоненти α_1 значно впливає на розподіл тиску по просторовій та часовій координатам. Максимум $P_0(t)$ при $r = R$ (на границі сферична оболонка – ґрунтове середовище) більш ніж в три рази менший в порівнянні з аналогічними розрахунками згідно варіантів 1 і 2. Наявність повітря значно впливає на форму та величину хвилі тиску P - відбувається розмивання форми імпульсу тиску. Значно змінюється і швидкість розповсюдження хвилі тиску P в порівнянні з варіантами 1 і 2 (при значенні компоненти $\alpha_1 = 0$). За час $t = 9T$

хвиля тиску пройшла відстань $r \approx 1,55R$ (для порівняння – у варіанті 1 за цей час хвиля пройшла відстань $r = 8R$).

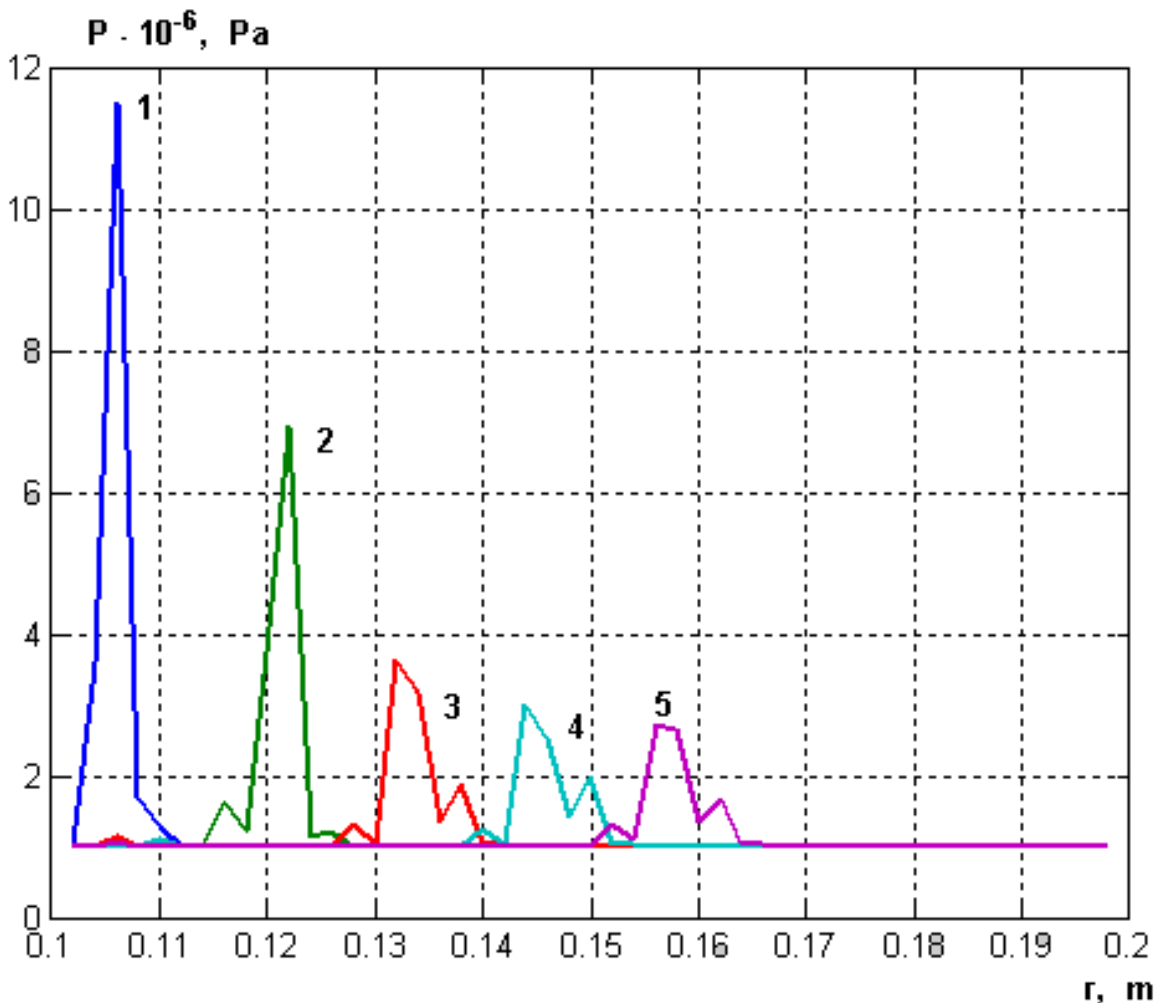


Рис. 4.7. Залежність хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу (варіант 3).

Як частковий випадок рівнянь коливань, розглядалася замкнута сферична оболонка на пружній основі Вінклера при дії осесиметричного внутрішнього навантаження $P_3(t)$.

Рівняння осесиметричних коливань сферичної оболонки в цьому випадку мають вигляд

$$\rho_{sh} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} - c_w u_3 + P_3(t), \quad (4.4)$$

де вирази для T_{11} , T_{22} представлено формулами (2.66).

Навантаження $P_3(t)$ задавалося згідно формули (4.1). Метою проведення розрахунків згідно рівнянь (4.4) було досягнення максимально можливої рівності прогинів u_3 оболонки з розрахунками по рівнянням (2.65) - (2.67) (аналогічно випадку для знаходження коефіцієнта Вінклера для задачі циліндричної симетрії – підрозділ 4.1). Виходячи з рівнянь вигляду (2.66) і (4.4) можна отримати формулу для коефіцієнтів основи Вінклера c_w для випадку кожного конкретного варіанту коливань системи оболонка – середовище

$$c_w = \frac{\max P_0}{u_3(t^*)}, \quad (4.5)$$

де величини $P_0(t)$, $u_3(t)$ – визначаються з розв'язку задачі (4.19) – (4.21), де t^* – час досягнення $\max P_0(t)$. Враховуючи, що повного співпадіння результатів згідно двох моделей досягнути неможливо, то за критерій достовірності приймалося максимально можливе співпадіння величини u_3 в першому періоді коливань.

4.3. Циліндрична оболонка – двошарове ґрунтове середовище (одномірний випадок, циліндрична симетрія)

Розглядається нескінченна підкріплена циліндрична порожнина в двошаровому ґрунтовому середовищі. Припускається, що до внутрішньої поверхні підкріплюючої оболонки при $r = r_0$ прикладається розподілене імпульсне навантаження $P_3(t)$. Схематичне зображення постановки задачі представлено на рис. 4.8. Постановка задачі представлена формулами (2.62) – (2.64), чисельний алгоритм – (3.93) – (3.98).

Рівняння руху підкріплюючої тонкої циліндричної оболонки радіусу R і товщиною h мають вигляд

$$\rho_{sh} h \ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t), \quad (4.6)$$

де $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню поверхню оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунту на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; ρ_{sh} , E , ν - фізико-механічні параметри матеріалу оболонки.

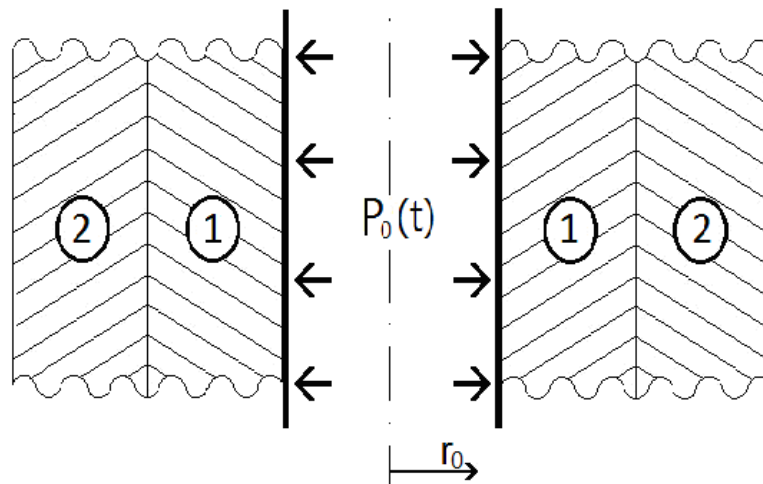


Рис. 4.8. Схематична модель розрахунку

При розрахунках покладалося, що підкріплююча циліндрична оболонка має наступні параметри: радіус - $R = 0,1$ м; модуль Юнга матеріалу оболонки - $E = 210$ ГПа; коефіцієнт Пуассона - $\nu = 0,3$; густина - $\rho = 7,88 \cdot 10^3$ кг/м³. Товщина оболонки h варіювалася. Розглядалося три випадки: $h/R = 0,05$; $h/R = 0,1$; $h/R = 0,15$.

Навантаження $P_3(t)$, яке прикладалося до внутрішньої поверхні оболонки при $r = r_0$, задавалося наступною залежністю $P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де $A = 10^7$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с, $\eta(t)$ - функція Хевісайда.

Перший шар ґрунтового середовища при $r_0 \leq r \leq 5r_0$ характеризується параметрами - $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$. Для другого шару при $5r_0 \leq r \leq \infty$ покладалося: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$. Для обох випадків задавалось $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.9 приведені залежності хвилі тиску P по просторовій координаті r в певні моменти часу. Крива 1 відповідає випадку $h/R = 0,05$ при $t = 0,625T$. Криві 2 і 3 відповідають випадкам $h/R = 0,1$ та $h/R = 0,15$ при $t = 0,75T$. На рис. 4.10 приведені залежності хвиль тиску P в момент досягнення ними границі розділу ґрунтового середовища $r = 5r_0$ - $t = 6,25T$. При проходженні границі розділу хвилі тиску в даному випадку (проходження хвилі із менш щільного середовища в більш щільне середовище) спостерігається відбита хвиля.

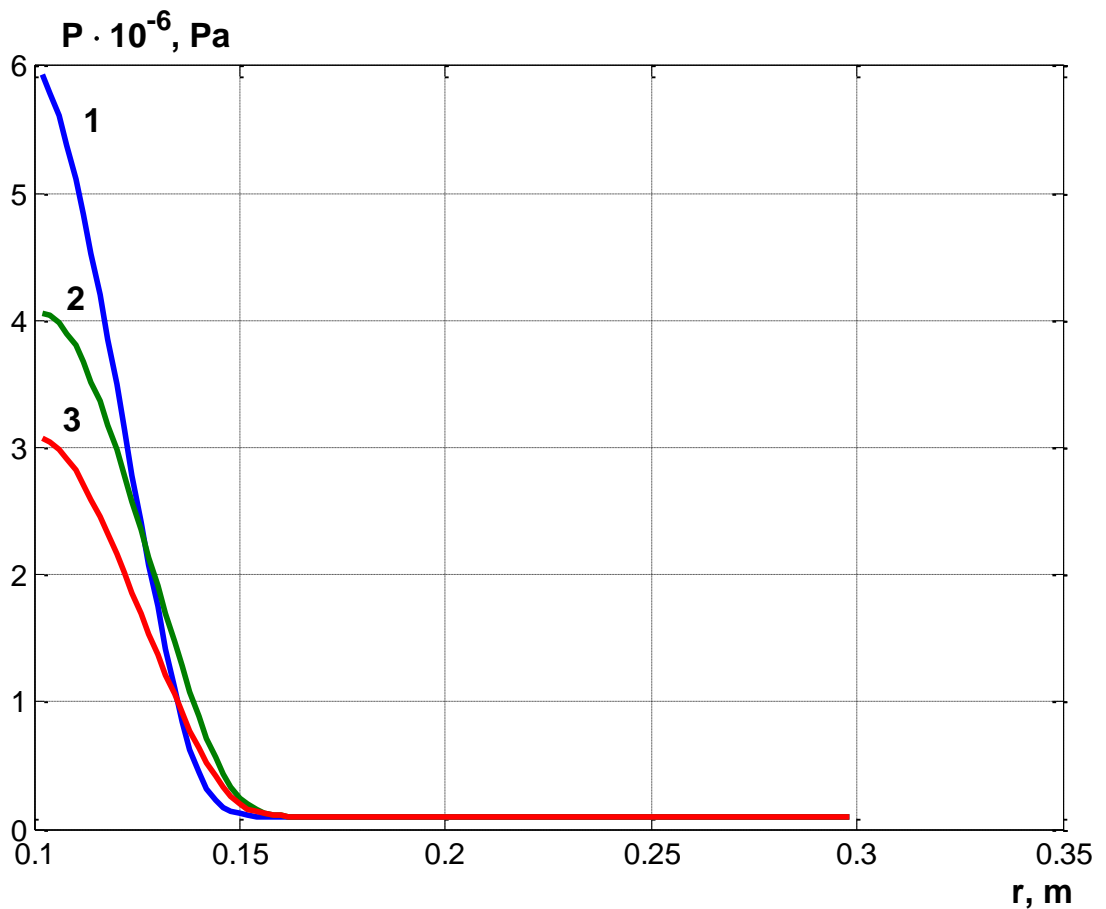


Рис. 4.9. Залежності хвиль тиску P від просторової координати r

В правій частині рис. 4.11 представлена основна хвиля тиску для трьох випадків відношення h/R , що розглядаються. В лівій частині рис. 4.11 зображена відбита хвиля тиску, що рухається в напрямку до порожнини. Представлені залежності на рис. 4.11 відповідають часу $t = 10T$. В подальшому відбита хвиля при досягненні підкріплюючого краю порожнини затухає. Ефекту відбиття від оболонки не спостерігається. Це пояснюється специфікою розрахункової математичної моделі. Позначення на рис. 4.10 та рис. 4.11 аналогічні позначенням згідно рис. 4.9.

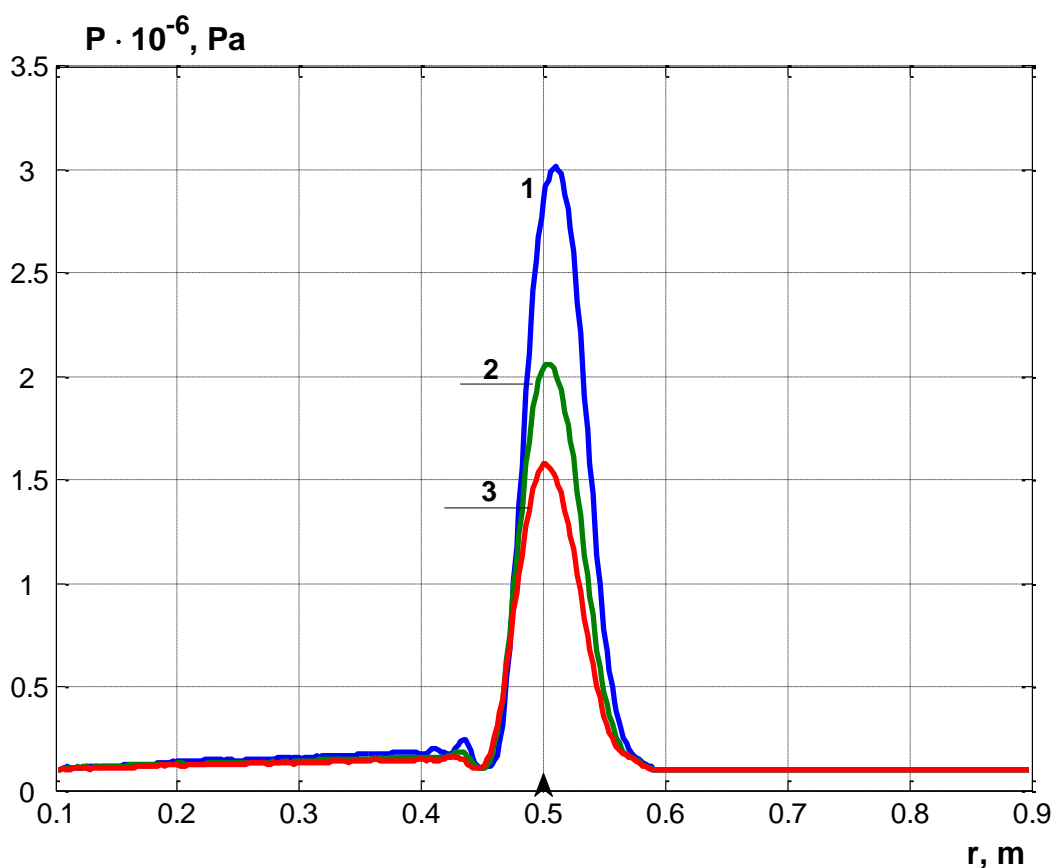


Рис. 4.10. Залежності хвилі тиску P від просторової координати r в момент часу проходження границі розділу середовищ

Таким чином, чисельний розв'язок зв'язаної задачі циліндрична оболонка – двошарове ґрунтове середовище при дії внутрішнього імпульсного навантаження дає можливість регулювати параметри хвилі тиску, що входить в ґрунт в

залежності від геометричних та фізико – механічних параметрів оболонки та ґрунтового середовища. Отримані чисельні результати дозволяють прогнозувати хвильові процеси в неоднорідному ґрунтовому середовищі при проходженні хвиль через контактну границю шарів ґрунта в залежності від їх параметрів.

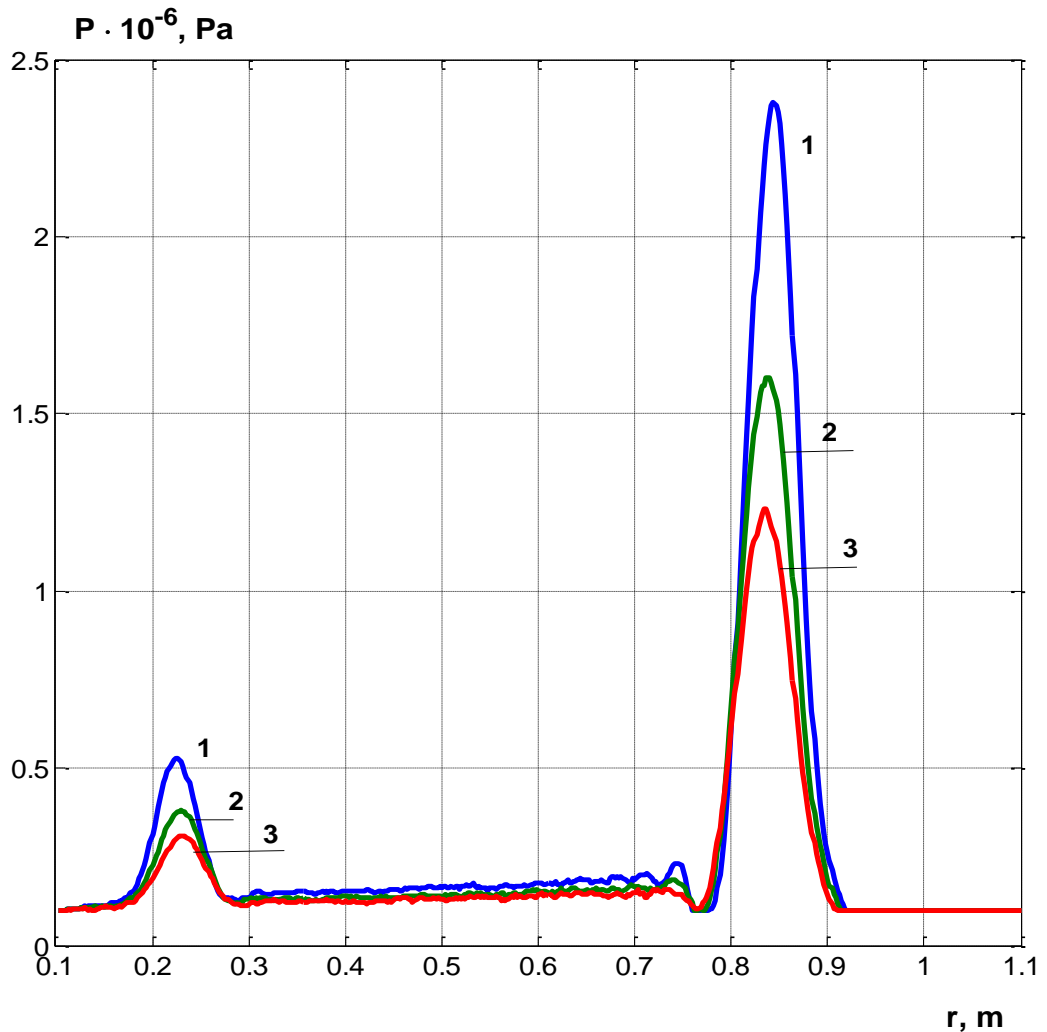


Рис. 4.11. Залежності хвилі тиску P від просторової координати r в момент часу $t = 10T$

**4.4. Чисельний розв'язок задач про динамічну взаємодію
конструктивно - ортотропних циліндричних оболонок з пружним
середовищем**

Згідно постановки (2.69) – (2.76), рівняння коливань підкріпленої циліндричної оболонки в рамках конструктивно – ортотропної моделі мають вигляд

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} +$$

$$+ \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{kj}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$T_{11} = \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_1}{l_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm \frac{EF_1 h_{ci}}{l_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{E\nu h}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R}, \quad (4.8)$$

$$T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{E\nu h}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R},$$

$$T_{13} = \left(Gh + \frac{G_1 F_1}{l_1} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1 \right),$$

$$M_{11} = \left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_1 I_1}{l_1} \right),$$

$$I_1 = \frac{a_1 h_1^3}{12}, \quad I_2 = \frac{a_2 h_2^3}{12}.$$

Позначення в (4.7), (4.8) приймаються згідно постановки (2.69) – (2.76). У випадку нескінченно довгої оболонки рівняння (4.7), (4.8) з врахуванням рівнянь руху середовища мають вигляд

$$\rho_{sh}h\left(1 + \frac{F_1}{l_1h} + \frac{F_2}{l_2h}\right)\ddot{u}_3 = -\left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2}\right)\frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (4.9)$$

Як частковий випадок, отримуємо рівняння коливань конструктивно ортотропної оболонки з регулярним поздовжнім підкріпленням

$$\rho_{sh}h\left(1 + \frac{F_1}{l_1h}\right)\ddot{u}_3 = -\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (4.10)$$

В рівняннях (4.9), (4.10) $P_3(t)$ - навантаження на внутрішню частину оболонки; $P_r(t)$ - тиск ґрунту на оболонку; u_3 - радіальне переміщення оболонки; ρ_{sh}, E, ν - фізико-механічні параметри матеріалу оболонки та ребер для випадку ізотропного матеріалу для обшивки та ребер.

Розглядається нескінченно довга поздовжньо підкріплена циліндрична оболонка в ґрунтовому середовищі при внутрішньому імпульсному навантаженні $P_3(t)$ – рівняння (4.10). Відповідні різницеві рівняння для циліндричної оболонки в ґрунтовому середовищі приймаються згідно формул (3.93) – (3.98). Розрахунки проводилися для сталеві оболонки радіусу $R = 0,1$ м; товщиною $h = 0,01$ м. Модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона – $\nu = 0,3$; густина $\rho_{sh} = 7880$ кг/м³. Навантаження $P_3(t)$ задавалося наступною залежністю $P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де T – час навантаження; A – амплітуда навантаження; $\eta(t)$ – функція Хевісайда. При розрахунках покладалося $A = 1,0$ МПа; $T = 50$ мкс.

Задача розв'язувалася для ґрунту з наступними характеристиками компонент:

- 1) повітря – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$;

- 2) вода – $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$; $c_2 = 1500 \text{ м/с}$; $\gamma_2 = 7$;
- 3) тверда компонента – $\rho_3 = 2650 \text{ кг/м}^3$; $c_3 = 4500 \text{ м/с}$; $\gamma_3 = 4$.

Згідно рівнянь коливань поздовжньо підкріпленої оболонки в рамках конструктивно – ортотропної моделі бачимо, що вплив повздовжніх підкріплень проявляється лише в інерційному доданку. Тому, надалі будемо проводити аналіз хвильових процесів виходячи з приведеної маси підкріпленої оболонки $m = \rho_{\text{іа}} h [1 + F_1 / (l_1 h)]$. Будемо характеризувати процес виходячи з коефіцієнта m/m_0 , де $m_0 = \rho_{sh} h$.

На рис. 4.12 приведено закономірності розповсюдження хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу для випадку варіанту -

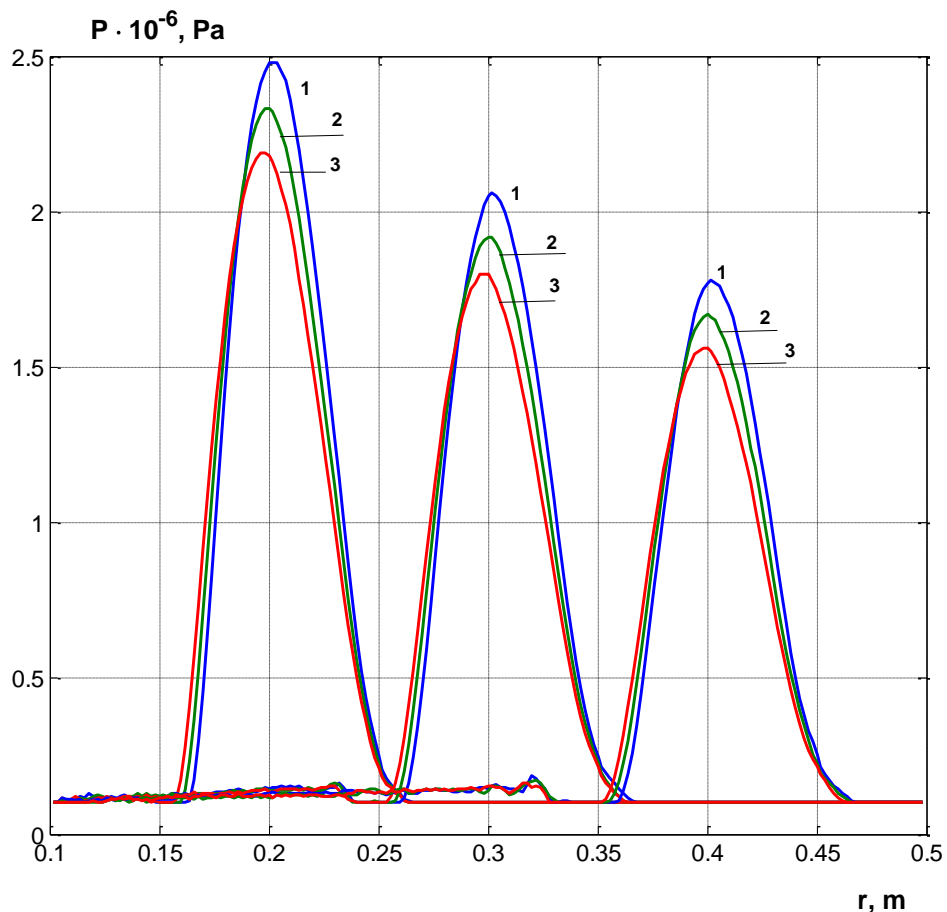


Рис. 4.12. Залежність розповсюдження хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу

$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ в залежності від величини m/m_0 . Криві 1 - 3 відповідають залежностям при $m/m_0 = 1; 1,2; 1,4$ відповідно в часи проходження віддалі по координатам $r = 2r_0$, $r = 3r_0$, $r = 4r_0$.

На рис. 4.13 приведено аналогічні залежності для величини $m/m_0 = 1,6; 1,8; 2$ - криві 4 - 6. Як бачимо, згідно кривих наведених на рис. 4.12 значення величини тиску для варіанту $m/m_0 = 1$ більше ніж на 10% від відповідного значення тиску при $m/m_0 = 1,4$. Аналогічна картина спостерігається згідно залежностям, приведеним на рис. 4.13.

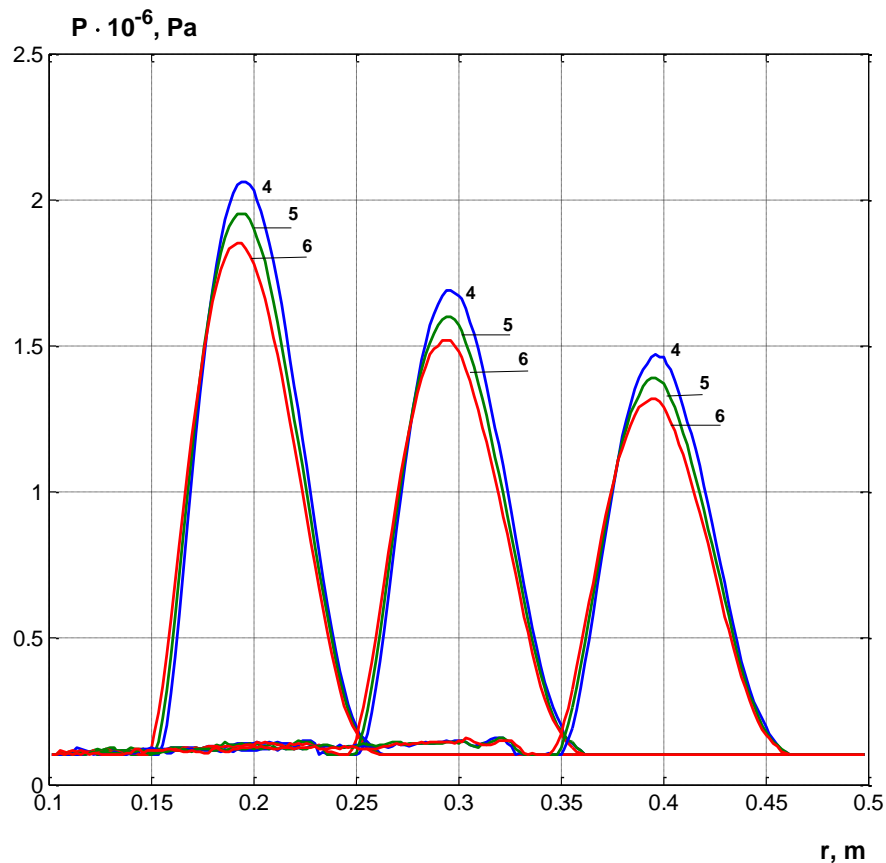


Рис. 4.13. Залежність розповсюдження хвилі тиску P по просторовій координаті r в різні моменти часу

Таким чином, в підрозділі наведено розв'язок динамічних задач підкріплених циліндричних оболонок при взаємодії з ґрунтовим середовищем.

Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки описується рівняннями осесиметричних коливань теорії оболонок типу Тимошенка в рамках конструктивно – ортотропної моделі. Рівняння стану ґрунтового середовища приймається згідно моделі нелінійного рідкого багатокомпонентного середовища. Алгоритм розв’язку задачі про взаємодію циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем базується на використанні скінчено-різницевої схеми Мак - Кормака. Наведено аналіз хвильових процесів в системі підкріплена циліндрична оболонка – ґрунтове середовище.

4.5. Чисельний розв’язок динамічних задач для ґрунтового середовища періодичної структури (двовимірний випадок, циліндрична симетрія)

Розглядається нескінченна циліндрична порожнина в ґрунтовому середовищі періодичної структури. Припускається, що до внутрішньої поверхні порожнини при $r = r_0$ прикладене розподілене імпульсне навантаження $P(r_0, t)$ – (рис. 4.14).

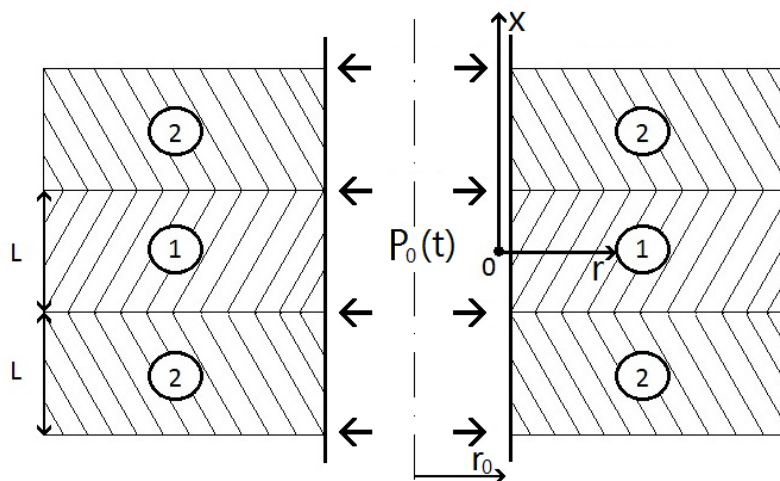


Рис. 4.14. Схематична модель розрахунку

Для опису поведінки шарів ґрунтового середовища застосовується модель нелінійного рідкого багатокомпонентного середовища згідно В.М. Ляхова [81].

Постановку задачі приведено згідно рівнянь (2.78) або (2.80). Чисельний алгоритм розв'язку даної задачі викладено в розділі 3 – формули (3.112) – (3.114).

Розглядається задача про розповсюдження циліндричних хвиль в ґрунтовому середовищі періодичної структури (рис. 4.14). Припускається, що до поверхні циліндричної порожнини при $r = r_0$ прикладається навантаження

$P(r_0, t)$, де $P(r_0, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, $A = 10^7$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с, $\eta(t)$ -

функція Хевісайда. При розрахунках покладалося $r_0 = 0,1$ м; $L/r_0 = 4$. На рис. 4.15, 4.16 приведено результати чисельних розрахунків – залежності величин

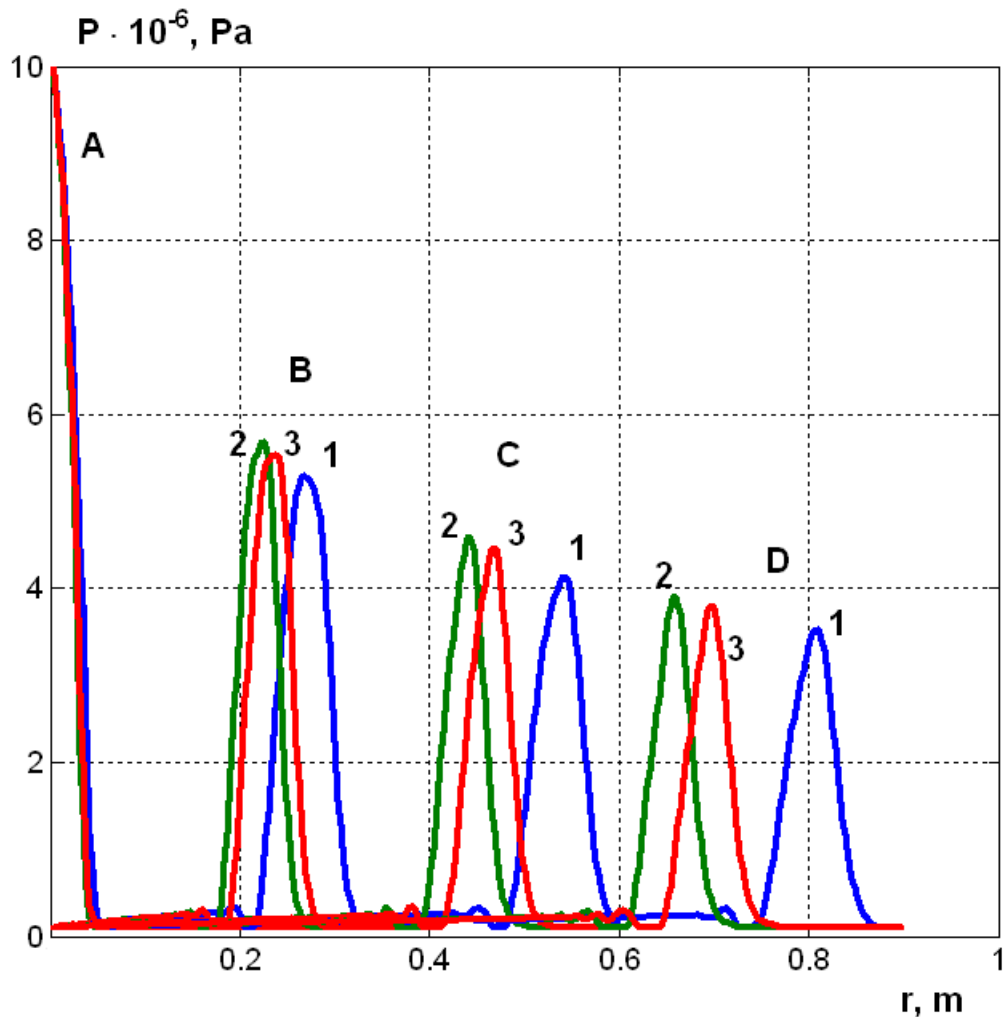


Рис. 4.15. Залежності хвиль тиску P від відстані r для першого шару

хвиль тиску P від відстаней r від краю циліндричної порожнини при $r = r_0$. На рис. 4.15, 4.16 представлені чотири групи залежностей хвиль тиску для різних часів: $A - T$; $B - 3,5T$; $C - 6,5T$; $D - 9,5T$.

На рис. 4.15 приведені залежності величин тиску P від координати r для варіанту шару ґрунта 1 при $x = L/2$ згідно рис. 4.14 ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$). Криві з індексом 1 відповідають вказаному ґрунту. Криві з індексом 2 відповідають величинам тиску P в шарі ґрунта 2 при $x = L/2$ згідно рис. 4.14 ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$). Криві з індексом 3 відповідають величині тиску на границі розділу середовищ (рис. 4.14).

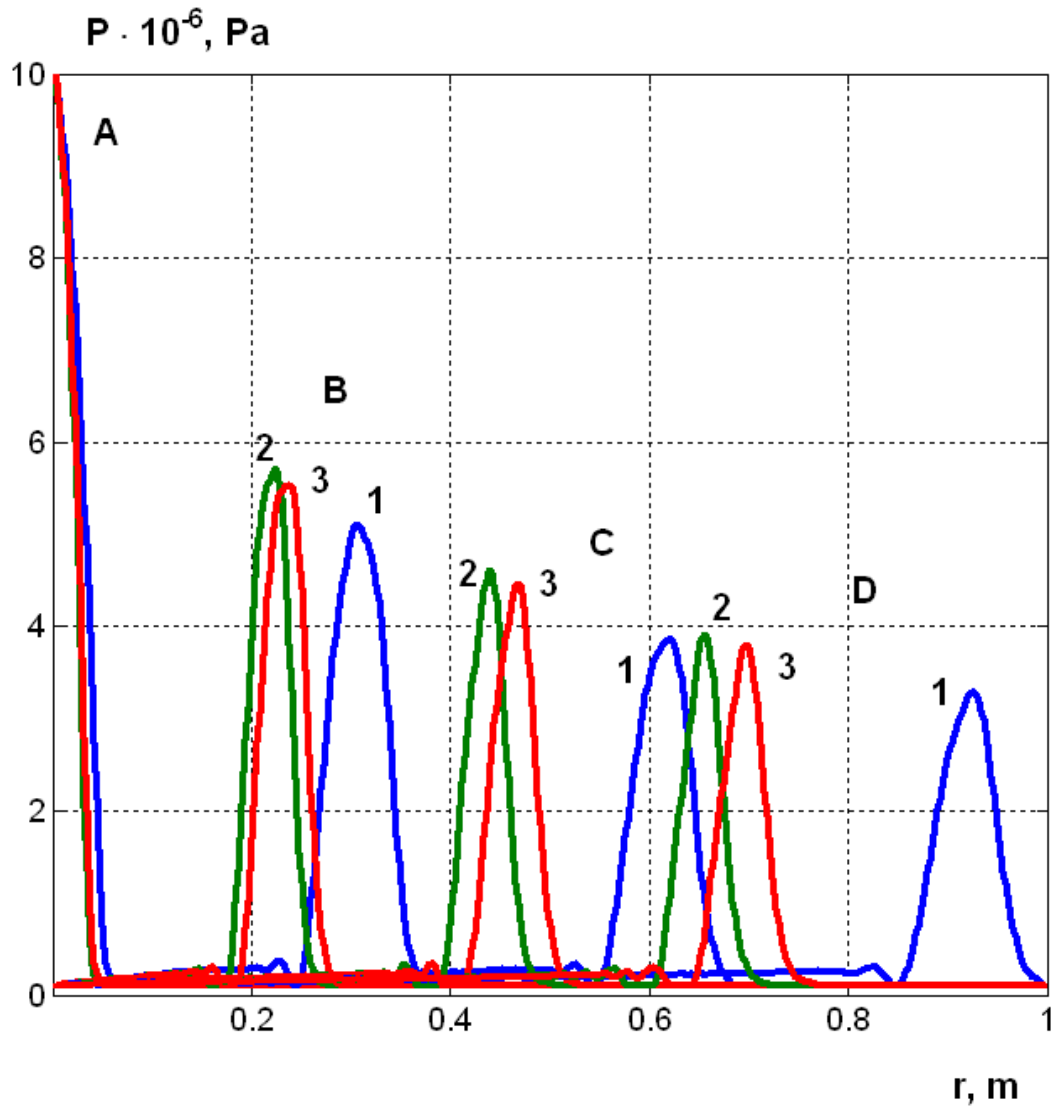


Рис. 4.16. Залежності хвиль тиску P від відстані r для другого шару

На рис. 4.16 приведені аналогічні розрахунки для варіанта ґрунта з наступними параметрами: перший шар – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ (криві 1); другий шар – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,8$; $\alpha_3 = 0,2$ (криві 2); криві 3 відповідають величині тиску на границе розділу середовищ. Для обох випадків задавалося $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

Як видно з представлених чисельних розрахунків, швидкість хвилі тиску згідно рис. 4.15, 4.16 при вказаних параметрах ґрунтових середовищ для випадків $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ та $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ значно превалює по відношенню до швидкості хвилі тиску з другими параметрами ґрунтового середовища. Швидкість хвилі тиску P на границі розділу середовищ 1 і 2 (рис. 4.14) ближче до швидкості хвилі тиску в ґрунті з меншою густиною – криві 3 на рис. 4.15, 4.16. Спостерігається значне затухання хвиль тиску в шарах середовища і на границі розділу середовищ по координаті r в часі t .

Таким чином, розглянуто чисельний розв'язок задачі про розповсюдження циліндричних хвиль в ґрунтовому середовищі періодичної структури. Отримані чисельні результати дозволяють прогнозувати хвильові процеси в неоднорідному ґрунтовому середовищі при проходженні хвиль через шари, контактну границю шарів ґрунта в залежності від їх параметрів.

4.6 Чисельний розв'язок зв'язаних задач циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури (двовимірний випадок, циліндрична симетрія)

Розглядається нескінченна підкріплена циліндрична порожнина в ґрунтовому середовищі періодичної структури. Припускається, що до внутрішньої поверхні підкріплюючої оболонки при $r = r_0$ прикладене розподілене імпульсне навантаження $P_0(r_0, t)$ – (рис. 4.17).

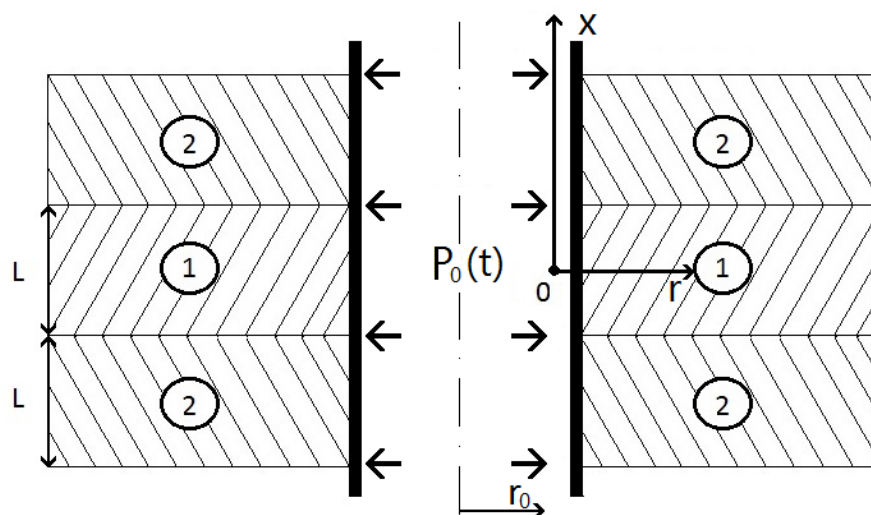


Рис. 4.17. Схематична модель розрахунку

Припускається, що динамічну поведінку підкріплюючої оболонки можна описати в рамках рівнянь теорії пружних оболонок [136, 223]. Отже, розглядається задача динамічної взаємодії циліндричної оболонки з ґрунтовим середовищем періодичної структури при дії внутрішнього розподіленого нестационарного навантаження. Рівняння коливань циліндричної оболонки з врахуванням впливу дії на неї ґрунтового середовища представимо згідно моделі оболонок типу Тимошенка [136, 223]. Рух середовища періодичної структури у випадку циліндричної симетрії описується системою рівнянь в ейлерових координатах [98].

Розглядається задача про розповсюдження циліндричних хвиль в ґрунтовому середовищі періодичної структури (рис. 4.17). Припускається, що до внутрішньої поверхні підкріпленої циліндричної порожнини при $r = r_0$ прикладається навантаження $P(r_0, t)$, де $P(r_0, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$,

$A = 10^7$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с, $\eta(t)$ - функція Хевісайда. При розрахунках

покладалося $r_0 = 0,1$ м; $L/r_0 = 4$; $r_0/h = 10$. На рис. 4.18, 4.19 приведені результати чисельних розрахунків – залежностей величин хвиль тиску P від відстаней r від краю підкріпленої циліндричної порожнини при $r = r_0$. На рис. 4.18, 4.19 представлено три групи залежностей хвиль тиску для різних часів: $A - 0,75T$; $B - 4T$; $C - 8T$ (для розрахунків згідно варіанту 1), $C - 7T$ (для розрахунків згідно варіанту 2).

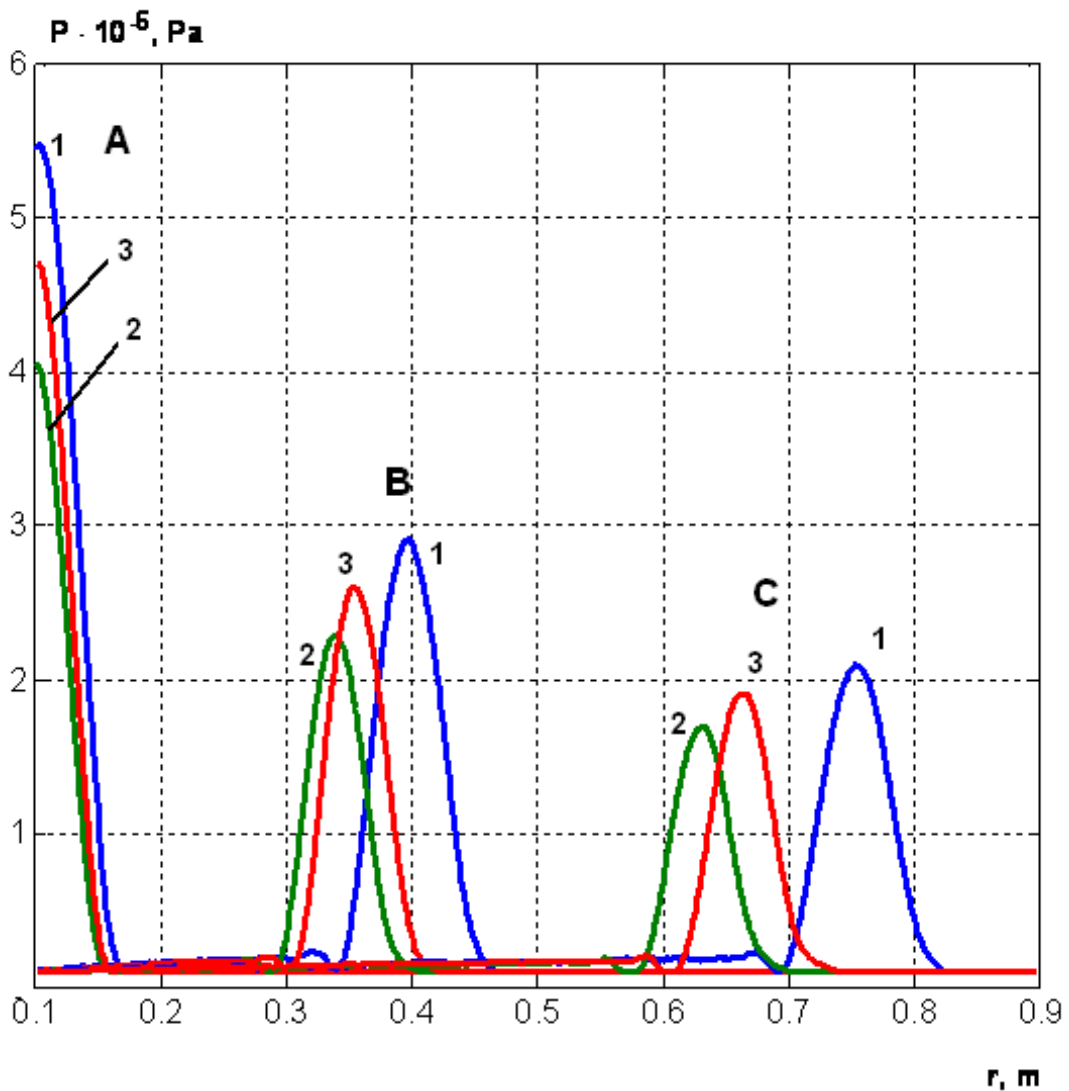


Рис. 4.18. Залежності хвилі тиску P від відстані r для варіанту 1

На рис. 4.18 приведено залежності величин тиску P від координати r для розрахунків згідно варіанта 1. Криві з індексом 1 відповідають ґрунту з параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ в перерізі $x = 0$ згідно рис.4.17. Криві з індексом 2 відповідають величинам P в шарі ґрунта з параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$ в перерізі $x = L$. Криві з індексом 3 – величини тиску P на границі розділу шарів при $x = L/2$.

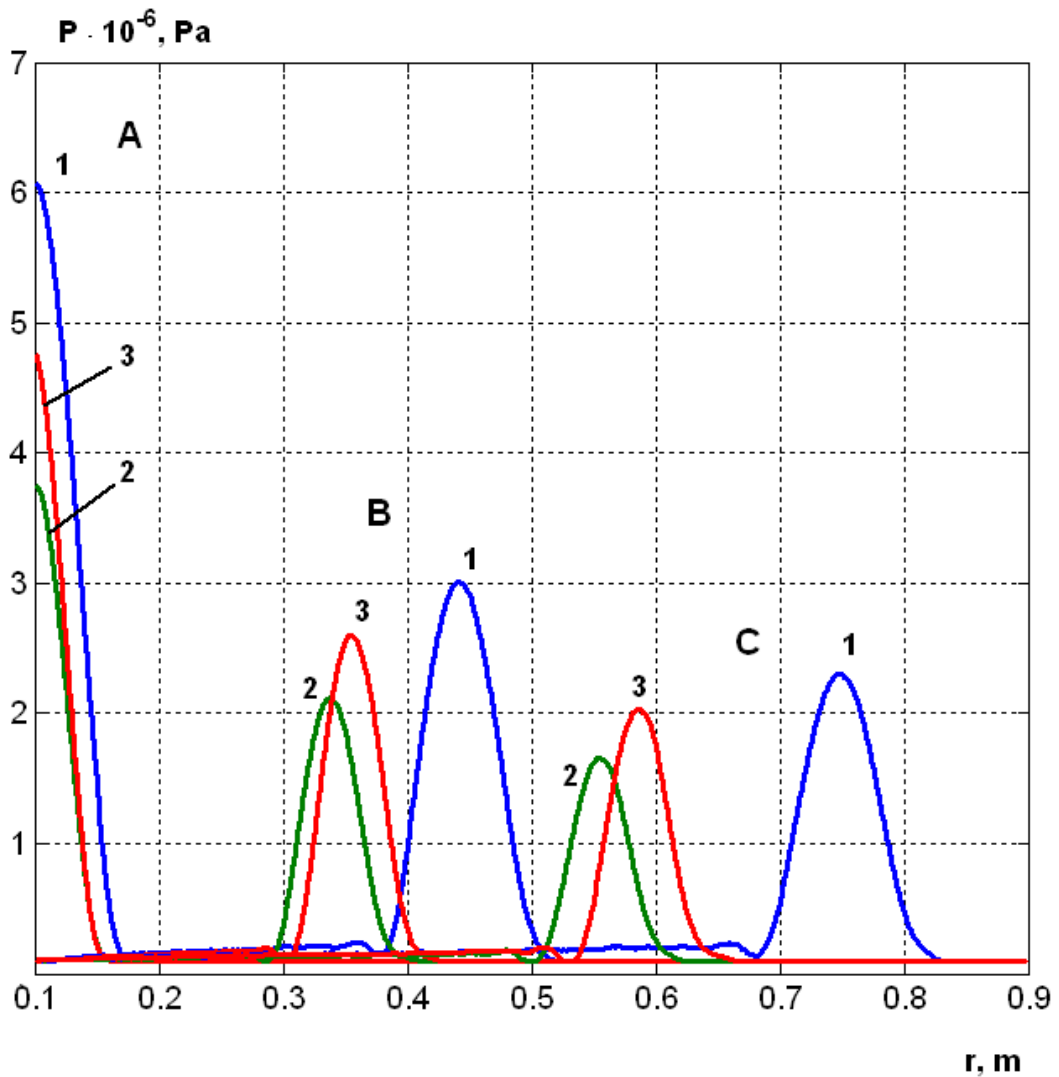


Рис. 4.19. Залежності хвилі тиску P від відстані r для варіанту 2

На рис. 4.19 приведено аналогічні розрахунки згідно варіанту 2: перший шар ґрунта з наступними параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ (криві 1 – в перерізі $x = 0$); другий шар – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,8$; $\alpha_3 = 0,2$ (криві 2 – в перерізі $x = L$); криві 3 відповідають величинам тиску P на границі розділу шарів ($x = L/2$). Для обох випадків покладалося $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

Якісно результати розрахунків за представленими варіантами даної задачі співпадають з результатами розрахунків згідно параграфу 4.5. Наявність підкріплюючої оболонки в циліндричній порожнині вносить свої корективи – падіння амплітуд хвиль тиску у відповідних перерізах шарів в порівнянні з результатами параграфу 4.5. При цьому, значення амплітуд хвиль тиску явно залежать від параметрів шару ґрунта. Також спостерігається відмінність результатів по асовій координаті. Згідно розрахунків за варіантом 1 амплітуда хвилі P (крива 1) в перерізі $r/r_0 = 7,5$ досягається при $t = 8T$, а згідно розрахункам за варіантом 2 досягається при $t = 7T$. Аналогічна картина спостерігається для інших варіантів розрахунків.

Розглянуто чисельний розв'язок задач про хвильові процеси в системі циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури при імпульсних навантаженнях. Отримані результати дозволяють регулювати параметри хвилі тиску, що входить в ґрунт та прогнозувати протікання хвильових процесів в залежності від геометричних та фізико – механічних параметрів оболонки та ґрунтового середовища періодичної структури.

Висновки до четвертого розділу

В четвертому розділі на основі постановок і запропонованих чисельних методів було розглянуто динамічні зв'язані задачі оболонка – ґрунтове середовище. Для одновимірних задач циліндрична оболонка – трикомпонентний ґрунт, сферична оболонка – трикомпонентний ґрунт проведено аналіз розповсюдження хвиль тиску в залежності від геометрії оболонки (циліндрична

оболонка, сферична оболонка) та об'ємного вмісту компонент рівняння стану ґрунта. Виходячи з представлення рівнянь нескінченна циліндрична оболонка – ґрунтове середовище, сферична оболонка – ґрунтове середовище та їх розв'язків запропонована інженерна формула для визначення коефіцієнта Вінклера в залежності від геометрії оболонки та об'ємних компонент рівняння стану. Отримані коефіцієнти Вінклера в наступному будуть використані при розв'язку більш складних задач динамічної поведінки підкріплених оболонок на пружній основі. Були розглянуті задачі динамічної взаємодії циліндричної оболонки з двошаровим ґрунтовим середовищем по просторовій координаті. Проаналізовані явища проходження хвиль тиску через границю контакту ґрунтів (відбиття хвиль тиску, згасання хвиль тиску). У випадку підкріпленої циліндричної оболонки розглядався конструктивно – ортотропний варіант підкріплених оболонок, зокрема повздовжньо підкріплених оболонок. Розглянуто закономірності розповсюдження хвиль тиску по просторовій координаті в залежності від параметрів конструктивної ортотропії.

Також в цьому розділі розглянуті задачі взаємодії циліндричної порожнини та підкріпленої циліндричної порожнини з ґрунтовим середовищем періодичної структури з різними об'ємними параметрами рівняння стану ґрунта. В обох випадках проаналізовано розповсюдження хвиль тиску по відповідним шарам та на лінії розділу шарів ґрунтів. Отримані чисельні результати дозволяють провести оцінку впливу підкріплюючої оболонки (оболонка теорії Тимошенка) на розповсюдження хвиль тиску в ґрунтовому середовищі періодичної структури.

РОЗДІЛ 5

ДИНАМІКА ПІДКРІПЛЕНИХ ТА НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ: ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТА НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

5.1. Підкріплені конічні оболонки на пружній основі (осесиметричний випадок)

Розглядається зрізана ізотропна підкріплена оболонка обертання, яка знаходиться в пружному середовищі, під дією внутрішнього імпульсного навантаження. Пужне середовище моделюється основою типа Вінклера. Дана модель характеризується коефіцієнтом постели Вінклера C_1 , який відповідає за роботу пружної основи на розтяг – стиск.

Припускається, що неоднорідна оболонкова структура складається із власно гладкої оболонки обертання і системи кільцевих ребер, що жорстко з'єднані з нею по лініям контакту. За математичну модель процесів вимушених коливань вказаної структури приймається гіперболічна система лінійних диференціальних рівнянь теорії оболонок та криволінійних стержнів типу Тимошенка (див. розділ 2).

При розгляді теорії конічних оболонок використовується система координат (s, θ, z) , де координата s ($s = \alpha_1 A_1$) відраховується від лівого краю оболонки з радіусом серединної поверхні R_0 (варіант зрізаних конічних оболонок). Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривизни координатної поверхні записуються у вигляді $A_1 = 1$, $A_2 = R_s$, $k_1 = 0$, $k_2 = \cos \beta / R_s$, де β – кут конусності, s – текуча координата, $R_s = R_0 + s \cdot \sin \beta$. Використовуються умови жорсткого контакту оболонка – ребро (див. розділ 2).

Для визначення напружено – деформованого стану неоднорідної пружної структури застосовується геометрично лінійний варіант теорії оболонок. При

цьому, деформаційні співвідношення для оболонок та j – го ребра приймаються у вигляді

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{u_1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s} + k_2 u_3, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1, \quad (5.1)$$

$$\theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial s}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \quad \kappa_{22} = \frac{\varphi_1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial s}, \quad \varepsilon_{22j} = k_{2j} u_{3j}.$$

Для виведення рівнянь коливань неоднорідної оболонкової структури використовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського. Згідно підходу отримання рівнянь коливань підкріплених оболонок на пружній основі, який викладено в другому розділі, маємо наступні рівняння коливань в диференціальній формі

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s} T_{22} \right] + k_1 T_{13} + P_1 = \\ & = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \Bigg|_{s=s_j}, \\ & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{13}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s} \left(C_2 A_2 \frac{\partial u_3}{\partial s} \right) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} - k_{2j} T_{22j} \Bigg|_{s=s_j} - \\ & - C_1 u_3 + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \Bigg|_{s=s_j}, \\ & \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s} M_{22} \right] - T_{13} + m_1 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \\ & + \sum_{j=1}^J \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] \Bigg|_{s=s_j}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Позначення величин в рівняннях (5.2) приймаються згідно позначень розділу 2.

Рівняння коливань (5.2) доповнюються відповідними граничними умовами (в зусиллях або переміщеннях) та нульовими початковими умовами.

Чисельний алгоритм розв'язування задачі базується на скінчено – різницевій апроксимації вихідних рівнянь коливань (5.2) із застосуванням інтегро – інтерполяційного метода побудови різницевих схем по просторовій координаті s та явній скінчено – різницевій апроксимації по часовій координаті t , викладений в розділі 3. Шукається розв'язок в гладкій області та склеюється на лініях просторових розривів (лінії розташування ребер).

Розглянуто задачу динамічної поведінки зрізаної підкріпленої конічної оболонки на пружній основі Вінклера. Припускається, що торці оболонки жорстко защемлені в перерізах $s = s_0$ та $s = s_N$ і мають місце наступні граничні умови $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$. Початкові умови нульові при $t = 0$

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

До внутрішньої поверхні конічної оболонки прикладається розподілене навантаження виду

$$P_3(\alpha_1, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження.

Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах: $s_0 = 0$, $s_N = 0,4$ м; $R_0/h = 60$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu = 0,3$; $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Коефіцієнт постели покладався $C_1 = 0,25 \cdot 10^8$ н/м³. Ребра розташовані в точках $s_j = 0,1Lj$, $j \equiv \overline{1,3}$; $L = s_N - s_0$.

Чисельні розрахунки проводилися на часовому інтервалі $t = 20T$. На рис. 5.1 і рис. 5.2 приведені криві величин u_3 та σ_{22} в залежності від просторової координати s і кута конусності β в момент часу $t = 4T$. Крива 1 на рис. 5.1, 5.2 відповідає вказаним залежностям для випадку $\beta = \pi/6$, крива 2 відповідає куту

$\beta = \pi/12$. Як видно із графічного матеріалу, чітко проявляється вплив підкріплюючих елементів ($s_j = 0,1Lj$, $j \equiv \overline{1,3}$; $L = s_N - s_0$) на напружено – деформований стан неоднорідної конструкції на пружній основі. Було проведено порівняльний аналіз чисельних результатів по поведінці зрізаної підкріпленої

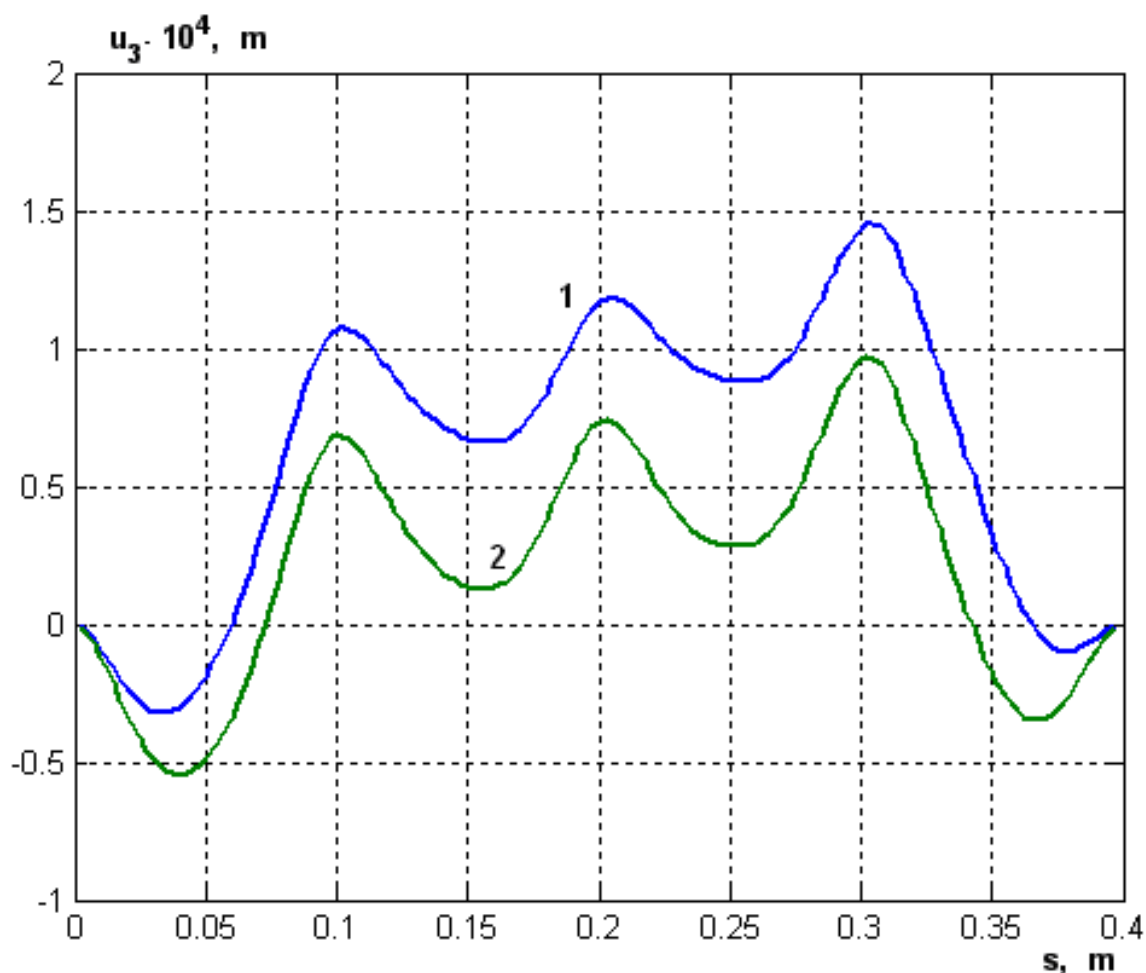


Рис. 5.1. Залежність величини прогину u_3 від кути конусності β по просторовій координаті s

конічної оболонки на пружній основі и без врахування пружної основи. Різниця результатів по величинам u_3 та σ_{22} в амплітудному і частотному діапазонах починають відчуватися починаючи з часу $t = 2T$. Аналогічний порівняльний аналіз чисельних результатів по поведінці гладкої конічної оболонки на пружній

основі и без її врахування показує, що різниця результатів в амплітудному і частотному діапазонах починає проявлятися починаючи з часу $t = 4T$.

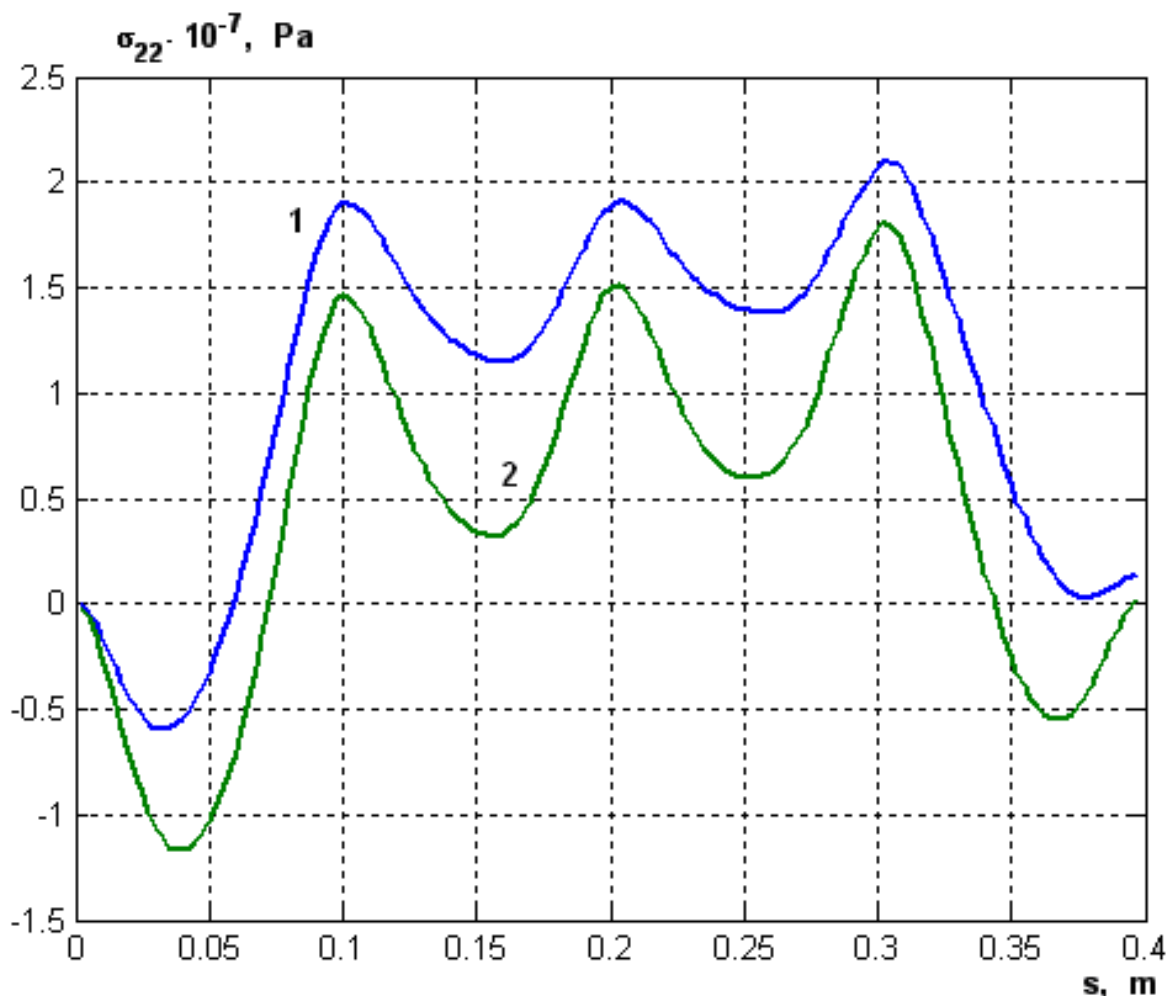


Рис. 5.2. Залежність величини прогину σ_{22} від кута конусності β по просторовій координаті s

5.2. Розв'язок задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок (конструктивно - ортотропна модель) при нестационарних навантаженнях

Розглядається підкріплена циліндрична оболонка при дії на неї розподіленого навантаження $P_3(x, y, t)$, де x, y – просторові координати серединної поверхні обшивки; t – часова координата.

Припускається, що циліндрична оболонка підкріплена регулярним набором повздожніх і поперечних ребер. Для опису напружено – деформованого стану (НДС) вихідної неоднорідної оболонкової структури застосовується конструктивно – ортотропна модель теорії підкріплених оболонок типу Тимошенка [24]. При цьому, підкріплена оболонка розглядається як деяка двошарова оболонка, яка складається власно із обшивки та шару з приведеними фізико – механічними параметрами в напрямках x і y . Покладаємо, що НДС обшивки можна визначити через узагальнений вектор переміщень серединної поверхні $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$. Відповідно НДС приведенного шару визначається через узагальнений вектор переміщень шару $\bar{U}_c = (u_{1c}, u_{2c}, u_{3c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c})$. Зв'язок між компонентами векторів \bar{U} та \bar{U}_c у випадку чисто повздожнього підкріплення визначається формулами

$$u_{1c}(x, y) = u_1(x, y) \pm h_{ci} \varphi_1(x, y); \quad (5.3)$$

$$u_{2c}(x, y) = u_2(x, y) \pm h_{ci} \varphi_2(x, y);$$

$$u_{3c}(x, y) = u_3(x, y);$$

$$\varphi_{1c}(x, y) = \varphi_1(x, y);$$

$$\varphi_{2c}(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

У випадку чисто поперечного підкріплення рівняння зв'язку мають вигляд

$$u_{1c}(x, y) = u_1(x, y) \pm h_{cj} \varphi_1(x, y); \quad (5.4)$$

$$u_{2c}(x, y) = u_2(x, y) \pm h_{cj} \varphi_2(x, y);$$

$$u_{3c}(x, y) = u_3(x, y);$$

$$\varphi_{1c}(x, y) = \varphi_1(x, y);$$

$$\varphi_{2c}(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

В рівняннях (5.3), (5.4) $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$, $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$, де h - товщина обшивки; h_i, h_j - висота ребер в поздовжньому і поперечному напрямках. Знаки \pm відповідають випадкам зовнішнього та внутрішнього підкріплень.

Для виведення рівнянь коливань циліндричної оболонки використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського (див. розділ 2). Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо рівняння коливань гладкої циліндричної оболонки

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(T_{11} + T_{11c}) + \frac{\partial S}{\partial y} &= \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm & (5.5) \\
 \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(T_{22} + T_{22c}) + k_2(T_{23} + T_{23c}) &= \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm \\
 \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial s_1}(T_{13} + T_{13c}) + \frac{\partial}{\partial s_2}(T_{23} + T_{23c}) - k_2(T_{22} + T_{22c}) + P_3(x, y, t) &= \\
 = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial x}(M_{11} + M_{11c} \pm h_{ci} T_{11c}) + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} &= \\
 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (M_{22} + M_{22c} \pm h_{cj} T_{22c}) - T_{23} = \\
& = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
& + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Величини зусиль і моментів в рівняннях коливань для неоднорідної оболонки (5.5) зв'язані з відповідними величинами деформацій наступними співвідношеннями:

$$T_{11} = B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22}, \quad T_{22} = B_{21} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22}, \quad (5.6)$$

$$T_{13} = B_{13} \varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23} \varepsilon_{23}, \quad T_{12} = B_{12}^* \varepsilon_{12},$$

$$M_{11} = D_{11} \kappa_{11} + D_{12} \kappa_{22}, \quad M_{22} = D_{21} \kappa_{11} + D_{22} \kappa_{22}, \quad H = D_{12}^* \kappa_{12};$$

$$T_{11c} = B_{11c} \varepsilon_{11c}, \quad T_{22c} = B_{22c} \varepsilon_{22c},$$

$$T_{13c} = B_{13c} \varepsilon_{13c}, \quad T_{23c} = B_{23c} \varepsilon_{23c},$$

$$M_{11c} = D_{11c} \kappa_{11c}, \quad M_{22c} = D_{22c} \kappa_{22c};$$

де

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1,$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - k_2 u_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y};$$

$$\varepsilon_{11c} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22c} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{13c} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1, \quad \varepsilon_{23c} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - k_2 (u_2 \pm h_{cj} \varphi_2),$$

$$\kappa_{11c} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22c} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y};$$

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{21} = B_{12}, \quad B_{12}^* = G_{12} h,$$

$$B_{13} = G_{13} h, \quad B_{23} = G_{23} h,$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$D_{12} = \frac{\nu_1 E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{21} = D_{12}, \quad D_{12}^* = G_{12} \frac{h^3}{12};$$

$$B_{11c} = \frac{E_{1c} F_1}{l_1}, \quad B_{13c} = \frac{G_1 F_1}{l_1},$$

$$D_{11c} = \frac{E_{1c} I_1}{l_1}, \quad B_{22c} = \frac{E_{2c} F_2}{l_2},$$

$$B_{23c} = \frac{G_{2c} F_2}{l_2}, \quad D_{22c} = \frac{E_{2c} I_2}{l_2}.$$

де $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – фізико - механічні параметри ортотропного матеріалу оболонки; l_1, l_2 – відстані між ребрами для повздовжнього та поперечного набору; a_1, h_1, F_1 – геометричні параметри ребер вздовж осі x ; a_2, h_2, F_2 – геометричні параметри ребер вздовж осі y .

Рівняння (5.5), (5.6) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

Чисельний алгоритм розв'язку початково – краєвої задачі (5.5), (5.6) базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам x, y і явній апроксимації по часовій координаті t (див. розділ 3).

Як чисельний приклад, розглядалася задача динамічної поведінки повздовжньо - поперечно підкріпленої ребрами циліндричної оболонки при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження. Припускалося, що краї оболонки при $x = 0$ та $x = L_1$ жорстко защемлені, де L_1 – довжина оболонки.

Розподілене імпульсне навантаження $P_3(x, y, t)$ задавалося наступним чином $P_3(x, y, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де $E_1 / A = 7 \cdot 10^4$; $T = 0,625 L_1 / c_{11}$; $c_{11}^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1 \nu_2)]$; E_1, ρ, ν_1, ν_2 – фізико – механічні параметри матеріалу оболонки.

Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах для оболонки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L_1 / h = 40$; $R / h = 10$. Для підкріплюючих ребер покладалося: $E_i = E_j = E_1$; $F_i = a_i h_i$; $F_j = a_j h_j$; $a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$; $l_1 = L_2 / 4$; $l_2 = L_1 / 4$; $L_2 = \pi R / 2$.

Розрахунки проводилися в області $D = \{0 \leq x \leq L_1, 0 \leq y \leq L_2\}$ на часовому інтервалі $0 \leq t \leq 80T$. На рис. 5.3, 5.4 приведено результати чисельних розрахунків для величин u_3 . На рис. 5.3 представлені залежності переміщення u_3 по просторовій координаті x в перерізі $y = 0$ в момент часу $t = 8,5T$. Крива 1 відповідає розрахункам згідно конструктивно - ортотропной моделі циліндричних оболонок для часу досягнення величиною u_3 максимального значення в даному перерізі. Крива 2 відповідає розрахункам згідно теорії

дискретно підкріплених циліндричних оболонок в той самий момент часу при вказаних l_1, l_2 .

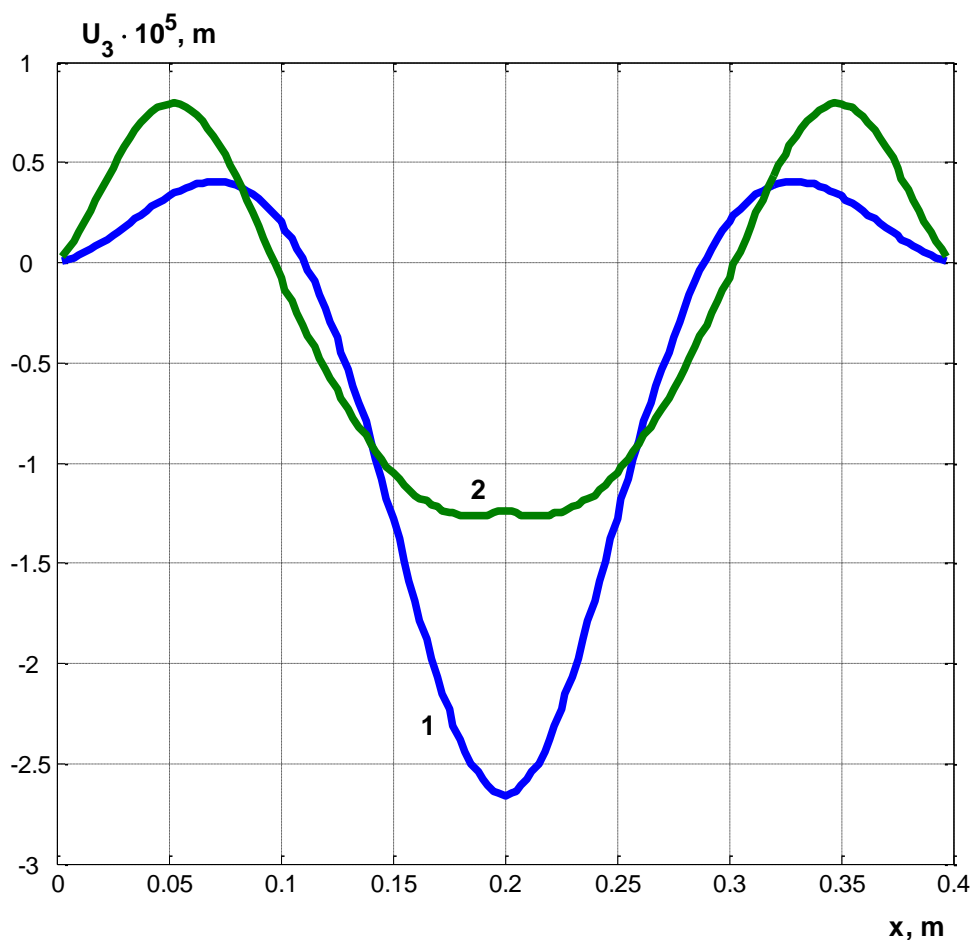


Рис. 5.3. – Залежності величин переміщення u_3 по просторовій координаті x в перерізі $y = 0$ в момент часу $t = 8,5T$

На рис. 5.4 приведені залежності величин u_3 від часової координати t в перерізі $y = 0$; $x = 0,5L_1$. Крива 1 відповідає розрахункам згідно конструктивно - ортотропної моделі, крива 2 – моделі дискретно підкріплених оболонок. Як видно із приведеного графічного матеріалу, спостерігається значна відмінність по величині u_3 , як по просторовій координаті, так і по часовій координаті при розрахунках згідно двох моделей підкріплених оболонок.

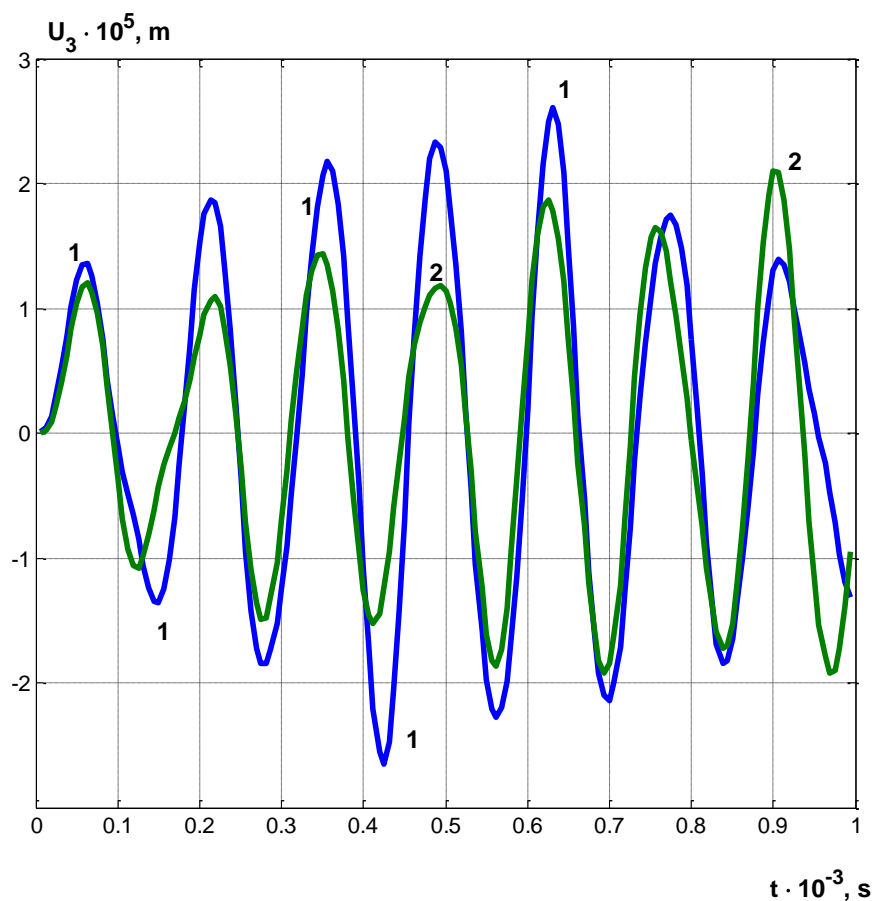


Рис. 5.4. Залежності величин переміщення u_3 від часової координати t в перерізі $y = 0, x = 0,5L$

В даному підрозділі дано постановку задачі про вимушені коливання повздовжньо - поперечно підкріплених циліндричних оболонок в рамках конструктивно – ортотропної моделі при дії нестационарного навантаження. Розвинений чисельний алгоритм розв'язку даного класу задач. Приведені результати розрахунків та проведено кількісний та якісний аналіз отриманих результатів.

5.3. Нестационарна деформація повздовжньо - поперечно підкріплених циліндричних оболонок на пружній основі (неосесиметрична задача)

Розглянуто задачу динамічної поведінки повздовжньо – поперечно дискретно підкріпленої ребрами циліндричної оболонки на пружній основі типу Вінклера під дією розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження.

Постановка даної задачі приведена в розділі 2. Чисельний алгоритм розв'язку даної задачі викладено в розділі 3. Схематичне зображення постановки задачі зображено на рис. 5.5.

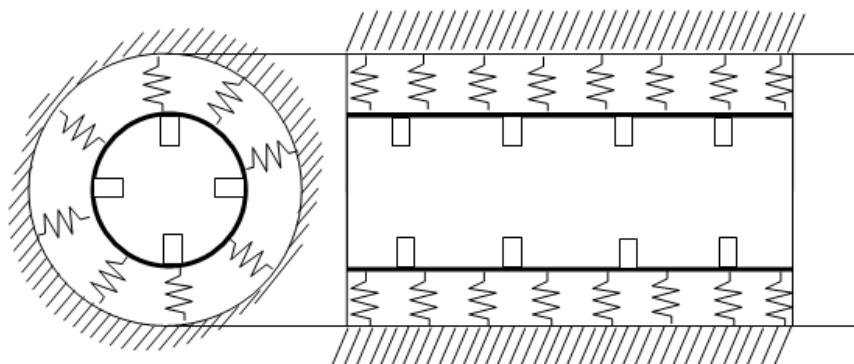


Рис. 5.5. Схематичне зображення повздовжньо – поперечно дискретно підкріпленої ребрами циліндричної оболонки на пружній основі

Приймалося, що торці оболонки при $x = 0$, $x = L$ жорстко зацемлені, тобто $u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Початкові умови нульові. Поперечні ребра розташовано в перерізах $x_i = 0,25Li$, ($i = \overline{1, 3}$). Повздовжні ребра розташовано в перерізах $y_j = \pi R(j-1)/2$, ($j = \overline{1, 4}$) (оболонка підкріплена трьома поперечними ребрами та чотирма повздовжніми). Розподілене імпульсне навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалося наступним чином:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \text{ де } A - \text{ амплітуда навантаження, } T -$$

тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $E_1/A = 7 \cdot 10^4$;

$$T = 2,5R/c; \quad c = \{E_1 / [\rho(1 - \nu_1\nu_2)]\}^{1/2}.$$

Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $R/h = 10$ м; $L/R = 4$ м. Для підкріплюючого ребра приймалося: $E_i = E_j = E$; $F_i = F_j = a_j h_j$;

$a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$. Розрахунки проведено для трьох значень коефіцієнта

пружної основи Вінклера: 1) $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; 2) $C_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; 3) $C_1 = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$. Розрахунки проведено на часовому інтервалі $0 < t \leq 40T$.

На рис. 5.6, 5.7 приведено залежності прогину u_3 по довжині конструкції. Рис. 5.6 відповідає залежності прогину u_3 від просторової координати x в перерізі $y = \pi R/4$ (переріз між ребрами) в момент часу $t = 8,5T$ (час досягнення максимального значення u_3 для випадку $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$). Крива 1 відповідає випадку розрахунків при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; крива 2 - $C_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; крива 3 - $C_1 = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$.

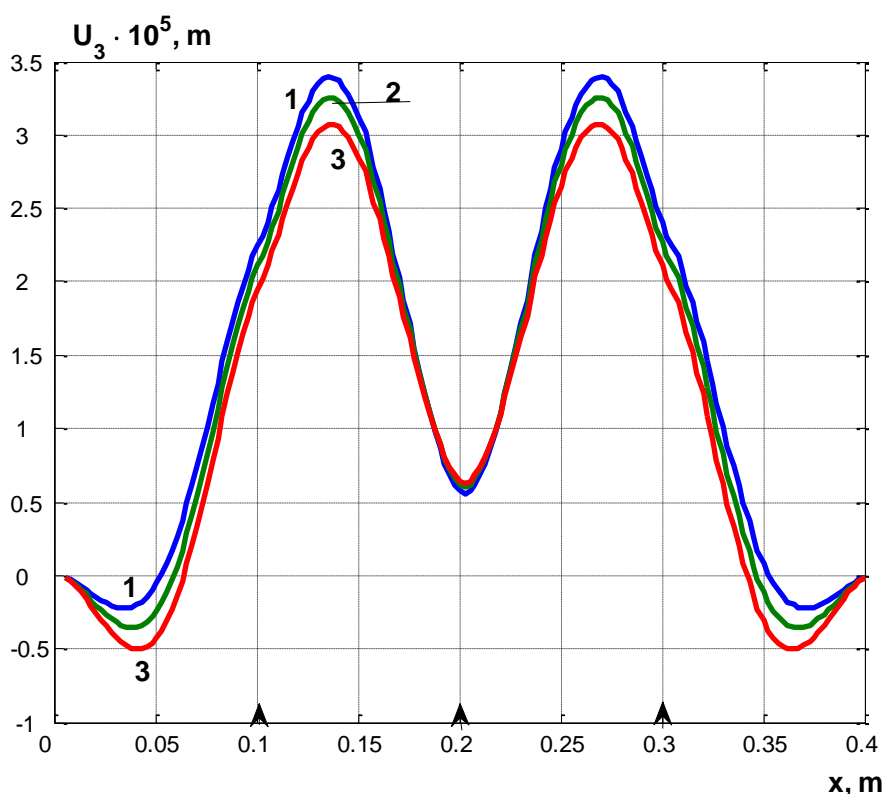


Рис. 5.6. Залежності прогину u_3 від просторової координати x в перерізі $y = \pi R/4$

На рис. 5.7 представлені відповідні залежності в той самий момент часу в перерізі $y = 0$. На рис. 5.8 – 5.11 приведені залежності величин деформацій ε_{22} та напружень σ_{22} по просторовій координаті x в перерізах $y = 0$ (на ребрі – рис.

5.8, рис. 5.10) та $y = \pi R/4$ (між ребрами – рис. 5.9, рис. 5.11) в момент часу $t = 8,5T$. Криві 1 – 4 на рисунках відповідають наступним випадкам: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³; 3) $C_1 = 2 \cdot 10^9$ Н/м³; 4) $C_1 = 3 \cdot 10^9$ Н/м³.

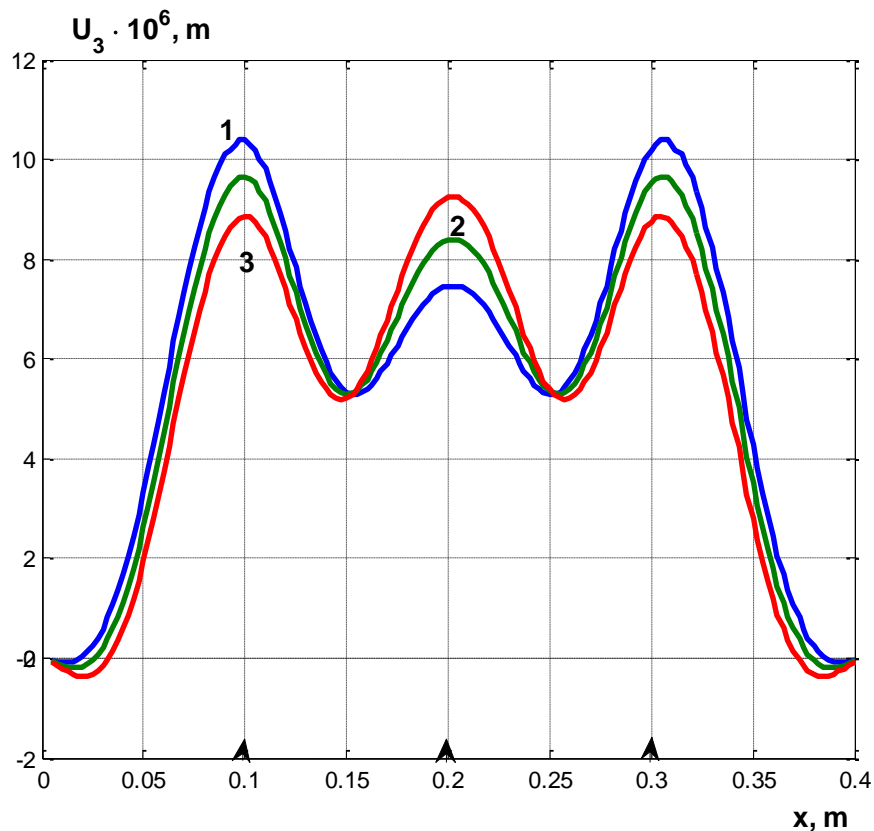


Рис. 5.7. Залежності прогину u_3 від просторової координати x в перерізі $y = 0$

Вплив ребер по просторовій координаті x , виходячи із представлених графіків, визначається візуально. Для величин деформацій ε_{22} та напружень σ_{22} спостерігаються просторові розриви по лініях розташування поперечних ребер. В перерізах між ребрами ці залежності мають більш виражений характер. Врахування пружної основи при наведених значеннях коефіцієнтів C_1 призводить до незначних змін напружено – деформівного стану неоднорідної оболонки по відношенню до величин без пружної основи (максимальні відмінності по величинах деформацій ε_{22} складають 14-16%, а по величинам напружень σ_{22} - 25%).

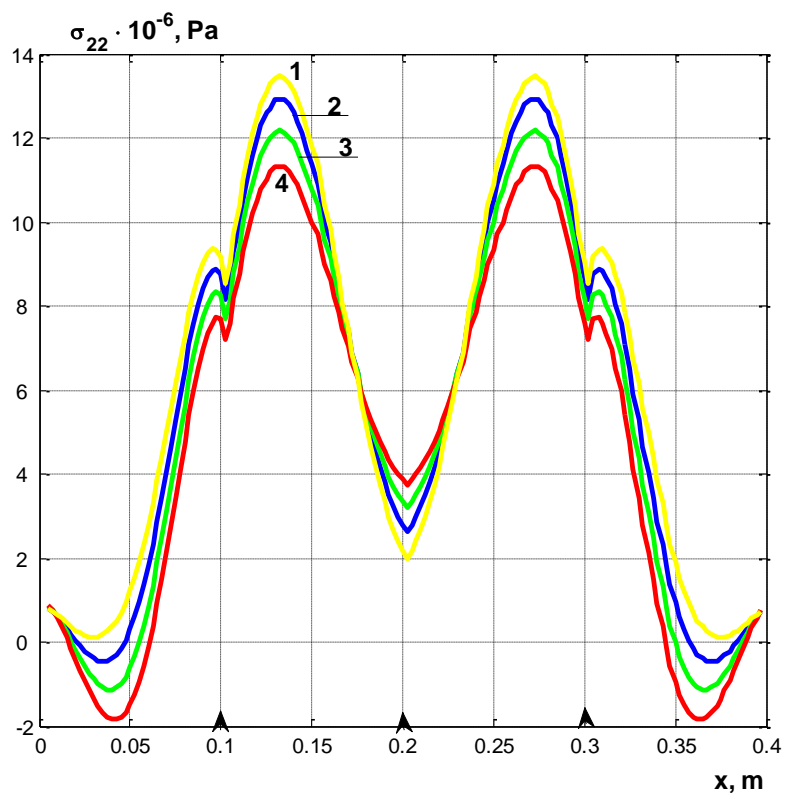


Рис. 5.8. Залежності прогину σ_{22} від просторової координати x в перерізі $y = \pi R/4$

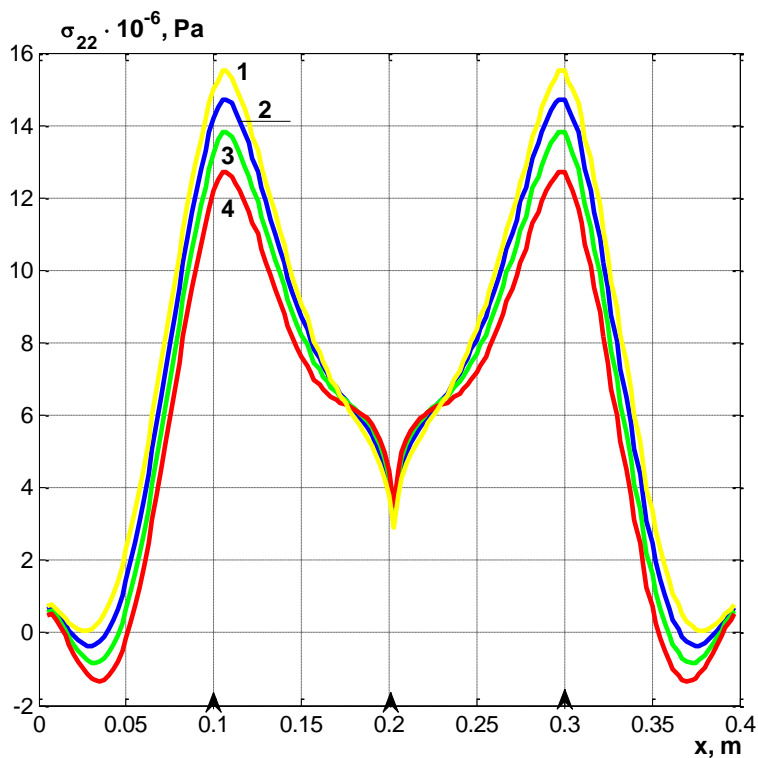


Рис. 5.9. Залежності прогину σ_{22} від просторової координати x в перерізі $y = 0$

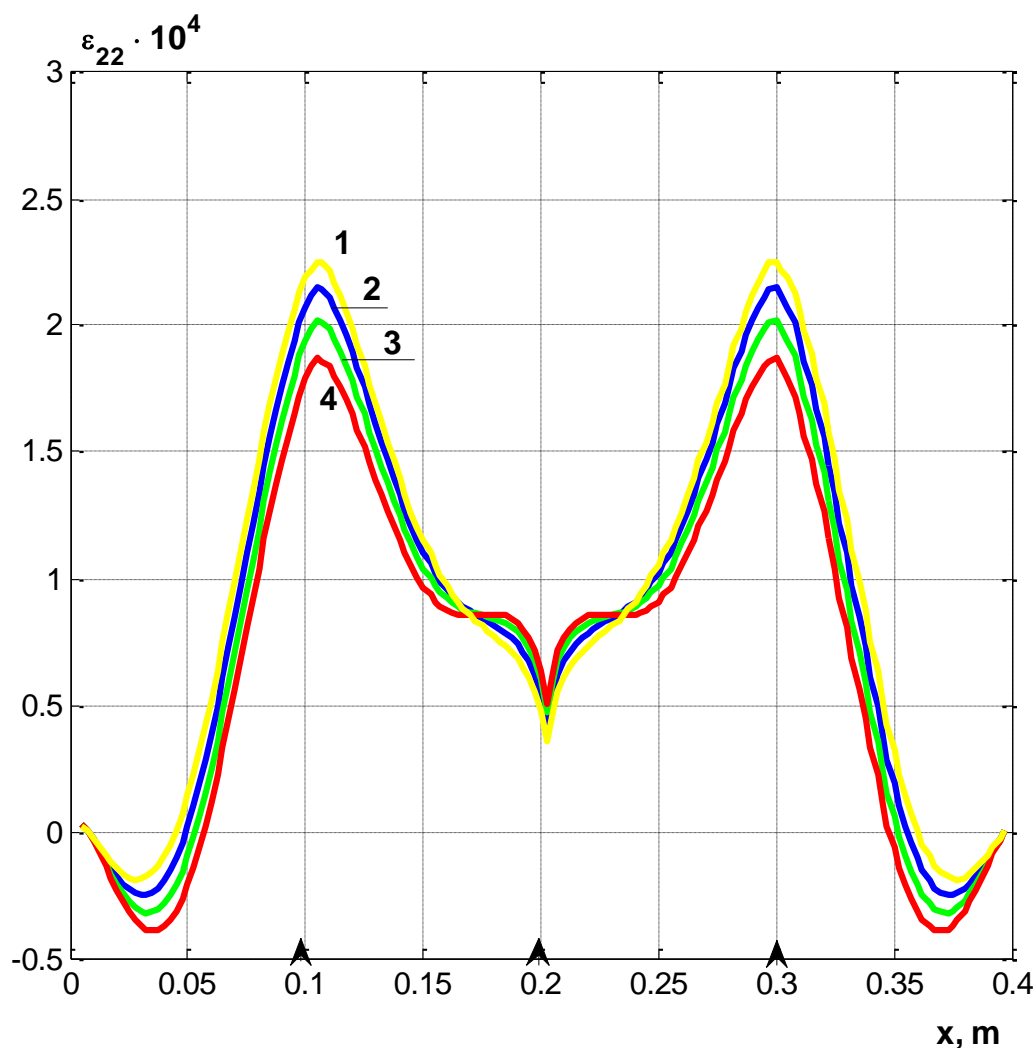


Рис. 5.10. Залежності прогину ε_{22} від просторової координати x в перерізі $y = \pi R/4$

Представлений графічний матеріал дозволяє детально аналізувати напружено – деформівний стан неоднорідної пружної структури в залежності від її фізико – механічних та геометричних параметрів пружної основи.

В підрозділі представлено постановку задачі про вимушені коливання циліндричної дискретно підкріпленої оболонки на пружній основі при розподіленому навантаженні. Динамічну поведінку неоднорідної циліндричної оболонки розглянуто в рамках теорії оболонок та стрижнів типу Тимошенка. Для розв'язку даної задачі використовується метод скінчених різниць по

просторовим та часовій координатам. Наведено чисельні результати розв'язку задачі та представлено їх аналіз.

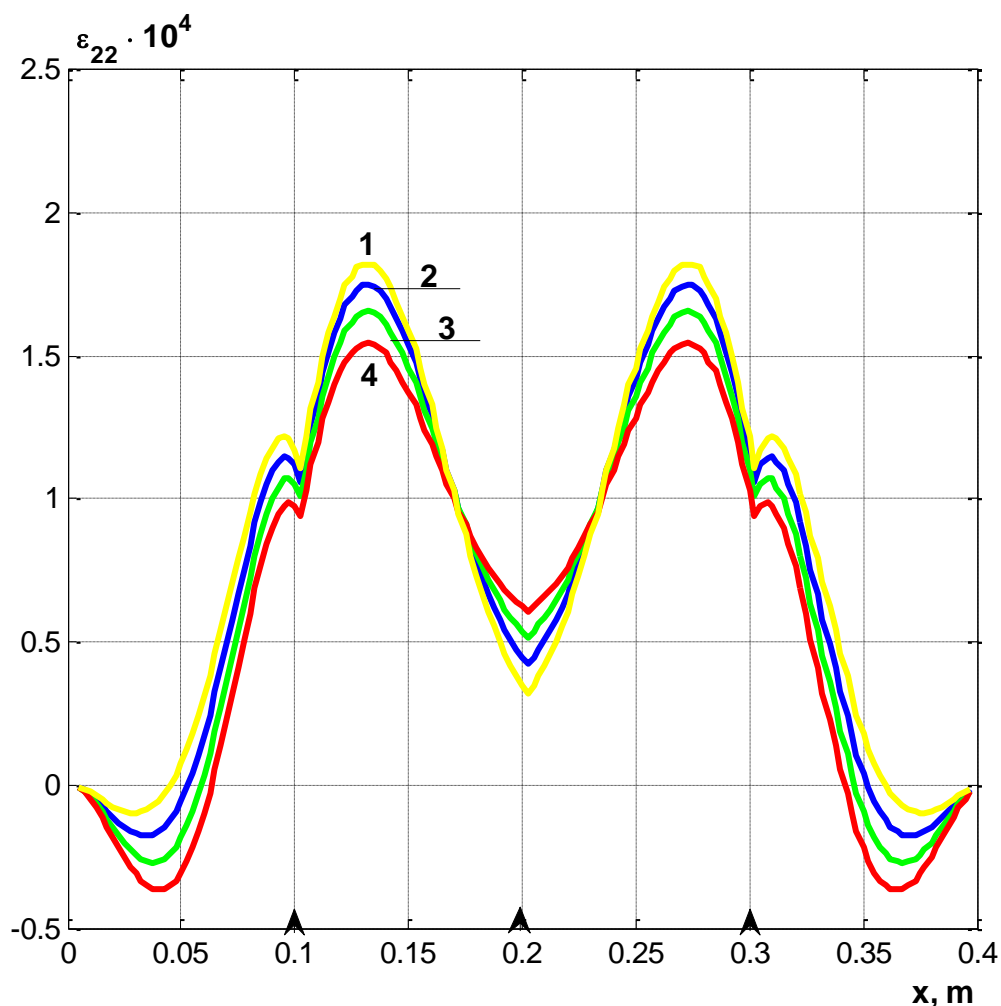


Рис. 5.11. Залежності прогину ε_{22} від просторової координати x в перерізі $y = 0$

5.4. Модельні задачі динамічної поведінки адаптера (тришарові циліндричні оболонки з дискретним ребристим наповнювачем)

В даному підрозділі розглянуто модельні задачі динамічної поведінки адаптера. Зокрема, розглядалися задачі вимушених коливань тришарових циліндричних оболонок з дискретним повздовжнім ребристим наповнювачем при внутрішньому розподіленому імпульсному навантаженні та циліндричних

оболонки з повздожньо – поперечним наповнювачем при внутрішньому розподіленому імпульсному навантаженні.

5.4.1. Нестационарні коливання тришарових циліндричних оболонок з повздожнім дискретним ребристим наповнювачем

Розглядалася задача про вимушені коливання тришарової циліндричної оболонки з дискретним повздожнім ребристим наповнювачем при внутрішньому розподіленому імпульсному навантаженні. Покладалося, що краї оболонки та елементів повздожнього наповнювача жорстко закріплені. Постановка вихідної початково – краєвої задачі приведена в розділі 2. Чисельний алгоритм розв'язку даної задачі наведено в розділі 3. Граничні умови для цього випадку при $x = 0$, $x = L$ мають наступний вигляд

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0, \quad k = \overline{1, 2};$$

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0, \quad i = \overline{1, I}.$$

Початкові умови для вихідної системи рівнянь мають вигляд при $t = 0$

– для обшивок

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0, \quad (k = 1, 2),$$

$$\frac{\partial u_1^k}{\partial t} = \frac{\partial u_2^k}{\partial t} = \frac{\partial u_3^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial t} = 0;$$

– для повздожніх дискретних елементів наповнювача

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0, \quad (i = \overline{1, I}),$$

$$\frac{\partial u_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} = \frac{\partial u_{3i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} = 0.$$

Задача розглядалася при наступних геометричних та фізико–механічних параметрах:

$$L/h_1 = 80, \quad a/h_1 = 16.5, \quad R_1/h_1 = 20, \quad h_i = 2h_1, \quad i = \overline{1, I};$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_i = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_1^1 = \nu_1^2 = 0.3; \rho_1 = \rho_2 = \rho_i = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

де R_k, h_k – радіус серединної поверхні та товщина обшивок; L – довжина конструкції в напрямку x ; a – довжина конструкції в напрямку y .

Розглядався випадок повздовжнього дискретного наповнювача при $I = 2$, коли дискретні елементи рівномірно розташовані по просторовим координатам між внутрішньою та зовнішньою обшивками. Нормальне імпульсне навантаження задавалося згідно формули $P_3^1 = A \cdot [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де $\eta(t)$ – функція Хевісайда, A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Результати розрахунків вказаної задачі наведені на рис. 5.12, рис. 5.13.

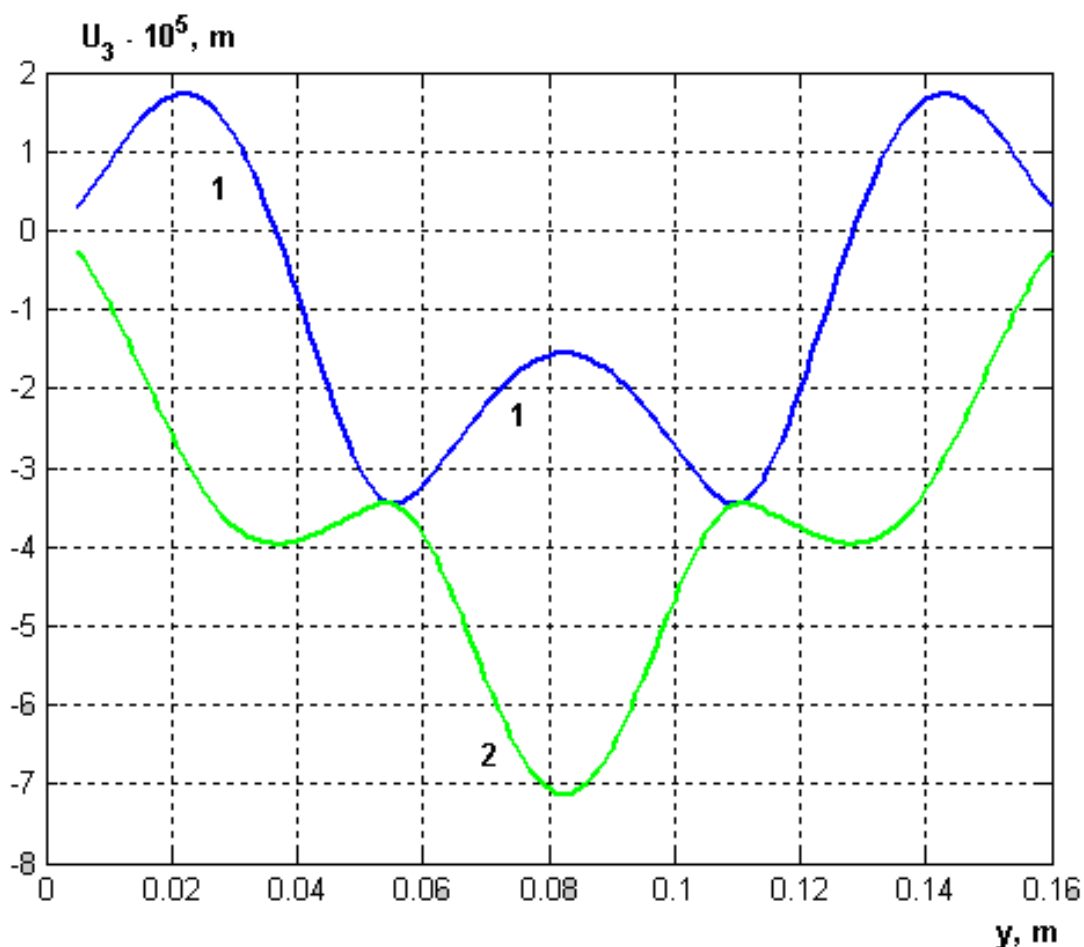


Рис.5.12. Залежність величини u_3 по просторовій координати y для внутрішньої та зовнішньої обшивок

На рис. 5.12 криві з індексом 1 відповідають величинам прогину внутрішньої обшивки, а криві з індексом 2 відповідають величинам прогину зовнішньої обшивки для випадку часу $t = 3T$ (час досягнення максимального значення величини u_3 зовнішньої оболонки). Приведений графічний матеріал відповідає розрахункам по просторовій координаті y для перерізу $x = L/2$.

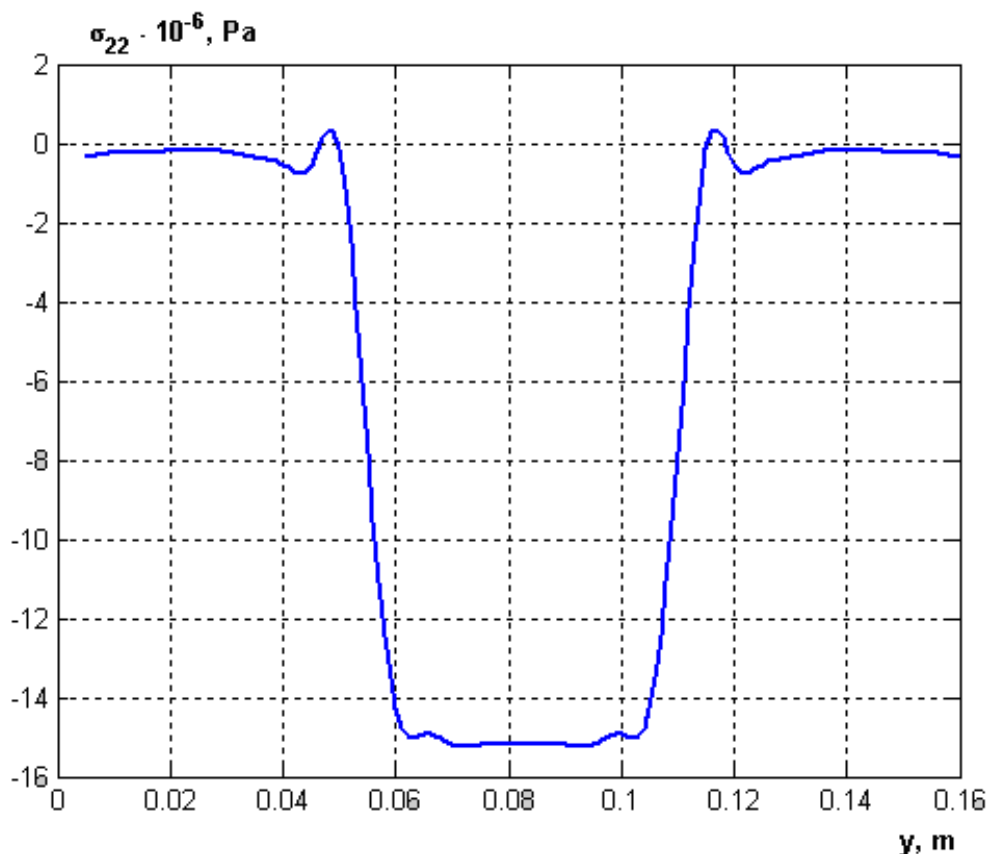


Рис. 5.13. Залежність величини σ_{22} по просторовій координаті y для внутрішньої обшивки

На рис. 5.13 приведено залежність величини σ_{22} по просторовій координаті y для перерізу $x = L/2$ в момент часу $t = 3T$. З приведенного матеріалу чітко спостерігаються місця розташування повздовжніх ребер (на рис. 5.12– точки дотику кривих) та їх вплив на напружено – деформований стан досліджуваної конструкції (рис. 5.13).

5.4.2. Динамічна поведінка тришарових циліндричних оболонок з дискретним повздожньо - поперечним ребристим наповнювачем

Розглядалася задача вимушених коливань тришарової циліндричної оболонки з дискретним повздожньо – поперечним ребристим наповнювачем при внутрішньому розподіленому імпульсному навантаженні. Покладається, що краї оболонки і елементів повздожнього заповнювача жорстко закріплені. Граничні умови для цього випадку при $x = 0$, $x = L$ мають наступний вигляд

$$u_1^k = u_2^k = u_3^k = \varphi_1^k = \varphi_2^k = 0, \quad k = \overline{1, 2};$$

$$u_{1i} = u_{2i} = u_{3i} = \varphi_{1i} = \varphi_{2i} = 0, \quad i = \overline{1, I}.$$

Початкові умови для вказаної системи рівнянь – нульові.

Задача розглядалася при наступних геометричних і фізико–механічних параметрах: $L/h_1 = 80$, $h_1 = h_2$, $R_1/h_1 = 20$, $h_i = 2h_1$, $i = \overline{1, I}$; $h_j = h_i$, $j = \overline{1, J}$; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$; $E_1^1 = E_1^2 = E_i = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_i = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, де R_k, h_k – радіус серединної поверхні і товщина внутрішньої оболонки; L – довжина конструкції.

Розглядався випадок повздожньо–поперечного дискретного заповнювача при $I = 4$ та $J = 3$, коли дискретні елементи рівномірно розташовані по просторовим координатам між внутрішньою і зовнішньою обшивками. Центри ваги поперечного перерізу дискретних елементів заповнювача проектуються на відповідні серединні поверхні обшивок по лініям $y_i = (i-1)\pi R/2$, $i = \overline{1, 4}$ та $x_j = jL/4$, $j = \overline{1, 3}$. Нормальне імпульсне навантаження задавалося у вигляді $P_3^1 = A \cdot [\eta(t) - \eta(t-T)]$, де $\eta(t)$ – функція Хевісайда, A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Результати розрахунків вказаної задачі приведено на рисунках 5.14 – 5.28. На всіх рисунках криві з індексом 1 відповідають величинам внутрішньої

обшивки (прогин, деформація, напруження), а криві з індексом 2 відповідають величинам зовнішньої обшивки.

На рис. 5.14 зображено залежність величини u_3 між повздовжніми ребрами по осі симетрії від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$. Виходячи з представленою матеріалу чітко спостерігається місце розташування поперечних дискретних підкріплюючих ребер ($x_j = jL/4$, $j = \overline{1, 3}$) – це точки з'єднання кривих з індексами 1 та 2.

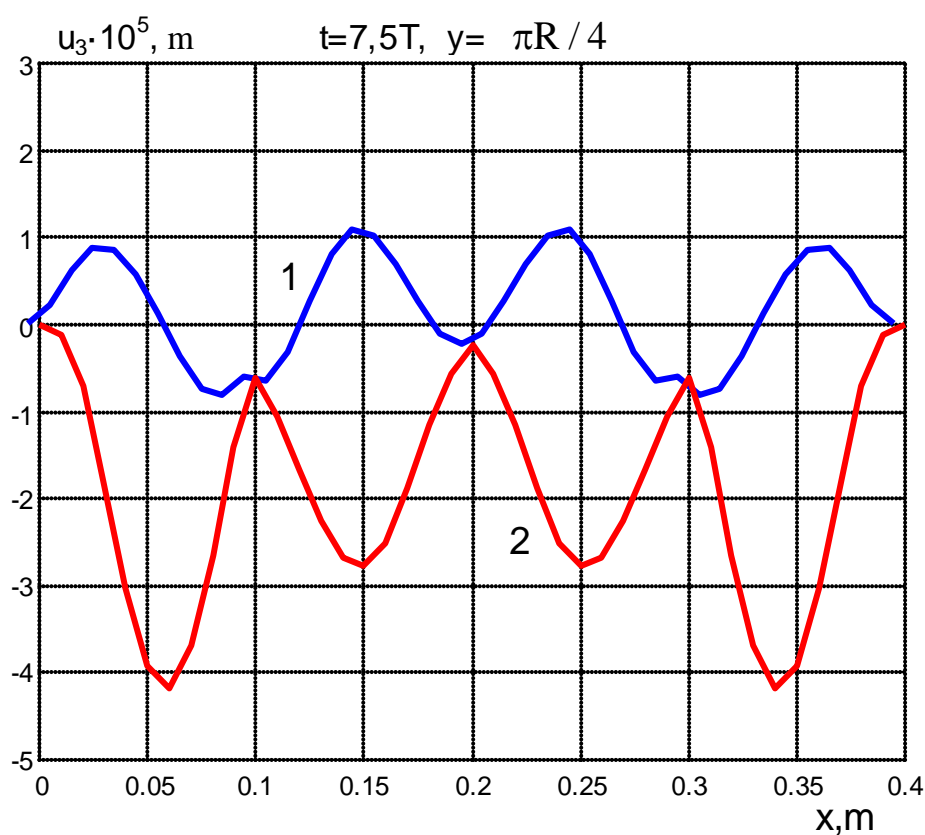


Рис. 5.14. Залежність величини u_3 між ребрами по осі симетрії від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$

На рис. 5.15. представлено залежність величини u_3 вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного ребра від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$. В цьому випадку має місце одна крива, зображена на рисунку (виходячи з гіпотези недеформованості поперечного зрізу

ребра та умов контакту повздожнє ребро – обшивки, див. розділ 2). Порівняння величин u_3 по лінії симетрії між ребрами (рис.5.14) та по лінії знаходження повздожнього ребра дозволяють характеризувати вплив повздожньо-поперечного дискретного заповнювача на розподіл кінематичних параметрів вихідної пружної структури. Розрахунки напружено–деформованого стану динамічної поведінки тришарових оболонок з врахуванням ребристого наповнювача проводилися на часовому інтервалі $t = 40T \div 60T$. В даній дисертації представлені характерні залежності напружено–деформованого стану тришарової оболонки. Зокрема, розглядалися моменти часу, коли відповідні кінематичні та статичні величини досягали максимальних значень.

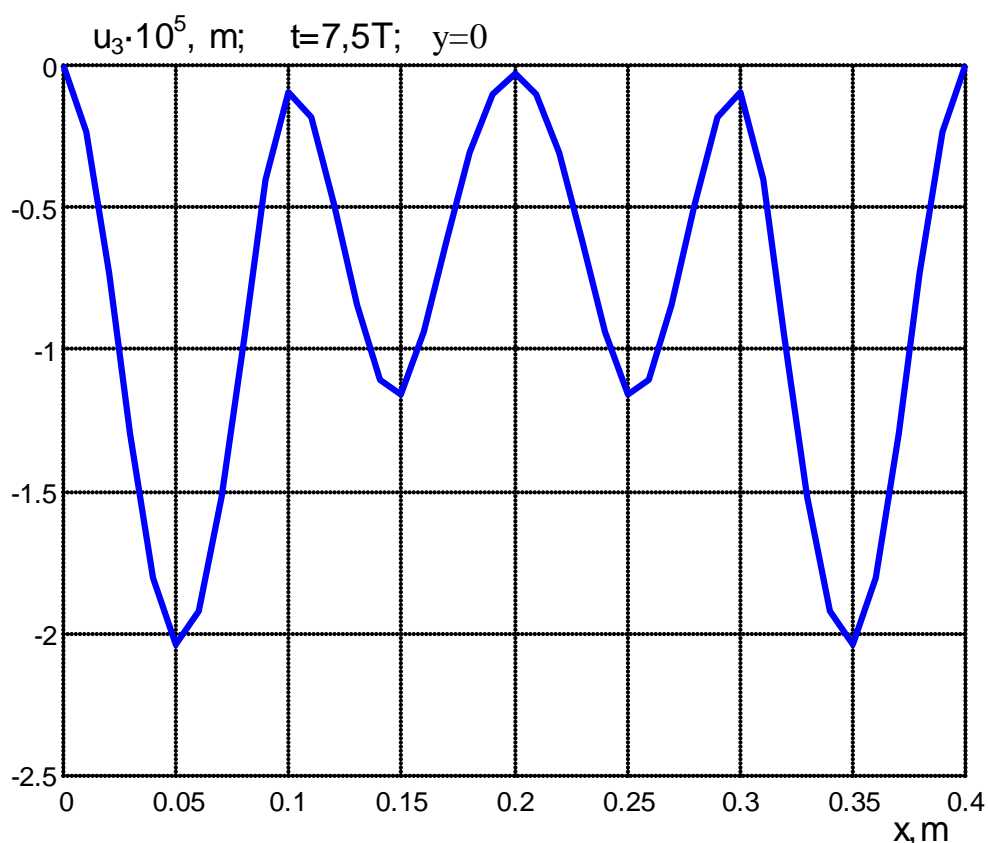


Рис. 5.15. Залежність величини u_3 вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздожнього дискретного ребра від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$

Було помічено, що максимум величин u_3 по лінії симетрії між ребрами та вздовж ребра досягається в момент часу $t = 7,5T$, де T – тривалість нестационарного навантаження. Порівняльний аналіз величини u_3 вздовж ребер (рис. 5.15) та величини u_3 по лінії симетрії між ребрами показує (рис. 5.14), що різниця по максимальним величинам u_3 сягає порядку 1,8 рази.

На рис. 5.16 та рис. 5.17 представлено залежності величин ε_{11} по осі симетрії між ребрами від просторової координати x в моменти часу $t = 5T$ та $t = 7,5T$.

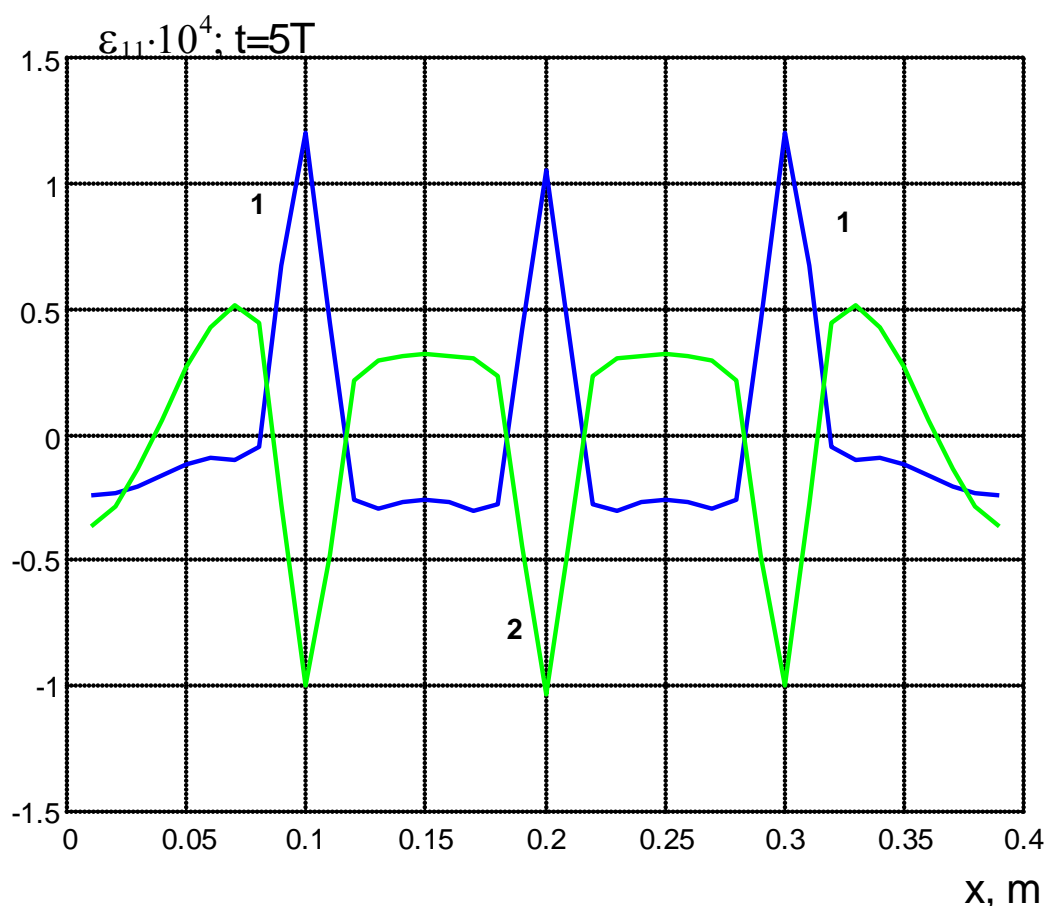


Рис. 5.16. Залежність величини ε_{11} по осі симетрії між ребрами від просторової координати x в момент часу $t = 5T$

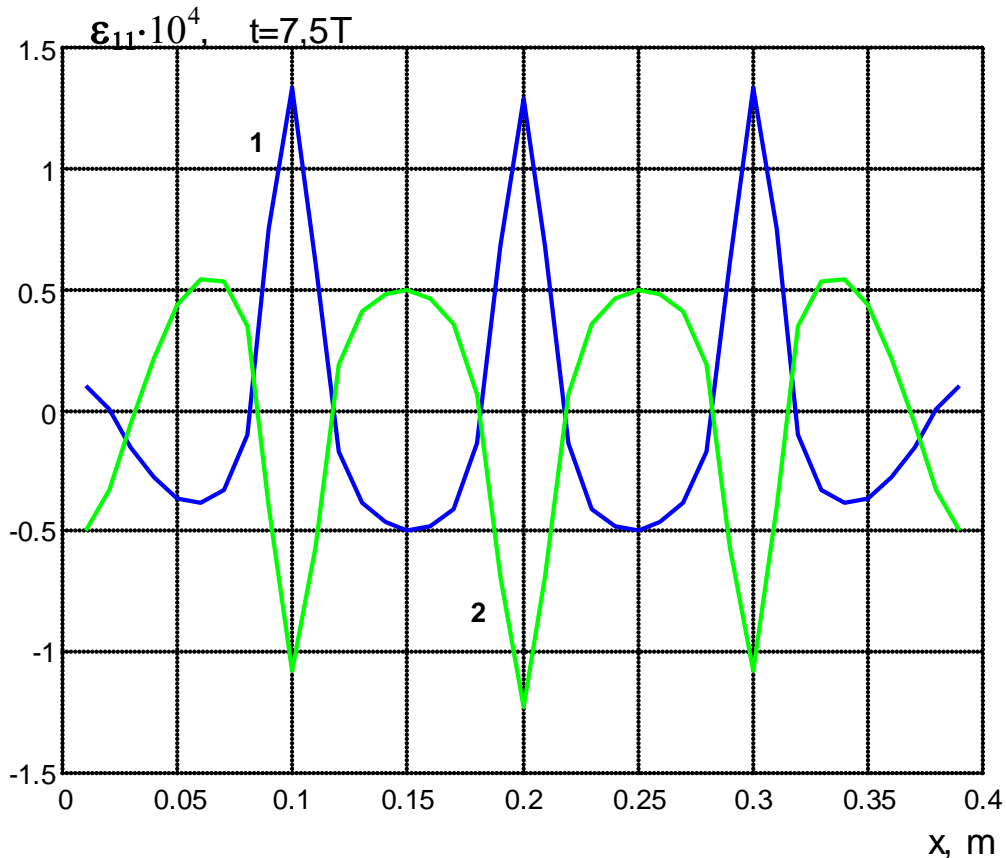


Рис. 5.17. Залежність величини ε_{11} по осі симетрії між ребрами від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$

Характерною особливістю приведених величин є пилкоподібний вигляд величин ε_{11} в місцях розташування дискретних поперечних ребер $x_j = jL/4$, $j = \overline{1, 3}$. Це пояснюється особливістю моделі та алгоритму розв'язку задач динамічної поведінки тришарових оболонок з врахуванням дискретності повздовжньо – поперечного заповнювача – знаходження розв'язку в гладкій області обшивок та на лініях просторових розривів (вздовж ліній центра ваги поперечного перерізу i -го ребра по осі OX та j -го ребра по осі OY).

На рис. 5.18 та рис. 5.19 приведено залежності величини ε_{11} вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в моменти часу $t = 4T$ та $t = 7,5T$. Порівняльний

аналіз по максимальним величинам ε_{11} згідно залежностей по лінії симетрії між ребрами (рис. 5.17) та залежностей вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжніх ребер (рис. 5.19) показує збільшення величини ε_{11} для останнього випадку $\approx 1,8$ рази. Це можна пояснити тим, що представлені залежності ε_{11} згідно рис. 5.18 та рис. 5.19 відображують залежності на перетині двох просторових розривів (лінія розриву центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента та лінія розриву центра ваги поперечного перерізу дискретного елемента розташованого вздовж осі ОУ).

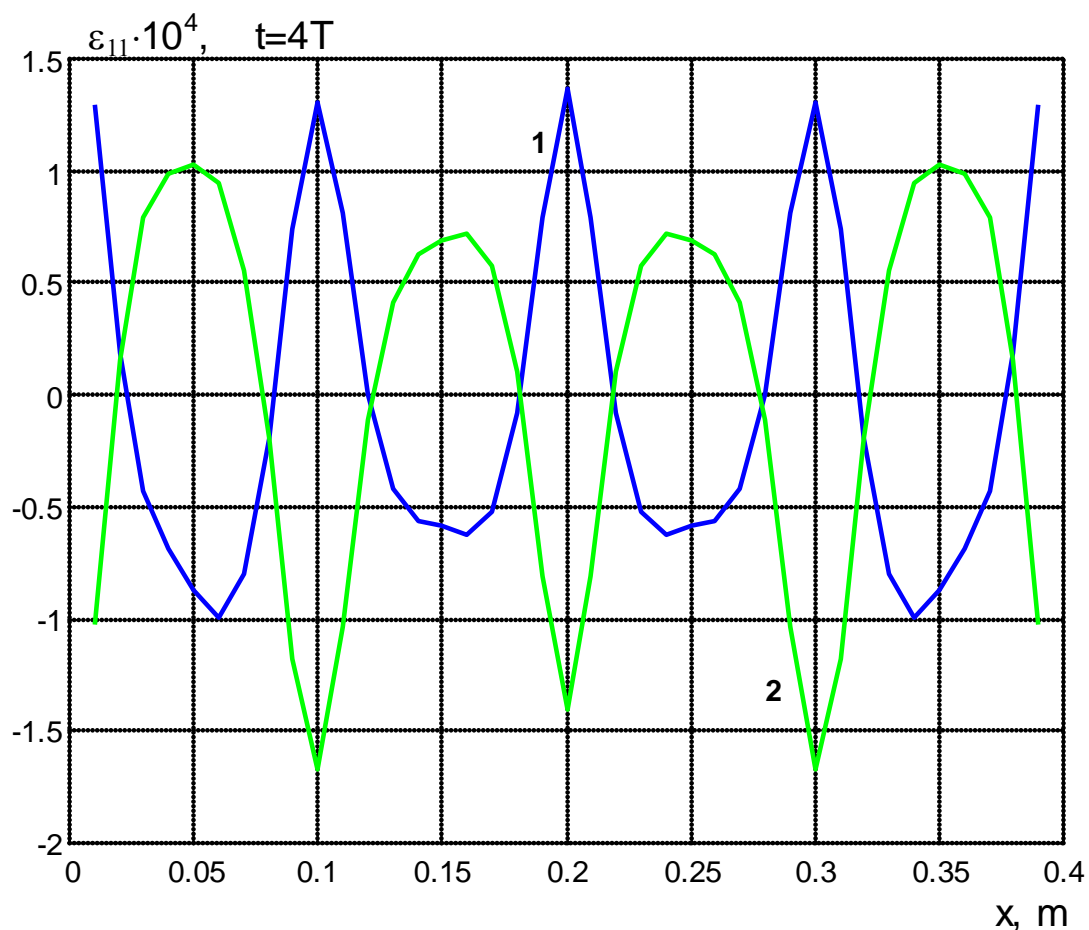


Рис. 5.18. Залежність величини ε_{11} вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в момент часу $t = 4T$

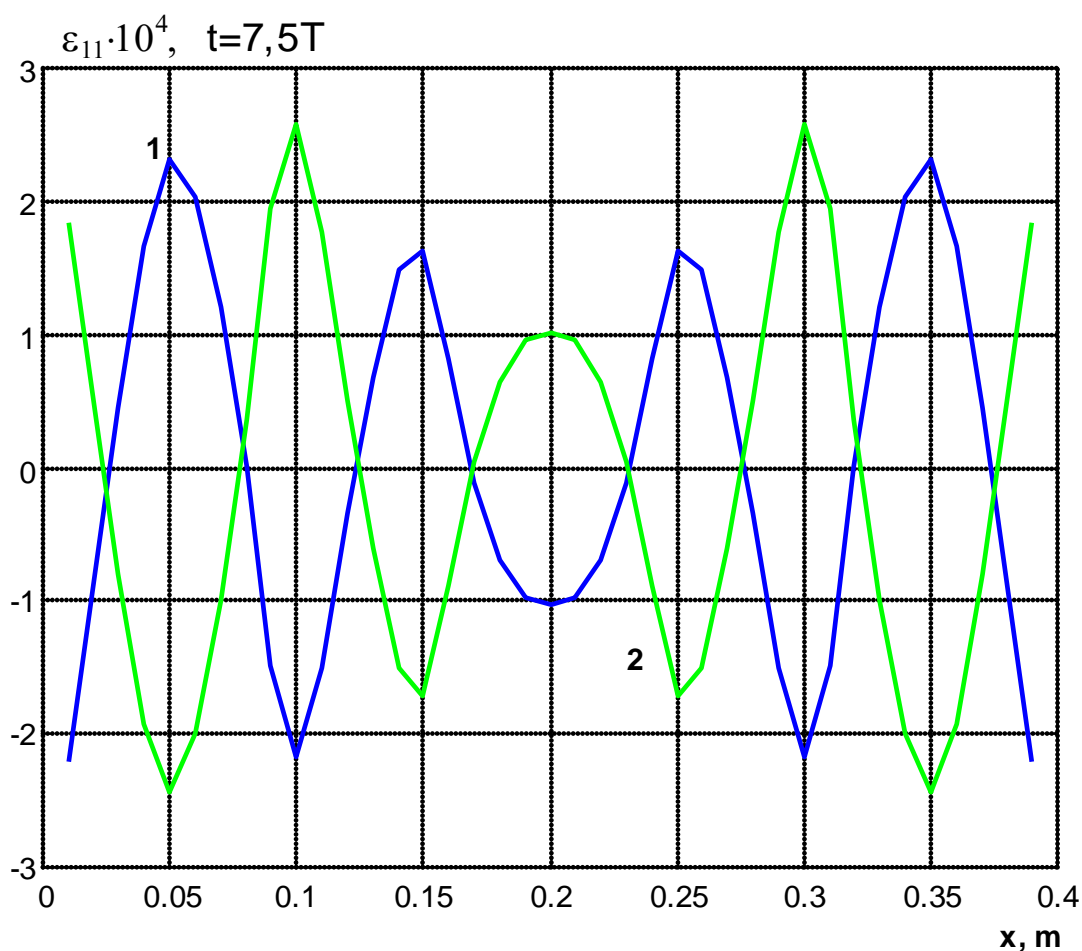


Рис. 5.19. Залежність величини ε_{11} вздовж лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в момент часу $t = 7,5T$

На рис. 5.20 та рис. 5.21 представлені залежності величини ε_{22} по осі симетрії між ребрами по просторовій координаті x в моменти часу $t = 7,5T$ та $t = 9,5T$. Спостерігається значне підвищення амплітуд величин деформацій ε_{22} в порівнянні з величинами ε_{11} у відповідні часи.

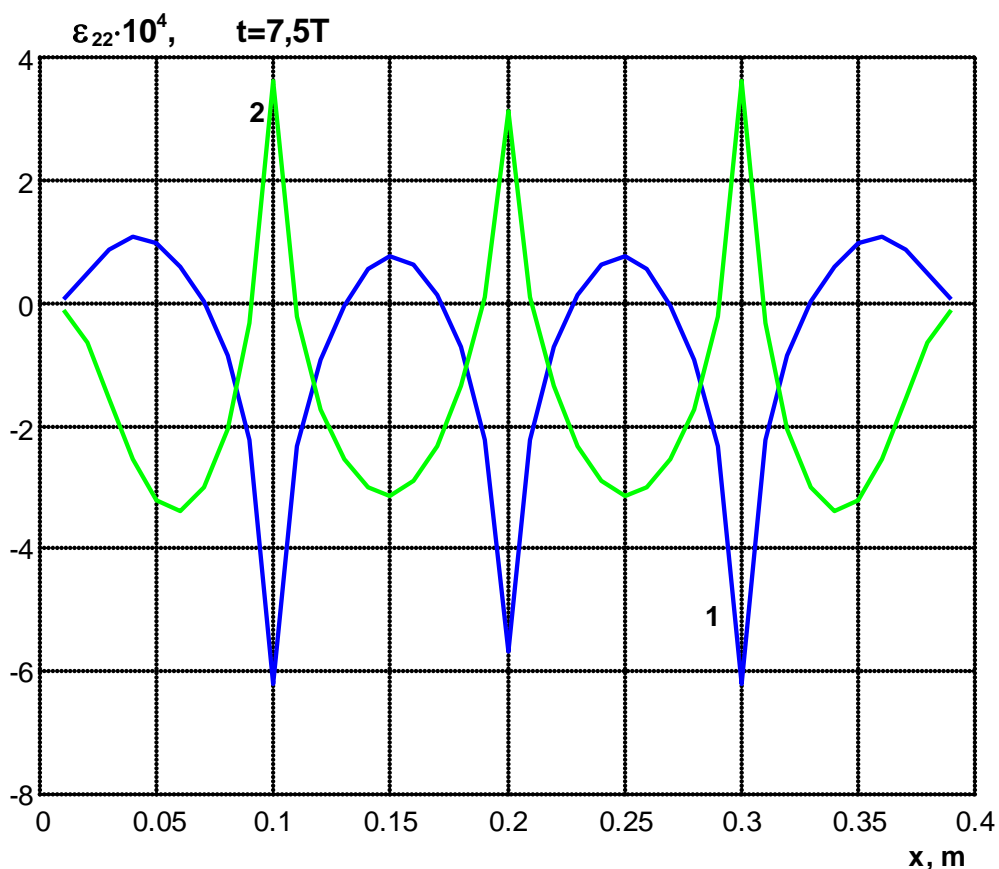


Рис. 5.20. Залежність величини ε_{22} по осі симетрії між ребрами по просторовій координаті x в момент часу $t = 7,5T$

На рис. 5.22 та рис. 5.23 представлені залежності величини ε_{22} по лінії центру ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в моменти часу $t = 7,5T$ та $t = 10T$. В цьому випадку в порівнянні з залежностями ε_{22} , які приведені на рис. 5.20 і рис. 5.21 спостерігається зменшення амплітуд величин деформацій ε_{22} . Це можна пояснити тим, що залежності приведені на рис. 5.22 та рис. 5.23 характеризують деформації ε_{22} по лінії центру ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента (тобто збільшується локальна жорсткість за рахунок наявності повздовжнього дискретного елемента).

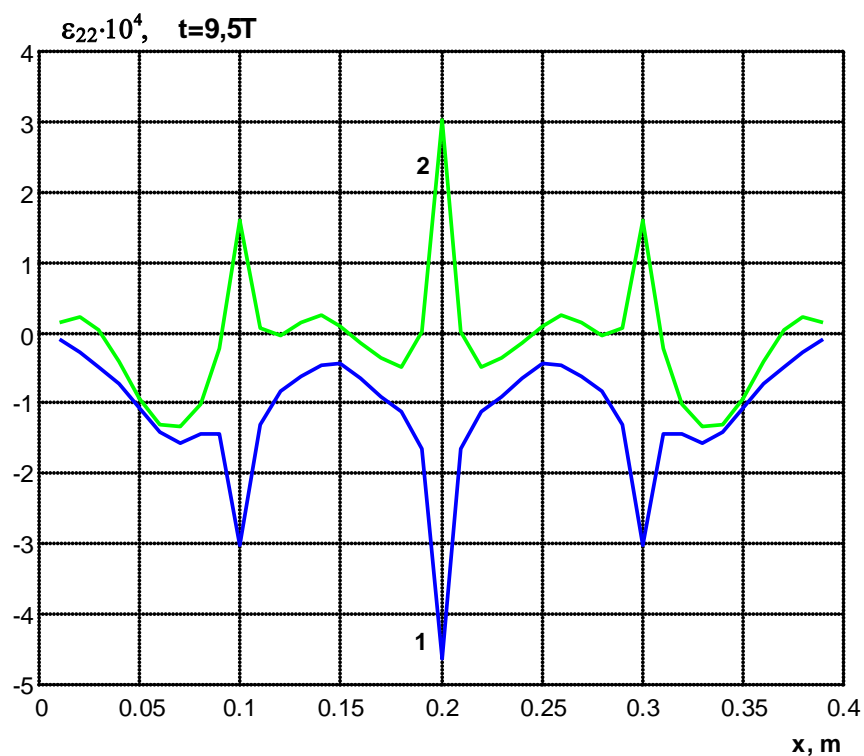


Рис. 5.21 Залежність величини ε_{22} по осі симетрії між ребрами по просторовій координаті x в момент часу $t = 9,5T$

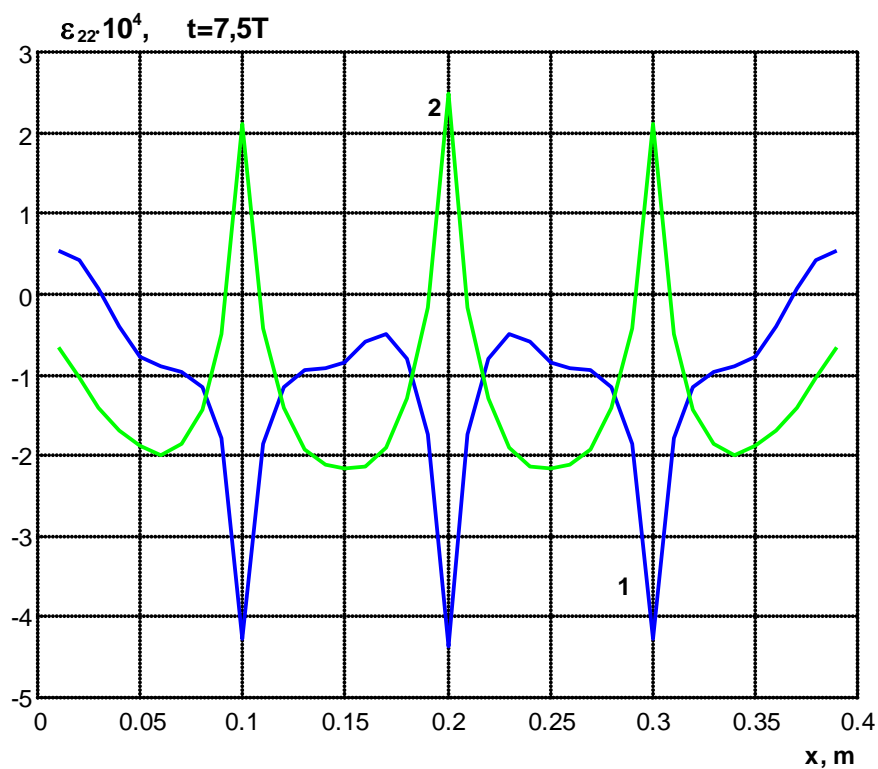


Рис. 5.22. Залежність величини ε_{22} по лінії центру ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в момент часу $t = 7,5T$

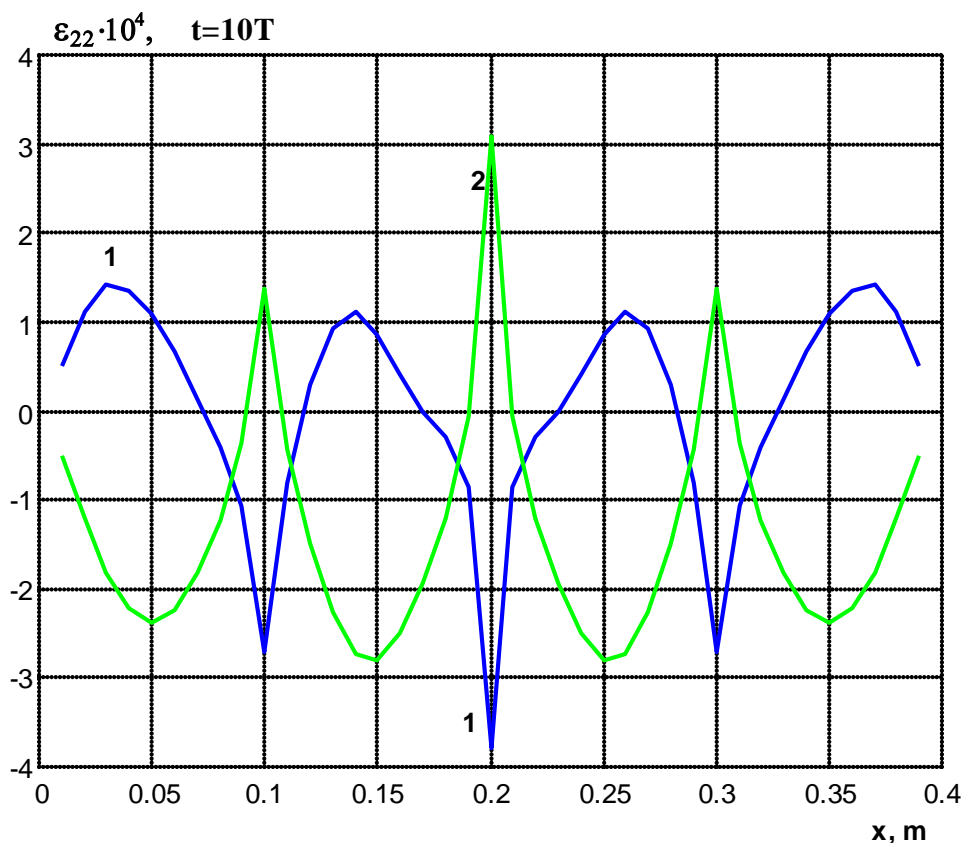


Рис. 5.23. Залежність величини ε_{22} по лінії центру ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента по просторовій координаті x в момент часу $t = 10T$

На рисунках 5.24 - 5.26 приведено залежності величин σ_{22} по лінії симетрії між повздовжніми дискретними елементами від просторової координати x в моменти часу $t = 4T$, $t = 5T$, $t = 7,5T$. Спостерігається схематична схожість приведених залежностей σ_{22} по відношенню до величин деформацій ε_{22} , що можна пояснити тим, що величини деформацій ε_{22} привалюють над відповідними величинами ε_{11} . Також можна відмітити пилкоподібний характер залежностей σ_{22} на лініях розташування ребер, зокрема для залежностей на рис. 5.24 – 5.26 – це точки $x_j = jL/4$, $j = \overline{1, 3}$.

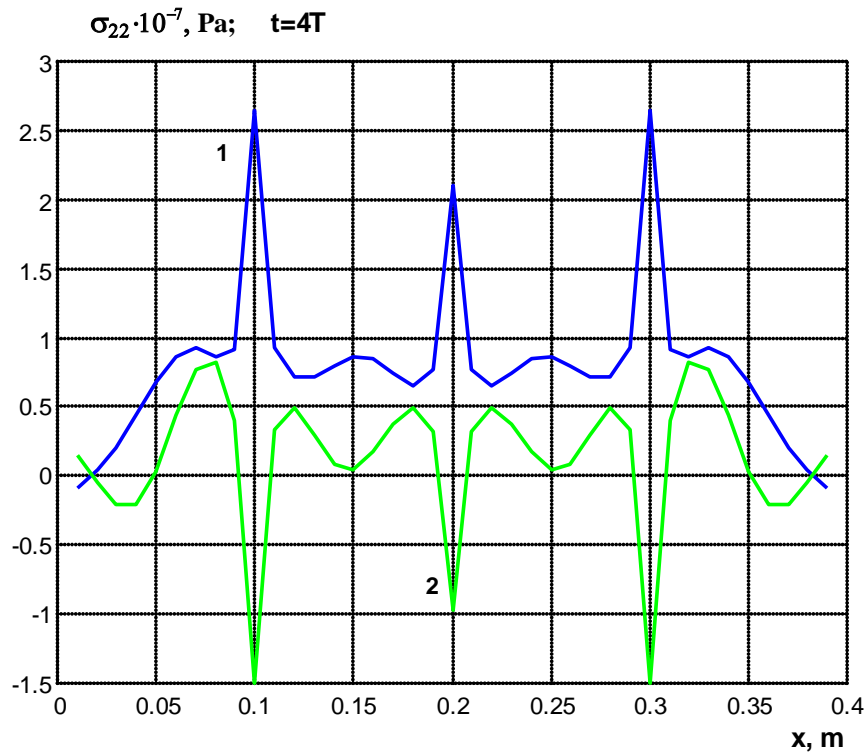


Рис. 5.24. Залежність величини σ_{22} по лінії симетрії між повздовжніми дискретними елементами від просторової координати x в момент часу $t = 4T$

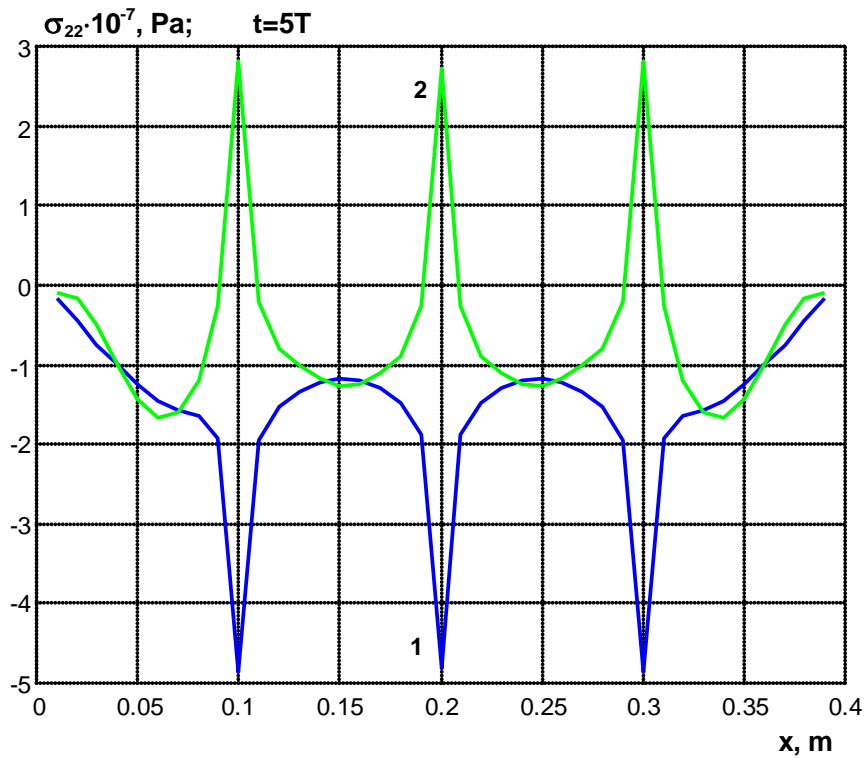


Рис. 5.25. Залежність величини σ_{22} по лінії симетрії між повздовжніми дискретними елементами від просторової координати x в момент часу $t = 5T$

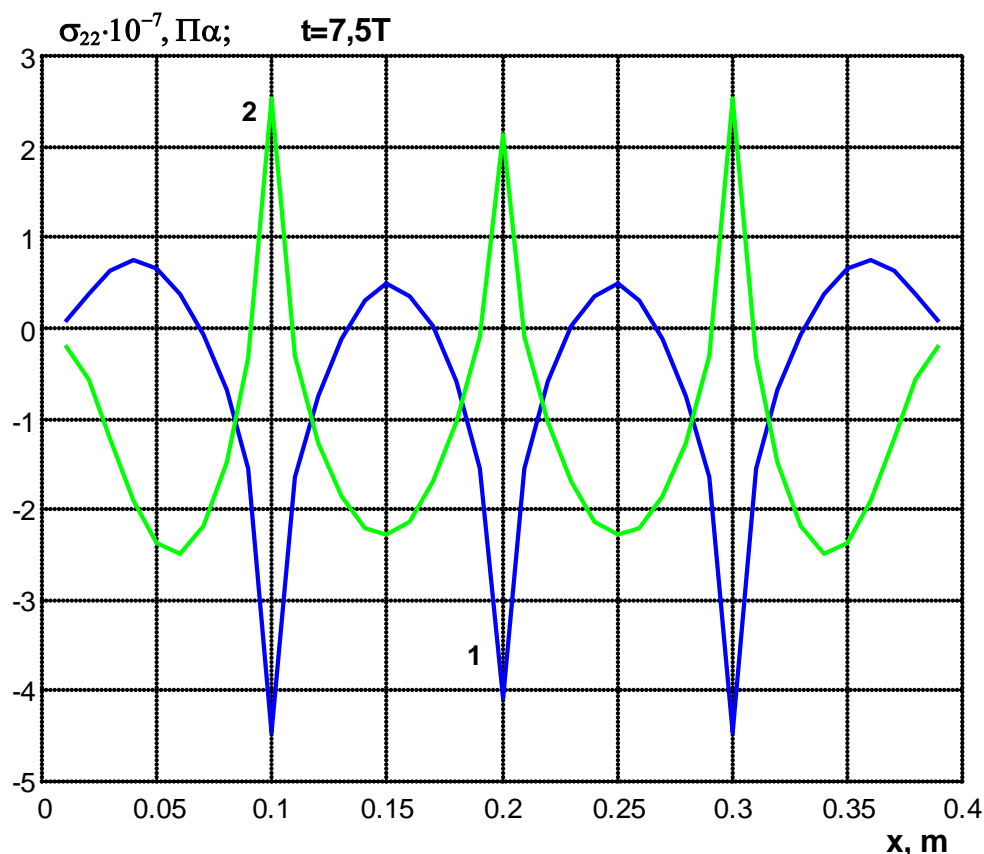


Рис. 5.26. Залежність величини σ_{22} по лінії симетрії між повздовжніми дискретними елементами від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$

На рис. 5.27 та рис. 5.28 приведено залежності величини σ_{22} по лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента від просторової координати x в моменти часу $t = 7,5T$ та $t = 10T$. Спостерігається деяке зменшення до 20–25% по максимальним величинам амплітуд напружень σ_{22} в порівнянні з залежностями приведеними на рис. 5.24 – 5.26 для відповідних часів, що пояснюється аналогічно закономірностям розподілу величин деформацій ε_{22} по лінії симетрії між ребрами та по лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента.

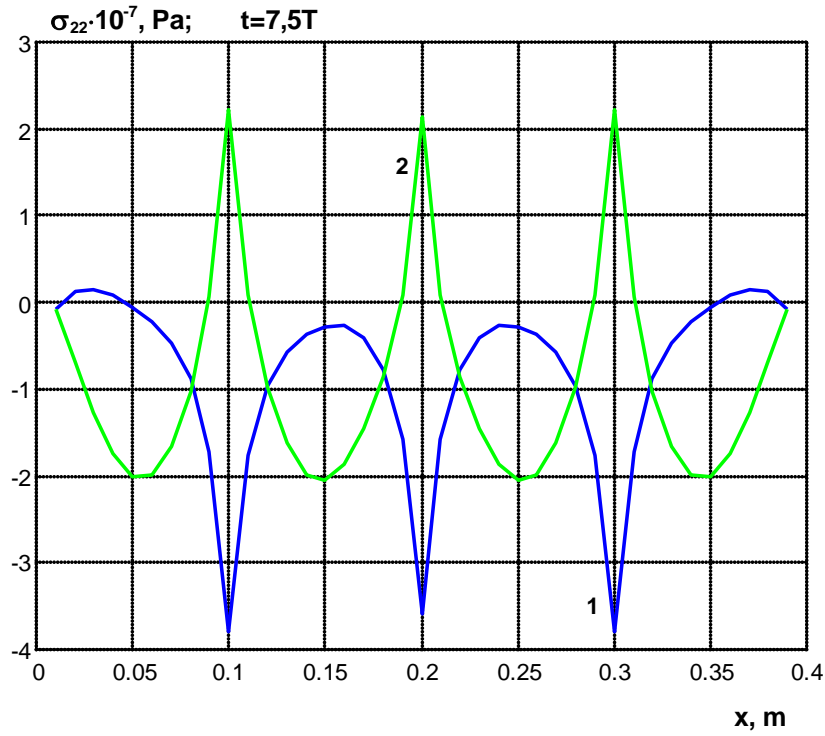


Рис. 5.27. Залежність величини σ_{22} по лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента від просторової координати x в момент часу $t = 7,5T$

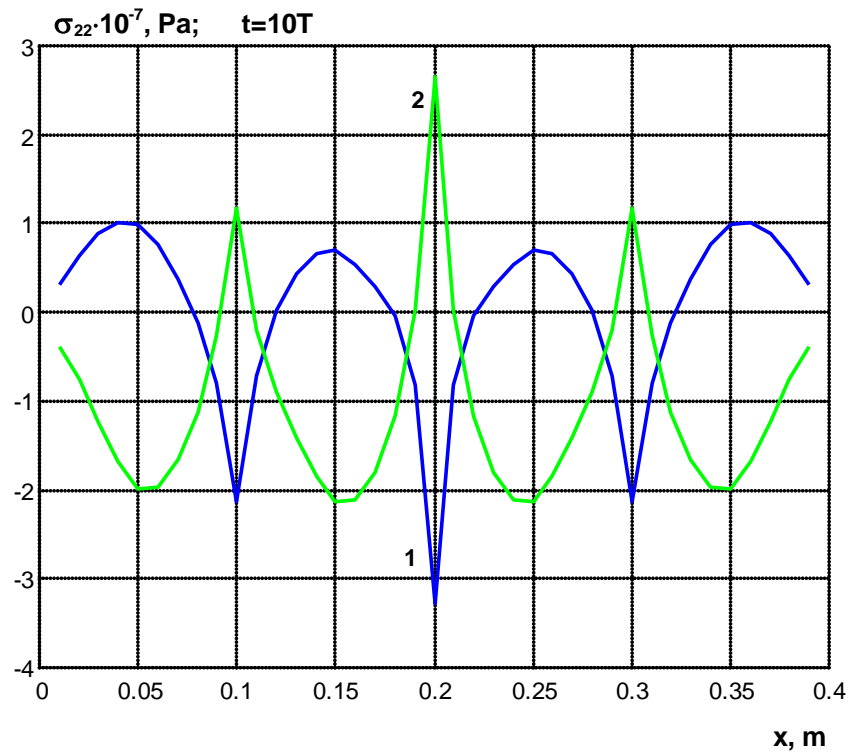


Рис. 5.28. Залежність величини σ_{22} по лінії центра ваги поперечного перерізу повздовжнього дискретного елемента від просторової координати x в момент часу $t = 10T$

Висновки до п'ятого розділу

В даному розділі розглянуті осесиметричні та неосесиметричне задачі динамічної поведінки дискретно підкріплених оболонок на пружній основі Вінклера. Для зрізаної дискретно підкріпленої конічної оболонки на пружній основі було проведено дослідження кінематичних та силових параметрів по просторовій координаті в залежності від кута конусності. Також розглядалася нестационарна деформація дискретно повздовжньо поперечно підкріплених циліндричних оболонок на пружній основі при дії пружного навантаження в залежності від параметрів основи. Як частковий випадок були розглянуті задачі для конструктивно – ортотропної циліндричної оболонки і проведено порівняння з моделлю циліндричної оболонки з врахуванням дискретності підкріплюючих елементів.

Також в цьому розділі були розглянуті задачі динамічної поведінки адаптера. Розглядалися задачі динамічної поведінки тришарових оболонок з повздовжнім дискретним ребристим наповнювачем та оболонки з повздовжньо - поперечним дискретним наповнювачем при внутрішньому імпульсному навантаженні. Проведено аналіз отриманих результатів.

РОЗДІЛ 6

ЗАДАЧІ ПРО ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

6.1. Розв'язок задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях (конструктивно - ортотропна модель)

В даному підрозділі в рамках конструктивно – ортотропної моделі теорії підкріплених оболонок приведена постановка задачі про вимушені коливання підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу. Побудовано чисельний алгоритм розв'язку задачі та проведено аналіз отриманих результатів.

Розглядається підкріплена циліндрична оболонка еліптичного перерізу при дії на неї розподіленого навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$, де s_1, s_2 – просторові координати серединної поверхні обшивки; t – часова координата. Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривини координатної поверхні вихідної оболонки записуються наступним чином:

$$A_1 = 1, \quad k_1 = 0; \quad (6.1)$$

$$A_2 = (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2};$$

$$k_2 = ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2};$$

де a і b – півосі еліпса, що характеризує поперечний переріз циліндричної оболонки.

Припускається, що циліндрична оболонка підкріплена регулярним набором повздовжніх та поперечних ребер. Для опису напружено – деформованого стану (НДС) вихідної неоднорідної оболонкової структури використовується конструктивно – ортотропна модель теорії підкріплених оболонок типу Тимошенка (див. розділ 2). При цьому, підкріплена оболонка розглядається як деяка двошарова оболонка, що складається власно із обшивки та шару з приведеними фізико – механічними параметрами в напрямках s_1 і s_2 .

Покладалося, що НДС обшивки можна визначити через узагальнений вектор переміщень серединної поверхні $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$. Відповідно, НДС приведенного шару визначається через узагальнений вектор переміщень шару $\bar{U}_c = (u_{1c}, u_{2c}, u_{3c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c})$. Зв'язок між компонентами векторів \bar{U} і \bar{U}_c у випадку чисто повздовжнього підкріплення визначається формулами

$$u_{1c}(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) \pm h_{ci} \varphi_1(s_1, s_2); \quad (6.2)$$

$$u_{2c}(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \pm h_{ci} \varphi_2(s_1, s_2);$$

$$u_{3c}(s_1, s_2) = u_3(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{1c}(s_1, s_2) = \varphi_1(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{2c}(s_1, s_2) = \varphi_2(s_1, s_2).$$

У випадку чисто поперечного підкріплення рівняння зв'язку мають вигляд

$$u_{1c}(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) \pm h_{cj} \varphi_1(s_1, s_2); \quad (6.3)$$

$$u_{2c}(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \pm h_{cj} \varphi_2(s_1, s_2);$$

$$u_{3c}(s_1, s_2) = u_3(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{1c}(s_1, s_2) = \varphi_1(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{2c}(s_1, s_2) = \varphi_2(s_1, s_2).$$

В рівняннях (6.2), (6.3) $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$, $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$, де h - товщина обшивки; h_i, h_j - висота ребер в повздовжньому і поперечному напрямках. Знаки \pm відповідають випадкам зовнішнього та внутрішнього підкріплення.

Для виведення рівнянь коливань циліндричної оболонки на пружній основі використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського (див. розділ 2). Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо рівняння коливань гладкої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1}(T_{11} + T_{11c}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} = & \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \\ & \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}(T_{22} + T_{22c}) + k_2(T_{23} + T_{23c}) = & \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm \\ & \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1}(T_{13} + T_{13c}) + \frac{\partial}{\partial s_2}(T_{23} + T_{23c}) - k_2(T_{22} + T_{22c}) + P_3(s_1, s_2, t) = \\ = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1}(M_{11} + M_{11c} \pm h_{ci} T_{11c}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \\ = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\ + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}(M_{22} + M_{22c} \pm h_{cj} T_{22c}) - T_{23} = \\ = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\ + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Величини зусиль і моментів в рівняннях коливань для неоднорідної оболонки (6.4) зв'язані з відповідними величинами деформацій наступними співвідношеннями:

$$T_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}, \quad T_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}, \quad (6.5)$$

$$T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}, \quad T_{12} = B_{12}^*\varepsilon_{12},$$

$$M_{11} = D_{11}\kappa_{11} + D_{12}\kappa_{22}, \quad M_{22} = D_{21}\kappa_{11} + D_{22}\kappa_{22}, \quad H = D_{12}^*\kappa_{12};$$

$$T_{11c} = B_{11c}\varepsilon_{11c}, \quad T_{22c} = B_{22c}\varepsilon_{22c},$$

$$T_{13c} = B_{13c}\varepsilon_{13c}, \quad T_{23c} = B_{23c}\varepsilon_{23c},$$

$$M_{11c} = D_{11c}\kappa_{11c}, \quad M_{22c} = D_{22c}\kappa_{22c};$$

де

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} + \frac{\partial u_1}{\partial s_2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \varphi_1,$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \varphi_2 - k_2 u_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2};$$

$$\varepsilon_{11c} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22c} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{13c} = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \varphi_1, \quad \varepsilon_{23c} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \varphi_2 - k_2 (u_2 \pm h_{cj} \varphi_2),$$

$$\kappa_{11c} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22c} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2};$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B_{22} &= \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\
B_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B_{21} &= B_{12}, & B_{12}^* &= G_{12} h, \\
B_{13} &= G_{13} h, & B_{23} &= G_{23} h, \\
D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \\
D_{12} &= \frac{\nu_1 E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, & D_{21} &= D_{12}, & D_{12}^* &= G_{12} \frac{h^3}{12}; \\
B_{11c} &= \frac{E_{1c} F_1}{l_1}, & B_{13c} &= \frac{G_1 F_1}{l_1}, \\
D_{11c} &= \frac{E_{1c} I_1}{l_1}, & B_{22c} &= \frac{E_{2c} F_2}{l_2}, \\
B_{23c} &= \frac{G_{2c} F_2}{l_2}, & D_{22c} &= \frac{E_{2c} I_2}{l_2}.
\end{aligned}$$

де $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – фізико – механічні параметри ортотропного матеріалу оболонки; l_1, l_2 – відстані між ребрами для повздовжнього і поперечного набору; a_1, h_1, F_1 – геометричні параметри ребер вздовж осі s_1 ; a_2, h_2, F_2 – геометричні параметри ребер вздовж осі s_2 .

Рівняння (6.4), (6.5) доповнюються відповідними граничними і початковими умовами.

Чисельний алгоритм розв'язку поставленої задачі базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам s_1, s_2 і явній апроксимації по часовій координаті t (див. розділ 3). Згідно представленого підходу різницеві апроксимації рівнянь (6.4) матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{11k+1/2,l}^n - T_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{11ck+1/2,l}^n - T_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} = \quad (6.6) \\
& = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{1k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}}; \\
& \frac{S_{k+1/2,l}^n - S_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + \frac{k_{2k,l}}{2} \left[(T_{23k,l-1/2}^n + T_{23k,l+1/2}^n) + (T_{23ck,l-1/2}^n + T_{23ck,l+1/2}^n) \right] = \\
& + \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{2k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}}; \\
& \frac{T_{13k+1/2,l}^n - T_{13k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{13ck+1/2,l}^n - T_{13ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \\
& + \frac{T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{T_{23ck,l+1/2}^n - T_{23ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{k_{2k,l}}{2} \left[(T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n) + (T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n) \right] + P_{3k,l}^n = \\
& = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{3k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}}; \\
& \frac{M_{11k+1/2,l}^n - M_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{11ck+1/2,l}^n - M_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} \pm \\
& \pm h_{ci} \frac{T_{11ck+1/2,l}^n - T_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{k,l+1/2}^n - H_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{1}{2} (T_{13k+1/2,l}^n + T_{13k-1/2,l}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{t}\bar{t}} \pm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (u_{1k,l}^n)_{tt} + \\
& + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] (\varphi_{1k,l}^n)_{tt}; \\
& \frac{H_{k+1/2,l}^n - H_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{22k,l+1/2}^n - M_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + \frac{M_{22ck,l+1/2}^n - M_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{1}{2} (T_{23k,l+1/2}^n + T_{23k,l-1/2}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2k,l}^n)_{tt} \pm \\
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (u_{2k,l}^n)_{tt} + \\
& + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] (\varphi_{2k,l}^n)_{tt}.
\end{aligned}$$

Апроксимація зусиль – моментів, які входять в різниці рівняння (6.6) відбувається згідно підходу викладеного в розділі 3.

Як числовий приклад, розглядалася задача динамічної поведінки повздовжньо - поперечно підкріпленої ребрами циліндричної оболонки еліптичного перерізу при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження. Припускається, що краї оболонки при $s_1 = 0$ і $s_2 = L_1$ жорстко защемлені, де L_1 – довжина оболонки.

Розподілене імпульсне навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалося наступним чином $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де $E_1 / A = 7 \cdot 10^4$; $T = 0,625 L_1 / c_{11}$; $c_{11}^2 = E_1 / [\rho(1 - \nu_1 \nu_2)]$; E_1, ρ, ν_1, ν_2 – фізико – механічні параметри матеріалу оболонки.

Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах для оболонки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L_1 = 0,4$ м. Параметри еліптичності поперечного перерізу оболонки були наступними: 1) $a/b = 1$; 2) $a/b = 1,1$; 3) $a/b = 1,2$. Для підкріплюючих ребер покладалося: $E_i = E_j = E_1$; $F_i = a_i h_i$; $F_j = a_j h_j$; $a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$; $l_1 = L_2 / 4$; $l_2 = L_1 / 4$; $L_2 = [\pi ab + (a - b)^2] / (a + b)$.

Розрахунки проводилися в області $D = \{0 \leq s_1 \leq L_1, 0 \leq s_2 \leq L_2\}$ на часовому інтервалі $0 \leq t \leq 80T$. На рис. 6.1, 6.2 приведені результати чисельних розрахунків для величин u_3 відповідно в перерізі $\alpha_2 = 0$ і $\alpha_2 = \pi/2$ вздовж координати s_1 ($0 \leq s_1 \leq L_1$). Враховуючи динамічний характер розподілення шуканих величин по просторовим координатам s_1, s_2 і часу t , проведено аналіз напружено – деформованого стану вихідної неоднорідної конструкції для часу досягнення ними максимальних по модулю значень u_3 для випадку $a/b = 1$.

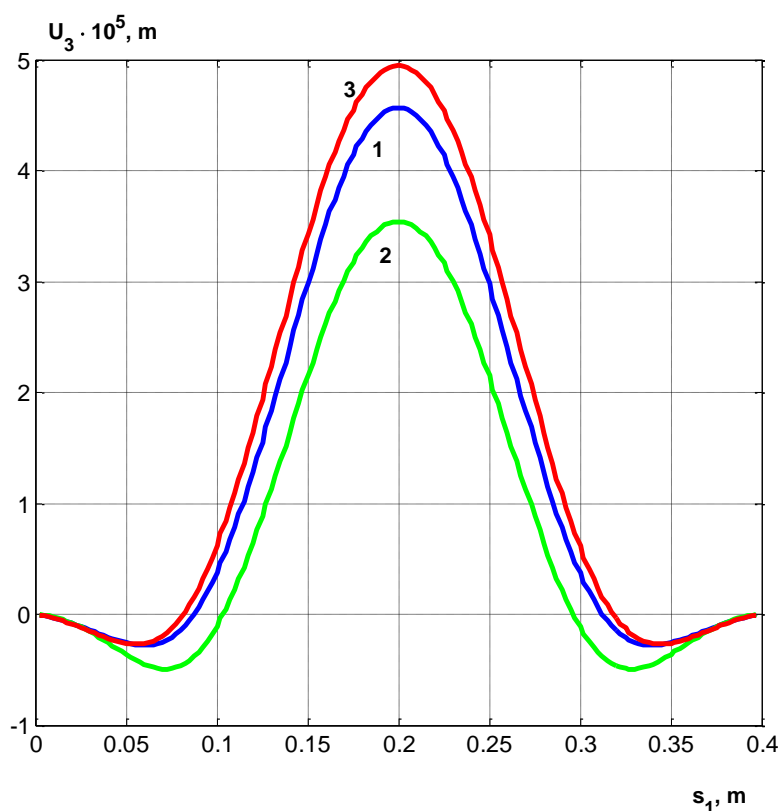


Рис. 6.1. Залежності величин u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $\alpha_2 = 0$

На рис. 6.1 приведені залежності величин u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $\alpha_2 = 0$. Крива 1 відповідає часу $t = 7,5T$ для $a/b = 1$; криві 2 і 3 відповідають випадкам $a/b = 1,1$ і $a/b = 1,2$ в той самий момент часу.

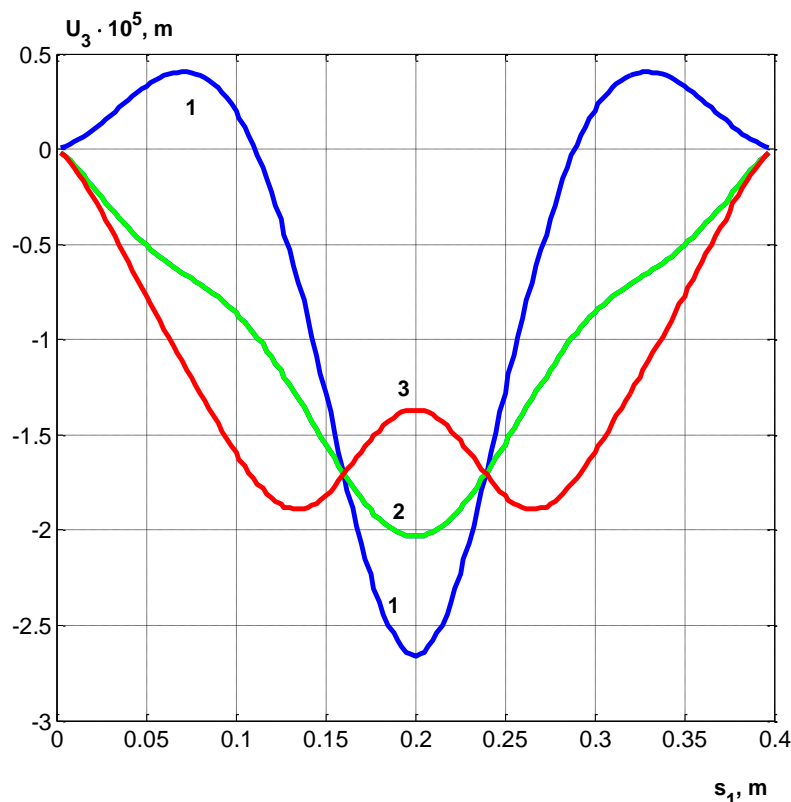


Рис. 6.2 Залежності величин u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $\alpha_2 = \pi/2$

На рис. 6.2 приведені аналогічні залежності в перерізі $\alpha_2 = \pi/2$. Крива 1 відповідає часу для $a/b = 1$, криві 2 і 3 відповідають випадкам $a/b = 1,1$ і $a/b = 1,2$ в той самий момент часу. Як бачимо, що невелика зміна в параметрах еліптичності конструкції приводить до значним розходженням результатів розрахунків по просторовим і часовій координатам.

6.2. Розв'язок задач динамічної поведінки циліндричної оболонки еліптичного перерізу з дискретним повздожньо - поперечним набором підкріплюючих ребер

В даному підрозділі в рамках моделі теорії дискретно - підкріплених оболонок приведена постановка задачі про вимушені коливання циліндричної оболонки еліптичного перерізу. Побудовано чисельний алгоритм розв'язку задачі та проведено аналіз отриманих результатів.

Розглядається дискретна повздожньо - поперечно підкріплена циліндрична оболонка еліптичного перерізу при дії на неї розподіленого навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$, де s_1, s_2 – просторові координати серединної поверхні обшивки; t – часова координата. Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривини координатної поверхні вихідної оболонки записуються в вигляді (6.1).

Для виведення рівнянь коливань неоднорідної структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського (див. розділ 2). Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо три групи рівнянь для циліндричної оболонки з дискретним повздожньо – поперечним підкріпленням:

- в гладкій області

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

- рівняння коливань 3 -го дискретно підкріплюючого ребра, направлено-го вздовж осі α_1 мають вигляд:

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} - T_{23} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

- рівняння коливань j -го дискретно підкріплюючого ребра, направлено-го вздовж осі α_2 мають вигляд:

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}] = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left(\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right).$$

Позначення величин зусиль моментів та фізико – механічних параметрів оболонки і ребер в (6.7) –(6.9) приймаються згідно позначень розділу 2.

Чисельний розв’язок рівнянь (6.7) – (6.9) базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевої схем по просторовим координатам s_1, s_2 і явній різницевої схемі по часовій координаті t . Шукається розв’язок в гладкій області (рівняння (6.7)) і «склеюються» на лініях просторових розривів – рівняння (6.8), (6.9). Детально цей підхід викладено в розділі 3.

Розглядалася задача динамічної поведінки повздовжньо - поперечно підкріпленої замкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу при внутрішньому імпульсному навантаженні. Задача розв’язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах для оболонки:

$E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L_1 = 0,4$ м. Параметр еліптичності поперечного перерізу оболонки був наступним: $a/b = 1,2$. Для підкріплюючих ребер покладалося: $E_i = E_j = E_1$; $F_i = a_i h_i$; $F_j = a_j h_j$; $a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$.

Покладалося, що оболонка підкріплена 16 повздовжніми ребрами та 3 поперечними ребрами рівномірно по повздовжній та поперечній координатам s_1 і s_2 . Повздовжні ребра знаходяться в перерізах по координаті

$\alpha_{2i} = \frac{\pi}{8}(i-1), i = \overline{1,16}$. Поперечні ребра знаходяться в перерізах

$\alpha_{1j} = j \frac{L}{4}, j = \overline{1,3}$.

На рис. 6.3 – 6.5 приведені результати розрахунків. На рис. 6.3 приведено залежності величини u_3 в різних перерізах по осі s_2 по довжині оболонки s_1 . Чорним трикутником на осі s_1 позначено розташування поперечних ребер. Крива 1 відповідає залежності u_3 в перерізі $s_2 = 0$ в момент часу досягнення нею максимального значення в $t = 8,5T$. Всі криві на рис. 6.3 - 6.5 відповідають цьому значенню часу. Кривій 1 на всіх рисунках відповідають значення в

перерізі $\alpha_2 = 0$, кривій 2 - $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, кривій 3 - $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Як бачимо з ілюстративного матеріалу максимальне значення прогину u_3 досягається в перерізі $\alpha_2 = 0$, а максимальні значення величин ε_{22} та σ_{22} в перерізі $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Значення величин u_3 , ε_{22} , σ_{22} для перерізу $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ знаходяться між ними.

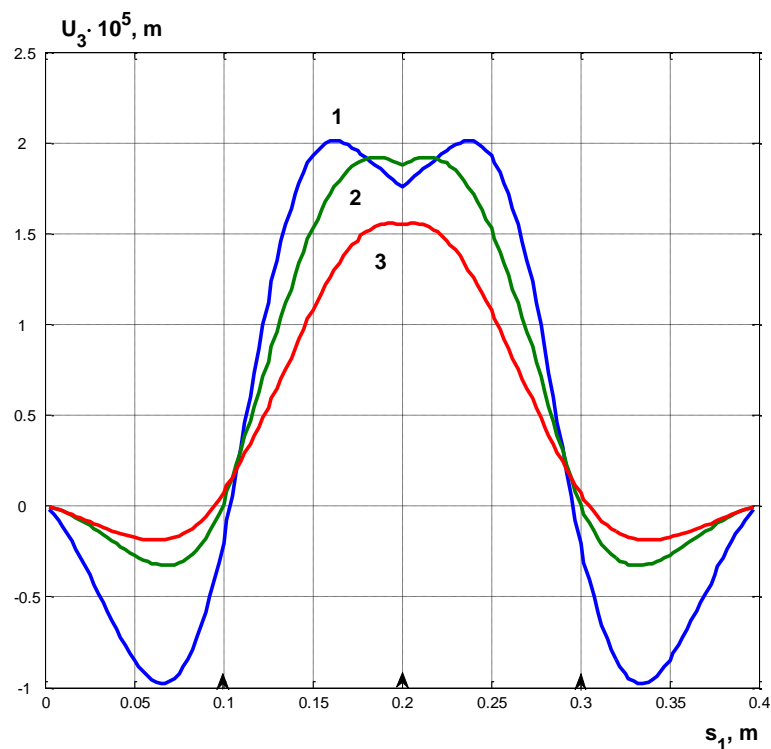


Рис. 6.3. Залежність величини u_3 від просторової координати s_1

Також було проведено порівняння результатів розрахунків цієї задачі з результатами розрахунків згідно конструктивно – ортотропної моделі підкріплених оболонок (див. підрозділ 6.1) при нестационарних навантаженнях.

Задача розв'язувалась при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах. В розрахунках покладалось $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с; (формула імпульсу задавалась згідно попередніх задач) $E_1 = E_2 = E_i = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $a/h = 40$; $h_i = h_j = 2h$, $a_i = a_j = h$; $a/b = 1,2$;

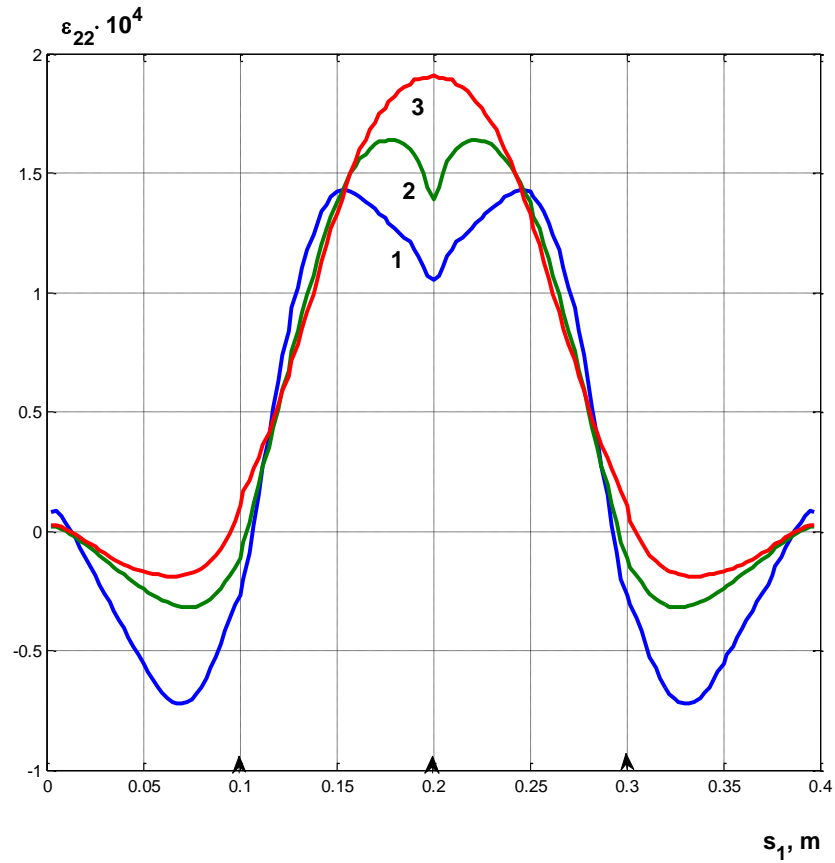


Рис. 6.4. Залежність величини ε_{22} від просторової координати s_1

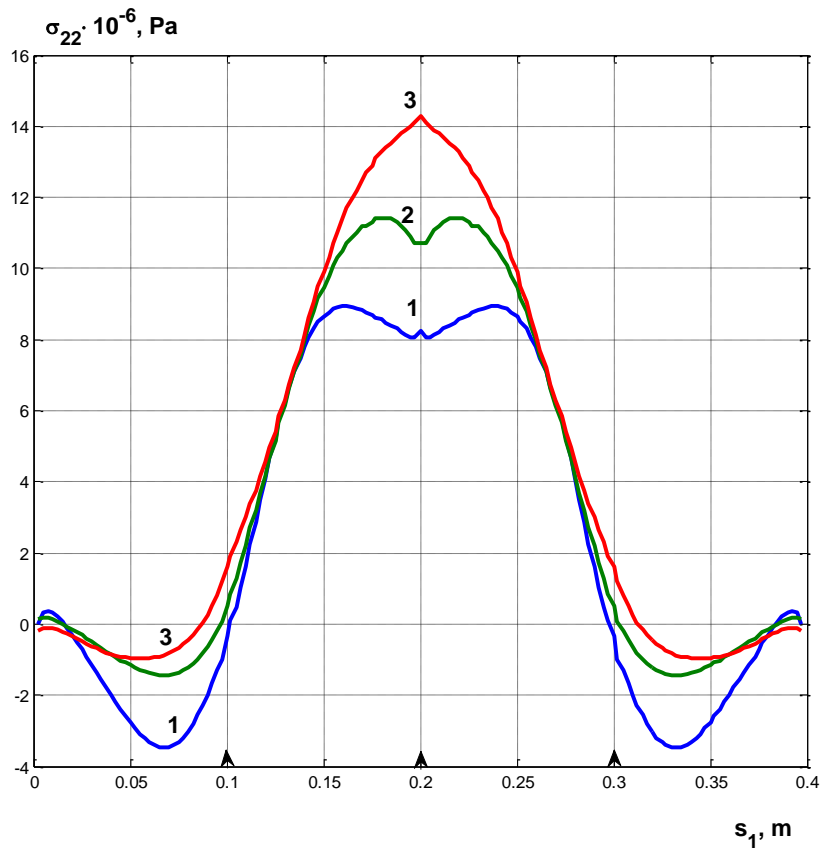


Рис. 6.5. Залежність величини σ_{22} від просторової координати s_1

$l_1 = L_y / 4$; $l_2 = L / 4$; де $L_y = \left[\pi(a+b) - (a-b)^2 \right] / (a+b)$ - (наближена формула для обчислення четвертої частини дуги еліпса з точність 0,5%). Розрахунки проводилися в області $\Omega = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L; 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{2} \right\}$. Розглядався варіант розрахунків по величинам прогинів u_3 . На рис. 6.6 приведено залежності для величин u_3 для випадку оболонки з врахуванням дискретного розміщення ребер та випадку підкріплених оболонок в рамках конструктивно - ортотропної теорії по координаті s_1 в перерізі $s_2 = 0$. Крива 1 відповідає залежності для випадку дискретного розміщення ребер $t = 14,75T$ (час досягнення величини u_3 на дослідженому інтервалі часу), 2 – конструктивно ортотропний випадок $t = 7,5T$ (час досягнення величини u_3 на дослідженому інтервалі часу). Як бачимо, величини u_3 по максимальним значенням практично не відрізняються.

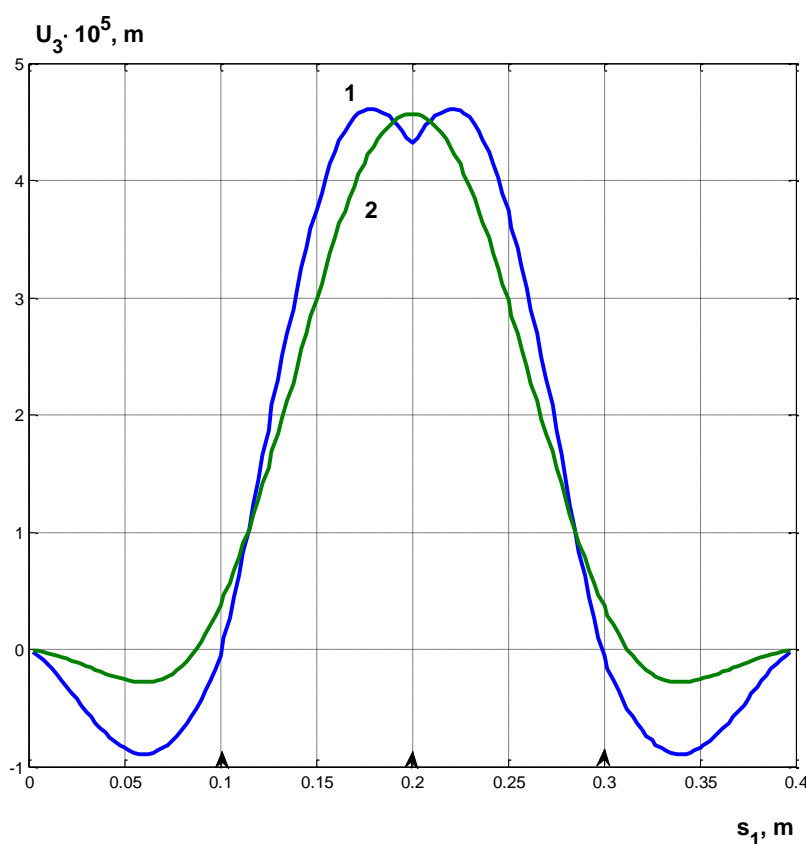


Рис. 6.6. Залежність величини u_3 від просторової координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$

На рис. 6.7 представлені залежності величин u_3 по координаті s_1 в перерізі $s_2 = \frac{\pi}{2}$. Крива 1 відповідає залежності для випадку дискретного розміщення ребер $t = 8,5T$ (час досягнення величини u_3 на досліджуваному інтервалі часу), 2 – конструктивно - ортотропний випадок $t = 19,4T$ (час досягнення величини u_3 на досліджуваному інтервалі часу). Як бачимо, в перерізі $s_2 = \frac{\pi}{2}$ результати по максимальним значенням відрізняються до 80%. В перерізах, $s_2 = \frac{\pi}{8}$, $s_2 = \frac{\pi}{4}$, $s_2 = \frac{3\pi}{8}$ різниця результатів знаходиться в межах від 0 до 80%.

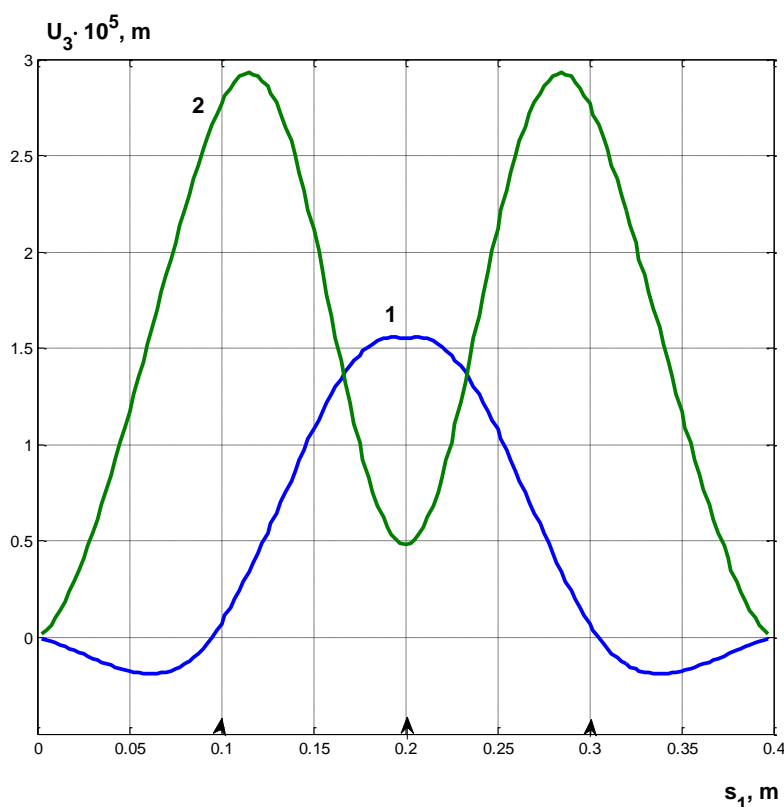


Рис. 6.7. Залежність величини u_3 від просторової координати s_1 в перерізі $s_2 = \pi/2$

6.3. Коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при імпульсних навантаженнях

Розглядається циліндрична оболонка еліптичного поперечного перерізу на пружній основі при дії розподіленого внутрішнього навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$, де s_1, s_2 і t – просторові та часова координати. Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривини координатної поверхні вихідної оболонки записуються у вигляді (6.1)

Для виведення рівнянь коливань циліндричної оболонки на пружній основі використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського згідно розділу 2. Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо рівняння коливань гладкої циліндричної оболонки з еліптичним поперечним перерізом на пружній основі

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} - C_1 u_3 + P_3(s_1, s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

В рівняннях (6.10) позначення величин зусиль – моментів та фізико – механічних параметрів оболонки вводяться згідно розділу 2; C_1 – коефіцієнт Вінклера пружної основи.

Чисельний алгоритм розв'язування початково – краєвої задачі базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам s_1, s_2 та явній апроксимації по часовій координаті t (див. розділ 3).

Як числовий приклад, розглядалася задача динамічної поведінки циліндричної панелі еліптичного перерізу при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження. Припускається, що всі сторони циліндричної панелі жорстко зацемлені. Розподілене імпульсне навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалося наступним чином: $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження. В розрахунках покладалося: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах для циліндричної оболонки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0,4$ м. Параметри еліптичності поперечного перерізу при розрахунках покладалися наступними: 1) $a = b = 0,1$; 2) $a = 1,2b$. Розрахунки проводилися в області $D = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{8} \right\}$ на часовому відрізку $0 \leq t \leq 80T$.

На рис. 6.8, 6.9 представлені результати чисельних розрахунків для величин u_3 відповідно в перерізі $s_2 = 0$ вздовж координати s_1 – $0 \leq s_1 \leq L$. Враховуючи динамічний характер розподілення шуканих величин по просторовим координатам s_1, s_2 та часу t , проведемо аналіз напружено - деформованого стану вихідної конструкції для часу досягнення ними максимальних по модулю значень. На рис. 6.8 наведені залежності величин u_3 від координати s_1 при різних значеннях C_1 при $a/b = 1$ в моменти досягнення ними максимальних по модулю значень.

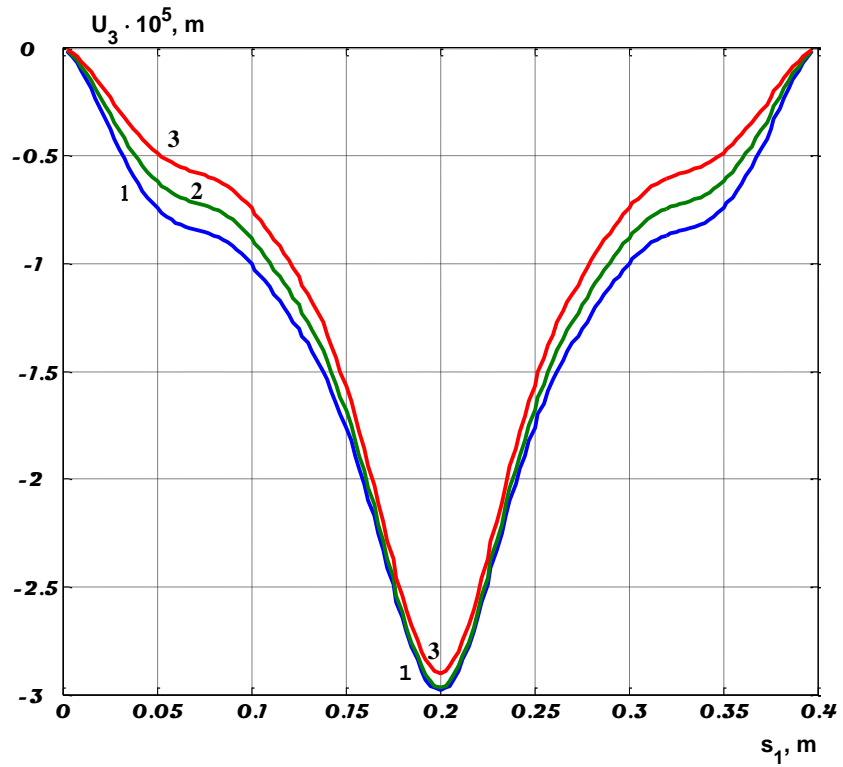


Рис. 6.8. Залежність величин u_3 від просторової координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$ для випадку $a/b = 1$

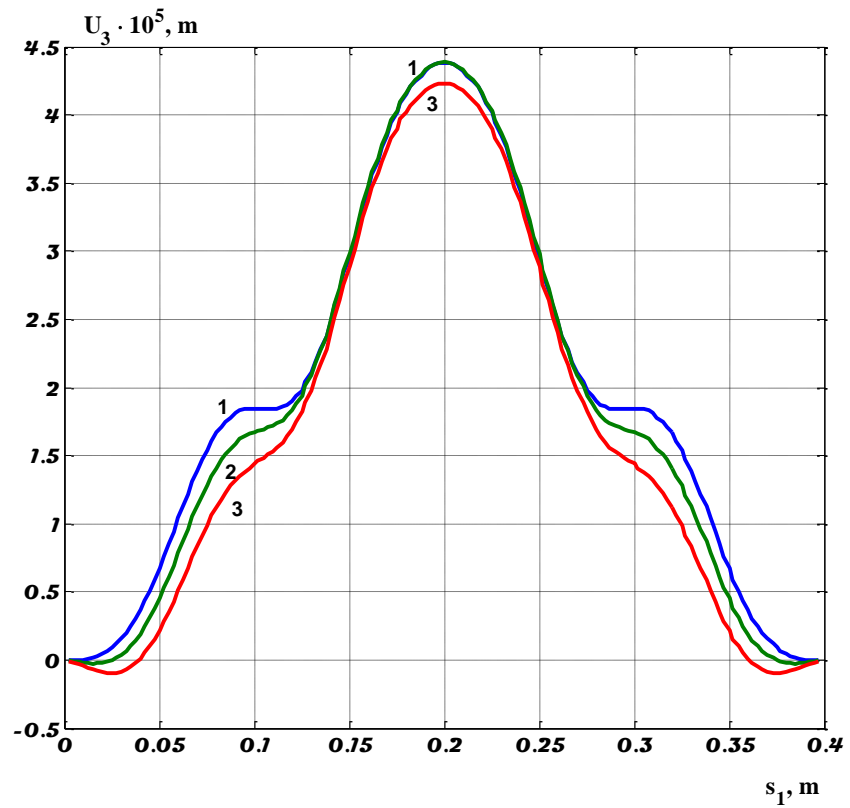


Рис. 6.9. Залежність величин u_3 від просторової координати s_1 в перерізі $s_2 = 0$ для випадку $a/b = 1,2$

На рис. 6.9 представлені аналогічні залежності для випадку $a/b = 1,2$. Криві з індексом 1 на рисунках відповідають випадкам $C_1 = 10^9 \text{ Н/м}^3$; з індексом 2 – $C_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; з індексом 3 – $C_1 = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$. Розрахунки на рисунках 6.8, 6.9 приведені для часу $t = 11,25T$ (час досягнення максимального прогину для випадку пружної основи при $C_1 = 10^9 \text{ Н/м}^3$). Виходячи із наведеного графічного матеріалу можна аналізувати вплив параметрів пружної основи на динамічні характеристики конструкції, що розглядається.

6.4. Нестационарні коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі

Розглядається підкріплена циліндрична оболонка еліптичного поперечного перерізу на пружній основі при дії розподіленого внутрішнього навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$, де s_1, s_2 і t – просторові та часова координати. Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривини координатної поверхні гладкої вихідної оболонки записуються у вигляді (6.1).

Для отримання рівнянь коливань поперечно підкріпленої циліндричної оболонки на пружній основі використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського (див. розділ 2). Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо дві групи рівнянь:

- рівняння коливань гладкої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу на пружній мають вигляд (6.10);
- рівняння коливань j -го поперечного підкріплюючого елемента, розташованого вздовж осі s_2 мають вигляд (6.9).

Чисельний алгоритм розв'язування даної початково – краєвої задачі (6.10), (6.9) базується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам s_1, s_2 та явній апроксимації по часовій координаті t (див. розділ 3).

Як числовий приклад, розглядалася задача динамічної поведінки поперечно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження. Припускається, що всі сторони циліндричної оболонки жорстко заземлені. Розподілене імпульсне навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалося згідно попередніх задач, які розглянуті в підрозділах 6.2, 6.3. Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах для циліндричної оболонки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0,4$ м. Параметри еліптичності поперечного перерізу при розрахунках покладалися наступними: 1) $a = b = 0,1$; 2) $a = 1,2b$. Розрахунки проводилися на часовому інтервалі $0 \leq t \leq 80T$. Поперечні ребра розташовані в перерізах $s_{1j} = 0,25jL$; $j = \overline{1, 3}$. Розрахунки проводилися для випадків пружної основи $C_1 = 10^9$ Н/м³; $C_1 = 2 \cdot 10^9$ Н/м³; $C_1 = 3 \cdot 10^9$ Н/м³.

На рис. 6.10, 6.11 представлені результати чисельних розрахунків для величин u_3 для випадку C_1 . Криві з індексом 1 відповідають випадку $a/b = 1$, з індексом 2 - $a/b = 1,2$. На рис. 6.10 приведені залежності величин від часової координати t в точці $s_1 = 0,375L$; $s_2 = 0$ (середина відстані між першим і другим ребром в перерізі $s_2 = 0$). Як бачимо, наявність еліптичності поперечного перерізу оболонки приводить до значної різниці як по амплітуді значень так і по частотним характеристикам в порівнянні з оболонкою кругового перерізу.

На рис. 6.11 приведено залежність величини u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $s_2 = 0$ для випадку $t = 3,5T$ (час досягнення максимального значення величини u_3 для випадку $a/b = 1$ на досліджуваному інтервалі часу). Значна різниця величин u_3 для двох випадків розрахунків пояснюється виходячи із залежностей, які приведені на рис. 6.10. Розрахунки для випадків пружної основи C_2 і C_3 мають аналогічний якісний та кількісний характер.

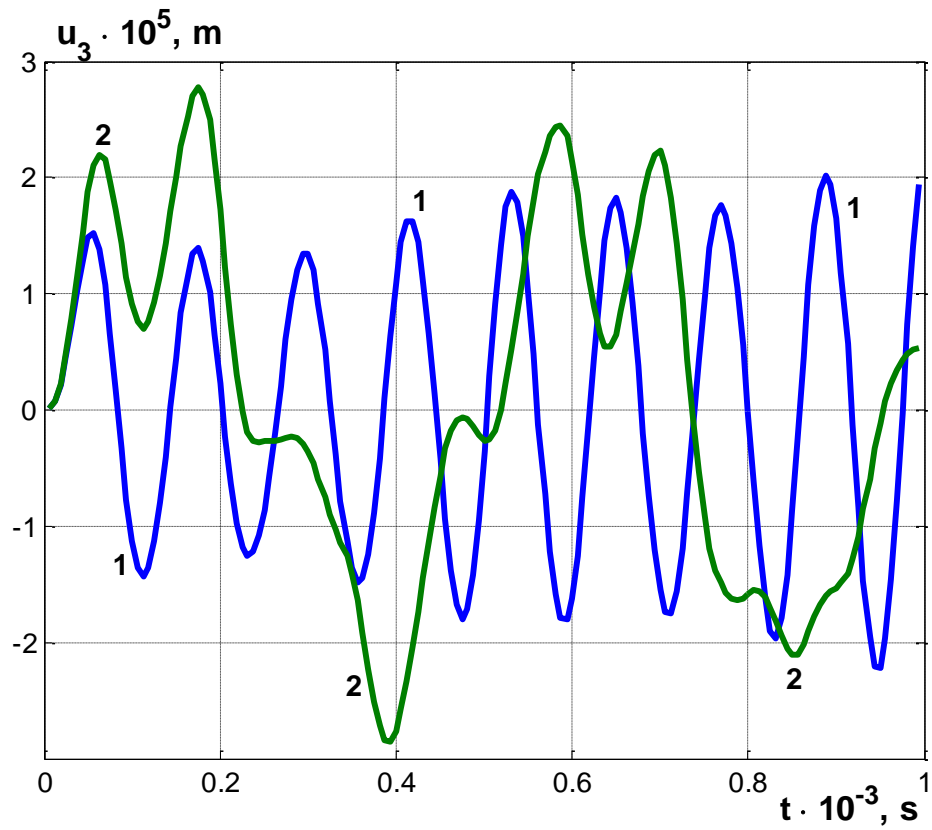


Рис. 6.10. Залежність величин u_3 по часовій координаті t

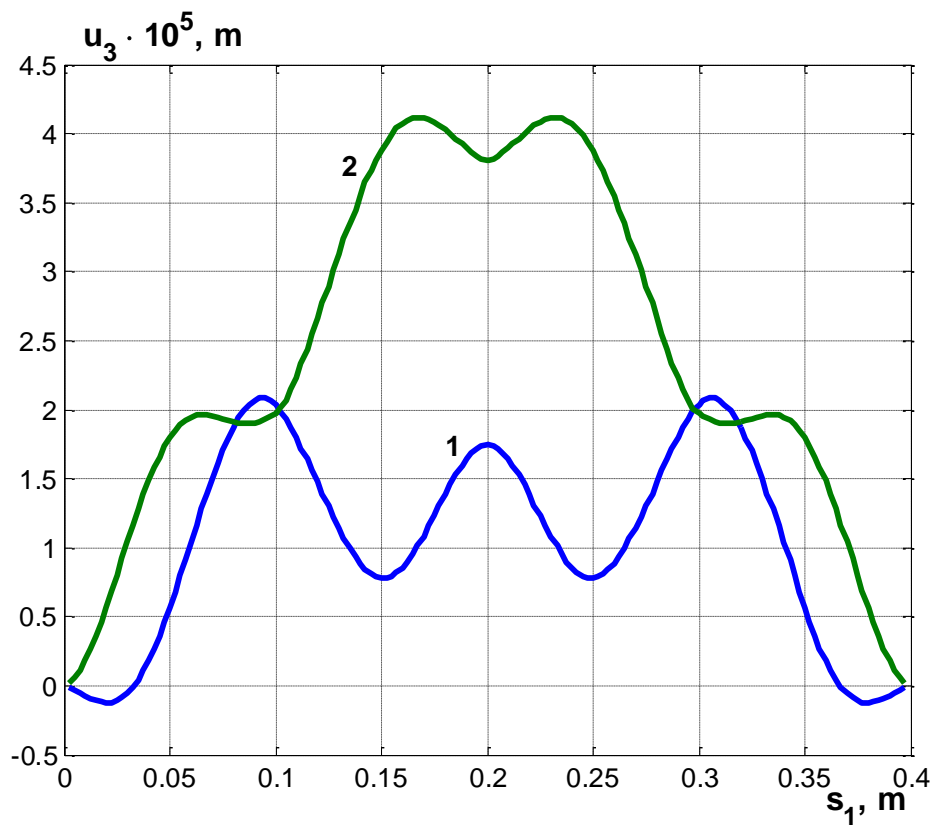


Рисунок 6.11. Залежність величин u_3 по просторовій координаті s_1

6.5. Достовірність чисельних розрахунків

Достовірність одержаних в роботі результатів визначається коректністю постановок задач; теоретичним обґрунтуванням скінчено – різницевих схем, які використовуються; контрольованою точністю чисельних розрахунків; проведенням тестових розрахунків; відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям коливань тонкостінних елементів конструкцій.

Коректність постановки задач досягається використанням відомих рівнянь теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка (див. розділ 2), які являються апроксимацією вихідних рівнянь тривимірної теорії пружності. При виводі рівнянь отримано рівняння коливань оболонок обертання в гладкій області, та рівняння коливань підкріплюючих ребристих елементів (поперечні ребра) з врахуванням пружної основи. Неважко показати, що вказані рівняння по класифікації рівнянь в частинних похідних є рівняннями гіперболічного типу, які є апроксимацією коливальних рівнянь тривимірних пружних тіл і достатньо коректно відтворюють хвильові процеси в неоднорідних оболонкових структурах з врахуванням просторових розривів.

Чисельні алгоритми наближених розв'язків вихідних рівнянь базуються на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих схем. При побудові різницевих схем кінематичні величини відносяться до різницевих точок з цілими індексами, а величини деформацій та зусиль – моментів відносяться до різницевих точок з напівцілими індексами (див. розділ 3). Така апроксимація вихідних кінематичних та статичних величин дозволяє забезпечити виконання закону збереження повної механічної енергії пружної структури на різницевому рівні. Чисельний алгоритм базується на використанні окремих скінчено – різницевих співвідношень в гладкій області та на лініях просторових розривів з другим порядком точності по просторовій та часовій координатам. При цьому, в ряді випадків проведено теоретичне дослідження питань стійкості різницевих рівнянь. Зокрема, це проведено для скінчено – різницевих рівнянь коливань циліндричних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер на

пружній основі при осесиметричних коливаннях (див. розділ 3 даної дисертації). Вихідна апроксимація скінчено – різницевих рівнянь (другий порядок точності по просторовим та часовій координатам) та умова стійкості різницевих рівнянь, згідно теорії різницевих схем (див розділ 3) дозволяють говорити про збіжність чисельних результатів, які отримані з використанням вказаних скінчено – різницевих схем.

При конкретних чисельних розрахунках досягалася практична збіжність результатів. Як приклад розглянемо досягнення практичної збіжності в задачі вимушених осесиметричних нестационарних коливань підкріпленої циліндричної оболонки на пружній основі при дії на неї осесиметричного внутрішнього розподіленого імпульсного навантаження.

Розглядалася підкріплена циліндрична оболонка з жорстко защемленими краями при дії осесиметричного розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження $P_3(t) = A[\eta(t) - \eta(t - T)]$, де A - амплітуда навантаження, T - тривалість навантаження. Задача розв'язувалася при наступних фізико – механічних і геометричних параметрах: $L/h = 80$; $R/h = 10$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ г/см}^3$; $A = 10^6 \text{ Н}$; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Коефіцієнт пружної основи Вінклера $c_w = 4,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^3$, визначений згідно методики, яка розроблена в розділі 4. Покладалося, що оболонка підкріплена трьома ребрами в точках $x_j = jL/4$ ($j = 1, 3$).

Результати розрахунків приведені в таблицях 6.1 – 6.4, в колонках яких приведені максимальні величини u_3 та σ_{22} по просторовій координаті в гладкій області та на лініях розривів.

Як видно з приведених результатів, задовільна точність досягається при $N = 160$ для стандартного підходу. Якщо прийняти розрахунки при $N = 320$ за точні, то відносна похибка розрахунків при $N = 160$ по величинам σ_{22} в точках $x = 7L/40$ та $x = 0,1L$ менше 1%.

Таблиця 6.1.

Збіжність величини u_3 для циліндричної оболонки в гладкій області

Кількість інтервалів N	$x = L/8$	$x = 3L/8$
40	$0,283 \cdot 10^{-4}$	$- 0,315 \cdot 10^{-4}$
80	$0,268 \cdot 10^{-4}$	$- 0,286 \cdot 10^{-4}$
160	$0,263 \cdot 10^{-4}$	$- 0,274 \cdot 10^{-4}$
320	$0,262 \cdot 10^{-4}$	$- 0,270 \cdot 10^{-4}$
640	$0,262 \cdot 10^{-4}$	$- 0,269 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 6.2.

Збіжність величини u_3 для циліндричної оболонки на лініях розривів

Кількість інтервалів N	$x = L/4$	$x = L/2$
40	$0,190 \cdot 10^{-4}$	$0,185 \cdot 10^{-4}$
80	$0,183 \cdot 10^{-4}$	$0,186 \cdot 10^{-4}$
160	$0,181 \cdot 10^{-4}$	$0,184 \cdot 10^{-4}$
320	$0,180 \cdot 10^{-4}$	$0,183 \cdot 10^{-4}$
640	$0,179 \cdot 10^{-4}$	$0,182 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 6.3.

Збіжність величини σ_{22} для циліндричної оболонки в гладкій області

Кількість інтервалів N	$x = L/8$	$x = 3L/8$
40	$0,209 \cdot 10^8$ Па	$- 0,233 \cdot 10^8$ Па
80	$0,196 \cdot 10^8$	$- 0,210 \cdot 10^8$
160	$0,193 \cdot 10^8$	$- 0,202 \cdot 10^8$
320	$0,192 \cdot 10^8$	$- 0,200 \cdot 10^8$
640	$0,191 \cdot 10^8$	$- 0,199 \cdot 10^8$

Таблиця 6.4.

Збіжність величини σ_{22} для циліндричної оболонки в області розривів

Кількість інтервалів N	$x = L/4$	$x = L/2$
40	$0,143 \cdot 10^8$ Па	$0,149 \cdot 10^8$ Па
80	$0,139 \cdot 10^8$	$0,150 \cdot 10^8$
160	$0,136 \cdot 10^8$	$0,148 \cdot 10^8$
320	$0,135 \cdot 10^8$	$0,147 \cdot 10^8$
640	$0,135 \cdot 10^8$	$0,146 \cdot 10^8$

Практична збіжність була досліджена на прикладі задачі динамічної поведінки повздовжньо - поперечного підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу (підрозділ 6.2) – задача замкненої дискретно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу в області $D = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{2} \right\}$ при дії на неї внутрішнього розподіленого навантаження $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$, яке розглядалося в попередніх задачах. В розрахунках покладалось $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Покладалося, що краї оболонки жорстко защемлені. Початкові умовами нульові.

Задача розглядалась при наступних фізико – механічних параметрах вихідної конструкції (випадок ізотропної оболонки) в області D : $\frac{\dot{a}}{h} = 40$; $\frac{a}{b} = 1,2$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,33$; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Розглядалася задача для випадку, коли оболонка підкріплена 16 повздовжніми і 3 поперечними ребрами рівномірно по координатам $s_1(A_1\alpha_1)$ і $s_2(A_2\alpha_2)$. Як частковий випадок, розглянемо збіжність чисельних результатів по просторовій координаті s_1 при фіксованому значенні $s_{2j}(\alpha_{2j} = \pi/4)$ для

розглянутої задачі. На рис. 6.12 приведено залежності величин u_3 від просторової координати s_1 в момент часу $t = 16,75T$.

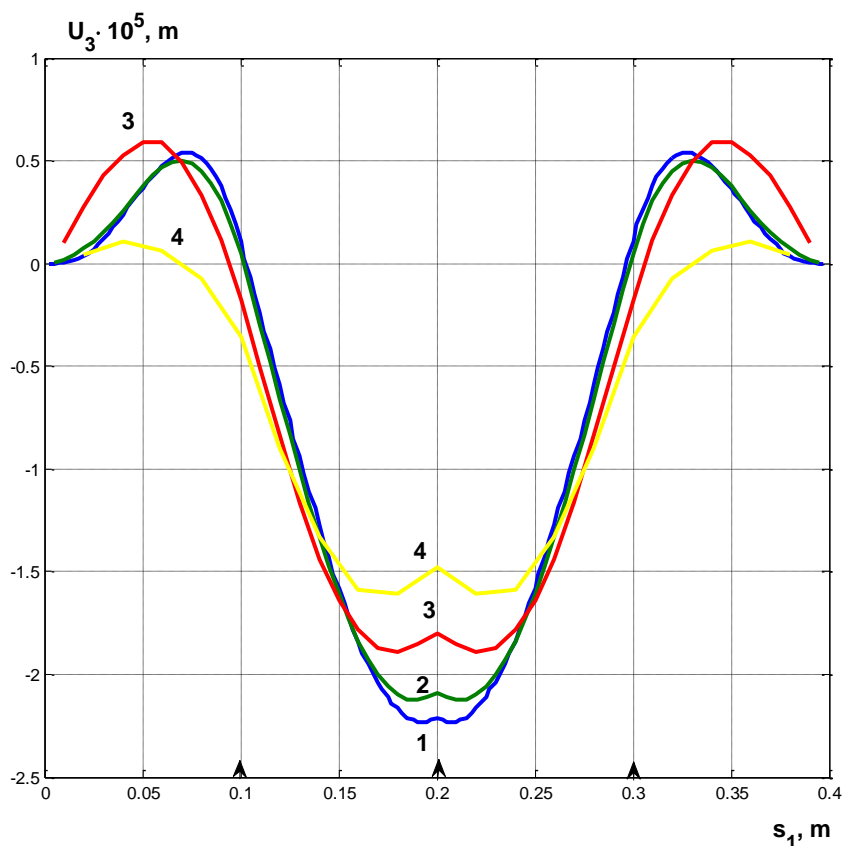


Рис. 6.12. Збіжність величини u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі

$$s_{2j} (\alpha_{2j} = \pi/4)$$

На рис. 6.12 крива 1 відповідає випадку $n = 160$ (кількість розбиттів по просторовій координаті s_1). Крива 2 відповідає випадку $n = 80$. Крива 3 відповідає випадку - $n = 40$; крива 4 - $n = 20$. Випадок $n = 320$ повністю лягає на криву при $n = 160$.

На рис. 6.13 приведено залежності величин σ_{22} від просторової координати s_1 в момент часу $t = 16,6T$ (момент досягнення величиною σ_{22} максимального по модулю значення для випадку $n = 160 \div 320$), кривим

відповідають значення: 1 - випадку $n = 160$, 2 - випадку $n = 80$, 3 - $n = 40$; крива 4 - $n = 20$.

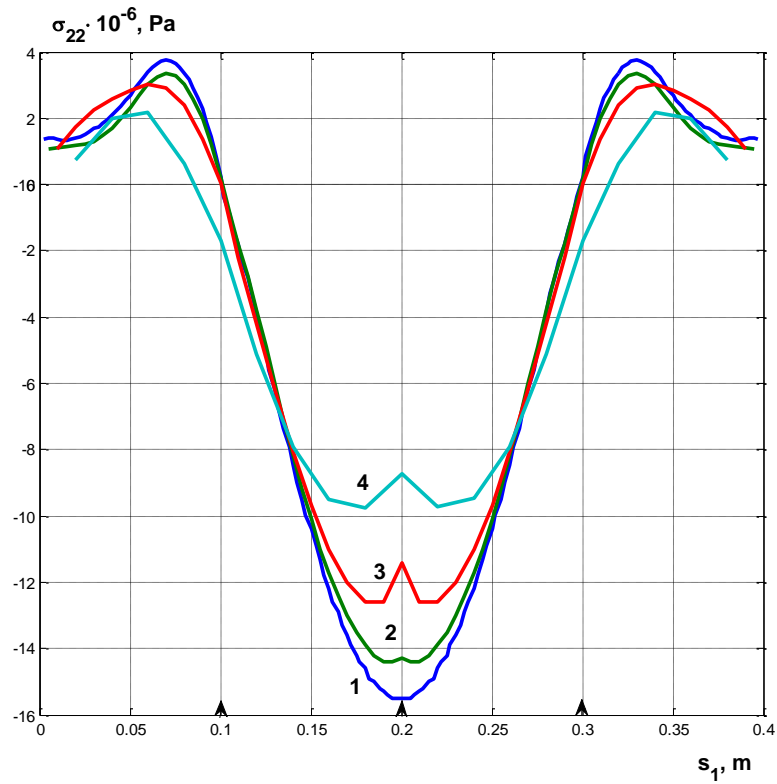


Рис. 6.13. Збіжність величини σ_{22} по просторовій координаті s_1 в перерізі s_{2j} ($\alpha_{2j} = \pi/4$)

Таблиця 6.5. Практична збіжність по просторовим координаті s_1 величин u_3 , σ_{22} в перерізі s_{2j} ($\alpha_{2j} = \pi/4$).

	$u_3 \cdot 10^{-4}, m$	$\Delta, \%$	$\sigma_{22} \cdot 10^8 \ddot{a}$	$\Delta, \%$
	$\alpha_{2j} = \pi/4$		$\alpha_{2j} = \pi/4$	
$N = 20$	0,210	28	-0,126	9
$N = 40$	0,161	1	-0,131	5
$N = 80$	0,168	3	-0,130	5
$N = 160$	0,163	-	-0,130	5
$N = 320$	0,163	-	-0,138	-

Побудовані чисельні алгоритми розв'язку задач теорії оболонок з локальними неоднорідностями відпрацьовувались на тестових розрахунках.

Зокрема, було проведено порівняльний аналіз динамічної поведінки циліндричної підкріпленої оболонки при короткочасному навантаженні згідно аналітичного розв'язку, викладеному в роботі [193] і чисельному алгоритму розв'язку рівнянь коливань підкріплених циліндричних оболонок згідно рівнянь (3.1) – (3.8) при $C_1 = C_2 = 0$.

Розглядалася задача нестационарних осесиметричних коливань циліндричної оболонки типу Тимошенка, підкріпленої зовнішнім пружним кільцем, під дією внутрішнього імпульсу тиску.

Розглядається випадок конструкції з шарнірним закріпленням на кінцях. Граничні умови для цього випадку мають наступний вигляд при $x = 0$, $x = L$:

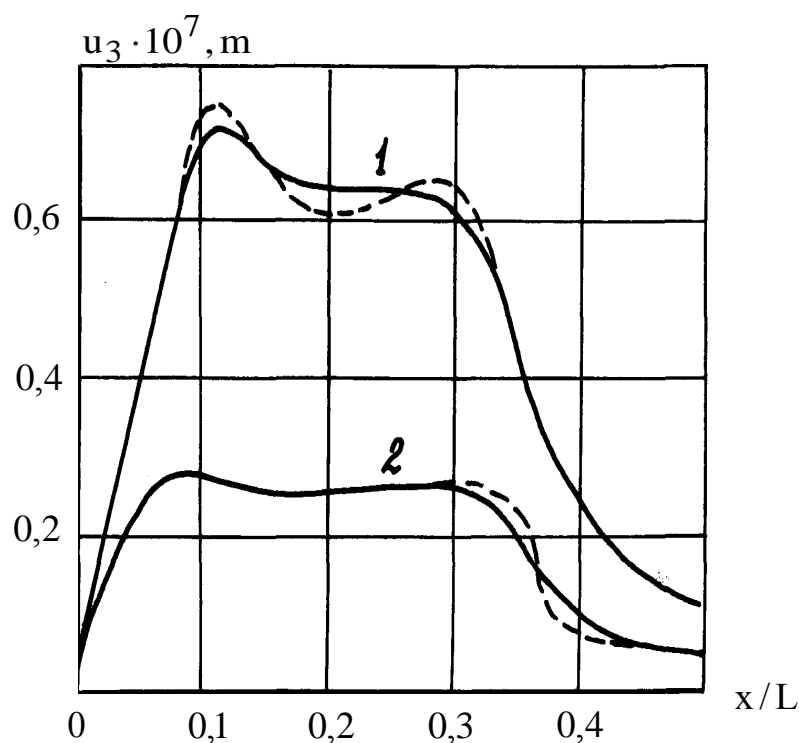
$$T_{11} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad u_3 = 0.$$

Початкові умови задаються у вигляді

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

Розрахунки проводилися для оболонки підкріпленої в середній частині кільцем (центр ваги знаходиться в точці $x = L/2$). Параметри оболонки і кільця наступні: $L = 1,5 \text{ м}$; $R = 0,6 \text{ м}$; $h = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $H = 0,1 \text{ м}$; $F = 0,015 \text{ м}^2$. Навантаження задавалося у вигляді: $P_3 = A \cdot [\eta(\tau) - \eta(\tau - \tau_0)]$; $\tau = t \cdot c / L$; $c^2 = E / [\rho(1 - \nu^2)]$; $A = 10^3 \text{ н/м}^2$; $\tau_0 = 0,5$.

На рис. 6.14 показано порівняння результатів розрахунків даної задачі з результатами роботи [193]. Суцільною лінією представлені залежності величини u_3 від величини x згідно чисельної методики даної роботи, штриховою – згідно аналітичного розрахунку [193]. Крива 1 відповідає часу $\tau = 0,8$; крива 2 – $\tau = 0,4$. Вибір розрахункових параметрів різницевого алгоритму проводився на основі дослідження стійкості відповідних різницевих рівнянь згідно співвідношень приведених в розділі 3.



6.14. Залежність величини u_3 від просторової координати x в моменти часу τ_1 і τ_2

Проводився порівняльний аналіз динамічної поведінки сферичної підкріпленої оболонки при імпульсному навантаженні згідно аналітичного розв'язку, викладеного в роботі [221] і чисельного алгоритму розв'язку рівнянь коливань підкріпленої оболонки обертання згідно рівнянь, які викладені в розділі 2 та розділі 3 (випадок сферичної підкріпленої оболонки $A_1 = R$, $A_2 = R \sin \alpha_1$, $k_1 = k_2 = 1/R$). Розглядалася задача нестационарних осесиметричних коливань сферичної оболонки типу Тимошенка, підкріпленої зовнішнім пружним кільцем, під дією внутрішнього імпульсного навантаження. Задача розглядалася для випадку $0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$. Початкові умови задавали у вигляді

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

Різницеві співвідношення для розв'язку вказаної задачі приймалися згідно формул, викладених в розділі 3. Розрахунки проводилися для оболонки

підкріпленої кільцем вздовж найбільшої паралелі ($\alpha_1 = \pi/2$). Схематичне зображення вихідної задачі представлено на рис. 6.15.

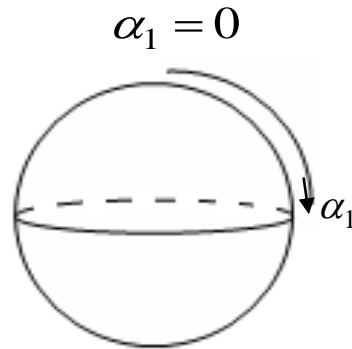


Рис. 6.15. Схематичне представлення сферичної підкріпленої оболонки

Параметри оболонки і кільця наступні [221] при $R = 0,3\text{ м}$; $h = 3 \cdot 10^{-2}\text{ м}$; $m = 160\text{ кг}$ (маса підкріплюючого кільця). Навантаження задавалися у вигляді: $P_3 = A \cdot \exp(-\omega\tau)$; $\tau = t \cdot c / L$; $c^2 = E / [\rho(1 - \nu^2)]$; $A = 0,981 \cdot 10^5\text{ н/м}^2$; $\omega = 0,3$. На рис. 6.16 показано порівняння результатів розрахунків даної задачі з результатами роботи [221].

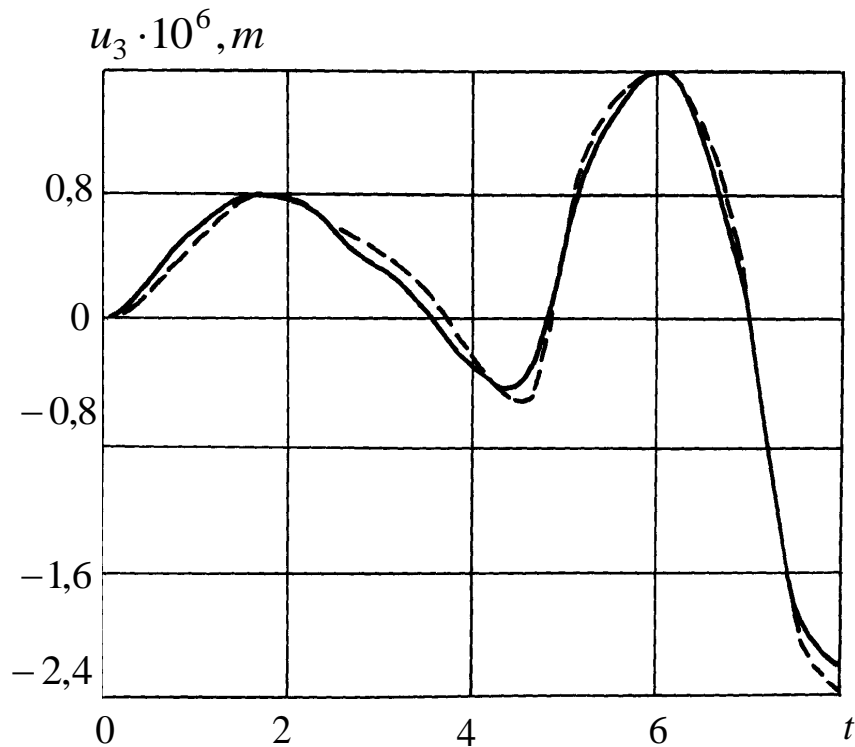


Рис. 6.16. Залежність величини u_3 від часу t в перерізі $\alpha_1 \approx 0$

Суцільною лінією представлені залежності величини u_3 від часу згідно чисельної методики даної роботи, штриховою – згідно аналітичного розрахунку [221]. Криві відповідають залежності u_3 в точці $z = 0,999$ ($\alpha_1 \approx 0$), $z = \cos \alpha_1$.

Висновки до шостого розділу

В даному розділі розглянуто задачі про вимушені коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі. Умовно матеріал розділу можна розділити на дві частини: а) задачі вимушених коливань підкріплених оболонок еліптичного перерізу без врахування пружної основи; б) задачі вимушених коливань гладких та підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі.

В першому випадку розглянуто задачі динамічної поведінки конструктивно – ортотропної моделі та моделі з дискретним повздовжньо – поперечним набором підкріплюючих ребер при розподіленому імпульсному навантаженні. Проведено порівняльний аналіз величин прогину в залежності від моделей, які вище застосовуються. В другому випадку розглядаються вимушені коливання гладкої та дискретної поперечно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу на пружній основі при дії імпульсного навантаження. Проводиться аналіз напружено – деформованого стану конструкції від значення коефіцієнту Вінклера, який отримано з розв'язку зв'язаних задач кругова циліндрична оболонка – ґрунтове середовище при заданих параметрах рівняння стану трикомпонентного ґрунту.

Також, в цьому розділі розглядаються питання достовірності отриманих чисельних розрахунків. Розглядалися чисельні розв'язки задач із аналізом чисельної збіжності по величинам прогину u_3 і напруження σ_{22} в гладкій області та в області на лініях розриву. Для осесиметричного випадку розглядалися питання практичної збіжності для задачі дискретно поперечно підкріпленої циліндричної оболонки на пружній основі. Для неосесиметричного випадку розглядалася задача динамічної поведінки дискретно повздовжньо

поперечно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу при розподіленому імпульсному навантаженні. Було проведено порівняння з чисельно – аналітичними результатами динамічної поведінки дискретно підкріплених оболонок (циліндрична оболонка в рамках моделі Тимошенка з підкріплюючим зовнішнім кільцем, сферична оболонка в рамках моделі Тимошенка з підкріплюючим кільцем вздовж екватора). Отримано задовільне співпадіння чисельних розрахунків, які отримані згідно чисельних алгоритмів та програм даної дисертації та аналітичних розв’язків інших авторів.

ВИСНОВКИ

В роботі створена нова науково – обґрунтована загальна методика математичного дослідження напружено деформованого стану неоднорідних елементів конструкцій на основі пружних середовищ Вінклера та Пастернака при зовнішніх та внутрішніх динамічних навантаженнях, розв'язані зв'язні задачі теорії оболонка – ґрунтове середовище в рамках механіки суцільних середовищ, приведені нові теоретичні результати, включаючи:

- механіко – математичні моделі коливань неоднорідних елементів конструкцій (підкріплені циліндричні, сферичні та конічні оболонки, тришарові оболонки обертання згідно теорії незалежних апроксимацій до кожного шару) в пружному середовищі, які включають виведення рівнянь коливань виходячи з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського та Рейсснера в зусиллях та переміщеннях; формулювання відповідних природних граничних та початкових умов з врахуванням пружних середовищ Вінклера та Пастернака;
- формулювання зв'язаних задач теорії оболонка – ґрунтове середовище циліндричної та сферичної симетрії в рамках моделей механіки суцільних середовищ; рівняння стану ґрунтового середовища приймаються в рамках моделі нелінійного водонасиченого трикомпонентного ґрунта; для опису рівнянь руху ґрунтового середовища приймаються рівняння Ейлера;
- чисельний розв'язок зв'язаних задач теорії оболонка – ґрунтове середовище для циліндричної та сферичної симетрії в рамках моделей механіки суцільних середовищ, зокрема циліндрична оболонка – ґрунтове середовище періодичної структури базується на використанні скінченно – різницевих схем Мак – Кормака; даний підхід дає ефективні розв'язки при проходженні хвиль через середовище з різними фізико – механічними параметрами; на основі отриманих розрахунків запропонована формула для отримання коефіцієнта Вінклера в залежності від геометричних параметрів оболонки та фізико – механічних параметрів ґрунтового середовища при відповідних динамічних навантаженнях;

- чисельний розв'язок задач про вимушені коливання неоднорідних елементів конструкцій (гладких та підкріплених циліндричних, сферичних та конічних оболонок) в пружному середовищі Вінклера та Пастернака при імпульсних навантаженнях, включаючи, розв'язки неосесиметричних задач дискретно підкріплених циліндричних оболонок з повздожньо - поперечним підкріпленням та поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з використанням коефіцієнтів Вінклера, які отримані при розв'язку зв'язаних задач;
- чисельний параметричний аналіз вимушених коливань та напружено деформований стан неоднорідних елементів конструкцій в залежності від їх геометричних та фізико – механічних параметрів та параметрів пружного середовища; чисельний аналіз впливу пружно – нелінійного ґрунтового середовища на напружено деформований стан циліндричних та сферичних оболонок при нестационарних навантаженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мейш В.Ф. Сравнительный анализ динамического поведения трехслойных оболочек в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях / В.Ф. Мейш, Ю.А. Хамренко // Прикл. механика, 39, №7, 2003. - С.123–130.
2. Луговой П.З. Нестационарное деформирование продольно – поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Прикл. механика. – 2016. – 52, № 1. – С. 95 – 107.
3. Мейш В.Ф. Постановка и численный алгоритм решения задач вынужденных колебаний теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным наполнителем / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Математичні проблеми технічної механіки. - Дніпропетровськ, 2003, № 2 (25). - С. 21-26.
4. Хамренко Ю.А. Численное моделирование процессов расслоения в двухслойных цилиндрических оболочках при нестационарных нагружениях / Ю.А. Хамренко, В.Ф. Мейш // Збірник наукових праць: Системні методи керування, технологія та організація виробництва, ремонту і експлуатації автомобілів. – Київ: НТУ, 2002. – Вип. №14. - С.185 – 188.
5. Мейш В.Ф. Чисельний розв'язок задач вимушених коливань тришарових циліндричних оболонок з кусково – однорідним заповнювачем / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. – Київ: НТУ, 2003, № 8. – С. 432–437.
6. Мейш Ю.А. До розрахунку вимушених осесиметричних коливань тришарових конічних оболонок при дії нестационарного навантаження / Ю.А. Мейш // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпропетровськ, 2004, №3 (32). – С. 154 – 160.
7. Мейш В.Ф. Динамическое поведение трехслойных балок в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях / В.Ф. Мейш В.Ф., Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. – Дніпропетровськ, 2007, №4 (51). – С. 27 – 34.
8. Луговой П.З. Хвильові процеси в системі сферична оболонка – ґрунтове середовище при імпульсному навантаженні / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. – Київ: НТУ, 2008, № 13. – С. 332–337.

9. Мейш В.Ф. До розрахунку нестационарних коливань тришарових пологих циліндричних оболонок з дискретним ребристим наповнювачем / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш Ю.А., Д.А. Таєверє // Вісник Національного транспортного ун – ту. Ч. 2. – Київ: НТУ, 2008. – Вип. 17. – С. 409 – 414.
10. Луговой П.З. О решении осесимметричных задач динамики подкреплённых конических оболочек на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський Національний ун–т. – 2009. - Вип. 13. – С. 142 – 148.
11. Луговой П.З. Динамічна поведінка циліндричних та сферичних оболонок в ґрунтовому середовищі при імпульсному навантаженні / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету № 19, Ч. 2. - Київ: НТУ, 2009. – С. 249 - 254.
12. Луговой П.З. До розв'язку динамічних задач теорії оболонок в ґрунтовому середовищі при імпульсних навантаженнях / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій. Дніпропетровський національний університет, 2010. – Вип.14. – С.230 – 238.
13. Мейш В.Ф. Динамічна поведінка двошарових циліндричних оболонок в ґрунтовому середовищі при нестационарних навантаженнях / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. - Збірник наукових праць. Дніпропетровський національний університет.– Дніпропетровськ. Ліра, 2011. – Вип. 17. – С. 195 – 201.
14. Луговой П.З. Вынужденные колебания пятислойных цилиндрических оболочек с продольно – поперечным дискретным подкреплением при распределённом нагружении / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Г.М. Заболотний // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. - Збірник наукових праць. – ДНУ, Дніпропетровськ, 2011. - № 12. – С. 203 – 209.
15. Мейш В.Ф. К решению задач о взаимодействии цилиндрической оболочки с ґрунтовой трехкомпонентной нелинейной средой периодической структуры при нестационарной нагрузке / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровський національний університет, 2012. – Вип.20. – С. 238 - 244.
16. Мейш В.Ф. Динамическое поведение продольно подкреплённых цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при нестационарных загрузках / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.П. Кепенач // Проблеми

- обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровський національний університет, 2012. – Вип.20. – С. 245 - 252.
17. Луговий П.З. До розв'язку динамічних задач теорії товстостінних пластин в рамках прикладних теорій / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету № 24, ч. 2.- К.: НТУ, 2011. - С. 316 - 320.
18. Мейш В.Ф. Математическое моделирование волновых процессов в системе цилиндрическая оболочка – двухслойная грунтовая среда / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво». Збірник наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ». – 2012. – Вип. 22. – С. 3 – 8.
19. Мейш Ю.А. Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании при нестационарной нагрузке / Ю.А. Мейш // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2 (22). – с. 105 – 110.
20. Мейш Ю.А. Коливання циліндричних дискретно підкріплених оболонок на пружній основі при нестационарних навантаженнях / Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету: Ч. 2. – К.: НТУ, 2012. – Вип. 26. - С. 578 - 583.
21. Мейш В.Ф. Чисельне моделювання динамічної поведінки конічної оболонки змінної товщини при дії розподіленого імпульсного навантаження / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, В.М. Мельник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – Вип. 22. – С. 169 – 181.
22. Мейш Ю.А. Задачі про вимушені коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарних навантаженнях / Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. – К.: НТУ, 2014. – Випуск 29. – С. 233 – 239.
23. Мейш В.Ф. Решение задач динамического поведения цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.П. Кепенач // Теоретическая и прикл. механика. – 2014, вып. 8 (54). – С. 98-105
24. Луговой П.З. Решение задач динамического поведения подкрепленных цилиндрических оболочек (конструктивно–ортотропная модель) при

- нестационарных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – Вип. 23. – С.95- 105.
25. Луговой П.З. Численное решение задач о динамическом взаимодействии неоднородных цилиндрических оболочек с упругой грунтовой средой / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – Вип. 23. – С.106- 116.
26. Луговой П.З. Динамічна взаємодія конструктивно ортотропних циліндричних оболонок з пружною основою / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Зб. наук. праць ДДТУ, 1(24).– 2014. (доповнення).– С. 8- 14.
27. Мейш Ю.А. Вимушені коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарних навантаженнях / Ю.А. Мейш // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково – технічний збірник. Вип. 1 (34), 2016.— К. : НТУ, 2016. — С. 267 – 274.
- 28.Хамренко Ю.А. Математическое моделирование процессов расслоения в трехслойных цилиндрических оболочках при краевых импульсных нагружениях / Ю.А. Хамренко // Друга всеукраїнська наукова конференція, 2002. Математичні проблеми технічної механіки. (Тези доповідей). – Дніпродзержинськ, 2002. – С. 116.
- 29.Мейш В. Проведення порівняльного аналізу динамічної поведінки неоднорідних тришарових оболонок обертання в рамках прикладних теорій при вимушених навантаженнях / В. Мейш, Ю. Хамренко // Матеріали ІХ Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – 15 –17 травня 2002р., Київ., 2002. – С. 235.
30. Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. О некоторых подходах конечно – разностной аппроксимации уравнений колебаний теории оболочек и пластин типа Тимошенко // Обчислювальна та прикладна математика. Збірка тез міжнародної конференції 09. – 10.09.2002, Київ. – К.: Київський національний ун-т, 2002. – С.68.
31. Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно–однородным наполнителем при нестационарных нагружениях / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Третя Всеукраїнська

- наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки. - Дніпродзержинськ, 2003. - С.123.
32. Мейш В.Ф. Вимушені коливання тришарових циліндричних оболонок з Кусково-однорідним наповнювачем при нестационарних навантаженнях / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // International Conferens: Dynamical system modelling and stability investigation. Modelling and stability thesis of conference reports.// Kyiv, 2003. – С. 335.
33. Мейш Ю.А. Динамічна поведінка тришарових конічних оболонок при розподіленому нестационарному навантаженні / Ю.А. Мейш // Четверта всеукраїнська наукова конференція, 2004. Математичні проблеми технічної механіки. (Матеріали конференції). – Дніпродзержинськ, 2004. – С. 100.
34. Коньшев В.С. Численное моделирование динамического поведения трехслойных круговых пластин при нестационарных нагрузках / В.С. Коньшев, Ю.А. Мейш // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004, № 2 (91). – С. 101–102.
35. Мейш Ю.А. Динамічна поведінка циліндричних оболонок еліптичного зрізу при розподіленому нестационарному навантаженні / Ю.А. Мейш // Міжнародна наукова конференція, 2005р. Математичні проблеми технічної механіки. (Матеріали конференції). – Дніпродзержинськ, 2005. – С. 66.
36. Мейш Ю.А. К расчету динамического поведения цилиндрических оболочек эллиптического сечения при продольном краевом нагружении / Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель // Міжнародна наукова конференція, 2006р. Математичні проблеми технічної механіки. (Матеріали конференції). – Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ, 2006. – С. 12.
37. Мейш Ю.А. Влияние геометрической нелинейности на напряженно – деформированное состояние трехслойных оболочек при нестационарном нагружении / Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель // Восьмая Крымская Международная Математическая школа МФЛ – 2006, Крым, Алушта, 2006. – Симферополь: Таврический национальный ун – н, 2006. – С. 116.
38. Дубовик Л.С., Мейш Ю.А. Изгиб трехслойных пластин под действием распределенной импульсной нагрузки / Л.С. Дубовик, Ю.А. Мейш // Міжнародна наукова конференція, 2007р. Математичні проблеми технічної механіки. (Матеріали конференції). – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 62.
39. Мейш Ю.А. Динамическое поведение трехслойных балок при нестационарных

- нагрузках / Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель // Міжнародна наукова конференція, 2007р. Математичні проблеми технічної механіки. (Матеріали конференції). – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 160 – 161.
40. Луговой П.З. Взаимодействие цилиндрических волн в грунтовой среде с деформируемыми преградами цилиндрической формы / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 2008г. / Таврический нац. ун-т. – Симферополь, 2008. – С. 99.
41. Мейш Ю.А. Вынужденные колебания трехслойных круговых пластин при нестационарных нагрузках / Ю.А. Мейш // Міжнародна наукова конференція: математичні проблеми технічної механіки. – 2009, 20 – 23 квітня 2009р. – Дніпродзержинськ – Дніпропетровськ, 2009. – С. 37.
42. Мейш Ю.А. Нелинейные волновые процессы в системе цилиндрическая оболочка – водонасыщенный грунт при нестационарных нагрузках / Ю.А. Мейш // Тезисы докладов конференции молодых ученых «Механика деформируемого твердого тела – 2008», посвященной 90-й годовщине НАН Украины и Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины / Прикладная механика. – 2009. – 45, № 3. – С. 133.
43. Луговой П.З. Вынужденные колебания подкрепленных конических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Сучасні проблеми природничих наук та підготовки фахівців у цій галузі. Тези доповідей XII Всеукраїнської наук.– метод. конф. – 2009р., 17 – 19 вересня. – Миколаїв, 2009р. – С. 33.
44. Луговий П.З. Задача взаємодії сферичної оболонки з ґрунтовим середовищем при імпульсному навантаженні / П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // X Крымская международная школа «Метод функций Ляпунова и его приложений» (MFL – 2010), Крым, Алушта, 13-18 сентября, 2010. – С. 81.
45. Луговой П.З. Нестационарные осесимметричные колебания подкрепленных конических оболочек на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций» им. А. Г. Горшкова. Т. 1. – Москва, 2011. – С. 134 – 136.
46. Мейш В.Ф. До розв'язку задач двошарових циліндричних оболонок в ґрунтовому середовищі при нестационарних навантаженнях / В.Ф. Мейш, Ю.А.

- Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. Т. 1. – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ. 13-15 квітня 2011р. – С. 174.
47. Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных конических оболочек при нестационарном воздействии / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Матеріали міжнародної конференції «Актуальные проблемы инженерной механики», Миколаїв, 24 – 26 жовтня 2011р. – Миколаїв, Національний ун – т кораблебудування., 2011. - С. 56-57.
48. Мейш В.Ф. К расчету вынужденных колебаний трехслойных упругих оболочечных структур цилиндрического типа с неоднородным наполнителем пр / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Необратимые процессы в природе и технике. Тезисы докладов. Вторая Всероссийская конференция. Москва (22 – 24 января 2003г.) – МГТУ им. Н.Э. Баумана. – С. 117 - 118.
49. Мейш В.Ф. Задача о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой средой периодической структуры при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. Матеріали конференції (Том 1) – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ (16-19 квітня 2012р.) – С. 34 - 35.
50. Мейш В.Ф. Волновые процессы в грунтовых средах периодической структуры при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. Матеріали конференції (Том 1) – Дніпропетровськ - Дніпродзержинськ (16-19 квітня 2012р.) – С. 36.
51. Луговой П.З. Динамическое поведение цилиндрической оболочки при взаимодействии с трехкомпонентной грунтовой средой периодической структуры / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные взаимодействием полей различной физической природы / Збірник наукових праць. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2012. – Вип.20. – С.99 - 102.
52. Мейш В.Ф. К расчету взаимодействия цилиндрических волн с деформируемыми преградами в многокомпонентной грунтовой среде / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Актуальні проблеми інженерної механіки: Матеріали II Міжнародної науково –

технічної конференції. – Миколаїв: Національний університет кораблебудування, 2012. – С.19 - 20.

53. Мейш В.Ф. Численное моделирование распространения цилиндрических волн в двухслойной грунтовой среде / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Необратимые процессы в природе и технике / Труды VII Всероссийской конференции, 29 – 31 января 2013. – Москва, 2013. – М.: МГТУ им. Баумана, 2013. – Ч. 3. – С. 121 – 124.
54. Мейш В.Ф. Деформирование подкрепленных конических оболочек на упругом основании при динамических нагрузках / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса. Материалы III Международной научно – практической конференции. – Гомель, 17 – 19 октября, 2013. – Гомель: Бел ГУТ, 2013. – С. 372 – 374.
55. Мейш В.Ф. Решение задач о вынужденных колебаниях дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.П. Кепенач // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела / Труды VII Международной научной конференции. (Донецк – Мелекино, 11 – 14 июня 2013 г.). – Т. 2. – Донецк: ДНУ, 2013. – С. 49 – 52.
56. Мейш В.Ф. Динаміка підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.П. Кепенач, А.С. Богатирчук // Матеріали Всеукраїнської науково – методичної конференції «Сучасні науково – методичні проблеми у вищій школі», 26 – 27 червня 2013. – Київ, 2013. – К.; НУХТ, 2013.- С. 39 – 40.
57. Мейш В.Ф. Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Н.П. Кепенач // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: Материалы международной научной конференции. 16 – 20 сентября 2013 г., Минск, Беларусь. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2013. – С. 243 – 245.
58. Мейш Ю.А. К решению динамических задач теории продольно – поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании при нестационарных нагрузках / Ю.А. Мейш // Математичні проблеми технічної механіки / Матеріали міжнародної наукової конференції. 15 – 18 квітня, 2013 р. – Дніпродзержинськ, 2013. – Дніпродзержинськ, 2013. – С. 33.

59. Луговой П.З. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании при действии импульсной нагрузки / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь / Тези доповідей Міжнародної наукової конференції (23 – 26 серпня 2013, м. Одеса). – Одеса: Астропринт, 2013. – С. 83.
60. Луговой П.З. Нестационарное деформирование дискретно подкрепленных конических оболочек в рамках геометрично нелинейной теории / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Сучасні проблеми фізико – математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі / Матеріали XIV Всеукраїнської науково – методичної конференції присвяченої 100 – річчю з дня заснування МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 12 – 14 вересня 2013 р. – Миколаїв, 2013. – С. 36 – 37.
61. Луговой П.З. Чисельний розв'язок нелінійних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок при нестационарних навантаженнях / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Математика в сучасному технічному ун-ті. Друга міжнар. науково–практична конф. – Київ (20-21 грудня 2013р.) – Київ: НТУУ «КПІ», 2013. – С. 52 - 55
62. Луговой П.З. До розв'язку динамічних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок при розподілених навантаженнях / П.З. Луговой, Ю.А. Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. (Том 2) – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ (14 - 17 квітня 2014р.) – С.17
63. Мейш В.Ф. Решение динамических задач о взаимодействии цилиндрических оболочек с грунтовыми средами периодической структуры / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш / Тезисы докладов II Международной научно – практической конференции (16 – 20 марта 2015 г, Киев - Одесса). – Одесса: ТЭС, 2015 – С. 64.
64. Богатырчук А. К решению динамических задач взаимодействия цилиндрических оболочек с грунтовой средой периодической структуры / А. Богатырчук, В. Мейш, Ю. Мейш // Міжнародна науково – методична конференція «Сучасні науково – методичні проблеми математики у вищій школі», 25 - 26 червня 2015 р. – К.: НУХТ, 2015р. – С. 62-64.
65. Богатырчук А. Динамическое поведение цилиндрической оболочки на упругом основании переменной структуры / А. Богатырчук, В. Мейш, Ю. Мейш // Міжнародна науково – методична конференція «Сучасні науково – методичні

- проблеми математики у вищій школі», 25 - 26 червня 2015 р. – К.: НУХТ, 2015р. – С. 64 - 65.
66. Мейш В.Ф. Поведение цилиндрических оболочек с деформируемыми перегородками при продольном ударе / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Всеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика» присвячена 165- річчю від дня народження С.В. Ковалевської: матеріали конференції. – Кременчук: Кременчуцький національний університет ім. М. Остроградського, 2015. – С. 120-121.
67. Луговий П.З. До чисельного розв'язку динамічних задач взаємодії неоднорідних циліндричних оболонок з пружним ґрунтовим середовищем / П.З. Луговий, Ю.А. Мейш // LXXI Наукова конференція професорсько – викладацького складу, аспірантів, студентів та відокремлених структурних підрозділів університету. – К.: НТУ, 2015. - С. 462.
68. Мейш Ю.А. Динамика трехслойных цилиндрических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках / Ю.А. Мейш // III Международная конференция «Актуальные проблемы инженерной механики». Тезисы докладов. – Одесса – 2016. – С. 157.
69. Мейш Ю.А. Динамика цилиндрических оболочек эллиптического сечения на упругом основании при нестационарных нагрузках / Ю.А. Мейш // Математичні проблеми технічної механіки - 2016. Міжнародна наукова конференція. (Том 1) – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, Київ (18-21 квітня 2016р.) – С. 109.
70. Перельмутер А.В. Расчетные модели и возможность их анализа. / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
71. Филоненко – Бородич М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку / М.М. Филоненко – Бородич // Труды МЭМИИТ, 1945. – Вип. 53. – С. 16 – 25.
72. Власов В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физ – матгиз, 1960. – 492 с.
73. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. / П.Л. Пастернак. – М.Л.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
74. Цытович Н.А. Механика грунтов. / Н.А. Цытович. – М.: Высшая школа, 1973. – 288 с.

75. Замышляев Б.В. Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. / Б.В. Замышляев, Л.С. Евтерев – М.: Наука, 1990. – 215 с.
76. Рахматуллин Х.А. Вопросы динамики грунтов. / Х.А. Рахматуллин, А.Я. Сагомоян, Н.А. Алексеев – М.: Изд-во МГУ, 1964. – 239 с.
77. Рыков Г.В. Влияние скорости деформирования на сжимаемость и сдвиг песчаных грунтов при кратковременных нагрузках / Г.В. Рыков // ПМТФ, 1969, № 3. – С. 155 – 160.
78. Алексеенко В.Д. Экспериментальное исследование поля напряжений в мягком грунте при контактном взрыве / В.Д. Алексеенко // ПМТФ. 1963. Т. 4, № 5. - С. 90 – 106.
79. Григорян С.С. Механика грунтов / С.С. Григорян, В.А. Иоселевич // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. – С. 203 – 226.
80. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов / С.С. Григорян // ПММ. 1960. Т. 24, № 6. - С. 1057 – 1072.
81. Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. / Г.М. Ляхов. – М.: Наука. 1982. – 288 с.
82. Рыков Г.В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте / Г.В. Рыков // ПМТФ, 1964, № 1. – С. 85 – 89.
83. Вовк А.А., Замышляев Б.В., Евтерев Л.С., Белинский И.В., Михайлюк А.В. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. / А.А. Вовк, Б.В. Замышляев, Л.С. Евтерев, И.В. Белинский, А.В. Михайлюк. – Киев: Наукова думка, 1984. – 286 с.
84. Лучко И.А. Механический эффект взрыва в грунтах. / И.А. Лучко, В.А. Плаксий, Н.С. Ремез и др. – Киев: Наук. Думка. 1989. – 232 с.
85. Компанеец А.С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде / А.С. Компанеец // ДАН СССР. 1956, № 1. - С. 109.
86. Вахрамеев Ю.С. Некоторые соотношения подобия для движения сыпучей уплотняющейся среды / Ю.С. Вахрамеев // ПММ. 1970. Вып. 5. - С.930 – 934.
87. Виноградов В.А. Разлет сферического объема грунта при взрыве в центре симметрии / В.А. Виноградов, В.Н. Родионов, Е.И. Шемякин // ПМТФ. 1961. № 3. - С. 36 – 42.
88. Никифоровский В.С. Динамическое разрушение твердых тел. / В.С. Никифоровский, Е.И. Шемякин. – Новосибирск: Наука, 1979. – 272 с.

89. Христианович С.А. О динамической сжимаемости прочных горных пород и металлов / С.А. Христианович, Е.И. Шемякин // ПМТФ, 1964, № 3.– С. 9 -15.
90. Григорян С.С. Об общих уравнениях динамики грунтов / С.С. Григорян // ДАН. 1959. Т. 124, № 2. - С. 285 – 287.
91. Бураго Н.Г. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ «Астра». / Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов // Препринт ИПМ АН СССР. № 326. – М.: 1988. – 63 с.
92. Майнчен Д. Метод расчета «Тензор» / Д. Майнчен, С. Сак // Вычислительные методы в гидродинамике: Сб. ст. – М.: Мир, 1967.–С. 185– 211.
93. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике: Сб. ст. – М.: Наука, 1967. – С. 212 – 265.
94. Афанасьев С.Б. Пакет прикладных программ «Динамика - 1» / С.Б. Афанасьев, В.Г. Баженов, А.В. Кочетков, В.Р. Фельдгун // ПППП. Автоматизация научных исследований по прочности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький: Изд – во ГГУ, 1986. – С. 21 – 29.
95. Баженов В.Г. Пакет прикладных программ «Динамика - 2» / В.Г. Баженов, С.В. Зефирова, А.В. Кочетков и др. // ПППП. Исследование и оптимизация конструкций: Всесоюз. межвуз. сб.– Горький: Изд– во ГГУ, 1987. – С. 4 – 13.
96. Гулидов А.И. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел. / А.И. Гулидов, В.М.Фомин. – Препринт ИТПМ СО АН СССР № 49. – Новосибирск, 1982. – 29 с.
97. Бураго Н.Г. Обзор контактных алгоритмов / Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов // МТТ. 2005. № 1. – С. 44 – 85.
98. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. / С.К. Годунов, А.В. Забродин и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
99. Баженов В.Г. О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач / В.Г. Баженов, А.И. Кибец, А.И. Садырин // ПППП. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горький: Изд – во ГГУ, 1986. – С. 14 – 19.
100. Баженов В.Г. Численные методы решения нестационарной динамики тонкостенных конструкций / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // МТТ. 2001. № 5. - С. 156 – 173.

101. Фомин В.М. Высокоскоростное взаимодействие тел. / В.М. Фомин, А.И. Гулидов, Г.А. Сапожников и др.-Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.– 600 с.
102. Амиро И.Я. Методы расчета оболочек: в 5 т. / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий. – К.: Наукова думка, 1980.– Т. 2: Теория ребристых оболочек. – 1980. – 368 с.
103. Амиро И.Я. Исследования в области динамики ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 11. –С. 3 – 20.
104. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Г. Паламарчук. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
105. Амиро И.Я. Устойчивость ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, О.А. Грачев, В.А. Заруцкий. – К. : Наук. думка, 1987. – 160 с.
106. Амиро И.Я. Колебания ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, В.В. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
107. Андрианов И.В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / И.В. Андрианов, В.А. Лесничая, Л.И. Маневич. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
108. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – М.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
109. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы. / С.П. Тимошенко. – М.: Наука. – 1971. – 507 с.
110. Шиманский Ю.А. Строительная механика подводных лодок / Ю.А. Шиманский. – Л.: Суднопромгиз, 1948. – 230 с.
111. Лурье А.И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости / А.И. Лурье. – Ленинград, 1948. – 28 с.
112. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
113. Власов В.З. Избранные труды. Ч.1 / В.З. Власов. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.
114. Абовский Н.П. Ребристые оболочки: учебное пособие. Ч. 1 / Н.П. Абовский. – Красноярск: Красноярск. политех. ин-т, 1967. – 64 с.
115. Абовский Н.П. Колебания подкрепленных оболочек: учебное пособие. Ч. 1 / Н.П. Абовский, В.И. Савченко. – Красноярск, 1971. – 132 с.
116. Амиро И.Я. Ребристые цилиндрические оболочки / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, П.С. Поляков. – К.: Наук. думка, 1973. – 248с.

117. Амиро И.Я. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно – деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3 – 22.
118. Жигалко Ю.П. Некоторые вопросы динамики подкрепленных оболочек / Ю.П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1979. – № 14. – С. 172 – 184.
119. Жигалко Ю.П. Колебания тонкой упругой оболочки произвольной формы, подкрепленной вязкоупругими ребрами жесткости / Ю.П. Жигалко // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций. – Казань, 1980. – С. 41 – 47.
120. Жигалко Ю.П. Численное решение задачи о передаче локальной динамической нагрузки через стрингер на пологую цилиндрическую оболочку / Ю.П. Жигалко, З.В. Скворцова // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 10. – С. 32 – 37.
121. Жигалко Ю.П. Аналитические решения задач о колебаниях упругих пластин и оболочек с подкреплениями типа накладок / Ю.П. Жигалко, М.М. Торопова // Изв. вузов. Мат. – 1998. – № 9. – С. 47 – 54
122. Луговой П.З. Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Сопrotивл. матер. и теория сооруж. – Киев: Будівельник, 1989. – Вып. 54. – С. 79 – 82.
123. Луговой П.З. Неосесимметричные колебания ребристой оболочки с учетом сдвиговых деформаций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 50 – 55.
124. Луговой П.З. Построение разностных схем для уравнений движения подкрепленных цилиндрических оболочек с разрывными коэффициентами / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Краевые задачи математической физики. – К.: Наук. думка. – 1989. – С. 136 – 140.
125. Луговой П.З. Динамика оболочечных конструкций при импульсных нагрузках (обзор) / П.З. Луговой // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 3 – 20.
126. Луговой П.З. Исследование волновых процессов в дискретно подкрепленных оболочках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 51 – 54.

127. Луговой П.З. Осесимметричные колебания ребристых сферических оболочек с отверстием при импульсных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 5. – С. 51 – 56.
128. Луговой П.З. Исследование нестационарных процессов деформирования дискретно подкрепленных пластин и оболочек в неклассической постановке / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 8. – С. 88– 94.
129. Луговой П.З. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках / Луговой П.З., Мукоид В.П., Мейш В.Ф. – К.: Наук. думка, 1991. – 280 с.
130. Луговой П.З. Уточненная модель дискретно подкрепленных пластин и оболочек при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Исследования по теории пластин и оболочек (Казань). – 1992. – Вып. 25. – С. 14 – 20.
131. Луговой П.З. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 38 – 44.
132. Луговой П.З. Численное решение задач динамики ребристых оболочек вращения / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Вычислительная и прикладная математика. – 1992. – Вып. 74. – С. 45 – 48.
133. Луговой П.З. Нелинейное деформирование составных подкрепленных конструкций при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Доклады АН Украины. – 1993. – № 3. – С. 60 – 65.
134. Луговой П.З. К теории и решению динамических задач нестационарного поведения цилиндрических оболочек с дискретным подкреплением переменной жесткости / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 53 – 59.
135. Луговой П. З. Вынужденные нестационарные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с продольно-поперечным дискретным ребристым наполнителем / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, С. Э. Штанцель // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 60 – 67.
136. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536 с.

137. Мейш В.Ф. Нестационарная деформация ребристых труб при осесимметричных нагрузках / В.Ф. Мейш // Горные породы при динамических нагрузках. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 105 – 108.
138. Мейш В.Ф. Динамика ребристой цилиндрической оболочки при действии кратковременной осесимметричной нагрузки / В.Ф. Мейш, П.З. Луговой // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 21 – 24.
139. Мейш В.Ф. Нестационарное поведение подкрепленной ортотропной конической оболочки при действии внезапно приложенной нагрузки / В.Ф. Мейш // Технологические проблемы прочности несущих конструкций: I Всесоюз. конф.: тезисы докл. – Запорожье, 1991. – Т. 1. – С. 149 – 154.
140. Мейш В.Ф. Нестационарна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки з зосередженими масами при повздовжньому ударі / В.Ф. Мейш // Доповіді АН України. – 1991. – С. 84 – 89.
141. Мейш В.Ф. Численное моделирование поведения подкрепленных цилиндрических конструкций при импульсном нагружении / В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Теория и практика совершенствование технологии взрывных работ. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 27 – 32.
142. Мейш В.Ф. Геометрически и физически нелинейное деформирование подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагружениях / В.Ф. Мейш // Прикл. мех. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 46 – 52.
143. Мейш В.Ф. Неосесимметричные волновые процессы в подкрепленной цилиндрической оболочке при продольном ударе / В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 55 – 62.
144. Мейш В.Ф. Нелинейное деформирование продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 184 – 190.
145. Мейш В.Ф. До теорії багатошарових оболонок з ребрами жорсткості / В.Ф. Мейш // Доповіді АН України. – 1994. – № 6. – С. 54 – 59.
146. Мейш В. Ф.О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко / В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 61 – 67.

147. Мейш В.Ф. До розрахунку напружено – деформованого стану багатосарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях / В.Ф. Мейш, Н.В. Кравченко // Вісник Київського ун -ту. Серія: фіз. – мат. науки. – 2002. – Вип. 3. – С. 210 – 216.
148. Мейш В.Ф. Вынужденные колебания многослойных сферических оболочек с подкрепленным отверстием при нестационарном нагружении / В.Ф. Мейш, Н.В. Кравченко // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 146 – 150.
149. Мейш В.Ф. Неосесимметричные колебания неоднородных многослойных дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, Н.В. Кравченко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 9. – С. 88 – 95.
150. Мейш В.Ф. К численному решению задач динамики подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 53 – 59.
151. Ревуцкий В.Н. О собственных колебаниях ребристых сферических оболочек / В.Н. Ревуцкий // Прикл. механика. – 1984. – Т.20, № 7.– С. 42– 48.
152. Ревуцкий В.Н. Собственные колебания сферических оболочек, подкрепленных меридиональными ребрами / В.Н. Ревуцкий // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 119 – 121.
153. Скосаренко Ю.В. Вынужденные колебания орребренной конической оболочки под действием динамической нагрузки / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 6. – С. 55 – 61.
154. Скосаренко Ю.В. Напряженно – деформированное состояние конической оболочки, подкрепленной шпангоутом, под действием динамической нагрузки / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 122 – 126.
155. Скосаренко Ю.В. К определению напряженно – деформированного состояния оболочек вращения, подкрепленных регулярной системой меридиональных ребер / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 68 – 73.
156. Скосаренко Ю.В. О влиянии положения массы и угла конусности на частоты собственных колебаний конических ребристых оболочек / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 2. – С. 119 – 122.

157. Умушкин Б.П. Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярным продольным набором / Б.П. Умушкин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1970. – № 5. – С. 87 – 92.
158. Заруцкий В.А. Краевой резонанс в конструктивно ортотропных цилиндрических оболочках колебаниях / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 93 – 101.
159. Blocka B. Free vibration of thin, elastic orthogonally stiffened shells of revolution with stiffeners treated as discrete elements / B. Blocka // Rozpr. inz. – 1989. – Vol. 37, № 1. – P. 65 – 85.
160. Blocka B. Some result on free vibration of segmented shells of revolution / B. Blocka // Z. angew. Math. and Mech. – 1989. – Vol. 69, № 5. – P. 324 – 326.
161. Mustafa B.A.J. Free vibration analysis of multisymmetric stiffened shells / B.A.J. Mustafa, R. Ali // Comput. and Struct.– 1987.– Vol. 27, № 6.– P. 848– 856.
162. Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.В. Андрианов, Б.В. Нерубайло, И.Ф. Образцов. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
163. Заруцкий В.А. Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек / В.А. Заруцкий, Ю.М. Почтман, В.В. Скалозуб.– К.: Выща школа, 1990.–140с.
164. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / Филиппов А.П. – М: Машиностроение, 1970. – 736 с.
165. Blocka B. Free vibration of thin, elastic segmented shells of revolution reinforced with circumferential rings / B. Blocka // Arch. mech. – 1988. – Vol. 40, № 2 –3. – P. 183 – 199.
166. Анкянец Е. К. Собственные колебания цилиндрической оболочки с двухслойными кольцевыми ребрами / Е. К. Анкянец // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 105 – 110.
167. Анкянец Е. К. Собственные колебания цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами, присоединенными к ней с помощью дискретных упругих связей / Е. К. Анкянец // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 108 – 113.
168. Заруцкий В. А. Собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек при низкой сдвиговой жесткости материала / В.А. Заруцкий, Н. Я. Прокопенко // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 66 – 74.

169. Grenweld D.E. Free vibration of ring- and stringers- stiffened conical shells with discrete ring and stringers / D.E. Grenweld, D. Muster // *Acoust. Soc. Amer.* – 1969. – Vol. 46, Pt. 2, № 1. – P. 176 – 185.
170. Ross C.T.F. Vibration and instability of ring-reinforced circular and conical shells / C.T.F. Ross // *J. of Ship Research.* – 1976. – Vol. 20, № 1. – P. 22 – 31.
171. Ross C.T.F. Buckling and vibration of ring-stiffened cones under uniform external pressure / C.T.F. Ross, T. Johns // *Thin-Walled Struct.* – 1988. – Vol. 6, № 4. – P. 321 – 342.
172. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Гришак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
173. Лесничая В.А. Собственные колебания эксцентрично подкрепленных конических оболочек / В.А. Лесничая, А.Н. Писанко // *Строительная механика и расчет сооружений.* – М., 1980. – № 2. – С. 23 – 31.
174. Кормилкин М.Д. Колебания подкрепленной тонкостенными кольцами сферической оболочки / М.Д. Кормилкин, Б.П. Умушкин // *Динамика и колебания механических систем.* – Иваново, 1979. – С. 74 – 80.
175. Кормилкин М.Д. Колебания сферической оболочки, эксцентрично подкрепленной тонкостенными кольцами / М.Д. Кормилкин, Б.П. Умушкин // *Динамика и колебания механических систем.* – Иваново, 1983.– С. 93–102.
176. Кормилкин М.Д. Колебания эксцентрично подкрепленной кольцевыми ребрами сферической оболочки, оснащенной пространственной системой упругосвязанных твердых тел и массами / М.Д. Кормилкин, Б.П. Умушкин // *Динамика и колебания механических систем.* – Иваново, 1984 (1985). – С. 90 – 107.
177. Birman V. Axisymmetric vibration of reinforced orthotropic shallow spherical caps / V. Birman, G.J. Simitzes // *Aerosp. Eng.*–1989.– Vol. 2, № 3.– P. 155 –165.
178. Заруцкий В. А. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек колебаниях / В.А. Заруцкий, Н. Я. Прокопенко // *Прикл. механика.* – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 92 – 98.
179. Кулеш Ю.Н. Установившиеся вынужденные колебания изотропной тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости / Ю.Н. Кулеш, В.С. Чувиковский // *Динамические нагрузки и прочность судовых конструкций.* – Л., 1984. – С. 100 – 104.

180. Малютин И.С. Вынужденные колебания вязко – упругого цилиндра, подкрепленного оболочкой с кольцевыми ребрами / И.С. Малютин, А.Я. Недбай // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 6. – С. 29 – 35.
181. Малютин И.С. Вынужденные колебания вязко – упругой слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами / И.С. Малютин, А.Я. Недбай // Динамика и вибродиагностика механических систем. – Иваново, 1983 – С. 69 – 72.
182. Почтман Ю.М. Динамическая оптимизация многослойных цилиндрических оболочек, подкрепленных двумя регулярными системами ребер / Ю.М. Почтман, О.В. Тугай // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 1. – С. 47 – 54.
183. Мейш В.Ф. До теорії багатосарових оболонок з ребрами жорсткості / В.Ф. Мейш // Доповіді АН України. – 1994. – № 6. – С. 54 – 59.
184. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи) / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.
185. Агамиров В.Л. Экспериментальное исследование поведения подкрепленной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления при ударном нагружении чистым изгибом / В.Л. Агамиров, Минь Кам Во // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 114 – 118.
186. Андрианов И.В. Нелинейные колебания стрингерных оболочек при учете дискретности подкрепляющего набора / И.В. Андрианов // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1981. – № 28. – С. 66 – 70.
187. Андрианов И.В. Новый асимптотический метод расчета подкрепленных конструкций при учете дискретности размещения ребер и их ширины / И.В. Андрианов // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352, № 4. – С. 474 – 476.
188. Абросимов Н.А. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек при импульсном нагружении / Н.А. Абросимов, В.Г.Баженов, А.В. Елесин // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – № 2. – С. 181 – 189.
189. Богданович А.Е. О решении нелинейной задачи динамического выпучивания цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // Электродинамика и механика сплошных сред: Мат. моделирование. – Рига, 1982. – С. 123 – 135.
190. Богданович А.Е. Деформирование и прочность ортотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости при

- динамических сжимающих нагрузках / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // *Механика композит. материалов.* – 1983. – № 3. – С. 476 – 488.
191. Богданович А.Е. Деформирование и прочность ортотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами жесткости при динамических сжимающих нагрузках / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // *Механика композит. материалов.* – 1984. – № 5. – С. 866 – 876.
192. Богданович А.Е. Решение нелинейных задач динамического выпучивания подкрепленных слоистых цилиндрических оболочек / А.Е. Богданович // *Прикл. механика.* – 1986. – Т. 22, № 8. – С. 57 – 66.
193. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко А.Г. – К.: Наук. думка, 1980. – 232 с.
194. Кошкина Т.Б. Анализ эффективности подкрепления продольными ребрами жесткости цилиндрических оболочек, нагруженных динамическим внешним давлением / Т.Б. Кошкина // *Электродинамика и механика сплошных сред: Пром. процессы и устройства.* – Рига, 1983. – С. 117 – 127.
195. Ломунов В.К. Исследование выпучивания дискретно – подкрепленных цилиндрических и конических упруго – пластических оболочек при осевом ударе / В.К. Ломунов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб.* – Горьк. ун-т, 1977. – вып. 7. – С. 64 – 71.
196. Мышонков А.К. Поведение цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости, при действии осесимметричной динамической нагрузки / А.К. Мышонков // *Прикл. механика.* – 1985. – Т. 21, № 7. – С. 116 – 119.
197. Пожуев А.В. Нестационарная динамика ребристой пластины на упругом слое / А.В. Пожуев // *Изв. вузов. Строительство.* – 1998. – № 10. – С. 29 – 34.
198. Пожуев А.В. Динаміка ребристої циліндричної оболонки із зовнішнім амортизуючим шаром / А.В. Пожуев // *Вісник Запорізького державного ун - ту. Фізико – математичні. Біологічні науки.* – 1999. – № 2. – С. 98 – 101.
199. Пожуев А.В. Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки конечной длины / А.В. Пожуев // *Вісник Запорізького державного ун - ту. Фізико – математичні. Біологічні науки.* – 1999. – № 1. – С. 82 – 85.

200. Жигалко Ю.П. Динамика ребристых пластин и оболочек / Ю.П. Жигалко, Л.М. Дмитриева // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1978. – № 13. – С. 3 – 30.
201. Варвак А.П. О погрешности теории ребристых оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява / А.П. Варвак, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1970. – Т. 4, № 6. – С. 49 – 57.
202. Антуфьев Б. А. Свободные колебания цилиндрической оболочки, дискретно подкрепленной нерегулярной системой стрингеров / Б. А. Антуфьев, С. Б. Антуфьев, В. Н. Сергеев // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2000. – № 1. – С. 54 – 56.
203. Callahan Joseph A closed-form solution procedure for circular cylindrical shell vibrations / Joseph Callahan, Haim Baruh // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – Vol. 36, № 20. – P. 2973 – 3013.
204. Авербух А.З. Колебания подкрепленных цилиндрических оболочек в вакууме и в жидкости / А.З. Авербух, Р.И. Вейцман, М.Д. Генкин // Вопр. судостроения. Сер. Технология и орг. судового машиностроения. – 1983. – Вып. 33. – С. 25 – 33.
205. Авербух А.З. Колебания элементов конструкций в жидкости / А.З. Авербух, Р.И. Вейцман, М.Д. Генкин. – М.: Наука, 1987. – 158 с.
206. Перцев А.К. Воздействие ударной волны на круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную ребрами жесткости / А.К. Перцев, Л.В. Слепнева // Актуальные проблемы механики сплошных сред. – Л.: ЛГУ, 1980. – С. 191 – 199.
207. Гордиенко Б.А. Реакция подкрепленных и соосных цилиндрических оболочек на ударную нагрузку / Б.А. Гордиенко // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 3. – С. 25 – 29.
208. Shangchow C. Response of a cylindrical shell to the sudden breakdown of a ring stiffener / C. Shangchow // AIAA Journal. – 1984.–Vol. 22, № 7. –P. 1018–1020.
209. Дзюба А.П. Устойчивость цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями при нагружении крутящим моментом / А.П. Дзюба, Е.Ф. Прокопало, Е.А. Лотохова // Вісник Дніпропетровського університету, сер. Механіка. – Т.2. – Дн-ськ. – Ліра. – 2014. – Вип. 18. – С.81-88.
210. Дзюба А.П. Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок оберання складної форми меридіану при великих

- переміщеннях / А.П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник Дніпропетровського університету. Сер.: Механіка. –2015.– Вип. 19, т. 2. – С.38-55.
211. Дзюба А.П., Прокопало Е. Ф., Прокопало Д.А. Экспериментальное исследование влияния ориентации главных направлений ортотропии на устойчивость цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями / А.П. Дзюба, Е.Ф. Прокопало, Е.А. // Вісник Дніпропетровського ун - ту. Сер.: Механіка. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2015.– Вип. 19, Т. 2. – С. 18 - 26.
212. Гайдайчук В.В. Механіка конструкцій вітроенергетичних установок. / В.В. Гайдайчук, В.П. Носенко, С.М. Худолій. - Київ: Видавництво Аграр Медіа Груп, 2013. – 263 с.
213. Гуляев В.И. Напряженно-деформированное состояние конструкции навеса НСК «Олимпийский» при локальном тепловом воздействии. / Гуляев В.И., В.В. Гайдайчук, С.Н. Худолій, Е.Н. Андрусенко // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2011. – №4. – С. 6 – 1.
214. Гуляев В.І., Скінченноеlementний аналіз стійкості коливань лопатей ВЕУ при складному обертанні / В.І. Гуляев, В.В. Гайдайчук, В.П. Носенко // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2013. – №1. – С. 8 – 13.
215. Кучер Н.К. Деформирование и прочность слоистых углепластиков при статическом термомеханическом нагружении / Н.К. Кучер, М.Н. Заразовский, Е.Л. Данильчук // Механика композитных материалов – 2012. - Том 48. - № 6. – С.1-18.
216. Кучер Н.К. Прогнозирование высокотемпературной длительной прочности металлов / Н.К. Кучер, Р.П. Приходько // Проблемы прочности - 2013. -№ 5. – С. 5 - 12.
217. Данильчук Е.Л. Деформирование и прочность однонаправленных углепластиков при высоких температурах / Е.Л. Данильчук, М.К. Кучер, А.П. Кушнарєв и др. // Проблемы прочности. – 2015. - № 4. С 75 - 81.
218. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars / S.P. Timoshenko // Philosophical Magazine and Journal of science. – 1921.–Vol. 41, Ser. 6, № 245. – P. 744 – 746.
219. Галагер Р. Метод конечных элементов / Галагер Р.– М.: Мир, 1984.–323 с.
220. Григолюк Э.И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Ч. 5 / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М.: Наука, 1972. – 271 с.

221. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций при действии ударных и импульсных нагрузок / Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. – К.: Наук. думка, 1978. – 184 с.
222. Кармишин А.В. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций / Кармишин А.В., Скурлатов Э.Д., Старцев В.Г. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с.
223. Головкин К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. – под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полигр. центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
224. Баженов В.Г. Оценки устойчивости явной конечно– разностной схемы «крест» решения неоднородных задач теории упругости и теории оболочек / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд. ГГУ, 1984.– С. 15 – 22.
225. Баженов В.Г. О конечно – разностном решении волновых уравнений теории оболочек типа Тимошенко / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд. ГГУ, 1981.– С. 41– 50.
226. Григоренко Я.М. Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно – континуальних методів: / Я.М. Григоренко, В.Д. Будаков, О.Я. Григоренко: навчальний посібник. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
227. Богданов С.Ю. Единственность и непрерывная от начальных данных решения уравнений движения подкрепленных оболочек вращения типа Тимошенко / С.Ю. Богданов, В.Ф. Мейш // Моделирование динамики деформируемых сред. – К.: Наук. думка, 1993. – С. 123 – 126.
228. Liao C.L. Dynamic stability of stiffened laminated composite plates and shells subjected to in – plane pulsating forces / C.L. Liao, C.R. Cheng // Sound Vib. – 1994. – Vol. 174, № 3. – P. 335 – 351.
229. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттеркрилд. – М.: Мир, 1984. – 486 с.
230. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер. – М.: Мир, 1982. – 247 с.
231. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 439 с.

232. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
233. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Рикардс Р.Б. – Рига: Зинатне, 1988. – 284с.
234. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 539с.
235. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 446 с.
236. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / Зенкевич О., Морган К.; пер. с англ. под ред. Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986. – 318с.
237. Болдычев А.Е. Повышение эффективности метода конечных элементов при решении вырождающихся задач / А.Е. Болдычев // Вопросы динамики и прочности. – 1983. – № 42. – С. 38 – 48.
238. Ву Р.Г. Исследование нелинейных неустановившихся реакций конструкций методом пространственных конечных элементов / Р.Г. Ву, Е.А. Уимер // Ракетная техника и космонавтика. – 1973. – Т. 11, №8. – С. 67 – 76.
239. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
240. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1976. – 582 с.
241. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 656 с.
242. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Марчук Г.И. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
243. Аникьев И.И. Динамика нагружения цилиндрических и сферических тел при взаимодействии с ударной волной / И.И. Аникьев, М.И. Михайлова, Е.А. Сущенко // Прикл. мехеника. - 2004. - 40, № 12. - С. 117 - 123.
244. Баженов В.Г. Численное решение плоских и осесимметричных задач взаимодействия упругопластических оболочек с ударными волнами / В.Г. Баженов, А.В. Кочетков, Г.С. Михайлов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. - Горький: Изд-во ГТУ, 1978. - №7. - С. 55 - 68.
245. Баженов В.Г. Нелинейное динамическое взаимодействие тонкостенных конструкций с идеальными сжимаемыми середками / В.Г. Баженов, Г.С.

- Михайлов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. - Горький: Изд-во ГТУ, 1979. - № 10. - С. 41-55.
246. Баженов В.Г. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Изв. РАН. - МТТ.- 2001. - №5. - С. 156-173.
247. Кочетков А.В. Численное моделирование взрыва в цилиндрической оболочке, заполненной и окруженной жидкостью / А.В. Кочетков, В.Р. Фельдгун, А.Ф. Цветков // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов. Вып. 49. – Нижний Новгород: Нижегородский ун– т, 1991. – С. 76 – 84.
248. Беспалова Е.И. О дифракции ударной волны в воде на абсолютно жестком неподвижном цилиндре / Е.И. Беспалова, М.И. Воротникова, В.О. Кононенко В.О. // Прикл механика. – 1972. - 8, № 8. - С. 3 - 8.
249. Вестяк А.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой / А.В. Вестяк, А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский // Итоги науки и техники. МДТТ. М.: ВИНТИ, 1983, т. 15. - С. 69 - 148.
250. Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом / Под ред. А.Г. Горшкова. - М.: Изд-во МГУ, 1984. - 168 с.
251. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. / А.С. Вольмир. - М.: Наука, 1976. - 416 с.
252. Вольмир Е.А. Поведение упругой цилиндрической панели под действием ударной волны в жидкости / Е.А. Вольмир // Изв. АН СССР. Мех. Тверд, тела. - 1969. - № 1. - С. 180 - 184.
253. Баженов В.Г. Численное исследование нестационарной дифракции упругой волны на цилиндрической оболочке / В.Г. Баженов, С.В. Зефирова, А.В. Кочетков // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций. Вып. 48. – Нижний Новгород: Нижегородский ун– т, 1991. – С. 71 – 78.
254. Горшков А.Г. Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой / А.Г. Горшков // Изв. АН СССР. МТТ. - 1976. - № 2. - С. 165 - 178.
255. Горшков А.Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами / А.Г. Горшков // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Изд. ВИНТИ. - 1989. - Т. 13. - С. 105-186.

256. Горшков А.Г. Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой / А.Г. Горшков // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. - № 2. - С. 165 - 178.
257. Горшков А.Г. Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами / А.Г. Горшков // Изв. АН СССР. МТТ. - 1981.- № 4. - С. 177 - 189.
258. Горшков А.Г. Аэрогидроупругость конструкций. / А.Г. Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев, Ф.Н. Шклярчук. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.- 592 с.
259. Горшков А.Г. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. / А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский. - М.: Наука, 1990. - 351 с.
260. Григолюк Э.И. Реакция трехслойной цилиндрической оболочки на действие воздушной ударной волны / Э.И. Григолюк, В.П. Калган, Е.Б. Кузнецов // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1975. - № 1. - С. 62 - 64.
261. Григолюк Э.И. Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью / Э.И. Григолюк // В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, Днепропетровск, 1969. - М.: Наука, 1970. - С. 755 - 778.
262. Григолюк Э.И. Нестационарные гид-ррупагугие колебания толстостенной сферы / Э.И.Григолюк, А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский // Докл: АН СССР, 1977. – 233. - №5. - С. 812 - 815.
263. Гузь А.Н. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко. - Киев: Наук, думка, 1982. - Т.5. - 400 с.
264. Динамика тел, взаимодействующих со средой / Гузь А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1991. – 392 с.
265. Баженов В.Г. Численное моделирование нелинейных двумерных задач ударного взаимодействия деформируемых сред и конструкций на основе метода С.К. Годунова / В.Г. Баженов, Е.А. Козлов, С.В. Крылов // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Исследования и оптимизация конструкций. Вып. 45. – Горький: Горьк. ун – т, 1990. – С. 99 – 106.
266. Замышляев Б.В. Динамические нагрузки при подводном взрыве. / Б.В. Замышляев, Ю.С. Яковлев. - Л.: «Судостроение», 1967. - 387 с.
267. Ильгамов М.А. Об условиях на поверхности контакта упругой оболочки и идеальной жидкости в лагранжевом представлении / М.А. Ильгамов // Прикл. мат. и мех.- 1977. – 41. - №3. - С. 509 - 519.

268. Кармишин А.В. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций. / А.В. Кармишин, Э.Д. Скурлатов, В.Г. Старцев, В.А. Фельдштейн. - М.: Машиностроение, 1982. - 240 с.
269. Кубенко В.Д. Нестационарное деформирование заполненной жидкостью оболочки под действием слабых ударных волн / В.Д. Кубенко // Прикл. механика. – 1975. – 11. - №6. - С. 64 - 71.
270. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. / В.Д. Кубенко. - Киев: Наукова думка, 1979. - 184 с.
271. Кубенко В.Д. Деформирование сферической оболочки под действием нестационарной сферической гидроакустической волны / В.Д. Кубенко // Прикл. механика. – 1972. – 8, № 10. - С. 106 - 110.
272. Кубенко В.Д. Устойчивость и нелинейные колебания замкнутых оболочек цилиндрической формы при взаимодействии с протекающей жидкостью (обзор) / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук // Прикл. механика. – 2015. – 51, № 1. - С. 19 - 79.
273. Мнев Е.Н. Гидроупругость оболочек. / Е.Н. Мнев, А.К. Перцев. - Л.: Судостроение, 1970. - 366 с.
274. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин. / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. - Л.: Судостроение, 1987. – 236 с.
275. Перцев А.К. Воздействие акустической волны давления на цилиндрическую оболочку, подкрепленную ребрами жесткости / А.К. Перцев, Л.В. Слепнева // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1977. - № 2. - С. 190.
276. Кочетков А.В. Дифракция ударных волн на оболочках вращения на водонасыщенных грунтовых средах / А.В. Кочетков, В.Р. Фельдгун // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико – механических процессов. Вып. 46 – Горький: Горьк. ун – т, 1990. – С. 67 –73.
277. Слепнева Л.В. О взаимодействии цилиндрической оболочки, подкрепленной жесткими шпангоутами, с акустической ударной волной / Л.В. Слепнева // Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. - Кутаиси, 1975. - Тбилиси, «Мецниереба», 1975. - С. 332 - 340.
278. Слепян Л.М. Нестационарные упругие волны. / Л.В. Слепян. - Л.: «Судостроение», 1972. – 213 с.
279. Тарлаковский Д.В. Нестационарное поведение толстостенной упругой сферы в жидкости / Д.В. Тарлаковский // Изв. АН СССР. Мех. тверд, тела. – 1977. - № 2. - С. 186.

280. Berger B.S. Dynamic response of an infinite cylindrical shell in an acoustic medium / B.S. Berger // *Trans ASME*. – 1969. -36, № 3. - P. 342 – 345.
281. Berglund J.W. Interaction of a ring-reinforced shell and a fluid medium / J.W. Berglund, J.M. Klosner // *Trans. ASME*. – 1968. - 35, № 1. - P.139 - 147.
282. Crouzet-Pascal J. Response of ring-reinforced cylindrical shell immersed in a fluid medium, to an axisymmetric step pulse / J. Crouzet-Pascal, H. Garnet // *Trans. ASME*, 1972. - 59, № 2. - P. 521 - 526.
283. Geers T.L. Response of an elastic cylindrical shell to a transverse acoustic shock wave in a light fluid medium / T.L. Geers // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1970. - 48, № 3, part 2. - P. 692 - 701.
284. Herman H. Transient response of a periodically supported cylindrical shell immersed in a fluid medium / H. Herman, M. Klosner // *Trans. ASME*, 1965. - 32, № 3. - P. 562 - 568.
285. Kubenko V.D. Natural vibration of a sandwichbeam on an elastic foundation / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – 42, № 5. – P. 541 – 547.
286. Starovoitov E.I. Resonant effects of local on circular sandwich plates on an elastic foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, № 1. – P. 86 – 93.
287. Лучко И.А. Взаимодействие цилиндрических взрывных волн в вязкопластической среде с неподвижной преградой / И.А. Лучко, Н.С. Ремез // *Прикл. механика*, 1995. – 31, № 5. – С. 87 – 93.
288. Ремез Н.С. Деформирование толстостенных цилиндрических оболочек с пористым наполнителем при внутреннем взрывном нагружении / Н.С. Ремез, И.А. Лучко, // *Прикл. механика*, 1995. – 31, № 9. – С. 61 – 65.
289. Ремез Н.С. Взаимодействие ударных волн с цилиндрической оболочкой в грунтовом массиве / Н.С. Ремез // *Вісник наукових праць НТУ України «Київський політехнічний інститут». Серія «Гірництво»: Збірник наукових праць*. – Київ, 2001. – Вип. 4. – С. 8 – 13.
290. Ремез Н.С. Нестационарное взаимодействие цилиндрической оболочки с ударными волнами при взрыве сферического заряда в грунтовом массиве / Н.С. Ремез // *Вісник наукових праць НТУ України «Київський політехнічний інститут». Серія «Гірництво»: Збірник наукових праць*. – Київ, 2001. – Вип. 5. – С. 3 – 7.

291. Ремез Н.С. Упругопластическое поведение двухслойной сферической оболочки в грунтовой среде при внутреннем взрывном нагружении / Н.С. Ремез // Вісник наукових праць НТУ України «Київський політехнічний інститут». Серія «Гірництво»: Збірник наукових праць. – Київ, 2003. – Вип. 8. – С. 8 – 13.
292. Бойко В.В. Динамическое поведение слоистой цилиндрической оболочки в грунтовом массиве при взрывном нагружении / В.В. Бойко, Н.С. Ремез, Т.В. Хлевнюк, Ю.В. Брагин // Акустич. вісник, 2003. Том 37, № 2. – С. 1–7.
293. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен: В 2-х т. Т 2. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – 728 – 392 с.
294. Ляхов В.Н. Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций: Математическое моделирование в нестационарной газодинамике / В.Н. Ляхов, В.В. Подлубный, В.В. Титаренко.– М.: Машиностроение, 1989.–392 с.
295. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т. 2.: / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 552 с.

Печатка “ЗАТВЕРДЖУЮ”

Начальник комплексу
проектно-теоретичних
та розрахункових робіт

_____ В.М. Сіренко
“ _____ ” _____ 2016.

Акт

впровадження результатів дисертаційної роботи

Мейш Юлії Анатоліївни

“Динаміка підкріплених оболонок при нестационарних навантаженнях та оболонок з врахуванням дії ґрунтових середовищ”

“Конструкторське бюро “Південне” ім.М.К. Янгеля” виконує великий обсяг проектних та розрахункових робіт для теоретичної оцінки експлуатаційного стану відповідальних оболонкових елементів космічної техніки, а також обчислювальні роботи при плануванні експериментальних робіт. Для розв’язку окремих актуальних задач “Конструкторське бюро “Південне” ім.М.К. Янгеля” залучає науково-дослідні інститути Національної академії наук відповідного профілю. Одним із них є Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, з яким заключено 14 квітня 2013р. Договір про наукове співробітництво № 7. підпунктом якого є “Дослідження в галузі динаміки та стійкості гладких та підкріплених оболонок обертання під дією стаціонарних та імпульсних навантажень”. В 2016 р. заключений договір “Динаміка і міцність оболонок обертання” № 151 – 2016.

Співвиконавцем цих договорів є науковий співробітник кандидат фізико-математичних наук Мейш Ю.А. Результати дисертаційної роботи Мейш Ю.А. “Динаміка підкріплених оболонок при нестационарних навантаженнях та оболонок з врахуванням дії ґрунтових середовищ” знайшли практичне застосування в “Конструкторському бюро “Південне” ім.М.К. Янгеля”, зокрема, при дослідженні розділення ступенів ракет носіїв і космічного обладнання з допомогою пірозамків розташованих у відповідних оболонках – адаптерах, які підлягають локальним імпульсним навантаженням великої інтенсивності.

Начальник відділу навантажень та
динамічних характеристик

Д.В. Клименко